Mathematics for Economists

DECO403

LOVELY PROFESSIONAL UNIVERSITY

अर्थशास्त्रियों का गणित
MATHEMATICS FOR ECONOMISTS

Produced & Printed by
LAXMI PUBLICATIONS (P) LTD.
113, Golden House, Daryaganj,
New Delhi-110002
for
Lovely Professional University
Phagwara

SYLLABUS

Mathematics for Economists

Objectives

- To aware of students the mathematical aspects of Economics.
- To introduce the concept of interrelation and inter dependency of mathematical Economics.
- To increase understanding of the application of the mathematical properties of Economics.

उद्देश्य

- छात्रों को अर्थशास्त्र के गणितीय पहलू से अवगत कराना।
- छात्रों को गणित और अर्थशास्त्र के अन्तर्सम्बन्ध और अन्तःनिर्भरता से परिचित कराना।
- छात्रों में गणितीय अर्थशास्त्र के गुणधर्मों के अनुप्रयोगों की समझ बढ़ाना।

Sr. No.	Content
1	Types of Functions: constant function, polynomial functions, rational functions, non-algebraic function, exponential function, log function, Limits & Continuity
2	Differentiation : Simple, Logarithmic differentiation, Second and higher order differentiation
3	Differentiation: Partial, Homogeneous function and Euler's theorem, Economic Applications of differentiation
4	Maxima and Minima of one variable, Maxima and Minima of two variables, Constrained Maxima and Minima, Economic Applications of Maxima and Minima
5	Integration : Basic rules of integration, Methods of integration, Integration as a summation, Definite Integration, Economic Applications of Integration
6	Differential Equations: Introduction, Solution – variable separable case, homogenous case
7	Matrices : Meaning and types, Transpose, trace of a matrix, Adjoint and inverse of the matrix, Cramer's rule, Determinants: Types and properties, Rank of a matrix, Application of matrices in economics
8	Input – Output analysis, Hawkins – Simon Conditions, Closed Economic Input – Output analysis
9	Introduction to Linear Programming, Formulation of Linear programming problems, Graphic methods
10	Linear Programming - Simplex methods

विषय-सूची

इकाई (Units)	(CONTENTS)	पृष्ठ संख्या (Page No.)

VED1
E\L-LOVELY-H\math1-1 IInd 21-10-11 IIIrd 8-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

नोट

इकाई–1 : फलन
(Functions)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- फलन एवं संबद्ध राशियों को जानने में।
- फलन का मान निकालने हेतु।

नोट

- मानचित्रण द्वारा फलन की परिभाषा को जानने में।
- फलन का प्रभाव क्षेत्र एवं परास निकालने हेतु।
- अर्थशास्त्र में रैखिक फलनों के उपयोग को समझने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

अनेक प्रश्नों में हमें ऐसी दो राशियों पर विचार करना होता है कि जब एक राशि स्वतन्त्र रूप से घटती-बढ़ती है तो उस पर निर्भर रहने वाली दूसरी राशि किस प्रकार घटती-बढ़ती है। उदाहरणार्थ, एक वृत्त का क्षेत्रफल उसकी त्रिज्या पर निर्भर करता है क्योंकि यदि त्रिज्या घटा दी जाय या बढ़ा दी जाय तो **वृत्त** का क्षेत्रफल भी उसी के अनुसार घट जायेगा या बढ़ जायेगा। यहाँ पर वृत्त की त्रिज्या एक राशि एवं वृत्त का क्षेत्रफल दूसरी राशि है जो एक-दूसरे से सम्बन्धित हैं। इसी प्रकार गोले का आयतन उसकी त्रिज्या पर, वर्ग का क्षेत्रफल एवं घन का आयतन उसकी एक भुजा की लम्बाई पर निर्भर करता है। अचर वेग से जाती हुई रेल द्वारा तय की हुई दूरी समय पर निर्भर करती है। गिरते कण का वेग उसके द्वारा तय की हुई दूरी पर निर्भर करता है। किसी स्थान का वायुमण्डलीय दाब (Atmospheric Pressure) उस स्थान की समुद्र तट से ऊँचाई पर निर्भर करता है इत्यादि।

एक राशि के मान में परिवर्तन होने पर उस पर निर्भर दूसरी राशि के मान में परिवर्तन किस दर से होता है एवं इस परिवर्तन की दर से सम्बन्धित अनेक प्रश्नों एवं क्रियाओं का विश्लेषण एवं अध्ययन अवकल गणित (Differential Calculus) **कहलाता है।**

1.1 राशियाँ (Quantities)

राशियाँ दो प्रकार की होती हैं–

1. चर (Variables) 2. अचर (Constants)

1. चर राशियाँ (Variables)–परिवर्तनशील राशियों को चर (Variables) कहते हैं। वे राशियाँ जिनका मान बदलता रहता है अर्थात् जिन राशियों के अगणित संख्यात्मक मान (numerical values) दिये जा सकते हैं, **चर** (Variables) कहते हैं। ये राशियाँ साधारणत: अंग्रेजी वर्णमाला के अंतिम अक्षरों x, y, z, u, v, w आदि के द्वारा निरूपित की जाती हैं।

2. अचर राशियाँ (Constants)–वे राशियाँ जिनका मान गणित की प्रत्येक संक्रिया में अपरिवर्तित रहता है, **अचर** कहलाती हैं। अचर राशियाँ (Constant Quantities) दो प्रकार की होती हैं–

(*i*) निरपेक्ष या पूर्ण अचर (Absolute Constants)

(*ii*) स्वेच्छ अचर (Arbitrary Constants)

जिन राशियों का मान प्रत्येक प्रश्न में स्थिर रहता है, निरपेक्ष या पूर्ण अचर कहलाती है;

जैसे: $-5, -3, 1, 11, \sqrt{5}, \pi, \frac{2}{5}, e$ आदि।

जिन राशियों का मान किसी दिए हुए प्रश्न में तो स्थिर रहता है किन्तु भिन्न-भिन्न प्रश्नों में भिन्न-भिन्न हो जाता है, स्वेच्छ अचर कहलाती हैं। ये राशियाँ वर्णमाला के प्रारम्भ के अक्षरों a, b, c, d आदि के द्वारा निरूपित की जाती हैं।

1.2 सम्बद्ध राशियाँ (Related Quantities)

हम जानते हैं कि वृत्त का क्षेत्रफल उसकी **त्रिज्या** पर निर्भर करता है। दूसरे शब्दों में, भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों का क्षेत्रफल भिन्न-भिन्न होता है। इसी प्रकार किसी **धन संख्या** के घटने या बढ़ने पर उसका वर्ग भी घट या बढ़ जाता है। यहाँ **वृत्त** की त्रिज्या और उसका क्षेत्रफल या संख्या तथा उसका वर्ग सम्बद्ध राशियाँ हैं।

नोट्स ऐसी दो राशियाँ जिनमें एक के बदलने पर दूसरी भी बदल जाती है, वे **सम्बद्ध राशियाँ** कहलाती हैं।

यद्यपि यह दोनों सम्बद्ध राशियाँ चर हैं परन्तु इनमें से एक ही का मान स्वेच्छा से बदला जा सकता है, दूसरी राशि का मान स्वेच्छा से नहीं वरन् किसी नियम के अनुसार बदलेगा। उदाहरण के लिए वृत्त की त्रिज्या r यदि हम स्वेच्छा से $1, 2, 3, 4, \ldots$ लें तो उसका क्षेत्रफल A, नियम $A = \pi r^2$ के क्रमशः $\pi, 4\pi, 9\pi, 16\pi, \ldots$ होगा।

चर राशियाँ दो प्रकार की होती हैं–

(i) **स्वतन्त्र चर** (Independent Variables)

(ii) **परतन्त्र चर** (Dependent Variables)

यदि दो चर राशियाँ x और y परस्पर इस प्रकार सम्बद्ध हों कि एक चर राशि x को स्वेच्छापूर्वक कोई भी मान देने पर दूसरी चर राशि y का मान उस पर आश्रित हो तो x को **स्वतन्त्र चर** (Independent Variable) तथा y को **परतन्त्र चर** (Dependent Variable) कहते हैं।

उदाहरणार्थ–मान लो $y = 2x + 5$.

अब चर x को स्वेच्छापूर्वक भिन्न-भिन्न मान क्रमशः $0, 1, 2, \ldots$ देने पर हमें y के भिन्न-भिन्न मान क्रमशः $5, 7, 9, \ldots$ प्राप्त होते हैं, जो स्पष्टतः x पर आश्रित हैं।

अतः यहाँ x स्वतन्त्र चर और y परतन्त्र चर है।

1.3 फलन (Functions)

फलन का सिद्धान्त दो परस्पर **सम्बद्ध चर राशियों** (Related Quantities) पर आधारित है।

मान लो त्रिज्या r के किसी वृत्त का क्षेत्रफल A है, तब

$$A = \pi r^2$$

यहाँ राशि r **स्वतन्त्र चर** (Independent Variable) तथा राशि A **परतन्त्र चर** (Dependent Variable) है, चूँकि वृत्त का क्षेत्रफल A उसकी त्रिज्या r पर आश्रित है।

इस दशा में हम कहते हैं कि चर A, दूसरे चर r का एक फलन है जिसे गणित की भाषा में इस प्रकार लिखकर व्यक्त करते हैं–

$$A = f(r)$$

अर्थात् [A फलन है, चर r का]

1.4 फलन की परिभाषा (Definition of Functions)

यहाँ दो चर राशियाँ x (स्वतन्त्र चर) तथा y (परतन्त्र चर) किसी नियम 'f' के द्वारा इस प्रकार सम्बद्ध (related) हों कि x के प्रत्येक मान के लिए y का एक **निश्चित एवं अद्वितीय** (unique) मान प्राप्त हो तो **y को x का f- फलन** कहते हैं जिसे $y = f(x)$ लिखकर प्रदर्शित करते हैं।

x के फलनों को $f(x), g(x), \phi(x), \ldots$ इत्यादि प्रतीकों से प्रदर्शित किया जाता है।

नोट

1.5 फलन की व्याख्या (Explanation of Functions)

यदि y, चर x का एक फलन है अर्थात् $y = f(x)$.

तब x को **स्वतन्त्र चर** (Independent Variable) तथा y को **परतन्त्र चर** (Dependent Variable) कहते हैं।

यदि $y = 5x + 7$ तो x के प्रत्येक मान के लिए y का एक निश्चित मान अवश्य है। अतः y को x का फलन कहते हैं।

1.6 फलनिक संकेतन (Functional Notations)

इस तथ्य को प्रकट करने के लिए एक चर-राशि y, किसी अन्य चर-राशि x का फलन है, बहुत से संकेत प्रयोग में लाये जाते हैं। सबसे अधिक प्रयोग में आने वाला संकेत है:

$$y = f(x)$$

जिसे इस प्रकार पढ़ा जाता है कि "y बराबर है x के फलन के"।

अन्य संकेत हैं: $y = F(x)$, $y = \phi(x)$, $y = \psi(x)$, ..., इत्यादि।

> *क्या आप जानते हैं* यदि एक चर राशि x के किसी मान के लिए दूसरी चर राशि y का एक से अधिक मान हो तो y, x का फलन नहीं कहलाता बल्कि y को x का सम्बन्ध (Relation) कहा जाता है। उदाहरणार्थ $y^2 = x$. यहाँ पर x के प्रत्येक मान के लिए y के दो मान प्राप्त होते हैं। ऐसे सम्बन्धों को कभी-कभी **विविध मानी फलन** (Multi-valued function) भी कहते हैं।

1.7 फलन का मान (Value of Functions)

माना चर x का कोई फलन $y = f(x)$ है।

$f(x)$ में $x = a$ रखने पर $f(a)$ प्राप्त होता है जिसे $x = a$ के लिए फलन का मान कहते हैं।

> **$x = a$ पर $f(x)$ का मान $= f(a)$**
> **जो $f(x)$ में x के स्थान पर a रखने पर प्राप्त होता है**

उदाहरणार्थ—मान लो $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

तब $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 5,$ [x के स्थान पर 2 रखने पर]

$= 8 - 6 + 5 = 7.$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

(*i*) परिवर्तनशील राशियों को .... कहते हैं।

(*ii*) वे राशियाँ जिनका मान गणित की प्रत्येक संक्रिया में अपरिवर्तित रहता, ... कहलाती है।

नोट

(*iii*) ऐसी दो राशियाँ जिनमें एक के बदलने पर दूसरी भी बदल जाती है, वे ……… राशियाँ कहलाती हैं।

(*iv*) वृत्त का क्षेत्रफल उसकी ……… पर निर्भर करता है।

(*v*) जिन राशियों का मान प्रत्येक प्रश्न में स्थिर है, ……… कहलाती है।

1.8 मानचित्रण द्वारा फलन की परिभाषा (Definition of Functions by Mapping)

यदि अरिक्त समुच्चय (Non-empty set) X के प्रत्येक अवयव x का संगुणन (Correspondence) अरिक्त समुच्चय Y के एक निश्चित एवं अद्वितीय (unique) अवयव y से किसी नियम f द्वारा होता है तो f को समुच्चय, X को समुच्चय Y में मानचित्रण (Mapping) कहा जाता है और इसे $f: X \to Y$ से प्रदर्शित करते हैं। इसी मानचित्रण f को फलन कहते हैं। मानचित्रण दो समुच्चयों X और Y को अवयवों के बीच संगुणन के ज्यामितीय पहलू को प्रदर्शित करता है और फलन इसका विश्लेषणात्मक पहलू प्रदर्शित करता है।

दूसरे शब्दों में,

> **यदि X तथा Y दो अरिक्त समुच्चय हों और किसी नियम f द्वारा X का प्रत्येक अवयव Y के केवल एक अद्वितीय (unique) अवयव से संगुणित (associated) हो जाय तो द्विचर सम्बन्ध (binary operation) R, X का Y में फलन कहलाता है।**

अत: $R = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ को X का Y में फलन कहते हैं।

उदाहरणार्थ—यदि $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$ तो नियम $y = x + 2$ द्वारा X के अवयव 1, 2,3 क्रमशः Y के अवयव 3, 4, 5 से संगुणित होंगे। अत: द्विचर सम्बन्ध $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$ को X का Y में फलन कहेंगे और इसे

$$f: X \to Y \text{ या } X \xrightarrow{f} Y$$

भी लिखते हैं। इस प्रकार फलन f एकक नियम है जिसके अनुसार X का प्रत्येक अवयव Y के एक अद्वितीय अवयव से संगुणित होता है।

1.9 फलन का डोमेन या प्रभाव क्षेत्र और परास या रेंज (Domain and Range of Functions)

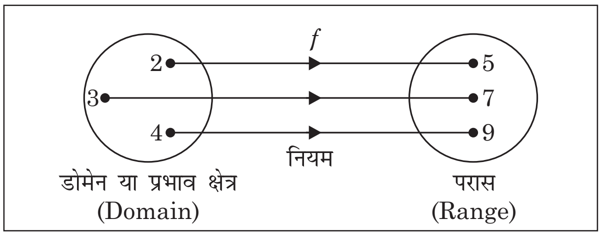
यदि फलन $f: X \to Y$ से परिभाषित है तो समुच्चय X इस प्रतिचित्रण या फलन f का **डोमेन या प्रभाव क्षेत्र** (Domain) कहलाता है और समुच्चय Y इसका **परास** अथवा **रेंज** (Range) सह-प्रभाव क्षेत्र (Codomain) कहलाता है।

फलन f का प्रभाव क्षेत्र (Domain) = x के उन सभी वास्तविक मानों का समुच्चय जिनके लिए फलन परिभाषित है।

फलन f का परास (Range) = प्रभाव क्षेत्र (Domain) की सभी राशियों x के संगत, y के मानों का समुच्चय।

नोट

उदाहरणार्थ– $y = 2x + 1$ में y, x का फलन है। यदि x एक से बड़े और पाँच से छोटे धन पूर्णांक मान ग्रहण करे तो फलन का डोमेन या प्रभाव क्षेत्र समुच्चय $\{2, 3, 4\}$ हुआ और तब फलन का परास समुच्चय $\{5, 7, 9\}$ हुआ। इसी प्रकार द्विचर सम्बन्ध $R = \{(5, 8), (6, 9), (7, 10)\}$ का प्रभाव क्षेत्र समुच्चय $\{5, 6, 7\}$ और परास समुच्चय $\{8, 9, 10\}$ हुआ।



यदि फलन f के प्रभाव क्षेत्र का एक तत्व x, परास के किसी तत्व y से संगुणित है तो परास के इस तत्व y को, जो x से संगुणित है, $f(x)$ से प्रकट करते हैं, जहाँ $f(x)$, x के लिए फलन f के मान को निरूपित करता है।

$$f : x \to y \text{ को } f : x \to f(x)$$

के रूप में लिखा जा सकता है।

1.10 फलन के प्रकार (Kinds of Functions)

1. **एकचरीय फलन** (Functions of Single Variable)–यदि चर राशि y **केवल एक चर राशि** x पर आश्रित है, तब $y = f(x)$ **एकचरीय फलन** कहलाता है। इसी प्रकार, $y = f(\theta)$, $s = f(t)$, $v = f(t)$ इत्यादि एकचरीय फलन हैं।

2. **बहुचरीय फलन** (Functions of Many Variable)–यदि चर राशि u, **दो चर राशियों** x और y पर आश्रित है, तब $u = f(x, y)$ **बहुचरीय फलन** कहलाता है।

3. **स्पष्ट फलन** (Explicit Function)–फलन $y = f(x)$ एक स्पष्ट फलन कहलाता है यदि y को x के स्वतन्त्र पदों के रूप में लिखना सम्भव हो।

जैसे: $$y = x^2 + 2x - 5, \qquad y = \cos x,\ y = \frac{x}{1 + x^2} \text{ इत्यादि।}$$

4. **अस्पष्ट फलन** (Implicit Function)–फलन $y = f(x)$ एक **अस्पष्ट फलन** कहलाता है यदि y को x के स्वतन्त्र पदों के रूप में लिखना सम्भव न हो।

उदाहरणार्थ–

$$y = x \sin(x + y), \text{ अर्थात् } f(x, y) = 0,\ x^2 + y^2 - xy = 0 \text{ इत्यादि।}$$

5. **सम फलन** (Even Function)–मान लो $y = f(x)$ चर x का कोई फलन है।

यदि $f(-x) = f(x)$

अर्थात् यदि $f(x)$ में x के स्थान पर $-x$ रखने पर फलन का चिह्न न बदले तो वह सम फलन कहलाता है।

उदाहरणार्थ–

$$f(x) = \cos x = \cos(-x) = f(-x).$$

नोट

6. **विषम फलन** (Odd Function)—मान लो $y = f(x)$ चर x का कोई फलन है।

उदाहरणार्थ— $f(x) = x^3 = -(-x)^3 = -f(-x)$.

यदि $f(-x) = -f(x)$ अर्थात् यदि $f(x)$ में x के स्थान पर $-x$ रखने पर फलन का चिह्न बदल जाये तो वह विषम फलन कहलाता है।

7. **बीजीय फलन** (Algebraic Function)—चर राशि x की विभिन्न संख्यात्मक घातों वाला ऐसा फलन जिसमें पदों की संख्या निश्चित हो, **बीजीय फलन** कहलाता है।

उदाहरणार्थ—

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x$$
$$f(x) = x^{3/2} + x^{-1/3}$$
$$f(x) = (x + a)^{2/3}.$$

बीजीय फलन हैं।

8. **परिमेय फलन** (Rational Function)—एक भिन्न के रूप में व्यक्त किया गया ऐसा फलन जिसके अंश और हर दोनों ही पूर्णांक घातों वाले बीजीय व्यंजक हों, **परिमेय फलन** कहलाता है।

$$f(x) = \frac{2x^3 + x + 7}{x^3 + 5x^2 + x + 5}$$

9. **अबीजीय फलन** (Transcendental Function)

अबीजीय फलन निम्न प्रकार के होते हैं—

(*i*) **त्रिकोणमितीय फलन** (Trigonometrical Functions)—जैसे: $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, $\sin 2x + \sec^2 x$ इत्यादि।

(*ii*) **प्रतिलोम वृत्तीय फलन** (Inverse Circular Functions)—जैसे: $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\sec^{-1} x$ इत्यादि।

(*iii*) **लघुगणकीय फलन** (Logarithmic Functions)—जैसे: $\log_e x$, $\log_a x$, $\log_e (x^2 + 4x + 3)$ इत्यादि।

(*iv*) **चरघातीय फलन** (Exponential Functions)—जैसे: e^x, a^x, $x^{\sin x}$, $(\sin x)^{\cos x}$ इत्यादि।

10. **परिभाषित फलन** (defined Function)—$x = a$ पर फलन $f(x)$ **परिभाषित** कहलाता है यदि $f(x)$ में $x = a$ रखने पर फलन का मान $f(a)$ एक **निश्चित एवं परिमित** (Finite) राशि के बराबर हो जो पूर्णतया अर्थपूर्ण अर्थात् **वास्तविक** हो।

11. **अपरिभाषित फलन** (Undefined Function)—$x = a$ पर फलन $f(x)$ अपरिभाषित कहलाता है यदि $f(a)$ का मान **अनिश्चित एवं अर्थहीन** है, जैसे—

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \times \infty, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

उदाहरणार्थ—

(*i*) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; जब $x = 0$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

नोट

(ii) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^2 - 2}$; जब $x = \infty \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

(iii) $y = x^{\frac{1}{1-x}}$; जब $x = 1, (1^{\infty})$

(iv) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$; जब $x = 0, (\infty - \infty)$ इत्यादि।

12. **अचर फलन** (Constant Function)—$y = f(x) = c$, जहाँ c एक अचर राशि है, एक **अचर फलन** को प्रदर्शित करता है। अचर फलन में x के प्रत्येक मान के लिए y या $f(x)$ का मान सदैव स्थिर रहता है।

13. **आवर्ती फलन** (Periodic Function)—फलन $y = f(x)$ **आवर्ती फलन** कहलाता है। यदि x के प्रत्येक मान के लिए

$$f(x + k) = f(x),$$

जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है जो 0 के बराबर नहीं है, अर्थात् k को पालन का **आवर्तकाल** (Period) कहते हैं।

14. **फलन का फलन** (Function of the Function)—माना $f(x)$ तथा $g(x)$ चर x के कोई दो फलन हैं, तब $f[g(x)]$ **फलन का फलन** कहलाता है जो $f(x)$ में x के स्थान पर $g(x)$ रखने पर प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $g[f(x)]$ भी फलन का फलन है जो $g(x)$ में x के स्थान पर $f(x)$ रखने पर प्राप्त होता है।

1.11 फलनों के समुच्चय में संक्रियाएँ (Operations in the Set of Functions)

मान लो कि S उन सभी वास्तविक फलनों का समुच्चय है जिनका डोमेन D है। तब यदि f और g समुच्चय S के कोई दो **फलन** हों तो $f + g, f - g, fg, \dfrac{f}{g}$ के अर्थ निम्नलिखित होंगे:

(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in D$

(ii) $(f - g)(x) = f(x) - g(x), \forall x \in D$

(iii) $(fg)(x) = f(x) . g(x), \forall x \in D$

[स्पष्ट है कि फलनों $f + g, f - g, fg$ का डोमेन भी D है]

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \forall x \in D \sim S$

जहाँ S समीकरण $g(x) = 0$ का हल (solution) समुच्चय है। दूसरे शब्दों में S ऐसा समुच्चय है कि

$$x \in S \Rightarrow g(x) = 0$$

अर्थात् $S = \{x : g(x) = 0\}$

स्पष्ट है कि f/g का डोमेन $D \sim S$ है अर्थात् D में से उन अवयवों x को निकाल दिया है जिसके लिए $g(x) = 0$.

नोट

उदाहरणार्थ—मान लो $f(x) = \frac{1}{x}$ और $\phi(x) = x^2$, x के दो फलन हैं तब $f(x)$ और $\phi(x)$ के बीजीय योग को $f(x) + \phi(x)$ या $(f + \phi)(x)$ से सूचित करेंगे तथा $(f + \phi)(x) = \frac{1}{x} + x^2$ होगा।

पुनः फलनों के गुणा को $f(x) . \phi(x)$ से सूचित करेंगे तथा $f(x) . \phi(x) = \frac{1}{x} \cdot x^2 = x$ होगा।

$f\{\phi(x)\}$, x के एक **फलन के फलन** को सूचित करता है **जहाँ** f, $\phi(x)$ **का फलन** और फिर $\phi(x)$, x का फलन है।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. क्या निम्नलिखित फलन हैं?

(*i*) $y = \sqrt{x}$, (*ii*) $y = x^3 + 5x$,

(*iii*) $R = \{(2, 3), (5, 6), (2, 11)\}$.

हल : (*i*) यदि $\sqrt{x}$ का केवल एक मान धन या ऋण लिया जाए तो $y = \sqrt{x}$ फलन होगा। यदि दोनों मान एक साथ लिये जायें तो फलन नहीं होगा।

(*ii*) x के प्रत्येक मान के लिए $x^3 + 5x$ का एक निश्चित और अद्वितीय मान प्राप्त होता है। अतः यह एक फलन है।

(*iii*) R फलन नहीं है क्योंकि समुच्चय X के अवयव 2 का संगुणन समुच्चय Y के अवयव 3 और 11 से हो रहा है जबकि X के प्रत्येक अवयव का संगुणन Y के एक निश्चित और अद्वितीय अवयव से होना चाहिए।

उदाहरण 2. $x^2 - 1$, $\frac{1}{x^3 - 1}$ से परिभाषित फलनों का डोमेन ज्ञात करो, जहाँ x वास्तविक संख्या है।

हल : (*i*) $f(x) = x^2 - 1$ में x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए $f(x)$ का एक निश्चित वास्तविक मान है, अतः इसका डोमेन समुच्चय R ही है।

(*ii*) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$ में $x = 1$ के लिए $f(x)$ का मान अनिश्चित है किन्तु यदि x के मान शेष वास्तविक संख्याएँ हों तो $f(x)$ का भी मान वास्तविक है। अतः इसका डोमेन $R \sim \{1\}$ है।

उदाहरण 3. यदि x वास्तविक संख्या है तो फलन $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ का प्रान्त (डोमेन) निश्चित कीजिए।

हल : जब $x = 2$ तो $f(x)$ का मान $\frac{0}{0}$ के रूप में प्राप्त होता है जो एक अनिश्चित मान है। इसके अतिरिक्त x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए $f(x)$ का एक निश्चित वास्तविक मान प्राप्त होता है। इसलिए फलन का डोमेन 2 के अतिरिक्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। संकेत रूप में

$$D(f) = R \sim \{2\}.$$

नोट

उदाहरण 4. यदि $x \in R$ तो फलन $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ का प्रान्त (डोमन) ज्ञात कीजिए।

हल : $\dfrac{1}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$ अतः $x = 3$ और $x = -3$ पर व्यंजक का हर शून्य में प्राप्त होता है, अतः $f(3)$ तथा $f(-3)$ का मान अनिश्चित हो जाता है। इन दो मानों के अतिरिक्त x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए $f(x)$ का एक निश्चित मान प्राप्त होता है, इसलिए f का डोमेन या प्रांत 3 और –3 के अतिरिक्त सम्पूर्ण वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

संकेत में, $D(f) = R \sim \{3, -3\}$.

उदाहरण 5. यदि $f(x) = 5x^2 + 8x + 7$ तो $f(-9)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$\because$ $f(x) = 5x^2 + 8x + 7$

$\therefore$ $x = -9$ रखने पर

$f(-9) = 5(-9)^2 + 8(-9) + 7$

$= 405 - 72 + 7 = 340.$ **उत्तर**

उदाहरण 6. यदि $f(x) = \log_e x$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$f(uv) = f(u) + f(v).$$

हल :

$\because$ $f(x) = \log_e x$

तब $f(u) = \log_e u$ ...(1)

तथा $f(v) = \log_e v$ ...(2)

$f(uv) = \log_e (uv)$

$= \log_e u + \log_e v = f(u) + f(v)$

समीकरण (1) तथा (2) से,

$$f(uv) = f(u) + f(v).$$

उदाहरण 7. यदि $f(x) = x^2 - x$ हो तो $f(y+1) - y^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

यहाँ पर $f(x) = x^2 - x$

$\therefore$ $f(y+1) = (y+1)^2 - (y+1)$

$= y^2 + 2y + 1 - y - 1 = y^2 + y$

$\therefore$ $f(y+1) - y^2 = y^2 + y - y^2 = y$

अतः $f(y+1) - y^2 = y.$ **उत्तर**

उदाहरण 8. यदि $f(x) = \dfrac{1}{(1 + \tan^2 x)}$ तो $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

VED1
E\L-LOVELY-H\math1-1 IInd 21-10-11 IIIrd 8-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

हल :

$$\because \qquad f(x) = \frac{1}{(1+\tan^2 x)}$$

$$\therefore \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$ उत्तर

टास्क यदि $f(x) = 5x^2 + 8x + 7$ हो, तो $f(-10)$ का मान निकालें। (**उत्तर** : 427)

उदाहरण 9. यदि $\boldsymbol{f(\theta) = \dfrac{1-2\tan\theta}{1+2\tan\theta}}$**, तो** $\boldsymbol{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\because \qquad f(\theta) = \frac{1-2\tan\theta}{1+2\tan\theta}$$

$$\therefore \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-2\tan\frac{\pi}{4}}{1+2\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1-2(1)}{1+2(1)}$$

$$= \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$ उत्तर

उदाहरण 10. यदि $\boldsymbol{f(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}}$**, तो सिद्ध कीजिये कि** $\boldsymbol{f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)}$**.**

हल : $\because \qquad f(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}$

यहाँ x के स्थान पर $\dfrac{2x}{1+x^2}$ रखने पर,

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log\left[\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right] = \log\left[\frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x}\right]$$

$$= \log\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right] = 2\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= 2f(x).$$ उत्तर

नोट

उदाहरण 11. यदि $\phi(x) = \cot x$, तो सिद्ध कीजिए कि $\phi(-x) = -\phi(x)$.

हल :

$\because \qquad \phi(x) = \cot x.$

$\therefore \qquad \phi(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -\phi(x).$ उत्तर

उदाहरण 12. यदि $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ तो $\dfrac{f(a/b)}{f(b/a)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$f(a/b) = \frac{(a/b)}{(a/b)-1} = \frac{(a/b)}{(a-b)/b} = \frac{a}{a-b}$$

और

$$f(b/a) = \frac{(b/a)}{(b/a)-1} = \frac{(b/a)}{(b-a)/a} = \frac{b}{b-a}$$

$$\therefore \qquad \frac{f(a/b)}{f(b/a)} = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{b-a}{b} = -\frac{a}{b}$$ उत्तर

उदाहरण 13. यदि $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$, तो $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ का मान निकालिए।

हल :

$$\because \qquad f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

x के स्थान पर $\dfrac{1}{x}$ रखने पर,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{1}{x^3} - x^3.$$ उत्तर

उदाहरण 14. यदि $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ तो $\left\{f\left(\dfrac{a}{b}\right) - f\left(\dfrac{b}{a}\right)\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\therefore \qquad \left\{f\left(\frac{a}{b}\right) - f\left(\frac{b}{a}\right)\right\} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a^2}{b^2}+1} - \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b^2}{a^2}+1}$$

$$= \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2} = 0$$ उत्तर

उदाहरण 15. यदि $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$, तो $f(x) + f(-x)$ क मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

नोट

$\therefore$ $$f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{(-x)^3} = -x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$\therefore$ $$f(x) + f(-x) = x^3 - \frac{1}{x^3} - x^3 + \frac{1}{x^3} = 0.$$ उत्तर

उदाहरण 16. यदि $f(x) = \log_e, \dfrac{1-x}{x^2+1}$, तो सिद्ध कीजिए कि $f(x) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

हल : $\because$ $$f(x) = \log_e \frac{1-x}{1+x}$$

$\therefore$ $x = a$ रखने पर, $$f(a) = \log_e \frac{1-a}{1+a}$$

अब $x = b$ रखने पर, $$f(b) = \log_e \frac{1-b}{1+b}$$

$\therefore$ $$f(a) + f(b) = \log_e \frac{1-a}{1+a} + \log_e \frac{1-b}{1-b} = \log_e \left\{\frac{1-a}{1+a} \times \frac{1-b}{1-b}\right\}$$

$$= \log_e \left\{\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}\right\} = \log_e \left\{\frac{(1+ab)-(a+b)}{(1+ab)+(a+b)}\right\}$$

$$= \log_e \left\{\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}\right\} = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

उदाहरण 17. यदि $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ तो सिद्ध कीजिये कि $\dfrac{f(a)-f(b)}{1-f(a).f(b)} = \dfrac{a-b}{a+b}$.

हल : $\because$ $$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$\therefore$ $$\frac{f(a)-f(b)}{1-f(a)\,f(b)} = \frac{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right) - \left(\dfrac{b-1}{b+1}\right)}{1-\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)\times\left(\dfrac{b-1}{b+1}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{(a-1)(b+1)-(b-1)(a+1)}{(a+1)(b+1)}}{1-\dfrac{(a-1)(b-1)}{(a+1)(b+1)}}$$

$$= \frac{(a-1)(b+1)-(b-1)(a+1)}{(a+1)(b+1)-(a-1)(b-1)}$$

नोट

$$= \frac{ab + a - b - 1 - ba - b + a + 1}{(ab + a + b + 1) - (ab - a - b + 1)}$$

$$= \frac{2(a - b)}{2(a + b)} = \frac{a - b}{a + b}$$

उदाहरण 18. यदि डोमेन (प्रभाव क्षेत्र) = {–2, –1, 0, 1, 2} और $f(-2) = 4, f(-1) = 1, f(0) = 0$ $f(1) = 1, f(2) = 4$ हो तो f एक फलन निरूपित करता है, सिद्ध कीजिये तथा परास (Range) भी ज्ञात कीजिये।

हल: दिया है, डोमेन (प्रभाव क्षेत्र)

$$= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

प्रश्नानुसार,

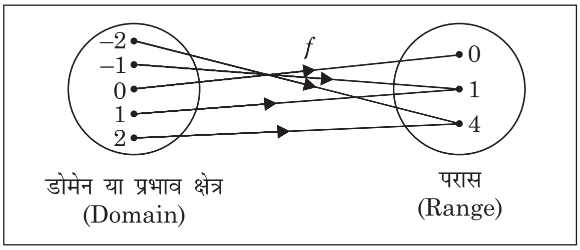
$f(-2) = 4 \Rightarrow -2$ का f-प्रतिबिम्ब $= 4$

$f(-1) = 1 \Rightarrow -1$ का f-प्रतिबिम्ब $= 1$

$f(0) = 0 \Rightarrow 0$ का f-प्रतिबिम्ब $= 0$

$f(1) = 1 \Rightarrow 1$ का f-प्रतिबिम्ब $= 1$

$f(2) = 4 \Rightarrow 2$ का f-प्रतिबिम्ब $= 4$



अत: f निम्न आलेख द्वारा व्यक्त होता है:

चूँकि f के द्वारा प्रभाव क्षेत्र का प्रत्येक अवयव, समुच्चय {0, 1, 4} के किसी अद्वितीय अवयव से संगुणित (connected) है तथा समुच्चय {0,1, 4} के कोई भी दो अथवा अधिक अवयव प्रभाव क्षेत्र के एक ही अवयव से संगुणित नहीं है।

अत: f एक फलन को निरूपित करता है जो सूत्र $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित होता है जिसका परास = {0, 1, 4}. **उत्तर**

उदाहरण 19. यदि $f(x) = 1 + 2x$ और $g(x) = \frac{1}{2}x$ हो, तो $f\{g(x)\} - g\{f(x)\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x) = 1 + 2x$ में x के स्थान पर $g(x)$ रखने पर

$$f\{g(x)\} = 1 + 2g(x) = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) = 1 + x$$

इसी प्रकार $g(x) = \frac{1}{2}x$ में x के स्थान पर $f(x)$ रखने पर

नोट

$$g\{f(x)\} = \frac{1}{2}\cdot f(x) = \frac{1}{2}(1+2x) = \frac{1}{2} + x$$

$\therefore$ $$f\{g(x)\} - g\{f(x)\} = (1+x) - \left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2}.$$ उत्तर

उदाहरण 20. यदि फलन $f : R \to R$ निम्न प्रकार से परिभाषित हो

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ यदि } x > 3 \\ x^2 - 2, \text{ यदि } 2 \le x \le 3 \\ 2x + 3, \text{ यदि } x < -2 \end{cases}$$

तो $f(2), f(4), f(-1)$ और $f(-3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि 2 अन्तराल $(-2, 3)$ में है अत: यहाँ $f(x) = x^2 - 2$

$\therefore$ $$f(2) = (2)^2 - 2 = 2$$

चूँकि 4 अन्तराल $(1, \infty)$ में है अत: यहाँ $f(x) = 3x - 1.$

$\therefore$ $$f(4) = 3.4 - 1 = 11.$$

चूँकि -1 अन्तराल $(-2, 3)$ में है अत: इसके लिए $f(x) = x^2 - 2.$

$\therefore$ $$f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1.$$

चूँकि -3 अन्तराल $(-\infty, -2)$ में है अत: इसके लिए $f(x) = 2x + 3.$

$\therefore$ $$f(-3) = 2(-3) + 3 = -3.$$ उत्तर

उदाहरण 21. फलन $\sqrt{(x-2)(4-x)}$ का प्रभाव क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

हल : माना

$$f(x) = \sqrt{(x-2)(4-x)}$$

जब $x > 4$, तो $$f(x) = \sqrt{\text{ऋणात्मक राशि}} = \text{काल्पनिक राशि}$$

जब $x < 2$, तो $$f(x) = \sqrt{\text{ऋणात्मक राशि}} = \text{काल्पनिक राशि}$$

अत: $2 \le x \le 4$ के लिए ही $f(x)$ वास्तविक है।

$\therefore$ $\sqrt{(x-2)(4-x)}$ का प्रभाव क्षेत्र $= 2 \le x \le 4.$ उत्तर

उदाहरण 22. यदि $f : x \to x + 3$ और प्रभाव क्षेत्र = $\{x : -2 \le x \le 2, x$ पूर्णांक है$\}$ तो फलन f तथा उसका परास ज्ञात कीजिए।

हल :

f का प्रभाव क्षेत्र $= \{x : -2 \le x \le 2, x$ पूर्णांक$\}$

$= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

f के प्रभाव क्षेत्र का प्रत्येक अवयव f फलन द्वारा $x + 3$ से संगुणित होता है अत:

अवयव -2 फलन f द्वारा $-2 + 3 = 1$ से संगुणित है।

अवयव -1 फलन f द्वारा $-1 + 3 = 2$ से संगुणित है।

अवयव 0 फलन f द्वारा $0 + 3 = 3$ से संगुणित है।

अवयव 1 फलन f द्वारा $1 + 3 = 4$ से संगुणित है।

नोट

अवयव 2 फलन f द्वारा $2 + 3 = 5$ से संगुणित है।

अत: फलन का परास $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

और फलन $f = \{(-2,1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$.

प्रश्नावली 1.1

1. यदि $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ तो सिद्ध कीजिए कि $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

2. यदि $f(n) = \dfrac{n}{1+n}$ तो $f(n) + f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। **[उत्तर:** 1]

3. यदि $f(x) = \log_e x$ तो $f(1)$ का मान ज्ञात कीजिए। **[उत्तर:** 0]

4. फलन $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ का डोमेन (domain) तथा परिसर (range) ज्ञात कीजिए। क्या फलन एकैकी है? **[उत्तर:** R]

5. यदि $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ तो $\dfrac{f\left(\dfrac{a}{b}\right)}{f\left(\dfrac{b}{a}\right)}$ का मान ज्ञात कीजिए। **[उत्तर:** $(-a/b)$]

6. यदि $y = f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ तो सिद्ध कीजिए कि $x = f(y)$. **[उत्तर:** $(-a/b)$]

7. यदि $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x+3}$ तो सिद्ध कीजिए कि $f(x) . f(-x) = 1$.

8. यदि $f(x) = e^x$ तो सिद्ध कीजिए कि $f(x + y + z) = f(x) . f(y) . f(z)$.

9. यदि $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ तो $f(-1)$ तथा $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। **[उत्तर:** 2, $\left(\dfrac{1}{x^2} + x^2\right)$

10. यदि $f(x) = x^9 - 6x^8 - 2x^7 + 12x^6 + x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 3$ तो $f(6)$ का मान ज्ञात कीजिए। **[उत्तर:** 30]

11. x के किन मानों के लिए निम्न फलन परिभाषित नहीं हैं?

(*a*) $\dfrac{1}{x-3}$ (*b*) $\dfrac{1}{x^3-1}$ (*c*) $\dfrac{x^3-4}{x-2}$

(*d*) $\tan x$ (*e*) $\sqrt{x}$ (*f*) $\dfrac{a^x-1}{x}$

12. यदि $f(x) = 3x^2 + 2$ तथा $g(x) = 2x + 5$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(*a*) $(f + g)(0)$, $(f + g)(-2)$ (*b*) $(f - g)(3)$, $(f - g)(-1)$

(*c*) $(fg)\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $(fg)(1)$ (*d*) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-1)$

नोट

13. यदि $A = \{a, b, c, -1\}$ तो बताइए कि क्या निम्नलिखित सम्बन्ध 'A का A में' फलन है। कारण भी बताइए:

(*a*) $R_1 = \{(-1, c), (c, b), (a, b), (-1, -1)\}$

(*b*) $R_2 = \{(a, b), (b, c), (c, -1), (-1, a)\}$

14. यदि $f : R \to R$ जहाँ $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, x > 9 \\ x^2 - 1, x \in (-9, 9) \\ x - 4, x < -9 \end{cases}$

तो $f(3)$, $f(12)$, $f(-15)$ और $f\{f(5)\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $g : R \to R$ जहाँ $g(x) = \begin{cases} x^2 - x, x \geq 2 \\ x - 2, x < 2 \end{cases}$ [उत्तर: 20, –2, –4]

में $g(5)$, $g(0)$ और $g(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए।

3, जबकि $-3 \leq x < -1$

16. यदि $f(x) = \begin{cases} -6x - 3, \text{ जबकि } -1 \leq x \leq 0, \text{तो} \\ 3x - 3, \text{ जबकि } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

(*a*) फलन f का डोमेन ज्ञात कीजिए।

(*b*) $f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(0), f(-1), f(2)$ के मान ज्ञात कीजिए।

(*c*) समीकरण $2f(x) + 3 = 0$ को हल कीजिए।

उत्तर:

(*a*) $D = \{x : -3 \leq x \leq 1\}$ (*b*) 3, –3/2, –3, 3 (*c*) $x = -1/4$ & 1/2

1.12 फलन का लेखाचित्र (Graph of Functions)

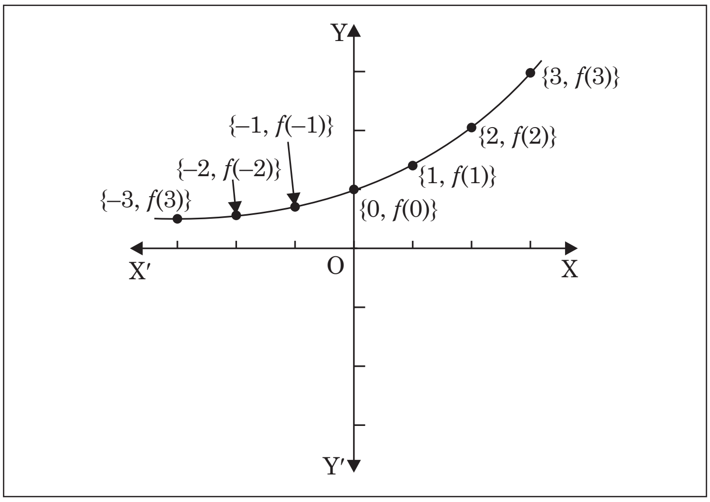
यदि $y = f(x)$, x का कोई फलन हो तो x को $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ आदि मान देने पर फलन के मान क्रमश: $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ या $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ आदि होंगे। यदि निर्देशांक ज्यामिति की भाँति x-अक्ष पर x और y- अक्ष पर y अर्थात् $f(x)$ को अंकित करके बिन्दुओं $\{x_1, f(x_1)\}, \{x_2, f(x_2)\}, \ldots, \{x_n, f(x_n)\}, \ldots$ आदि को अंकित करके एक निष्कोण वक्र (Smooth curve) बना लिया जाय तो यही वक्र **फलन का लेखाचित्र** कहलाता है।

फलन $y = f(x)$ का लेखांकन खींचने के लिए x के कुछ चुने हुए मानों के लिए y अर्थात् $f(x)$ के मान ज्ञात करके निम्न सारणी बना लीजिए–

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

अब बिन्दुओं $\{-3, f(-3)\}, \{-2, f(-2)\}, \{-1, f(-1)\}, \{0, f(0)\}, \{1, f(1)\}, \{2, f(2)\}, \{3, f(3)\}$ आदि को वर्गांकित कागज पर अंकित करके एक निष्कोण वक्र बनाइये। यही वक्र फलन का लेखाचित्र कहलायेगा।

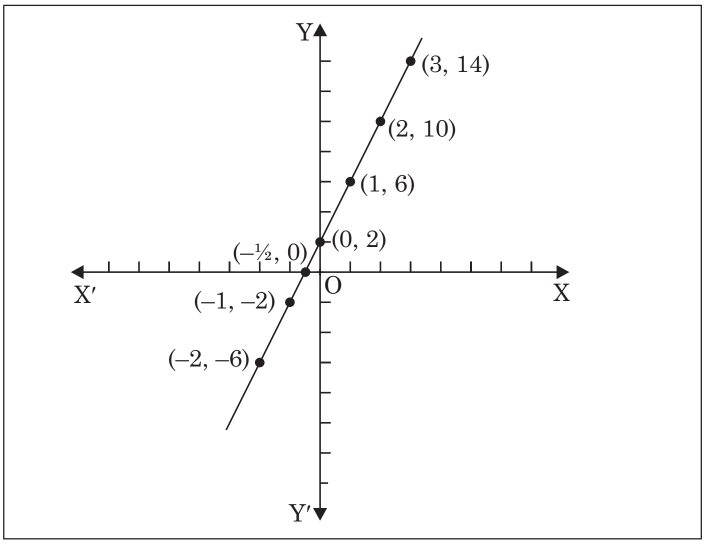
नोट



उदाहरण 1. फलन $y = 4x + 2$ का आलेख खींचिए।

हल : x को विभिन्न मान देकर y के मान ज्ञात करने पर निम्न सारणी बनेगी:

x	–2	–1	0	1	2	3	$-\frac{1}{2}$
y	–6	–2	+2	6	10	14	0



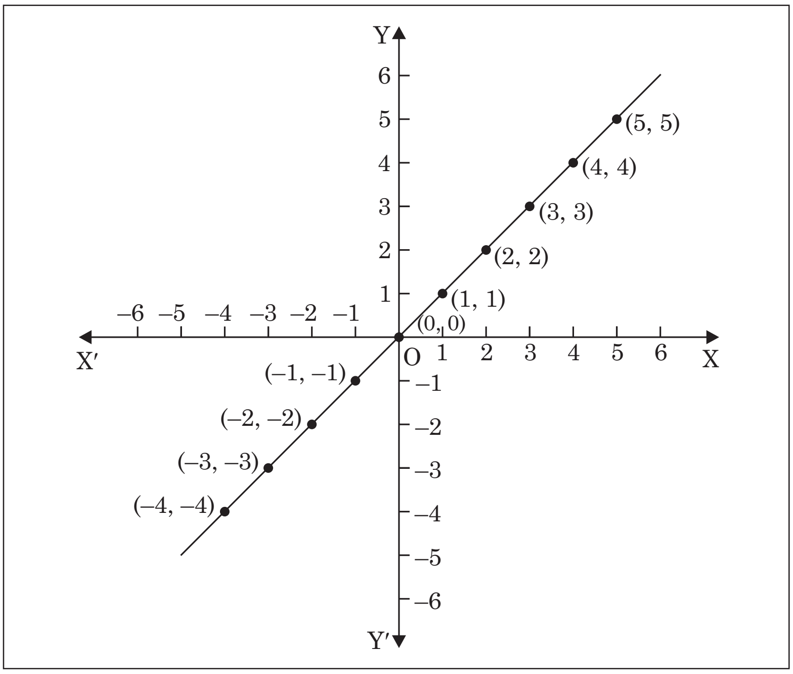
अब x-अक्ष पर 1 खाना = 1 और y-अक्ष पर 1 खाना = 2 मानकर बिन्दुओं को अंकित कीजिए। इन बिन्दुओं को मिलाइए। यही अभीष्ट लेखाचित्र है। यह एक सरल रेखा है।

उदाहरण 2. फलन $y = x$ का लेखाचित्र खींचिए।

हल : $y = x$ के लिए सारणी

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5

नोट

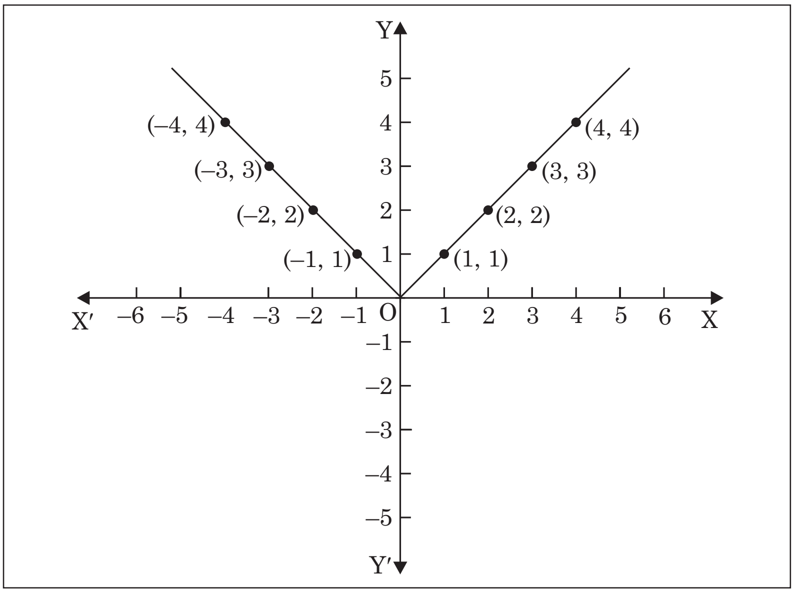


उदाहरण 3. फलन $y = |x|$ का लेखाचित्र खींचिए।

हल : यहाँ पर $y = x$, यदि $x \geq 0$ और $y = -x$, यदि $x < 0$.

$y = |x|$ के लिए सारणी

x	4	3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	1	2	3	4



उदाहरण 4. फलन $y = \dfrac{|x|}{x}$ का लेखाचित्र खींचिए, यदि $x \neq 0$.

नोट

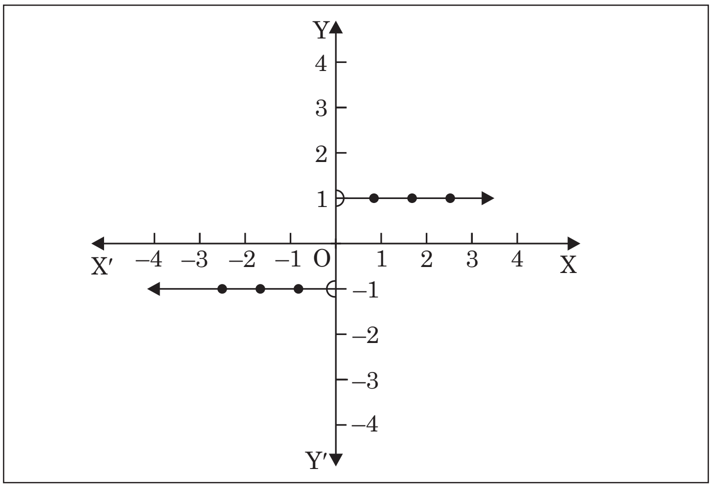
हल : इस फलन को सिगनम (Signum) फलन कहते हैं। इसे निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं–

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } x > 0 \\ 0, \text{ यदि } x = 0 \\ -1, \text{ यदि } x < 0 \end{cases}$$

फलन $y = \dfrac{|x|}{x}$ **की सारणी**

x	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4
y	–1	–1	–1	–1	1	1	1	1

इस सारणी का लेखाचित्र पार्श्व चित्र द्वारा प्रदर्शित है।



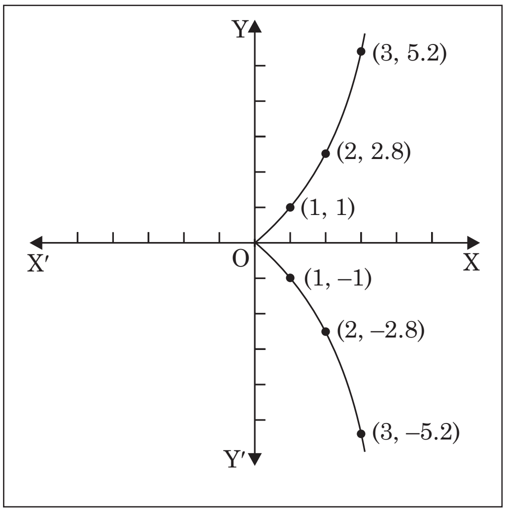
उदाहरण 5. वक्र $y^2 = x^3$ **का लेखाचित्र खींचिए।**

हल : यहाँ पर यदि x ऋण है तो y का मान अधिकल्पित (imaginary) है। अत: हम केवल x के धन मान ही लेंगे।

$y^2 = x^3$ **की सारणी**

x	0	1	2	3	4
y	0	±1	±2.8	±5.2	±8

इस सारणी का लेखाचित्र पार्श्व चित्र द्वारा प्रदर्शित है।

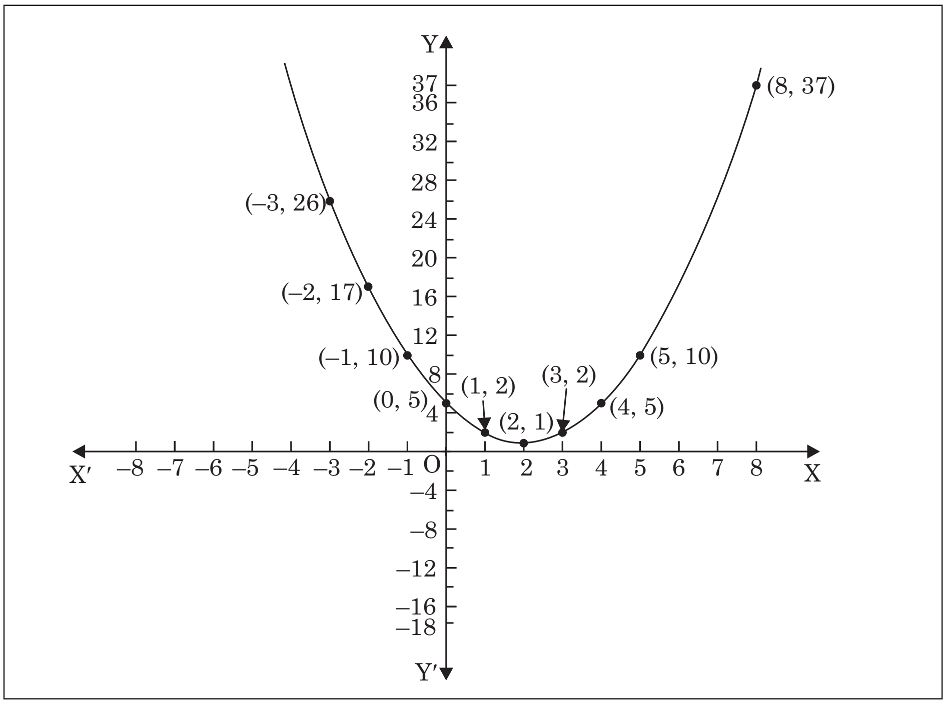


उदाहरण 6. फलन $y = x^2 - 4x + 5$ का लेखाचित्र खींचिए।

हल: सर्वप्रथम निम्न सारणी बनाइए–

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	8
y	37	26	17	10	5	2	1	2	5	10	37

यहाँ हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x का संख्यात्मक मान बढ़ता है। वैसे-वैसे y का मान भी बढ़ता है और जब $x \to \infty, y \to \infty$ जब $x \to -\infty, y \to +\infty$ बिन्दुओं को अंकित करने पर निम्नांकित निष्कोण वक्र बनेगा–



उदाहरण 7. वक्र $xy = 4$ का लेखाचित्र खींचिए।

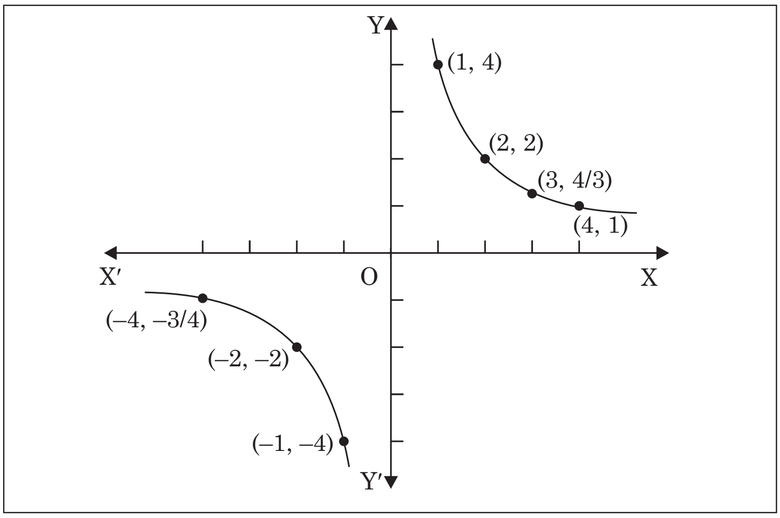
हल : यहाँ पर $y = \dfrac{4}{x}$, अतः यदि $x \to 0, y \to \infty$

और यदि $x \to \infty, y \to 0.$

$xy = 4$ की सारणी

x	$-\infty$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	∞
x	0	–1	$-\dfrac{4}{3}$	–2	–4	∞	4	2	$\dfrac{4}{3}$	1	0

नोट



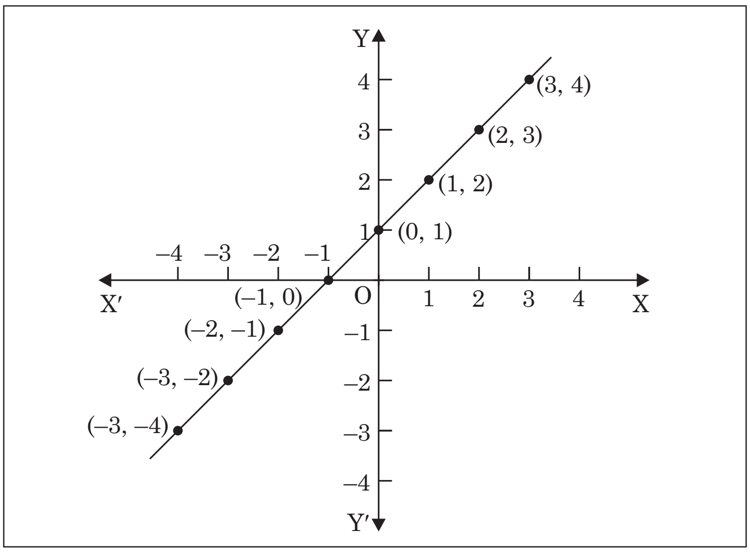
उदाहरण 8. फलन $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ **का लेखाचित्र खींचिए।**

हल : यह फलन $x = 1$ के लिए परिभाषित नहीं है। इसके अतिरिक्त सभी मानों के लिए $y = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ $= (x + 1), (x \neq 1)$ परिभाषित है।

फलन $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ **की सारणी**

x	0	1	2	3	–1	–2	–3	–4
y	1	2	3	4	0	–1	–2	–3

लेखाचित्र पार्श्व चित्र में दिखाया गया है।



नोट

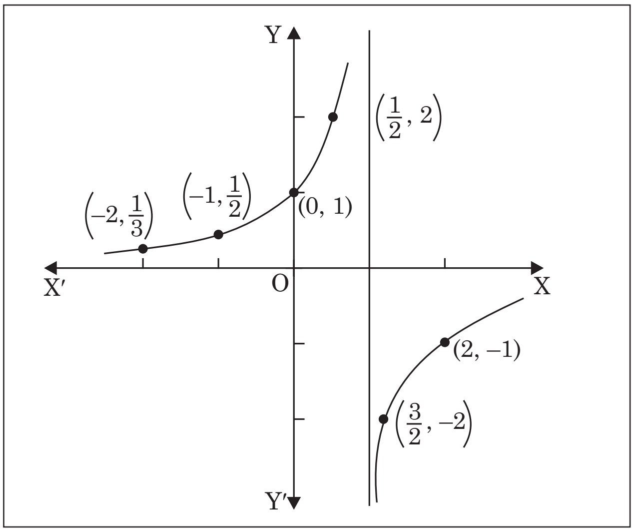
उदाहरण 9. फलन $y = \dfrac{1}{1-x}$ का लेखाचित्र खींचिए।

हल : x को भिन्न-भिन्न मान देकर y के मान प्राप्त करके निम्न सारणी बनती है–

फलन $y = \dfrac{1}{1-x}$ की सारणी

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	∞	-2	-1

लेखाचित्र पार्श्व चित्र में दिखाया गया है।



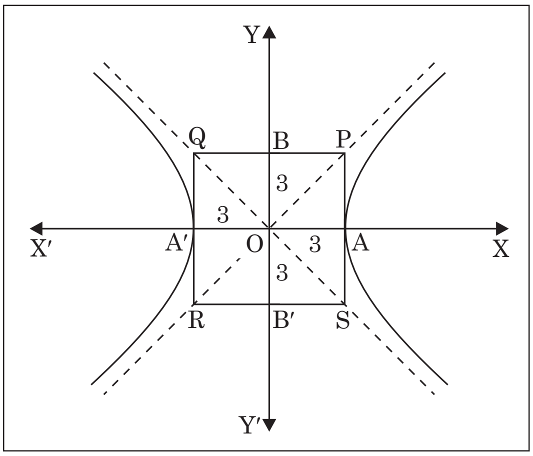
उदाहरण 10. वक्र $x^2 - y^2 = 9$ का लेखाचित्र खींचिए।

हल : दिया हुआ वक्र निम्न है–

$$x^2 - y^2 = 9$$

या $$(x^2/9) - (y^2/9) = 1$$

जो $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ के रूप का एक **अतिपरवलय** (hyperbola) है।



तुलना करने पर,

$$a^2 = 9 \text{ तथा } b^2 = 9$$

$\Rightarrow$ $$a = \pm 3 \text{ तथा } b = \pm 3$$

$\therefore$ $$\text{अर्द्ध-अनुप्रस्थ अक्ष} = a = 3$$

तथा $$\text{अर्द्ध-संयुग्मी अक्ष} = b = 3$$

नोट

अब x-अक्ष पर $OA = OA' = 3$

तथा y-अक्ष पर $OB = OB' = 3$

दूरियाँ लेकर वर्ग $PQRS$ बनाया।

1.13 अर्थशास्त्र में रैखिक फलनों का उपयोग (Use of Linear Functions in Economics)

अर्थशास्त्र में रैखिक फलनों एवं सरल रेखा के समीकरणों का बहुत उपयोग है। बाजार में किसी वस्तु की कीमत, माँग एवं पूर्ति द्वारा निर्धारित होती है। यदि माँग और पूर्ति फलन दिये हुए हों तो हम साम्यावस्था बिन्दु पर ऐसी कीमत एवं मात्रा का निर्धारण कर सकते हैं जहाँ माल बेचने एवं खरीदने वाले दोनों ही सन्तुष्ट हो जायें।

माना कि माँग फलन, $q = 16 - 4p$ है ...(*i*)

तथा पूर्ति फलन, $q = -8 + 4p$ है ...(*ii*)

जहाँ, q वस्तु की मात्रा तथा p वस्तु की कीमत दर्शाते हैं।

अब हम q तथा p का ऐसे मान निकालने का प्रयास करेंगे जो समीकरण (*i*) और (*ii*) दोनों को संतुष्ट करें। इसके लिए दोनों समीकरणों को हल करना होगा। माँग और पूर्ति की साम्यावस्था में

$$16 - 4p = -8 + 4p$$

या $$8p = 24$$

या $$p = \frac{24}{8} = 3$$

p का मान समीकरण (*i*) में रखने पर

$$q = 16 - (4 \times 3) = 16 - 12 = 4$$

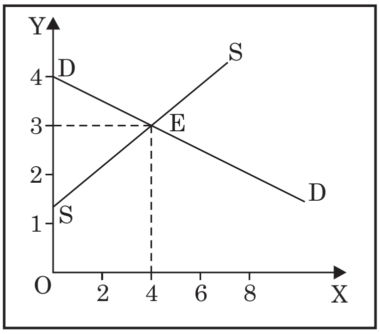
इस प्रकार साम्यावस्था कीमत = 3 एवं माँग और पूर्ति की मात्रा 4 इकाइयों में होगी।

इन समीकरणों को हम रेखाचित्र के रूप में भी प्रदर्शित कर सकते हैं।

रेखाचित्र में X-अक्ष पर वस्तु की मात्रा तथा Y-अक्ष पर वस्तु की कीमत दर्शायी गयी है। DD माँग फलन तथा SS पूर्ति फलन को दर्शाते हैं। दोनों फलन एक-दूसरे को E बिन्दु पर काटते हैं। अतः साम्यावस्था भी E बिन्दु पर ही प्राप्त होगी। इस बिन्दु पर Y- भुजांक साम्यावस्था मूल्य और X-भुजांक माँग और पूर्ति मात्रा बतायेगा।

अतः साम्यावस्था मूल्य = 3 तथा वस्तु की मात्रा = 4 होगा।

रेखाचित्र



अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाले फलन

(अ) परवलय (Parobola) (ब) अतिपरवलय (Hyperbola)

(स) लघुगणकीय फलन (Logarithmic Function) तथा

(द) घातीय फलन (Exponential Function)।

(अ) परवलय (Parobola)**:** परवलय का अर्थशास्त्र में बहुत उपयोग होता है। यदि y, x और उसकी दूसरी घात पर निर्भर करता हो तो y को x का द्विघाती (quardratic) फलन कहते हैं। इसे निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है–

$$y = a + bx + cx^2 \qquad \ldots(i)$$

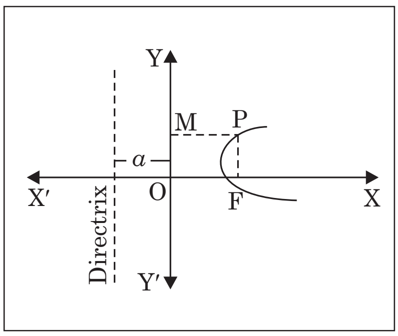
इसी प्रकार x, y और उसकी दूसरी घात पर निर्भर करता हो तो x को y का द्विघाती फलन कहते हैं। इसे गणितीय रूप में निम्न प्रकार दर्शा सकते हैं–

$$x = a + bx + cy^2 \qquad \ldots(ii)$$

उपर्युक्त (i) तथा (ii) परवलय के सामान्य फलनीय रूप को दर्शाते हैं। यहाँ यह उल्लेखनीय है कि परवलय के समीकरण में (i) $x\,y$ का पद नहीं होता है तथा (ii) x^2 अथवा y^2 में एक ही होता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि उपरोक्त समीकरण का केन्द्र मूल बिन्दु पर नहीं होगा जैसा कि रेखाचित्र में दर्शाया गया है–

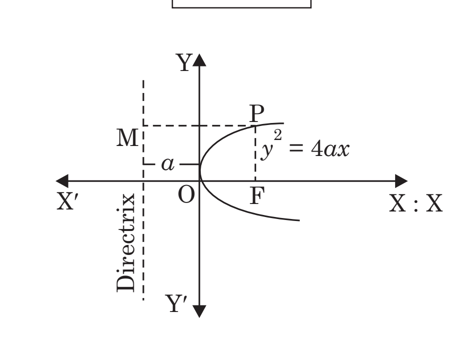
रेखाचित्र



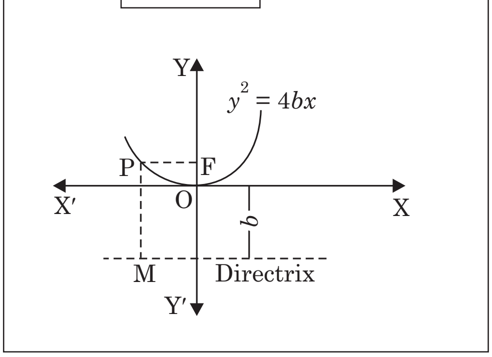
यदि परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ हो तो परवलय के समीकरण का केन्द्र मूल बिन्दु पर होगा तथा परवलय वक्र रेखाचित्र के अनुसार होगा। इसी प्रकार यदि परवलय का समीकरण $x^2 = 4by$ हो तो हमें परवलय वक्र रेखाचित्र के अनुसार प्राप्त होगा।

उपर्युक्त रेखाचित्रों में O परवलय का शीर्ष (Vertix) कहा जाता है। $y^2 = 4ax$ परवलय के लिए OY अक्ष के समानान्तर एक सरल रेखा, शीर्ष से दूरी पर वक्र के दूसरी ओर होती है, जिसे **डायरेक्ट्रिस** (Directrix) कहते हैं। इसी प्रकार वक्र $x^2 = 4by$ के लिए डायरेक्ट्रिक्स OX के समानान्तर शीर्ष b दूरी पर होती है।

रेखाचित्र



रेखाचित्र



नोट

वह सरल रेखा जो शीर्ष से जाती है और डायरेक्ट्रिक्स के समान्तर होती है परवलय का अक्ष कहलाती है। अक्ष परवलय को दो बराबर समान भागों में विभाजित करता है। अक्ष पर शीर्ष से डायरेक्ट्रिक्स से दूसरी ओर a या b की दूरी पर अवस्थित बिन्दु की परवलय को फोकस (Focus) कहते हैं। परवलय का यह विशिष्ट गुण होता है कि इस पर किसी बिन्दु की फोकस और डायरेक्ट्रिक्स से दूरी समान होती है।

(ब) अतिपरवलय (Hyperbola) **:** परवलय की भाँति अतिपरवलय फलन का भी अर्थशास्त्र में बहुत उपयोग है। अतिपरवलय फलन को गणितीय रूप में निम्न प्रकार दर्शा सकते हैं–

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (जहाँ } a, b \text{ स्थिरांक हैं)}$$

अथवा
$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}$$

तब
$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right)$$

अथवा
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{\left(x^2 - a^2\right)}$$

यदि हम निम्नलिखित तथ्यों का अनुरेखण करें तो

(*i*) जब $x = \pm a, y = 0$

(*ii*) $x > |a|$, आँका माना कि $a = b = 3$

तब
$$y = \pm\sqrt{\left(x^2 - 9\right)}$$

(*iii*) यदि $x < 2$ हो तो y का मान काल्पनिक होगा, पर x के दूसरे मूल्यों के लिए y के निम्नलिखित मूल्य निकाले जा सकते हैं–

x **का मूल्य**	y **का मूल्य**
+ 2 अथवा –2	0 अथवा 0
+ 3 अथवा –3	$+\sqrt{5}$ अथवा $-\sqrt{5}$
+4 अथवा –4	$+\sqrt{12}$ अथवा $-\sqrt{12}$

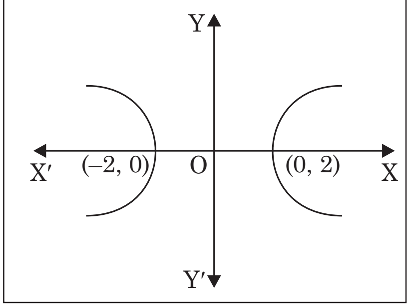
यदि मूल बिन्दु (0, 0) अतिपरवलय का केन्द्र है तो अतिपरवलय वक्र निम्न प्रकार होगा–

यदि केन्द्र-बिन्दु (h, k) है तो अतिपरवलय वक्र का समीकरण निम्न प्रकार होगा–

$$\frac{\left(x - h^2\right)}{a^2} - \frac{\left(y - k\right)^2}{b^2} = 1$$

सामान्यत: अतिपरवलय फलन को $xy = a$ द्वारा दर्शाते हैं जबकि $a > 0$ होता है।

रेखाचित्र (*i*)



नोट

(स) लघुगणकीय फलन (Logarithmic Function) : जब y, x का फलन न होकर $\log x$ का फलन हो तो उस फलन को लघुगणकीय फलन कहा जाता है। लघुगणकीय फलन का सामान्य समीकरण निम्नवत् होता है–

$$y = \alpha + \beta \log x$$

यहाँ यदि $\alpha = 0$ तथा $\beta = 1$ हो तो यह समीकरण $y = \log x$ मात्र हो जायेगा।

माना कि लघुगणकीय समीकरण $y = 5 + 5 \log_{10}x$ हो (यहाँ हमने $\alpha = 5, \beta = 5$ माना है)

तो $y = -5 + 5 \times 0 = -5$ (यदि $x = 1$)

$y = -5 + 5 \times 1 = 0$ (यदि $x = 10$)

$y = -5 + 5 \times 2 = 5$ (यदि $x = 100$)

$y = -5 + 5 \times 3 = 10$ (यदि $x = 1000$)

इसका वक्र रेखाचित्र (i) के अग्रानुसार होगा–

ध्यान देने योग्य बात यह है कि इस समीकरण में x का मान 0 या ऋणात्मक नहीं हो सकता है क्योंकि इनका लघुगणक नहीं होता है। बहुधा log का आधार e लिया जाता है।

द्वि-लघुगणकीय फलन का सामान्य समीकरण निम्न प्रकार का होता है–

$$\log y = \alpha + \beta \log x$$

अथवा $$\log y = \alpha \log x^{\beta}$$

$$\log y - \log x^{\beta} = \alpha$$

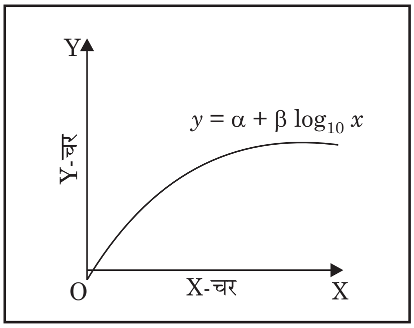
अथवा $$\log \frac{y}{x^{\beta}} = a$$

इसलिए $$\frac{y}{x^{\beta}} = e^{a}$$

$\therefore$ $$y = e^{\alpha} x^{\beta} = Ax^{\beta}$$

(जबकि $A = e^{x}$)

रेखाचित्र (*ii*)



इस फलन की मुख्य विशेषतायें निम्नलिखित हैं–

(i) यदि $\beta = 1$ तब $y = \frac{A}{x}$ अथवा $xy = A$

(तब यह आयतीय परवलय हो जायेगा)

(ii) यदि $\beta < 1$ है तो x के बढ़ने के साथ y बढ़ती दर से बढ़ता है।

(iii) यदि $0 < \beta < 1$ है तो x के बढ़ने के साथ y घटती दर से बढ़ता है।

(iv) यदि $\beta < 0$ हो तो x बढ़ने के साथ y घटता है।

यहाँ यह उल्लेखनीय है कि घनात्मक घात उत्पादन फलन और ऋणात्मक घात माँग विश्लेषण में प्रयुक्त होती हैं। इनकी प्रमुख विशेषता यह है कि घातांक स्थिर लोच को दर्शाते हैं।

(द) घातीय फलन (Exponential Function) : घातीय फलन भी अर्थशास्त्र में बहुत उपयोगी है। इस फलन में y, x का फलन न होकर x के घातीय का फलन होता है। इसे निम्नलिखित समीकरणों द्वारा दर्शाया जा सकता है–

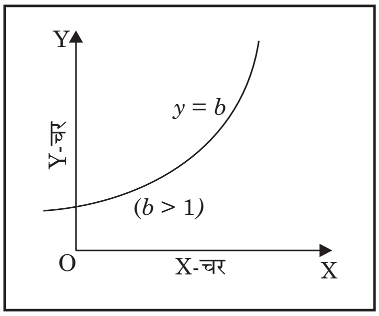
नोट

$$y = \log_e x, y = e^x, y = e^{\sin x}$$

इत्यादि

यदि हमारी घातीय समीकरण $y = b^x$ हो, जबकि $b > 1$ है तो हम इसका वक्र चित्र के अनुसार होगा–

रेखाचित्र



माना घातीय फलन $x = A\ B^y$ है तो इस समीकरण को लघुगणकीय रूप में निम्न प्रकार दर्शा सकते हैं–

$$\log x = \log A + y \log B$$

$\therefore$ $$y \log B = \log x - \log A$$

अथवा $$y = \frac{\log x}{\log B} - \frac{\log A}{\log B}$$

माना $$\frac{1}{\log B} = \beta \text{ और } -\frac{\log A}{\log B} = \alpha \text{ तब}$$

$$y = \alpha + \beta \log x, \text{ जो कि}$$

हमारा लघुगणकीय फलन ही है।

उदाहरण 1. माना कि माँग और पूर्ति वक्र एक सरल रेखा है। यदि विभिन्न मूल्यों पर मूल्य और माँग की मात्रा निम्न प्रकार दी हुई हो तो माँग और पूर्ति समीकरण निकालिये।

मूल्य (P)	माँग (D)	पूर्ति (S)
2	40	50
5	20	60

हल : उपर्युक्त तालिका को निम्न प्रकार से बिन्दुओं के रूप में लिखकर रैखिक रूप दिया जा सकता है–

	माँग मूल्य बिन्दु	**पूर्ति मूल्य बिन्दु**
1.	(40, 2)	(50, 2)
2.	(20, 5)	(60, 5)

माना x = मात्रा तथा y = मूल्य है तो (40, 2) और (20, 5) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$y \,.\, y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

y_1, y_2, x_1, तथा x_2 का मूल्य रखने पर

$$y - 2 = \frac{5 - 2}{20 - 40}(x - 40)$$

या $$y - 2 = \frac{3}{-20}(x - 40)$$

या $$-20(y - 2) = 3(x - 40)$$

या $$-20y + 40 = 3x$$

नोट

या $$3x = 160 - 20y$$

या $$x = \frac{160}{3} - \frac{20}{3}y = 53.33 - 6.66y$$

यदि $x =$ माँग की जगह D रखें और $y =$ मूल्य की जगह p रखें तो माँग समीकरण होगा–

$$D = 53.33 - 6.66p$$

इसी प्रकार **पूर्ति रेखा** (50, 2) तथा (60, 5) बिन्दुओं से होकर गुजरती है और इन बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का समीकरण होगा–

$$y - 2 = \frac{5-2}{60-5}\ (x - 5)$$

या $$y - 2 = \frac{3}{10}(x - 50)$$

या $$10y - 20 = 3x - 150$$

$$3x = 130 + 10y$$

$$x = 13 + 3.33y$$

यदि $x =$ पूर्ति मात्रा की जगह S और $y =$ मूल्य की जगह p रखें तो पूर्ति समीकरण होगा–

$$S = 13 + 3.33p$$

उदाहरण 2. निम्नलिखित परवलय के फोकस और डायरेक्ट्रिक्स ज्ञात कीजिये–

(*i*) $y^2 = 16x$ **(*ii*) $x^2 = 20y$**

हल : (*i*) $y^2 = 16x$ की तुलना करने पर,

अत: डायरेक्ट्रिक्स शीर्ष से वक्र की दूसरी ओर –4 दूरी पर है अर्थात् $x = -4$ और फोकस शीर्ष से डायरेक्ट्रिक्स के विपरीत (4, 0) पर स्थित है।

(*ii*) $x^2 = 4by$ से $x^2 = -20y$ की तुलना करने पर

$$b = 5$$

अत: डायरेक्ट्रिक्स शीर्ष से वक्र की दूसरी ओर +5 दूरी पर है, अर्थात् $y = 5$ और फोकस (0, 5) पर स्थित होगा।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. **बहुविकल्पीय प्रश्न** (Multiple Choice Questions)–

(*i*) यदि $f : x \to y$ से परिभाषित है तो समुच्चय x इस फलन f का क्या कहलाता है?

(*a*) डोमेन (*b*) रेंज (*c*) चर (*d*) अचर

(*ii*) यदि चर राशि y केवल एक चर राशि x पर आश्रित है, तब $y = f(x)$ क्या कहलाता है?

(*a*) बहुचरीय फलन (*b*) एकचरीय फलन (*c*) स्पष्ट फलन (*d*) अस्पष्ट फलन

(*iii*) एक भिन्न के रूप में व्यक्त किया गया ऐसा फलन जिसके अंश और हर दोनों ही पूर्णांक घातों वाले बीजीय व्यंजक हों, क्या कहलाता है?

(*a*) बीजीय फलन (*b*) विषम फलन (*c*) परिमेय फलन (*d*) अपरिमेय फलन

नोट

1.14 सारांश (Summary)

- एक राशि के मान में परिवर्तन होने पर उस पर निर्भर दूसरी राशि के मान में परिवर्तन किस दर से होता है एवं इस परिवर्तन की दर से सम्बन्धित अनेक प्रश्नों एवं क्रियाओं का विश्लेषण एवं अध्ययन अवकल गणित (Differential Calculus) कहलाता है।
- परिवर्तनशील राशियों को चर (Variables) कहते हैं। वे राशियाँ जिनका मान बदलता रहता है अर्थात् जिन राशियों के अगणित संख्यात्मक मान (nummerical values) दिये जा सकते हैं, **चर** (Variables) कहते हैं।
- वे राशियाँ जिनका मान गणित की प्रत्येक संक्रिया में अपरिवर्तित रहता है, **अचर** कहलाती हैं।
- फलन का सिद्धान्त दो परस्पर **सम्बद्ध चर राशियों** (Related Quantities) पर आधारित है।
- यदि फलन $f: X \to Y$ से परिभाषित है तो समुच्चय X इस प्रतिचित्रण या फलन f का **डोमेन या प्रभाव क्षेत्र** (Domain) कहलाता है और समुच्चय Y इसका **परास** अथवा **रेंज** (Range) सह-प्रभाव क्षेत्र (Codomain) कहलाता है।
- यदि चर राशि y **केवल एक चर राशि** x पर आश्रित है, तब $y = f(x)$ **एकचरीय फलन** कहलाता है। इसी प्रकार, $y = f(\theta)$, $s = f(t)$, $v = f(t)$ इत्यादि एकचरीय फलन हैं।
- यदि चर राशि u, **दो चर राशियों** x और y पर आश्रित है, तब $u = f(x, y)$ **बहुचरीय फलन** कहलाता है।
- चर राशि x की विभिन्न संख्यात्मक घातों वाला ऐसा फलन जिसमें पदों की संख्या निश्चित हो, **बीजीय फलन** कहलाता है।
- एक भिन्न के रूप में व्यक्त किया गया ऐसा फलन जिसके अंश और हर दोनों ही पूर्णांक घातों वाले बीजीय व्यंजक हों, **परिमेय फलन** कहलाता है।
- अर्थशास्त्र में रैखिक फलनों एवं सरल रेखा के समीकरणों का बहुत उपयोग है। बाजार में किसी वस्तु की कीमत, माँग एवं पूर्ति द्वारा निर्धारित होती है। यदि माँग और पूर्ति फलन दिये हुए हों तो हम साम्यावस्था बिन्दु पर ऐसी कीमत एवं मात्रा का निर्धारण कर सकते हैं जहाँ माल बेचने एवं खरीदने वाले दोनों ही सन्तुष्ट हो जायें।
- वह सरल रेखा जो शीर्ष से जाती है और डायरेक्ट्रिक्स के अनुसार होती है परवलय का अक्ष कहलाती है।

1.15 शब्दकोश (Keywords)

- डोमेन (Domain)—प्रभाव क्षेत्र।
- रेंज (Range)—परास।

1.16 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. निम्नलिखित फलनों को ग्राफ द्वारा प्रदर्शित कीजिये—

(*a*) $y = f(x) = 5 - 3x$; परास $x = -2$ से $x = 5$ के लिए।

(*b*) $y = f(x) = 2x^2 - 5x + 1$; परास $x = -5$ से $x = 7$ के लिए।

नोट

(*c*) $y = f(x) = \dfrac{24}{x}$ परास $x = 1$ से $x = 9$ के लिए।

2. निम्नलिखित सारणी से माँग और पूर्ति फलन ज्ञात कीजिये—

मूल्य	माँग	पूर्ति
1	100	50
2	50	75
3	0	100

3. किसी बाज़ार के निम्नलिखित माँग और पूर्ति फलनों के साम्य मूल्य व मात्रा ज्ञात कीजिये—

(*i*) $D = 15 - 3p;\ S = -10 + 2p$

(*ii*) $D = 12 - 2p;\ S = -20 - 4p$

(*iii*) $D = 50 - 4p;\ S = 2 + 10p - p^2$

4. किसी वस्तु की माँग और पूर्ति फलन निम्न प्रकार हैं—

$$D = 100 - 10p \quad S = -12 + 9p$$

5. परवलय का शीर्ष, फोकस और डाइरेक्ट्रिक्स ज्ञात कीजिए—

(*i*) $y = x^2 + 3x - 2$ संकेत—$y = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{17}{4}$

(*ii*) $(x - 2)^2 = 4y - 16$

6. उत्पादन फलन $y = 5_L{}^{.5} K^{.5}$ में L तथा K श्रम तथा पूँजी हैं। यदि अल्पकाल में पूँजी स्थिर है और $K = 100$ है तो उत्पादन फलन का अनुरेखण कीजिये। औसत श्रम उत्पाद (Y/L) ज्ञात कीजिये और इस वक्र का अनुरेखण करो।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. (*i*) चर (*ii*) अचर (*iii*) संबद्ध (*iv*) त्रिज्या (*v*) निरपेक्ष
2. (*i*) (*a*) (*ii*) (*b*) (*iii*) (*c*)

1.17 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
2. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*

VED1
E\L-LOVELY-H\math1-2 IInd 21-10-11 IIIrd 8-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

नोट

5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
7. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*

नोट

इकाई—2: सीमा व सततता
(Limits and Continuity)

अनुक्रमणिका (Contents)

नोट

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- फलन की सीमा संबंधी समस्याओं को हल करने में आसानी होगी।
- फलन $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा तथा मान में अंतर संबंधी समस्याओं को हल कर सकते हैं।
- सीमाओं पर प्रमेय तथा उस पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकेंगे।
- फलन की सीमा ज्ञात करने की विधि को जान पाएँगे।
- ज्यामितीय परिभाषा को जानने हेतु।
- किसी बिन्दु पर फलन का सांतत्य ज्ञात करने की विधि तथा उससे संबंधित समस्याओं को हल करने हेतु।
- संतत फलनों पर प्रमेय और उस पर आधारित प्रश्नों को हल करने में आसानी होगी।

प्रस्तावना (Introduction)

1. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणी (Geometrical Series) के योग पर विचार कीजिए–

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots \text{ अनन्त तक।}$$

1 पद का योगफल = .5

2 पदों का योगफल = .75

3 पदों का योगफल = .875

4 पदों का योगफल = .9375

5 पदों का योगफल = .96875

6 पदों का योगफल = .984375

7 पदों का योगफल = .9921875

8 पदों का योगफल = .99609375

9 पदों का योगफल = .998046875

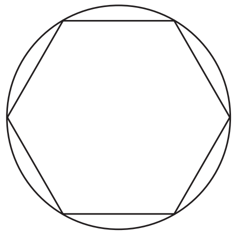
10 पदों का योगफल = .9990234375

.... = ...

ऊपर से पता चलता है कि जैसे-जैसे पदों की संख्या बढ़ती जाती है वैसे-वैसे श्रेणी का योगफल 1 की ओर अग्रसर होता है। यद्यपि योगफल वास्तव में 1 के बराबर नहीं हो पाता।

इस प्रकार पदों की पर्याप्त संख्या लेकर योगफल और 1 के अन्तर को हम जितना चाहें उतना कम कर सकते हैं।

2. मान लो दी हुई त्रिज्या के वृत्त के अन्तर्गत एक सम-बहुभुज बनाया जाता है। ज्यामिति से स्पष्ट है कि



(*i*) बहुभुज का क्षेत्रफल, वृत्त के क्षेत्रफल से अधिक नहीं हो सकता, चाहे बहुभुज में भुजाओं की संख्या कितनी ही अधिक क्यों न हो।

(*ii*) बहुभुज में भुजाओं की संख्या को अपरिमित रूप से बढ़ाने पर **हम वृत्त और बहुभुज के क्षेत्रफल के अन्तर को जितना चाहें कम कर सकते हैं।**

नोट

कैलकुलस में इस तथ्य को इस प्रकार कहकर व्यक्त किया जाता है कि वृत्त के अन्तर्गत खींचे गये बहुभुज के क्षेत्रफल की सीमा, जबकि भुजाओं की संख्या अपरिमित रूप से बढ़ती है (अथवा अनन्त की ओर प्रवृत्त होती है), वृत्त का क्षेत्रफल होती है।

$\lim\limits_{n\to\infty}$ (बहुभुज का क्षेत्रफल) = वृत्त का क्षेत्रफल।

3. अनुक्रम की सीमा (Limit of a Sequence)–अनुक्रम

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$$

पर विचार कीजिए जिसके लिए $s_n = \frac{1}{n}$, जहाँ s_n अनुक्रम का nवाँ पद प्रदर्शित करता है। हम देखते हैं कि n का मान जैसे-जैसे बढ़ता है $\frac{1}{n}$ का मान वैसे-वैसे घटता जाता है। वास्तव में हम n को पर्याप्त बड़ा चुनकर, $\frac{1}{n}$ को जितना चाहें उतना छोटा कर सकते हैं। यहाँ यदि $n > 10,000$ तो $\frac{1}{n} < 0.0001$ और यदि $n > 10^8$ तो $\frac{1}{n} < 10^{-8}$ इस प्रकार हम देखते हैं कि जैसे-जैसे n अनंत की ओर प्रवृत्त होता है $\frac{1}{n}$ शून्य की ओर प्रवृत्त (tends to) होता है। हम देखते हैं कि अनुक्रम $\{s_n\}$ की सीमा 0 है और इसे $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$ द्वारा लिया जाता है।

अब हम दूसरे अनुक्रम $\quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$

पर विचार करेंगे जिसके लिए $s_n = \frac{n-1}{n}$ हम देखते हैं कि जैसे-जैसे n बढ़ता है s_n वैसे-वैसे 1 के सन्निकट पहुँचता है। दूसरे शब्दों में n को पर्याप्त बड़ा चुनकर हम s_n और 1 के सांख्यिक अन्तर अर्थात् $|s_n - 1|$ को जितना छोटा चाहें, कर सकते हैं। इस अनुक्रम के लिए

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

साधारणतया किसी अनुक्रम $s_1, s_2, s_3, ...$ के लिए n को पर्याप्त बड़ा चुनने पर यदि s_n और किसी संख्या A के सांख्यिक अन्तर $|s_n - A|$ को हम जितना चाहें उतना इच्छानुसार छोटा कर सकें A को अनुक्रम $\{s_n\}$ की सीमा कहते हैं और इसे

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A$$

के द्वार लिखा जाता है।

अब अनुक्रम

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ... n^2, ...$$

पर विचार करने पर हम देखते हैं कि जैसे-जैसे n का मान बढ़ता है, s_n भी वैसे-वैसे बढ़ता जाता है। हम n को पर्याप्त बड़ा लेकर s_n को जितना बड़ा चाहें, कर सकते हैं। यहाँ पर $s_n > 10,000$ यदि $n > 100$, $s_n > 10^8$ यदि $n > 10^4$, वास्तव में यहाँ s_n को किसी भी बड़ी से बड़ी संख्या से भी बड़ा बनाया जा सकता है। इसे हम $S_n \to \infty$, यदि $n \to \infty$ के द्वारा व्यक्त करते हैं।

नोट

4. फलन की सीमा को परिभाषित करने के पूर्व हम निम्न उदाहरण पर विचार करना उपयुक्त समझते हैं। कुछ फलन x के विशेष मान के लिए अपरिभाषित होते हैं जैसे

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

स्पष्ट है कि फलन $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ का मान $x = 1$ पर $\frac{0}{0}$ अर्थात् अनिर्धार्य (indeterminate) है।

यदि $x = .9$ तो फलन का मान $\frac{(.9)^2 - 1}{.9 - 1} = 1.9,$

यदि $x = .99$ तो फलन का मान $\frac{(.99)^2 - 1}{.99 - 1} = 1.99,$

यदि $x = .999$ तो फलन का मान $\frac{(.999)^2 - 1}{.999 - 1} = 1.999,$

यदि $x = .9999$ तो फलन का मान $\frac{(.9999)^2 - 1}{.9999 - 1} = 1.9999,$ इत्यादि।

x	.9	.99	.999	.9999	---
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	---

इस प्रकार हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x का मान बढ़ते-बढ़ते 1 के सन्निकट पहुँचता है फलन $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ का मान 2 के निकट पहुँच जाता है।

पुनः यदि $x = 1$ तो फलन का मान $\frac{(1.1)^2 - 1}{1.1 - 1} = 2.1,$

यदि $x = 1.01$ तो फलन का मान $\frac{(1.01)^2 - 1}{1.01 - 1} = 2.01,$

यदि $x = 1.001$ तो फलन का मान $\frac{(1.001)^2 - 1}{1.001 - 1} = 2.001,$

यदि $x = 1.0001$ तो फलन का मान $\frac{(1.0001)^2 - 1}{1.0001 - 1} = 2.0001$ इत्यादि।

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	---
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	---

यहाँ हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x का मान घटते-घटते 1 के निकट पहुँचता है, फलन $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ का मान 2 के समीप पहुँचता है।

नोट

इस प्रकार x चाहे 1 से थोड़ा अधिक मान $1 + \varepsilon$ (जहाँ ε एक छोटी से छोटी स्वेच्छ धन संख्या है) से घटते-घटते 1 के निकट पहुँचे या 1 से थोड़ा कम मान $1 - \varepsilon$ से बढ़ते-बढ़ते 1 के निकट पहुँचे। फलन एक निश्चित मान 2 की ओर प्रवृत्त होता है। यह निश्चित मान 2 फलन $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ की $x \to 1$ पर सीमा कहलाता है। इसे

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

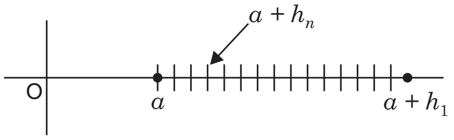
के द्वारा लिखा जाता है।

2.1 फलन की सीमा (Limit of a Function)

मान लीजिए $y = f(x)$ कोई फलन है और $h_1, h_2, ... h_n, ...$ एक धनात्मक संख्याओं का समुच्चय (a set of positive numbers) है जिसका मान सतत घट (continually decreasing) रहा है अर्थात्

$$h_1 > h_2 > h_3 > ...... > h_n > ...... > 0 \qquad ...(1)$$

और जिसे, n को पर्याप्त बड़ा लेकर, जितना चाहें उतना इच्छानुसार छोटा बना सकते हैं। इस स्थिति में जैसे-जैसे h_n छोटा होता जाता है फलन के मान,



$$f(a + h_1), f(a + h_2), ..., f(a + h_n) \qquad ...(2)$$

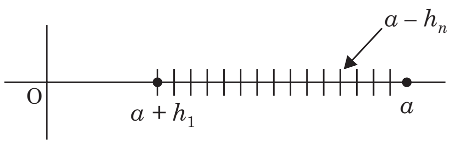
घटते जाते हैं।

यदि एक संख्या A की ओर प्रवृत्त (tends to) होते हैं तो इस संख्या A को फलन $f(x)$ का $x = a$ पर **दक्षिण पक्ष सीमा** (right hand limit) कहते हैं या इस संख्या A को फलन $f(x)$ की, जब x, a की ओर प्रवृत्त होता है, दक्षिण पक्ष सीमा कहते हैं, और इसे

$$\lim_{x \to a + 0} f(x) = A = f(a + 0)$$

के द्वारा लिखते हैं।

यहाँ पर हमने x के केवल उन मानों (values) पर ही विचार किया है जो कि a से अधिक (greater) हैं। (चित्र में केवल a के दाहिनी ओर)।



अब हम x के उन मानों पर विचार करेंगे जो a से कम (smaller) हैं (अर्थात् चित्र में a के बायीं ओर)।

जैसे-जैसे h_n छोटा होता जाता है फलन

$$f(a - h_1), f(a - h_2)......, f(a - h_n),......$$

के मान एक संख्या B की ओर प्रवृत्त होते हैं। इस संख्या B को फलन $f(x)$ की $x = a$ पर वाम पक्ष सीमा (left hand limit) कहते हैं और इसे

नोट

$$\lim_{x \to a - 0} f(x) = B = f(a - 0)$$

के द्वारा लिखते हैं।

यदि $A = B$ अर्थात्

$$\lim_{x \to a + 0} f(x) = \lim_{x \to a - 0} f(x)$$

तो A को $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा कहते हैं।

समुच्चय $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n, \ldots\ldots$ एक अनुक्रम (sequence) है जिसकी सीमा 0 है। इसी प्रकार दूसरा अनुक्रम (2) बनाता है। यहाँ पर विशेष ध्यान देने योग्य बात यह है कि सीमा प्राप्त होने (limit to exist) के लिए $f(a + h_n)$ अनुक्रम (1) की तरह के हर प्रकार के अनुक्रम के लिए, संख्या A को प्रवृत्त होना चाहिए। अर्थात् $f(a - h_n) - A$ का सांख्यिकीय अन्तर, h_n को पर्याप्त छोटा चुनकर, जितना चाहें इच्छानुसार उतना छोटा कर सकते हैं। $a + h_n$ {या $a - h_n$} $= x$ और $| x - a | = h_n$ रखने पर हम सीमा को निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं–

परिभाषा : $x = a$ पर फलन $f(x)$ की सीमा कोई संख्या (मान लो A होती है जिसमें यह गुण होता है कि x के उन सभी मानों के लिए जिनके लिए $| x - a |$ अर्थात् $x - a$ का संख्यात्मक मान) पर्याप्त रूप से छोटी (परन्तु शून्य नहीं) होती है, $| f(x) - A |$ अर्थात् $f(x) - A$ का संख्यात्मक मान इच्छानुसार छोटा होता है।

सीमा को निम्न परिभाषा से भी परिभाषित कर सकते हैं–

सीमा की दूसरी परिभाषा

जब $x \to a$ (जब x, a की ओर प्रवृत्त होता है) फलन $f(x)$ की सीमा कोई संख्या (मान लो A) होती है जिसमें यह गुण होता है कि किसी स्वेच्छ धनात्मक छोटी से छोटी संख्या ε के लिए एक दूसरी शून्य से बड़ी संख्या δ प्राप्त की जा सके जिसके लिए $| f(x) - A | < \varepsilon$, x के उन सभी मानों के लिए

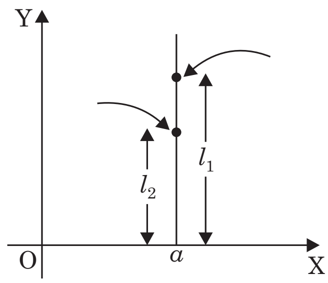
$$0 < | x - a | < \delta.$$

नोट्स यदि $x = a$ पर $f(x)$ की सीमा (limit) L हो तो इसे निम्न प्रकार लिखा जाता है–

$$\operatorname*{limit}_{x \to a} f(x) = L \text{ या } \lim_{x \to a} f(x) = L.$$

2.2 दक्षिण पक्ष और वाम पक्ष सीमा (Right Hand and Left Hand Limits)

2.2.1 दक्षिण पक्ष सीमा (Right hand limit)



जब फलन की सीमा स्वतंत्र चर के मान के दाहिनी ओर से प्राप्त की जाती है तो उसे फलन की **दक्षिण पक्ष सीमा (R.H.L.)** कहते हैं और दाहिनी ओर के लिए धन चिह्न का प्रयोग करते हुए सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं–

दक्षिण पक्ष सीमा $= f(a+0) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l_1.$

2.2.2 वाम पक्ष सीमा (Left hand limit)

जब फलन की सीमा स्वतंत्र चर के मान के बायीं ओर से प्राप्त की जाती है तो उसे **वाम पक्षीय सीमा (L.H.L.)** कहते हैं और बायीं ओर के लिए (–) चिह्न का प्रयोग करते हुए सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं–

वाम पक्ष सीमा $= f(a-0) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2.$

2.3 फलन की दक्षिण पक्ष तथा वाम पक्ष सीमा ज्ञात करने की क्रिया-विधि (Working Rules for Finding Right Hand Limit and Left Hand Limit)

(*i*) दक्षिण पक्ष तथा वाम पक्ष सीमा ज्ञात करने के लिए फलन में चर x के स्थान पर क्रमश: $(x+h)$ तथा $(x-h)$ प्रतिस्थापित कीजिए।

(*ii*) इस प्रकार (*i*) से प्राप्त फलन x को दिये हुए बिन्दु (मान लो a) से प्रतिस्थापित कीजिए।

(*iii*) अब $h \to 0$ पर फलन की सीमा ज्ञात कीजिए [अर्थात् (*ii*) से प्राप्त फलन को उपर्युक्त रूप में रखकर $h = 0$ रखिये]।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1. फलन $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ की $x = 2$ पर दक्षिण पक्ष (Right hand limit) तथा वाम पक्ष सीमा (Left hand limit) ज्ञात कीजिए।

हल : **दक्षिण पक्ष सीमा**

I. $f(x+h) = \dfrac{1}{2+(x+h)}$

II. $f(2+h) = \dfrac{1}{2+(2+h)} = \dfrac{1}{4+h}$

III. $\lim_{h \to 0} f(2+h) = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{4+h}$

या $f(2+0) = \dfrac{1}{4}$

वाम पक्ष सीमा

I. $f(x-h) = \dfrac{1}{2+(x-h)}$

II. $f(2-h) = \dfrac{1}{2+(2-h)} = \dfrac{1}{4-h}$

III. $\lim_{h \to 0} f(2-h) = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{4-h}$

या $f(2-0) = \dfrac{1}{4}.$

उदाहरण 2. फलन $f(x) = x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ की $x = 0$ पर दक्षिण पक्ष तथा वाम पक्ष सीमा ज्ञात कीजिए।

हल : दक्षिण पक्ष सीमा

I. $f(x+h) = (x+h) \cos \dfrac{1}{x+h}$

वाम पक्ष सीमा

II. $f(0+h) = h \cos \dfrac{1}{h}$

नोट

III. $\lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} h \cos\frac{1}{h}$

$= \lim_{h\to 0} h \times \lim_{h\to 0} \cos\frac{1}{h}$

$= 0$ [-1 तथा 1 के मध्य स्थित एक परिमित (finite) राशि]

या $f(0+0) = 0$

I. $f(x-h) = (x-h)\cos\frac{1}{x-h}$

II. $f(0-h) = -h\cos\left(-\frac{1}{h}\right)$

III. $\lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} (-h)\cos\left(-\frac{1}{h}\right)$

$= \lim_{h\to 0} (-h) \lim_{h\to 0} \cos\left(-\frac{1}{h}\right)$

$= -0$ [-1 तथा 1 के मध्य स्थित एक परिमित (finite) राशि]

या $f(0-0) = 0$

2.4 सीमा का अस्तित्व (Existence of Limit)

यदि किसी फलन $f(x)$ की $x = a$ पर दक्षिण पक्ष तथा वाम पक्ष दोनों सीमाएँ विद्यमान तथा एकसमान हों, तो फलन $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा का अस्तित्व होता है।

अर्थात् $$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l \text{ (मान लो)}$$

यहाँ l फलन की सीमा कहलाती है तथा इसे हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं–

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

2.5 फलन $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा तथा मान में अन्तर (Distinction Between Limit and Value of a Function $f(x)$ on $x = a$)

$\lim_{x\to a} f(x) = l$	$f(a)$
1. फलन की सीमा वह राशि है जिसकी ओर फलन क्रमशः अग्रसर होता है जब स्वतंत्र चर x का मान a की ओर होता है।	वह राशि है जो कि फलन $f(x)$ में $x = a$ रखने पर प्राप्त की जाती है।
2. सीमा ज्ञात करने के लिए हमें $x = a$ के निकटवर्ती $f(x)$ के मानों का अध्ययन करना पड़ता है तथा निष्कर्ष निकालना पड़ता है।	$x = a$ पर मान निकालने के लिए केवल $x = a$ पर $f(x)$ का मान निकालना पड़ता है।
3. $x = a$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व हो सकता है।	$x = a$ पर फलन का मान नहीं भी हो सकता।

2.6 फलन का मान और सीमा (Value and Limit of a Function)

चर x के किसी मान a के लिए फलन $f(x)$ का मान और सीमांत मान भिन्न होना आवश्यक नहीं है। कुछ इस प्रकार के फलन भी होते हैं जिनके लिए $x = a$ पर $f(x)$ का मान तथा सीमांत मान बराबर होते हैं अर्थात् $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

2.7 सीमाओं पर प्रमेय (Theorems on Limits)

क्या आप जानते हैं यदि $f(x)$ और $\phi(x)$ दो फलन हों और $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \text{f}(x) = B$ तो

$$(i)\ \lim_{x \to a} \{f(x) \pm \phi(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \phi(x) = A \pm B.$$

$$(ii)\ \lim_{x \to a} \{k\, f(x)\} = k \lim_{x \to a} f(x) = kA.$$

$$(iii)\ \lim_{x \to a} \{f(x)\, \phi(x)\} = \lim_{x \to a} f(x).\ \lim_{x \to a} \phi(x) = AB$$

होती है जिसमें यह गुण होता है कि फलन $f(x)$ की सीमा कोई संख्या (मान लो A).

$$(iv)\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \phi(x)} = \frac{A}{B},\ \text{यदि } B \neq 0.$$

$$(v)\ \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to a} f(h + a).$$

2.8 फलन की सीमा ज्ञात करने की विधि (Method of Finding the Limit of a Function)

यद्यपि हमें सीमा ज्ञात करने के लिए दक्षिण पक्ष व वाम पक्ष दोनों सीमाएँ ज्ञात करनी चाहिए परन्तु माध्यमिक स्तर पर हम सीमा अधिकांशत: सीधे ही ज्ञात करते हैं।

यदि $y = f\,(x) = \dfrac{\phi(x)}{\Psi(x)}$, तो सीमा ज्ञात करने के लिए निम्न चार प्रकार की स्थितियाँ होंगी:

स्थिति 1 (Type 1): जब $x \to a$: यदि $\phi(a) = 0, \Psi(a) = 0$ तो $f(a) = \dfrac{0}{0}$ जो अनिर्धार्य है। इस प्रकार के फलन की सीमा निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात की जा सकती है–

(i) फलन को हल करके और $x \neq a$ मानकर अंश तथा हर से उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को काट दीजिए।

(ii) शेष खण्डों में x के स्थान पर a रखकर मान ज्ञात कर लीजिए। यही फलन की $x \to a$ पर सीमा होगी।

स्थिति 2 (Type 2): $x \to a$ पर $f(x)$ की सीमा ज्ञात करने के लिए $x = a + h$ रखकर, यहाँ h धनात्मक या ऋणात्मक वृद्धि (Increment) है $f(a + h)$ की सीमा ज्ञात कर लीजिए। जब $h \to 0$ अर्थात् $f(a + h)$ में $h = 0$ रखकर फलन का मान ज्ञात कर लीजिए। यही फलन की $x \to a$ पर सीमा होगी क्योंकि जब

$$x = a + h \text{ और } x \to a \text{ तो } h \to 0.$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

(i) यदि एक संख्या A की ओर प्रवृत्त होते हैं तो इस संख्या A को फलन $f(x)$ का $x = a$ पर ········ कहते हैं।

VED1
E\L-LOVELY-H\math2-1 IInd 21-10-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

नोट

(*ii*) जब फलन की सीमा स्वतंत्र चर के मान के बायीं ओर से प्राप्त की जाती है तो उसे ········ कहते हैं।

(*iii*) यदि किसी फलन $f(x)$ की $x = a$ पर दक्षिण तथा वाम पक्ष दोनों सीमाएँ विद्यमान तथा एकसमान हों, तो फलन $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा का ········ होता है।

(*iv*) चर x के किसी मान a के लिए फलन $f(x)$ का मान और ········ मान भिन्न होना आवश्यक नहीं है।

(*v*) यद्यपि हमें सीमा ज्ञात करने के लिए दक्षिण पक्ष व वाम पक्ष दोनों सीमाएँ ज्ञात करनी चाहिए परन्तु ········ स्तर पर हम सीमा अधिकांशतः सीधे ही ज्ञात करते हैं।

हल सहित उदाहरण

कभी-कभी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से भाग देना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थिति में (*ii*) विधि का उपयोग करके सीमा सुगमता से जानी जा सकती है। निम्न उदाहरणों से क्रिया स्पष्ट हो जायेगी।

टिप्पणी–अंश और हर दोनों को उसके उभयनिष्ठ गुणनखण्ड जो शून्य नहीं, से भाग देना तुरन्त सम्भव न हो तो श्रेणी प्रसार (expansion in series) या किसी रूपान्तरण (transformation) के बाद यह क्रिया संभव हो सकती है।

उदाहरण 1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^2 + a^2 + ax)}{(x - a)}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^2 + a^2 + ax), \qquad [\because x \neq a]$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2.$$

उत्तर

उदाहरण 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_e (1 + x) - x}{x^2}$ **का मान निकालिए।**

हल :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_e (1 + x) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right] - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left[-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \dots\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \dots\right]$$

$$= -\frac{1}{2} + 0 - \dots = -\frac{1}{2}.$$

उत्तर

टास्क $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{x^3 - b^3}{x - b}$ का मान निकालें। **[उत्तर: $3b^2$]**

नोट

उदाहरण 3. $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{x^2 - 2ax + a^2}{x - a} \right)$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :
$$\lim_{x \to a} \left(\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x - a} \right)^2 = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^2}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} (x - a) = a - a = 0.$$
उत्तर

उदाहरण 4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x+3)} \qquad [\because x \neq 2]$$
$$= \frac{2-1}{2+3} = \frac{1}{5}.$$
उत्तर

स्थिति 3 (Type 3): अपरिमेय फलन की सीमा (Limit of irrational function)

यदि $y = f(x)$ और $f(x)$ एक अपरिमेय फलन है तो $f(x)$ की सीमा ज्ञात करने के लिए पहले फलन को परिमेय बना लीजिए फिर स्थिति 1 की तरह सीमा ज्ञात कर लीजिए।

उदाहरण 5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + x - 1}}{x}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x - 1}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{1}{3}x + \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!} x^2 + \ldots\ldots\infty - 1}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x}{2!} + \ldots\ldots\infty = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$
उत्तर

उदाहरण 6. सिद्ध कीजिए : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{1/2} - (1-x)^{1/2}}{x} = 1.$

हल:
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/2} - (1-x)^{1/2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x\,(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x\,(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

नोट

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$ **उत्तर**

स्थिति 4 (Type 4): फलन की सीमा ज्ञात करना, जब $x \to \infty$.

ऐसे फलनों में पहले $x = \dfrac{1}{Z}$ रखकर सीमा का रूप $x \to \infty$ को बदलकर $Z \to 0$ के रूप में रख दीजिए। फिर स्थिति 3 की भाँति सीमा निकाल लीजिए।

उदाहरण 7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{9x^2 + 3x + 7}{5x^2 + 2x + 1}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : स्पष्ट है कि यदि $x = \infty$ रखा जाए तो अंश और हर $\dfrac{\infty}{\infty}$ हो जायेगी। इसलिए अंश और हर दोनों में x^2 का भाग देने पर

$$\lim_{x \to \infty} \frac{9x^2 + 3x + 7}{5x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{9 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{5 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{9+0+0}{5+0+0}$$

$$= \frac{9}{5}, \text{ जबकि } x \to \infty$$

चूँकि $x \to \infty$ इसलिए $\dfrac{3}{x}, \dfrac{7}{x^2}, \dfrac{2}{5x}, \dfrac{1}{x^2}$ शून्य की ओर अग्रसर होंगे तथा फलन $\dfrac{9}{5}$ की ओर अग्रसर होता है।

अत: $$\lim_{x \to \infty} \frac{9x^2 + 3x + 7}{5x^2 + 2x + 1} = \frac{9}{5}.$$ **उत्तर**

उदाहरण 8. सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^m - a^m}{x - a} = ma^{m-1}$**, जहाँ** m **कोई परिमेय संख्या है।**

हल : प्रथम विधि : बायाँ पक्ष $$= \lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + ... + a^{m-1})}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + ... + a^{m-1}), (\text{जब } x \neq a)$$

$$= a^{m-1} + a^{m-1} + ... + a^{m-1} = ma^{m-1} = \text{दायाँ पक्ष।}$$

द्वितीय विधि : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^m - a^m}{x - a}$, ($x = a + h$ रखने पर और जब $x \to a$, $h \to 0$)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^m - a^m}{(a+h) - a} = \lim_{h \to 0} \frac{a^m \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m - a^m}{h}$$

नोट

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^m \left\{1 + m\left(\frac{h}{a}\right) + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2 + ... - 1\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^m h \left\{\frac{m}{a} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{h}{a^2} + ...\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} a^m \left\{\frac{m}{a} + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{h}{a^2} + ...\right\}, (h \neq 0)$$

$$= a^m \times \frac{m}{a} = ma^{m-1}$$ = दायाँ पक्ष।

टिप्पणी : यह बीजीय फलन की सीमा ज्ञात करने के लिए प्रमुख सूत्र के रूप में प्रयुक्त होता है।

उदाहरण 9. $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 + \frac{p}{x}\right)^x$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{p}{x}\right)^x$

उपप्रमेय $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ के प्रयोग से

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{p}{x}\right)^x = e^p$, क्योंकि $\lim\limits_{x/p \to \infty}\left\{\left(1 + \frac{p}{x/p}\right)^{x/p}\right\}^p = e^p$. **उत्तर**

उदाहरण 10. $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{\log x}{1 - x}\right)$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $x = 1 + h$ रखो, जबकि h बहुत ही छोटा है।

अतः
$$\lim_{x \to 1}\frac{\log x}{1 - x} = \lim_{h \to 0}\frac{\log(1 + h)}{-h} = \lim_{h \to 0}\frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - ....}{-h}$$

$= \lim\limits_{h \to 0} -\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - ....\right)$ (जब $h \neq 0$) $= -1.$ **उत्तर**

उदाहरण 11. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :
$$\lim_{x \to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left[2\left(x + \frac{x^3}{3!} + ...\right)\right]$$

नोट

$$= \lim_{x \to 0} \left[2\left(1 + \frac{x^2}{3!} + ...\right) \right] \qquad [\because \quad x \neq 0]$$

$$= 2.$$

उत्तर

उदाहरण 12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} .... \infty\right) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \infty\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ... \infty\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to a} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ... \infty\right)$$

= (जब $x \neq 0$) = 1.

उत्तर

उदाहरण 13. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + ... + x}{x^2}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + 2 + 3 + ... + x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\,(x + 1)}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}. \qquad \left[\because \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0\right]$$

अतः अभीष्ट मान = $\dfrac{1}{2}$.

उत्तर

उदाहरण 14. सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \log_e \dfrac{a}{b}$.

या $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : स्पष्ट है जब $x = 0$ तो अंश तथा हर दोनों शून्य हो जाते हैं। अतः a^x तथा b^x का एक्सपोनेन्टी प्रमेय की सहायता से प्रसार करने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \log_e a} - e^{x \log_e b}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[1 + x \log_e a + \frac{(x \log_e a)^2}{2!} + ...\right] - \left[1 + x \log_e b + \frac{(x \log_e b)^2}{2!} + ...\right]}{x}$$

नोट

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \log_e a - \log_e b + \frac{x\,[(\log_e a)^2 - (\log_e b)^2]}{2!} + ... \right\}$$

$$= \log_e a - \log_e b = \log_e \left(\frac{a}{b}\right) = \text{दायाँ पक्ष।}$$

इति सिद्धम्।

उदाहरण 15. फलन $f(x)$ इस प्रकार परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{जब } x > 0 \\ -1, & \text{जब } x < 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

दिखाइए कि $\lim_{x \to \infty} f(x)$ अस्तित्व में नहीं है।

हल : यहाँ पर $f(0 + h) = 1.$

$\therefore$ दक्षिण पक्ष सीमा $= f(0 + 0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (1) = 1$

और $f(0 - h) = -1$

$\therefore$ वाम पक्ष सीमा $= f(0 - 0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (-1) = -1.$

$\because$ $\lim_{x \to 0+0} f(x) \neq \lim_{x \to 0-0} f(x)$

अत: $\lim_{x \to 0} f(x)$ अस्तित्व में नहीं है।

उदाहरण 16. दिखाइए कि $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ का अस्तित्व नहीं है।

हल : जब $x > 2,$ $|x - 2| = (x - 2)$

$\therefore$ $\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{x-2}{x-2} = 1$

$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2-0} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

$\therefore$ $\text{R.H.L.} \neq \text{L.H.L.}$

अत: $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 17. फलन $f(x)$ जिसके लिए

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

दिखाइए कि $\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$

हल : $\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(1 + h) = \lim_{h \to 0} (1 + h)^2 = 1$

और $\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(1 - h) = \lim_{h \to 0} (1 - h)^2 = 1$

नोट

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = 1$$

अत: $\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$

उदाहरण 18. फलन $f(x)$ निम्न प्रकार से परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{जब } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{जब } x = \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{जब } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1/2} f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\text{R.H.L.} = f\left(\frac{1}{2}+0\right) = \lim_{x \to 1/2+0} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2}+h\right) = \lim_{h \to 0}\left[1 - \frac{1}{2} - h\right] = \lim_{h \to 0}\left[\frac{1}{2} - h\right] = \frac{1}{2}$$

$$\text{L.H.L.} = f\left(\frac{1}{2}-0\right) = \lim_{x \to 1/2-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2}-h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{1}{2}-h\right) = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ R.H.L. = L.H.L.

अत: $\lim_{x \to 1/2} f(x) = \frac{1}{2}.$ **उत्तर**

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

1. $\lim_{x \to 0} (7x^2 - 5x + 1).$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x}.$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x/2} - 1}{x}.$
4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$
5. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$
6. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$
7. $\lim_{x \to 0} \frac{y^2}{x}$ जहाँ $y^2 = ax + bx^2 + cx^3.$
8. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1 + x^2}.$
9. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}.$
10. $\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2}.$

नोट

11. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

12. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

13. $\lim_{x \to a} \frac{x^5 - a^5}{x^2 - a^2}$.

14. $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$.

15. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$.

16. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 5x + 1}$.

17. $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

18. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$.

19. यदि $f(x) = |x|$, तो दिखाइए कि $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

20. यदि $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, दिखाइए कि $\lim_{x \to 1} f(x)$ अस्तित्वविहीन है।

21. फलन $f(x)$ इस प्रकार परिभाषित है कि

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } 0 \le x < 1 \\ 2, & \text{यदि } x = 0 \\ 2 - x, & \text{यदि } x \ge 1 \end{cases}$$

दिखाइए कि $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

22. सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 1} = 1$.

23. $\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ का मान निकालिए।

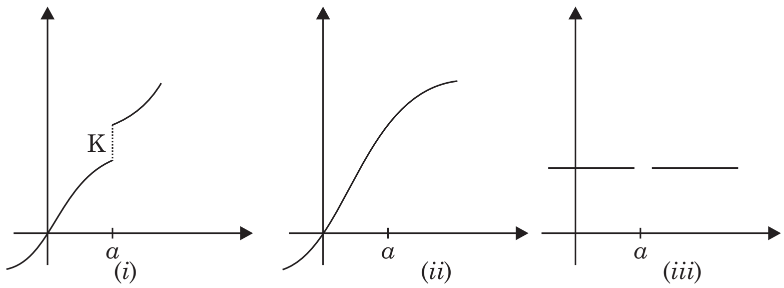
उत्तर

1. 1	2. 0	3. $\frac{1}{2}$	4. 3	5. 4
6. $\frac{1}{2}$	7. a	8. 1	9. 1	10. $2a^2$
11. $\frac{3}{2}$	12. 4	13. $\frac{5}{2}a^3$	14. n	15. $\frac{1}{2}$
16. 3	17. $\frac{1}{e}$	18. 2	23. $\frac{m}{n}$	

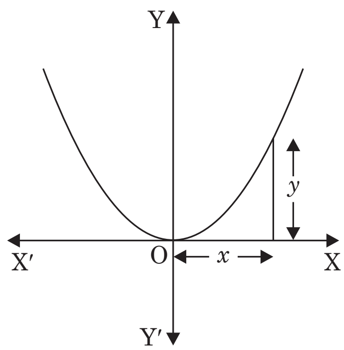
2.9 ज्यामितीय परिभाषा (Geometrical Definition)

सांतत्य एवं असांतत्य (Continuity and Discontinuity): यदि किसी फलन $f(x)$ का लेखाचित्र (graph) खीचने पर जो वक्र प्राप्त होता है। वह इस प्रकार हो कि किसी बिन्दु $x = a$ पर टूटता (break) न हो, (भंग न होता हो) तो फलन $f(x)$ उस बिन्दु पर **संतत** (continuous) कहलाता है।

नोट



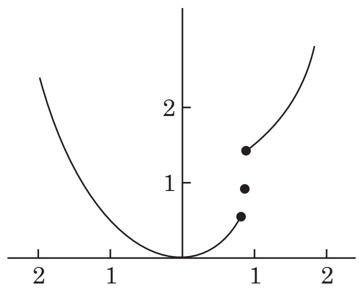
इसके विपरीत यदि किसी बिन्दु $x = a$ पर फलन $f(x)$ का लेखाचित्र टूट (break) जाए तो बिन्दु $x = a$ पर फलन $f(x)$ असतत (discontinuous) कहलायेगा। फलनों के निम्न लेखाचित्रों को देखकर ज्ञात होता है कि चित्र (i) में $f(x)$ के लेखाचित्र में बिन्दु $x = a$ पर किसी ऊँचाई उदाहरणार्थ k का एक **'उछाल'** (jump) है कि यदि हम लेखाचित्र के अनुदिश बायीं ओर से दायीं ओर चल रहे हों तो $x = a$ एक भंग (break) है और हमें $x = a$ की एक ओर से दूसरी ओर चलने में पेंसिल को उठाना पड़ेगा। फलन (iii) का वक्र भी $x = a$ पर भंग (break) है। फलन (ii) $x = a$ पर भंग (break) नहीं है अर्थात् वक्र इस प्रकार है कि टूटता नहीं है। अतः फलन $f(x)$, $x = a$ पर **संतत** है।



उदाहरण (*i*) यदि हम फलन $y = x^2$ का लेखाचित्र खींचे तो यह एक परवलय होता है जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। ऐसे फलनों के लेखाचित्र पर यदि हम दाहिने से बायें या बायें से दाहिने एक तरफ से दूसरी तरफ चलें तो हम कोई क्रम-भंग नहीं पायेंगे और यदि हम लेखाचित्र पर एक किनारे से दूसरे किनारे पर पेंसिल चलायें तो बीच में कहीं भी पेंसिल उठानी नहीं पड़ेगी। यह फलन संतत फलन (Continuous function) है।

उदाहरण (*ii*) $$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{यदि } x < 1 \\ 1, & \text{यदि } x = 1 \\ 1 + \frac{1}{2}x^2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

का लेखाचित्र यदि हम खींचे तो दो विभिन्न परवलय तथा एक बिन्दु (1, 1) प्राप्त होगा जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। यहाँ यदि हम दाहिने से बायें या बायें से दाहिने चलें तो, $x = 1$ पर क्रम भंग है और यदि हम $x = 1$ के एक तरफ से दूसरी तरफ पेंसिल चलायें तो $x = 1$ पर पेंसिल को उठाना (to lift) पड़ेगा। यह फलन असंतत (Discontinuous) है।



हम देखते हैं कि यदि किसी बिन्दु पर फलन असंतत है तो उस बिन्दु पर फलन के मान में एकाएक छलांग (sudden jump) होती है जबकि संतत फलन का मान, x का मान बदलने पर धीरे-धीरे बदलता है। अतः यदि किसी बिन्दु $x = a$ पर फलन संतत है तो $| f(x) - f(a) |$ का मान, x को a के बहुत सन्निकट चुनकर स्वेच्छानुसार छोटा किया जा सकता है।

2.10 किसी बिन्दु पर फलन का सांतत्य (Continuity of a Function at any point)

नोट

कॉशी परिभाषा (Cauchy's definition): एक फलन $f(x)$, $x = a$ पर संतत कहलाता है। यदि एक स्वेच्छ (arbitrary) चुनी गई धनात्मक संख्या ε जो कितनी भी छोटी हो किन्तु शून्य न हो, के लिए हम ε पर निर्भर एक ऐसी धनात्मक संख्या δ ऐसी प्राप्त कर सके कि $| f(x) - f(a) | < \varepsilon$, x के उन सभी मानों के लिए जिनके लिए

$$0 < | x - a | < \delta.$$

अर्थात् अन्तराल $(a - \delta, a + \delta)$ के किसी भी बिन्दु x पर फलन $f(x)$ तथा $f(a)$ का धनात्मक अन्तर एक स्वेच्छतया निर्दिष्ट धनात्मक संख्या ε से भी कम हो, तो फलन $f(x)$ बिन्दु $x = a$ पर **संतत** कहलाता है।

वैकल्पिक परिभाषा: फलन $f(x)$, $x = a$ पर संतत (Continuous) कहलाता है यदि $\lim_{x \to a}$ का अस्तित्व हो और वह $x = a$ पर फलन के मान के बराबर हो।

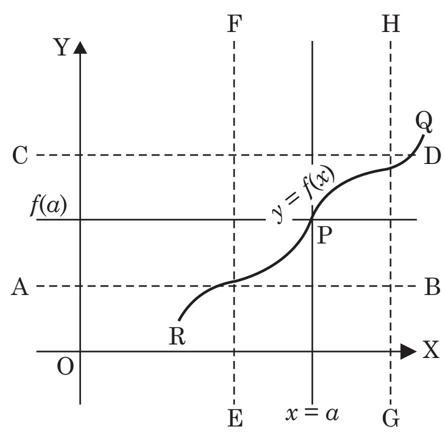
नोट्स $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ अर्थात् [$f(x)$ की सीमा, जब $x \to a$] = [फलन का मान, जब $x = a$]

अत: यदि $f(a + 0) = f(a - 0) = f(a)$, तो $f(x)$ को $x = a$ पर संतत कहते हैं। अन्यथा $x = a$ पर फलन असंतत है। फलन $f(x)$ बिन्दु $x = a$ पर संतत कहलाता है यदि फलन निम्नलिखित तीन शर्तों की पुष्टि करे :

1. यदि फलन $f(x)$, $x = a$ पर परिभाषित हो अर्थात् $x = a$ पर फलन का एक निश्चित मान हो।
2. जब x का मान a की ओर अग्रसर हो, तब $f(x)$ किसी सीमा की ओर अग्रसर हो अर्थात् $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व हो।
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ हो।

2.11 सांतत्य का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Continuity)

मान लो QR फलन $f(x)$ का लेखाचित्र है। इस लेखाचित्र में बिन्दु $P[a, f(a)]$ पर विचार करो। यदि ε कोई स्वेच्छतया निर्दिष्ट धनात्मक संख्या है तो रेखाएँ $y = f(a) - \varepsilon$, $y = f(a) + \varepsilon$, x-अक्ष के समान्तर और P के नीचे की ओर तथा ऊपर की ओर होगी।



दिये हुए ε के संगत $x = a$ के परित: हम एक अन्तराल जिसकी चौड़ाई 2δ है, ज्ञात कर सकते हैं जिसे रेखा $x = a$ के दोनों ओर तथा y-अक्ष के समान्तर रेखाओं $x = a - \delta$ और $x = a + \delta$ द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

यदि दो रेखाओं $x = a - \delta$, $x = a + \delta$ के बीच फलन $f(x)$ के लेखाचित्र का प्रत्येक बिन्दु दो रेखाओं $y = a$

नोट

$-\varepsilon, y = a + \varepsilon$ के बीच में भी हो तो फलन $f(x)$ बिन्दु $x = a$ पर संतत है।

उदाहरणत : (i) अचर फलन (constant function) $f(x) = c$, x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए संतत है।

(ii) फलन $f(x) = \sin x$ तथा $f(x) = \cos x$, x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए संतत है।

2.12 किसी बिन्दु पर फलन का सांतत्य ज्ञात करने की विधि (Method to Finding Continuity of a Function at any Point)

सीमा (limit) की परिभाषा से स्पष्ट है कि $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व (existence) तभी होता है, जब

$f(x)$ की वाम पक्ष सीमा = $f(x)$ की दक्षिण पक्ष सीमा

अर्थात् $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

अथवा $$f(a - 0) = f(a + 0)$$

अत: **बिन्दु $x = a$ पर फलन $f(x)$ का सांतत्य (continuity) प्रदर्शित करने के लिए हमें दिखाना चाहिए कि इस बिन्दु पर $f(x)$ की वाम पक्ष सीमा = $f(x)$ की दक्षिण पक्ष सीमा = फलन का मान**

Left Hand Limit = Right Hand Limit = Value of the function

अर्थात् $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

अथवा $$f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$$

दक्षिण पक्ष सीमा (R.H.L.) के लिए $f(x)$ में $x = a + h$ रखो, जहाँ $h \to 0$, जब $x \to a$

वाम पक्ष सीमा (L.H.L.) के लिए $f(x)$ में $x = a - h$ रखो, जहाँ $h \to 0$, जब $x \to a$

2.13 एक अन्तराल में फलन का सांतत्य (Continuity of a Function in an Interval)

एक फलन $f(x)$ किसी विवृत अन्तराल (a, b) में संतत कहा जाता है यदि यह अन्तराल (a, b) में x के सभी मानों के लिए संतत है।

फलन $f(x)$ किसी संवृत अन्तराल (closed interval) $[a, b]$ में संतत कहा जाता है, यदि

(i) यह x के उन सभी मानों के लिए संतत हो जिसके लिए $a < x < b$

(ii) $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$

(iii) $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

अर्थात् फलन खुले अन्तराल (a, b) में संतत हो तथा $x = a$ पर दक्षिण पक्ष से तथा $x = b$ पर वाम पक्ष से संतत हो।

एक अन्तराल में असांतत्य (Discontinuity in an interval)**:** फलन $f(x)$ किसी अन्तराल में असंतत कहा जाता है यदि यह अन्तराल में किसी एक बिन्दु पर अथवा बहुत से बिन्दुओं पर असंतत हो।

2.14 संतत फलनों पर प्रमेय (Theorem on Continuous Functions)

नोट

(*i*) यदि $f(x)$ और $g(x)$ दोनों किसी बिन्दु $x = a$ पर संतत हों तो $f(x) \pm g(x)$ भी $x = a$ पर संतत होगा।

(*ii*) यदि $f(x)$ और $g(x)$ दोनों किसी बिन्दु $x = a$ पर संतत हैं तो $f(x)\ g(x)$ भी $x = a$ पर संतत होगा।

(*iii*) यदि $f(x)$ किसी बिन्दु $x = a$ पर संतत है और k एक निश्चित वास्तविक संख्या है तो $k\,f(x)$ भी $x = a$ पर संतत होगा।

(*iv*) यदि $f(x)$ और $g(x)$ किसी बिन्दु $x = a$ पर संतत है और $g(a) \neq 0$ तो $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ भी $x = a$ पर संतत होगा।

(*v*) यदि $f(x)$, $x = a$ पर संतत है और $f(a) \neq 0$ तो $\dfrac{1}{f(x)}$ भी $x = a$ पर संतत होगा।

(*vi*) यदि $f(x)$, $x = a$ पर संतत है तो $|\,f(x)|$ भी $x = a$ पर संतत होगा।

उदाहरण 1. दिखाइए कि फलन $f(x) = x^2 + 1$, $x = 2$ पर संतत है।

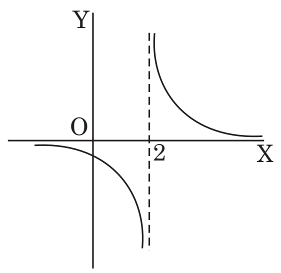
हल : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2).$

अत: फलन $x = 2$ पर संतत है।

उदाहरण 2. फलन $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x = 2$ पर असंतत है। सिद्ध कीजिए।

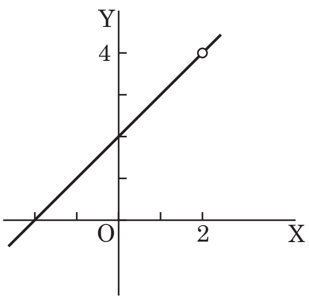
हल : (*i*) $f(2)$ परिभाषित नहीं है (हर शून्य है)।

(*ii*) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है (∞ के बराबर है)।



$x = 2$ को छोड़कर अन्य प्रत्येक बिन्दु पर फलन संतत है। अत: $x = 2$ पर फलन असांतत्य (discontinuity) है।

उदाहरण 3. दिखाइए कि फलन $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x = 2$ पर असंतत (discontinuous) है।



हल : (*i*) $f(2)$ परिभाषित नहीं है (अंश और हर दोनों शून्य हैं)।

(*ii*) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4.$

अत: फलन $x = 2$ असंतत है।

उदाहरण 3 में असांतत्य को दूर किया जा सकता है क्योंकि फलन को पुन:

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$; परिभाषित करके $f(2) = 4$.

नोट

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ और $g(x) = x + 2$ के ग्राफ समान हैं जबकि पहले में छेद (hole) है।

उदाहरण 2 में असांतत्य को दूर नहीं किया जा सकता क्योंकि सीमा का भी अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 4. क्या फलन $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ मूलबिन्दु पर संतत है?

हल : $f(x)$, $x = 0$ पर संतत (continuous) है क्योंकि $f(0) = 1$, (दिया है)

तथा $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$

उदाहरण 5. दिखाइए कि फलन $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 1, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$ मूलबिन्दु पर असंतत है।

हल : $f(x)$, $x = 0$ पर असंतत (discontinuous) है क्योंकि $f(0) = 1$

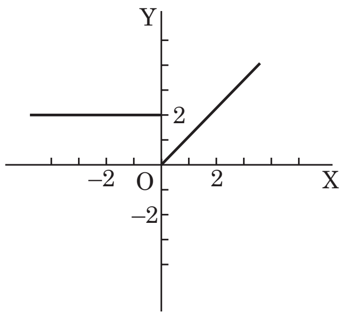
तथा $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x}{x} \cdot \cos x = 2.1 \cos 0^0 = 2$$

अर्थात् $$f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x).$$

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1. $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \text{ के लिए} \\ x, & x \geq 0 \text{ के लिए} \end{cases}$ का आलेख खींचिए। सिद्ध कीजिए कि फलन मूलबिन्दु पर असंतत (discontinuous) है।



हल : $f(x)$ का आलेख खींचना अति सरल है। यह आकृति मे दिखाया गया है। स्पष्ट है कि बिन्दु $x = 0$ पर आलेख में एक उछाल (jump) है। अब हम दक्षिण पक्ष और वाम पक्ष सीमाओं की जाँच करते हैं।

मूलबिन्दु ($x = 0$) पर दक्षिण पक्ष सीमा (R.H.L.):

$x \geq 0$ के लिए, $$f(x) = x$$

$$f(x + h) = (x + h)$$

$$f(0 + h) = (0 + h)$$

$$\lim_{h \to 0} f(0 + h) = \lim_{h \to 0} h$$

$\therefore$ $$f(0 + 0) = 0 \quad \ldots(i)$$

मूलबिन्दु पर वाम पक्ष सीमा (L.H.L.) ($x < 0$ के लिए) **नोट**

$x < 0$ के लिए, $f(x) = 2$

$$f(x-h) = 2$$

$$f(0-h) = 2$$

$$\lim_{h\to 0} f(0-h) = 2$$

$\therefore$ $$f(0-0) = 2 \qquad \ldots(ii)$$

अत: (i) तथा (ii) से $f(0+0) \neq f\,(0-0)$

अत: $x = 0$ पर फलन $f(x)$ असंतत (discontinuous) है।

(**नोट:** विद्यार्थियों को चाहिए कि वह दर्शायें कि $x = 0$ पर $f(x)$ दक्षिण संतत है।)

उदाहरण 2. यदि $f(x) = |x-1| + |x+2|$, जहाँ x कोई भी वास्तविक संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)$, $x = 1$ तथा $x = -2$ पर संतत है।

हल : $x = 1$ पर दक्षिण सीमा (R.H.L.)

$$f(x) = |x-1| + |x+2|$$

$$f(x+h) = |x+h-1| + |x+h+2|$$

$$f(1+h) = |1+h-1| + |1+h+2|$$

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} [\,|h| + |3+h|\,]$$

$$= |0| + |3+0| = 3$$

$x = 1$ पर वाम पक्ष सीमा (L.H.L.)

$$f(1-h) = |1-h-1| + |1-h+2|$$

$$f(1-h) = |1-h| + |3-h|$$

$$\lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} [\,|h| + |3-h|\,]$$

$$= |0| + |3-0| = 3$$

$$\text{L.H.L.} = \text{R.H.L.}$$

अत: $x = 1$ पर संतत है।

$x = -2$ पर दक्षिण सीमा (R.H.L.)

$$f(x) = |x-1| + |x+2|$$

$$f(-2+h) = |-2+h-1| + |-2+h+2|$$

$$= |h-3| + |h|$$

$$\lim_{h\to 0} f(-2+h) = \lim_{h\to 0} [\,|h-3| + |h|\,]$$

$$= |-3| + |0| = 3$$

$x = -2$ पर वाम पक्ष सीमा (L.H.L.)

$$f(x) = |x-1| + |x+2|$$

$$f(-2-h) = |-2-h-1| + |-2-h+2|$$

$$= |-3-h| + |-h|$$

$$= |3+h| + |h|$$

नोट

$$\lim_{h\to 0} f(-2-h) = \lim_{h\to 0} [\,|\,3+h|\,+|\,h\,|\,]$$

$$= 3$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

अत: $x = 1$ पर संतत है।

उदाहरण 3. दिखाइये कि फलन $f(x) = \dfrac{1}{x-a}, x = a$ पर असंतत है।

हल :

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a-h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(a-h)-a} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{-h} = -\infty$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(a+h)-a} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} = \infty$$

$\therefore$ $$\text{L.H.L.} \neq \text{R.H.L.}$$

अत: फलन $x = a$ पर असंतत है। **उत्तर**

उदाहरण 4. दिखाइये कि $f(x) = |\,x\,|, x = 0$ पर संतत है।

हल : यहाँ $$f(0) = |\,0\,| = 0$$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h\to 0} |0-h| = \lim_{h\to 0} (h) = 0$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} |0+h| = \lim_{h\to 0} (h) = 0$$

$\therefore$ $$\text{L.H.L.} = \text{R.H.L.} = f(0)$$

अत: फलन $x = 0$ पर संतत है। **उत्तर**

उदाहरण 5. दिखाइये कि $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ यदि } x \neq 1, \\ 2, \text{ यदि } x = 1. \end{cases}$

बिन्दु $x = 1$ पर असंतत है।

हल : दिया हुआ है, $f(1) = 2$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} (1+h)^2 = 1$$

और $$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{h\to 0} (1-h) = \lim_{h\to 0} (1-h)^2 = 1$$

$\therefore$ $$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$$

अत: फलन $x = 1$ पर असंतत है। **उत्तर**

नोट

उदाहरण 6. k **के किस मान के लिए फलन** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x-4}, & x \neq 4 \\ k, & x = 4 \end{cases}$

$x = 4$ **पर संतत है।**

हल : $\because x = 4$ पर $f(x)$ का मान k है।

$\therefore \qquad f(4) = k$

$x = 4$ पर

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 4+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(4+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{4+h-4} = \lim_{h \to 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 16}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+8)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+8), \ \because h \neq 0$$

$$= 8$$

इसी प्रकार

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 4-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(4-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4-h)^2 - 16}{4-h-4} = \lim_{h \to 0} \frac{16 + h^2 - 8h - 16}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h+8), \ h \neq 0$$

$$= 8$$

दिया है कि फलन $x \neq 4$ पर संतत है।

$$\text{L.H.L.} = \text{R.H.L.} = f(4)$$

$$8 = 8 = k$$

अत: $\qquad k = 8.$ **उत्तर**

टास्क k के किस मान के लिए $f(x)$ $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x-5}, & x \neq 5 \\ k, & x = 5 \end{cases}$

$x = 5$ पर संतत है। **उत्तर:** $k = 10$

उदाहरण 7. फलन $f(x)$ **को बिन्दु (0, 0) पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए जब**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

हल : यहाँ $\qquad f(0) = 1$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0-h|}{0-h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h} = -1$$

नोट

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0-h|}{0+h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

$\therefore$ R.H.L. $\neq$ L.H.L.

अतः फलन $x = 0$ पर असंतत है।

$\because$ L.H.L. = R.H.L. = $f(1)$

अतः $x = 1$ पर फलन संतत है। **उत्तर**

उदाहरण 8. यदि $f(x) = \begin{cases} 3ax + b, & \text{यदि } x > 1 \\ 11, & \text{यदि } x = 1 \\ 5ax - 2b, & \text{यदि } x < 1 \end{cases}$

$x = 1$ पर एक संतत फलन है, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि दिया हुआ फलन $f(x)$, $x = 1$ पर संतत फलन है। अतः

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1+0} f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(1+h) = 11$$

$$\lim_{h \to 0} 3a(1+h) + b = 11$$

$$3a + b = 11 \qquad \ldots(i)$$

इसी प्रकार, $\lim_{x \to 1-0} f(x) = 11$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} 5a(1-h) - 2b = 11$$

$$\Rightarrow 5a - 2b = 11 \qquad \ldots(ii)$$

समी. (i) व (ii) को हल करने पर

$$a = 3, b = 5.$$ **उत्तर**

उदाहरण 9. फलन $f(x)$ एक अन्तराल [0, 1] में निम्न प्रकार से परिभाषित है–

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{यदि } x = 0 \\ \frac{1}{2} - x, & \text{यदि } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{यदि } x = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} - x, & \text{यदि } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1, & \text{यदि } x = 1 \end{cases}$$

उन बिन्दुओं को ज्ञात करो जिन पर फलन असंतत है।

नोट

हल : (*i*) $x = 0$ पर सांतत्य $f(0) = 0$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{1}{2} - (0+h)\right\} = \frac{1}{2} \neq f(0)$$

$\therefore$ फलन $x = 0$ पर असंतत है।

(*ii*) $x = \frac{1}{2}$ पर सांतत्य $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 1/2-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2} - h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - h\right)\right\} = 0$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 1/2+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2} + h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + h\right)\right\} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{6} - h\right) = \frac{1}{6}.$$

$\therefore$ $\qquad$ L.H.L. $\neq$ R.H.L.

अत: फलन $x = \frac{1}{2}$ पर असंतत है।

(*iii*) $x = 1$ पर सांतत्य $f(1) = 1$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{2}{3} - (1-h)\right\} = -\frac{1}{3} \neq f(1)$$

उत्तर

अत: फलन $x = 1$ पर असंतत है।

उदाहरण 10. फलन $f(x)$ की $x = 0, 1$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए जब

$$f(x) = |\,x\,| + |\,x - 1\,| \text{ या}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{यदि } x < 0 \\ 1, & \text{यदि } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & \text{यदि } x \geq 1 \end{cases}$$

हल : (*i*) $x = 0$ पर सांतत्य

$$f(0) = 1$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} (1) = 1$$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (1 + 2h) = 1$$

नोट

$\therefore$ $\qquad$ L.H.L. = $f(0)$ = R.H.L.

अत: फलन $x = 0$ पर संतत है।

(*ii*) $x = 1$ पर सांतत्य

$$f(1) = (2 \times 1 - 1) = 1,$$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} (1) = 1.$$

$$\text{R.H.L} = \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} \{2\,(1+h) - 1\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \{1 + 2h\} = 1$$

$\therefore$ $\qquad$ L.H.L. = $f(1)$ = R.H.L.

अत: फलन $x = 1$ संतत है। **उत्तर**

उदाहरण 11. प्रदर्शित करो कि जो फलन *f*(*x*), $\forall x \in R$ निम्न प्रकार से परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ असंतत (discontinuous) है।

हल : $x = 0$ पर दिया हुआ है कि

$$f(0) = 0 \qquad \ldots(i)$$

$x = 0$ पर दक्षिण पक्ष सीमा (R.H.L.):

$$f(x+h) = \frac{e^{1/(x+h)}}{1 + e^{1/(x+h)}}$$

$$f(0+h) = \frac{e^{1/(0+h)}}{1 + e^{1(0+h)}}$$

$$\therefore \qquad \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{1/h}}{1 + e^{1/h}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{e^{-1/h + 1}}$$

अत: $\qquad f(0+0) = \dfrac{1}{0+1} = 1, \qquad [\because \lim_{h \to 0} e^{-1/h} = 0] \qquad \ldots(ii)$

$x = 0$ पर वाम पक्ष सीमा (L.H.L.):

$$f(x-h) = \frac{e^{1/(x-h)}}{1 + e^{1/(x-h)}}$$

$$f(0-h) = \frac{e^{1/(0-h)}}{1 + e^{1/(0-h)}} = \frac{e^{-1/h}}{1 + e^{-1/h}}$$

नोट

$\therefore \quad \lim_{h \to 0} f(0-h) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h}}{1+e^{-1/h}}$

अत: $\quad f(0-0) = \frac{0}{1+0} = 0 \quad \ldots(iii)$

(ii) तथा (iii) से दक्षिण पक्ष सीमा $\neq$ वाम पक्ष सीमा

अत: दिया हुआ फलन $x = 0$ पर असंतत है। **उत्तर**

उदाहरण 12. एक फलन $f(x)$ निम्नानुसार परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} x, x < 1 \\ 2-x, 1 \le x \le 2 \\ x - \frac{1}{2}x^2 \; x > 2. \end{cases}$$

क्या $f(x)$, $x = 1$ और $x = 2$ पर संतत है?

हल: पहले हम $x = 1$ पर जाँच करते हैं।

अत: $x = 1$ पर $f(x) = 2 - x$ से $f(1) = 2 - 1 = 1 \quad \ldots(i)$

$x = 1$ पर दक्षिण पक्ष सीमा (R.H.L.) $\because x > 1$ के लिए $f(x) = 2 - x$

अब $\quad f(1+0) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} 2-(1+h)$

$$= \lim_{h \to 0} 1-h = 1 \quad \ldots(ii)$$

$x = 1$ पर वाम पक्ष सीमा (L.H.L.) $\because f(x) = x$,

$$f(1-0) = \lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} (1-h) = 1 \quad \ldots(iii)$$

अत: (i), (ii) व (iii) से $x = 1$ पर $f(1) = f(1+0) = f(1-0)$.

अत: $x = 1$ पर $f(x)$ संतत है।

पुन: $x = 2$ पर $f(x) = 2 - x$ से $f(2) = 2 - 2 = 0 \quad \ldots(iv)$

$x = 2$ पर दक्षिण पक्ष सीमा (R.H.L.) $\because x > 2$ के लिए $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$

$$f(2+0) = \lim_{h \to 0} f(2+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (2+h) - \frac{1}{2}(2+h)^2$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{2}h^2 - h = 0; \quad \ldots(v)$$

$x = 2$ पर वाम पक्ष सीमा (L.H.L.) $\because x < 2$ के लिए $f(x) = 2 - x$

$$f(2-0) = \lim_{h \to 0} f(2-h) = \lim_{h \to 0} 2-(2-h) = 0. \quad \ldots(vi)$$

नोट

$\therefore$ (*iv*), (*v*), (*vi*) से,

$$f(2) = f(2+0) = f(2-0) = 0.$$

अत: $x = 2$ पर $f(x)$ संतत है।

प्रश्नावली 2.2

निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक के लिए असांतत्य (discontinuity) के बिन्दु, यदि कोई है तो ज्ञात कीजिए और लेखाचित्र खींचिए–

1. $f(x) = \begin{cases} -1, x \le 0 \\ +1, x > 0. \end{cases}$

2. $f(x) = |x - 1|$.

3. $f(x) = |x| + |x - 1|$.

दिखाइए कि निम्न फलनों में से प्रत्येक अपने सम्मुख दर्शाये बिन्दुओं पर संतत है:

4. फलन $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $x = 1, 3$ पर।

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, x \ne -2 \\ 0, x = -2 \text{ पर।} \end{cases}$

6. यदि $f(x) = \begin{cases} x - 4, \text{ जबकि } x \ge 5 \\ 5x - 24, \text{ जबकि } x < 5 \end{cases}$

तो दर्शाइए कि $f(x)$, $x = 5$ पर एक संतत फलन है।

7. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)$ जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, x < 2 \\ 2x - 3, x \ge 2 \end{cases}$$

हर बिन्दु पर संतत है। फलन का लेखाचित्र भी खींचिए।

निम्न फलनों के सांतत्य का परीक्षण कीजिए–

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \ne 2 \\ 4, & x = 2 \text{ पर।} \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}, & x \ne a \\ 2a, & x = a \text{ पर।} \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2, x \ne 1 \\ 2, x = 1 \text{ पर।} \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ x^2, x < 0. \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 3, & x = 0 \text{ पर।} \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 3|}{x - 3}, & x \ne 3 \\ 0, & x = 3. \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} -x^2, x \le 0 \\ x^2, x > 0 \text{ पर।} \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - e^{1/x}}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \text{ पर।} \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ पर।} \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ पर।} \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \text{ पर।} \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ पर।} \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ पर।} \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 5x-4, & 0 < x \leq 1 \\ 4x^3 - 3x, & 1 < x < 2 \text{ पर।} \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -1 < x < 3 \\ 5, & x = 3 \\ 8-x, & x > 3 \text{ पर।} \end{cases}$

23. बिन्दु $x = 1$ तथा $x = 2$ पर फलन की संततता ज्ञात कीजिए। $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ यदि } 0 < x < 1 \\ x, \text{ यदि } 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{x^3}{4}, \text{ यदि } 2 \leq x < 3 \end{cases}$

24. फलन $f(x)$ की $x = 0, 1, 2$ पर संततता ज्ञात कीजिए जब

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{यदि } x \leq 0 \\ 5x-4, & \text{यदि } 0 < x \leq 1 \\ 4x^2 - 3x, & \text{यदि } 1 < x < 2 \\ 3x+4, & \text{यदि } x \geq 2. \end{cases}$$

25. यदि $f(x) = x^2 + 1$, जब $x \neq 1$ तथा $f(x) = 3$ जब $x = 1$, तो ज्ञात कीजिए कि $f(x)$ बिन्दु $x = 1$ पर संतत है अथवा असंतत।

उत्तर

1. 0	2. कोई नहीं	3. कोई नहीं	8. संतत
9. संतत	10. असंतत	11. संतत	12. असंतत
13. $x = 3$, असंतत	14. $x = 0$, संतत	15. असंतत	16. असंतत
17. $x = 0$, संतत	18. असंतत	19. असंतत	20. असंतत
21. संतत	22. संतत	23. हाँ	24. सतत, $x = 1, 2$ तथा
असंतत $x = 0$ पर	25. असंतत।		

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)–

(*i*) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ का मान है–

(*a*) $3a^2$ (*b*) $3a$ (*c*) $3b^2$ (*d*) $3b$

नोट

(*ii*) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ = ...

(*a*) $\frac{1}{e}$ (*b*) e (*c*) $-e$ (*d*) ∞

(*iii*) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x} = \log e....$

(*a*) $\frac{b}{a}$ (*b*) $\frac{1}{b}$ (*c*) $\frac{a}{b}$ (*d*) $-\frac{a}{b}$

(*iv*) यदि $f(x)$ और $g(x)$ दोनों किसी बिन्दु $x = a$ पर संतत हों तो $f(x) \pm g(x)$, $x = a$ पर क्या होगा?

(*a*) संतत (*b*) असंतत (*c*) संगत (*d*) असंगत

(*v*) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}-1}{e^{x^2}+1}$ = ...

(*a*) 2 (*b*) $2e$ (*c*) 1 (*d*) $\frac{1}{e}$

2.15 सारांश (Summary)

- जब फलन की सीमा स्वतंत्र चर के मान के दाहिनी ओर से प्राप्त की जाती है तो उसे फलन की **दक्षिण पक्ष सीमा (R.H.L.)** कहते हैं और दाहिनी ओर के लिए धन चिह्न का प्रयोग करते हुए सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं–

  दक्षिण पक्ष सीमा $= f(a + 0)$

  $$= \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1.$$

- जब फलन की सीमा स्वतंत्र चर के मान के बायीं ओर से प्राप्त की जाती है तो उसे **वाम पक्षीय सीमा** कहते हैं और बायीं ओर के लिए (–) चिह्न का प्रयोग करते हुए सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं–

  वाम पक्ष सीमा $= f(a - 0)$

  $$= \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2.$$

- दक्षिण पक्ष तथा वाम पक्ष सीमा ज्ञात करने के लिए फलन में चर x के स्थान पर क्रमशः $(x + h)$ तथा $(x - h)$ प्रतिस्थापित कीजिए।
- इस प्रकार (*i*) से प्राप्त फलन x को दिये हुए बिन्दु (मान लो a) से प्रतिस्थापित कीजिए।
- $h \to 0$ पर फलन की सीमा ज्ञात कीजिए [अर्थात् (*ii*) से प्राप्त फलन को उपर्युक्त रूप में रखकर h = 0 रखिये]।

नोट

- यदि किसी फलन $f(x)$ की $x = a$ पर दक्षिण पक्ष तथा वाम पक्ष दोनों सीमाएँ विद्यमान तथा एकसमान हों, तो फलन $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा का अस्तित्व होता है।

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l \text{ (मानलो)}$$

- यहाँ l फलन की सीमा कहलाती है तथा इसे हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं–

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

- हमें सीमा ज्ञात करने के लिए दक्षिण पक्ष व वाम पक्ष दोनों सीमाएँ ज्ञात करनी चाहिए परन्तु माध्यमिक स्तर पर हम सीमा अधिकांशत: सीधे ही ज्ञात करते हैं।
- अंश और हर दोनों को उसके उभयनिष्ठ गुणनखण्ड जो शून्य नहीं, से भाग देना तुरन्त सम्भव न हो तो श्रेणी प्रसार (expansion in series) या किसी रूपान्तरण (transformation) के बाद यह क्रिया संभव हो सकती है।
- यदि किसी फलन $f(x)$ का लेखाचित्र (graph) खीचने पर जो वक्र प्राप्त होता है। वह इस प्रकार हो कि किसी बिन्दु $x = a$ पर टूटता (break) न हो, (भंग न होता हो) तो फलन $f(x)$ उस बिन्दु पर **सतत** (continuous) कहलाता है।
- फलन $f(x)$ किसी विवृत अन्तराल (a, b) में संतत कहा जाता है यदि यह अन्तराल (a, b) में x के सभी मानों के लिए संतत है।
- फलन $f(x)$ किसी संवृत अन्तराल (closed interval) $[a, b]$ में संतत कहा जाता है, यदि
  (*i*) यह x के उन सभी मानों के लिए संतत हो जिसके लिए $a < x < b$
  (*ii*) $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ (*iii*) $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

2.16 शब्दकोश (Keywords)

- अनुक्रम (Sequence)—क्रम, सिलसिला।
- सतत (Continually)—लगातार।

2.17 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x - a} \right)$ का मान ज्ञात करें। **(उत्तर : $-a$)**

2. सिद्ध करें कि $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log e \frac{a}{b}$.

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ का मान ज्ञात करें। **(उत्तर : 3)**

4. फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \text{ पर।} \end{cases}$ के सांतत्य का परीक्षण करें। **(उत्तर: असंतत)**

5. दर्शाएँ कि $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर संतत है।

नोट

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. (*i*) दक्षिण पक्ष सीमा (*ii*) वाम पक्षीय सीमा (*iii*) अस्तित्व (*iv*) सीमांत (*v*) माध्यमिक।
2. (*i*) (*a*) (*ii*) (*b*) (*iii*) (*c*) (*iv*) (*a*) (*v*) (*c*)

2.18 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
7. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*

इकाई—3 : अवकलन
(Differentiation)

अनुक्रमणिका (Contents)

नोट

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- अवकल-गुणांक अथवा अवकलज निकालने में।
- किसी अचर राशि का अवकल-गुणांक ज्ञात करने हेतु।
- x^n का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक की जानकारी हेतु।
- दो फलनों के योग, अंतर, गुणा तथा भागफल का अवकल-गुणांक निकालने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

मान लो $\qquad y = x^2$

जब $x = 2$, तो $y = 4$, जब $x = 3$, $y = 9$.

x, 2 से बढ़कर 3 हो जाता है तो y भी 4 से बढ़कर 9 हो जाता है। कोई चर कितना बढ़ता है उसे उसकी वृद्धि (Increment) कहते हैं। x की वृद्धि को प्राय: δx से सूचित करते हैं और 'डेल्टा एक्स' (delta x) कहकर पढ़ते हैं।

उपर्युक्त उदाहरण में $\delta x = 3 - 2 = 1$ और $\delta y = 9 - 4 = 5$

यदि x, 1 से बदलकर .8 हो जाए तो $\delta x = .8 - 1 = - .2$.

> *नोट्स* यह ध्यान रखना चाहिए कि δx कर अर्थ $= \delta \times x$ नहीं है अर्थात् यह δ और x का गुणनफल न होकर एक प्रतीक (Symbol) है। यह एकल राशि है।

यह भी स्पष्ट है कि यदि स्वतन्त्र चर का मान x से बदलकर $x + \delta x$ हो जाए तो परतन्त्र चर का मान भी y से बदलकर $y + \delta y$ हो जायेगा।

3.1 अवकल-गुणांक अथवा अवकलज (Differential Coefficient)

मान लो $y = x^2$, x का फलन है। मान लो x का प्रारम्भिक मान 3 है।

निम्न सारणी में दिखाया गया है कि x में वृद्धि δx होने पर y में वृद्धि δy तथा इन वृद्धियों में अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ के मान में किस प्रकार परिवर्तन होता है। यहाँ x के प्रारम्भिक मान 3 में 4, 3, 2, 1, ... इत्यादि की वृद्धि ली गयी है।

δx	नया x $(x + \delta x)$	नया y $(y + \delta y)$	δy	$\frac{\delta y}{\delta x}$
4	7	49	40	10
3	6	36	27	9

नोट

2	5	25	16	8
1	4	16	7	7
0.1	3.1	9.61	.61	6.1
0.01	3.01	9.0601	.0601	6.01
0.001	3.001	9.006001	.006001	6.001
0.0001	3.0001	9.00060001	.00060001	6.0001
h	$3 + h$	$6 + 6h + h^2$	$6h + h^2$	$6 + h$

इस सारणी से स्पष्ट है कि

1. ज्यों-ज्यों δx छोटा होकर शून्य की ओर अग्रसर होता है (approaches zero) त्यों-त्यों δy भी छोटा होकर शून्य की ओर अग्रसर होता है।

2. परन्तु इन दोनों का अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ छोटा होने पर भी शून्य की ओर अग्रसर होने के स्थान पर एक स्थिर मान की ओर अग्रसर होता है जो इस उदाहरण में 6 है।

अत: परिणाम निकलता है कि जब δx और इसके परिणामस्वरूप δy अत्यल्प हो जोते हैं तो $\frac{\delta y}{\delta x}$, 6 की ओर अग्रसर होता है। दूसरे शब्दों में,

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 6$$

व्यापक रूप में, $y = x^2$

$\therefore \quad y + \delta y = (x + \delta x)^2$

$\therefore \quad y + \delta y - y = (x + \delta x)^2 - x^2$

$\therefore \quad \delta y = x^2 + 2x.\delta x + (\delta x)^2 - x^2$

$\therefore \quad \delta y = 2x.\delta x + (\delta x)^2$

$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x$

$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = \lim_{\delta x \to 0} (2x + \delta x)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2x$

$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ को फलन y का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक (Differential coefficient of y with respect to x) या अवकलज (Derivative) कहते हैं। स्वतन्त्र चर के किसी प्रकार के सन्देह से बचने के लिए कहा जाता है कि फलन का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ को $\frac{d}{dx}(y)$ या $\frac{dy}{dx}$ लिखते हैं। इस प्रकार सीमा

नोट

ज्ञात करने की इस क्रिया को अवकलन करना कहते हैं या किसी फलन के अवकल-गुणांक ज्ञात करने की संक्रिया को अवकलन (Differentiation) कहते हैं।

क्या आप जानते हैं $\quad \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x}$

विद्यार्थियों को $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ तथा $\dfrac{dy}{dx}$ के अन्तर को बड़ी सावधानी से समझना चाहिए। $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ एक भिन्न है जिसके अंश और हर को एक-दूसरे से अलग किया जा सकता है किन्तु $\dfrac{dy}{dx}$ भिन्न नहीं है अपितु भिन्न $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ के सीमांत मान (limiting value) को प्रकट करने का एक संकेत मात्र है। dy को dx से अलग नहीं किया जा सकता। इसको dy बटे dx (dy upon dx) पढ़ना अशुद्ध है। $\dfrac{dy}{dx}$ को डी डी एक्स ऑफ वाई [d–dx of y] पढ़ा जाता है और जैसे हम पहले बता चुके हैं इसका अर्थ है $\dfrac{d}{dx}(y)$ अर्थात् y का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक।

3.2 परिभाषा (Definition)

यदि x का कोई फलन $f(x)$ और $x + \delta x$ का वही फलन $f(x + \delta x)$ हो तो $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$ का सीमान्त मान (limiting value), x के सापेक्ष $f(x)$ का अवकल-गुणांक या अवकलन (differential coefficient) कहलाता है।

टिप्पणी 1. साधारणत: अवकल-गुणांक (differential coefficient) को $\dfrac{dy}{dx}, y', y_1, \dfrac{df(x)}{dx}, \dfrac{d}{dx} f(x)$, $f'(x), Df(x), f'$ इत्यादि संकेतों से प्रकट करते हैं।

टिप्पणी 2. किसी फलन के अवकल-गुणांक (differential coefficient) को ज्ञात करने की विधि को **फलन का अवकलन करना** (differentiating the function) कहते हैं।

अत: हम देखते हैं कि अवकलन की विधि में चार पद (steps) होते हैं:

प्रथम पद–x को $x + \delta x$ में बदलना तथा $f(x + \delta x)$ ज्ञात करना।

द्वितीय पद–अन्तर $f(x + \delta x) - f(x)$ ज्ञात करना।

तृतीय पद–अन्तर को δx से विभाजित करना और इस प्रकार $\dfrac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$ ज्ञात करना।

चतुर्थ पद–जब δx शून्य की ओर अग्रस्त होता है तब अनुपात $\dfrac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$ की सीमा ज्ञात करना।

टिप्पणी–यहाँ से आगे x की वृद्धि δx के स्थान पर h लिखा जायेगा ताकि विद्यार्थी δ और x की दुविधा में न पड़ें। इसलिए यदि $f(x)$, x का कोई फलन है तो

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

को $f(x)$ का अवकल-गुणांक कहते हैं। यह ध्यान में रखना चाहिए कि उपर्युक्त व्यंजक को h का फलन माना जाता है अर्थात् h को चर माना जाता है और x को अचर।

3.3 किसी अचर राशि का अवकल-गुणांक (Differential Coefficient of a Constant)

मान लो c कोई अचर राशि है। इसलिए यहाँ $f(x) = c$ अब x के समस्त मानों के लिए अचर राशि में कोई परिवर्तन नहीं हो सकता।

अतएव $\qquad f(x + h) = c$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} c = 0}$$

अत: अचर राशि का अवकल-गुणांक शून्य होता है।

3.4 अचर राशि और फलन के गुणनफल का अवकल-गुणांक (Differential Coefficient of the Product of a Constant and a Function)

मान लो कि a कोई अचर राशि है तथा $f(x)$ दिया हुआ फलन है, तो

$$\frac{d}{dx} \{af(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{af(x+h) - af(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{a \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}$$

$$= a \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \frac{d}{dx} \{f(x)\}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \{af(x)\} = a \frac{d}{dx} \{f(x)\}}$$

यदि $y = au$ तो $\dfrac{dy}{dx} = a \dfrac{du}{dx}$

क्या आप जानते हैं	अचर और किसी फलन के गुणनफल का अवकल-गुणांक फलन के अवकल-गुणांक और अचर के गुणनफल के बराबर होता है।

नोट

3.5 x^n का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक (Differential Coefficient of x^n Respect to x)

मान लो $f(x) = x^n$ हो तो $f(x + h) = (x + h)^n$

अत: x^n का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक $\frac{d}{dx}(x^n)$ है।

$$\therefore \qquad \frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^n . \frac{(1 + h/x)^n - 1}{h}, \text{ } x^n \text{ को बाहर निकालकर।}$$

अब चूँकि $h \to 0$, हम $\frac{h}{x}$ को इकाई से छोटा मान सकते हैं। अत: n के सभी मानों के लिए $(1 + h/x)^n$ का द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem) से प्रसार करने पर

$$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \to 0} \frac{x^n}{h}\left\{1 + n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{h^2}{x^2} + ... - 1\right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n}{h}\left\{n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{h^2}{x^2} + ...\right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^n \left\{\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)\,h}{1.2x^2} + ...\right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^n \left\{\frac{n}{x} + h \times (\text{एक अभिसारी श्रेणी})\right\}$$

$$= nx^{n-1}, \text{ क्योंकि } h \to 0$$

$$\therefore \qquad \boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$$

इसका एक विशिष्ट परिणाम यह है, $\boxed{\frac{d}{dx}x = 1}$

उदाहरण 1. $\frac{d}{dx}(9x^7) = 9.\frac{d}{dx}(x^7) = 9.7x^{7-1} = 63x^6$.

उदाहरण 2. $\frac{d}{dx}(-6x^2) = -6\frac{d}{dx}x^2 = -6.2x^{2-1} = -12x$.

उदाहरण 3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = -\frac{1}{2}x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$.

टास्क $\frac{d}{dx}(5x^6)$ का मान ज्ञात करें। **(उत्तर : $30x^5$)**

VED1
E\L-LOVELY-H\math3-1 IInd 21-10-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

(*i*) किसी फलन के अवकल-गुणांक को ज्ञात करने की विधि को फलन का .... करना कहते हैं।

(*ii*) अचर और किसी फलन के गुणनफल का अवकल-गुणांक फलन के अवकल-गुणांक और अचर के .... के बराबर होता है।

(*iii*) $\dfrac{dy}{dx} = ... \dfrac{du}{dx}$

(*iv*) $\dfrac{d}{dx}x^n = nx$ ....

(*v*) $\dfrac{d}{dx}(9x^7) = ...$

3.6 दो फलनों के योग या अन्तर का अवकल-गुणांक (Differential coefficient of Sum and Subtract of two Function)

मान लीजिए $\quad f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$

$\therefore \quad f(x+h) = f_1(x+h) \pm f_2(x+h)$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{\{f_1(x+h) \pm f_2(x+h)\} - \{f_1(x) \pm f_2(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{f_1(x+h) - f_1(x)\} \pm \{f_2(x+h) - f_2(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d}{dx} f_1(x) \pm \frac{d}{dx} f_2(x)}$$

अत: दो फलनों के योग या अन्तर का अवकल-गुणांक उनके अवकल-गुणांक के योग या अन्तर के बराबर होता है। व्यापक रूप में :

मान लीजिए $\quad f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm ...... + f_n(x)$

तो $$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} f_1(x) \pm \frac{d}{dx} f_2(x) \pm .... \pm \frac{d}{dx} f_n(x)}$$

नोट्स दो या दो से अधिक फलनों के योग या अन्तर का अवकल-गुणांक उनके अलग-अलग अवकल-गुणांकों के योग या अन्तर के बराबर होता है।

नोट

यदि $y = u + v$, तो   यदि $y = u - v$ तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \text{ अनुरूप } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

व्यापक रूप में, **यदि $y = u \pm v \pm w \pm ......$ तो**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm ......$$

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $\frac{d}{dx}$ $(5x^7 + 2x)$ का मान ज्ञात करो।

हल : $$\frac{d}{dx}(5x^7 + 2x) = \frac{d}{dx}(5x^7) + \frac{d}{dx}2x = 5\frac{d}{dx}(x^7) + 2\frac{d}{dx}(x)$$
$$= 5.7x^6 + 2 = 35x^6 + 2.$$ **उत्तर**

उदाहरण 2. $\frac{d}{dx}$ $(x^5 - 4x^3 + 8x - 7)$ का मान ज्ञात करो।

हल : $$\frac{d}{dx}(x^5 - 4x^3 + 8x - 7) = \frac{d}{dx}x^5 + \frac{d}{dx}(-4x^3) + \frac{d}{dx}(8x) + \frac{d}{dx}(-7)$$
$$= \frac{d}{dx}(x^5) + (-4)\frac{d}{dx}x^3 + 8\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(-7)$$
$$= 5x^4 - 4 \times 3x^2 + 8 \times 1 - 0$$
$$= 5x^4 - 12x^2 + 8.$$ **उत्तर**

अब हम कुछ फलनों के अवकल-गुणांकों का व्युत्पन्न उपर्युक्त सीमा का मान ज्ञात करके कर सकते हैं। किन्तु बाद में हम देखेंगे कि कुछ मानक रूपों के अवकल-गुणांकों के ज्ञान से मूल्यांकन के परिश्रम बचा सकते हैं।

उदाहरण 3. फलन $\left\{\frac{lx^2 + mx + n}{\sqrt{x}}\right\}$ का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{lx^2 + mx + n}{\sqrt{x}}\right\} = \frac{d}{dx}\{lx^{3/2} + mx^{1/2} + nx^{-1/2}\}$$
$$= l\frac{d}{dx}x^{3/2} + m\frac{d}{dx}x^{1/2} + n\frac{d}{dx}x^{-1/2}$$
$$= l\frac{3}{2}x^{1/2} + m\,.\,\frac{1}{2}x^{1/2-1} + n\,.\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1/2-1}$$
$$= \frac{3}{2}lx^{1/2} + \frac{1}{2}mx^{-1/2} - \frac{1}{2}nx^{-3/2}.$$ **उत्तर**

टास्क $\frac{d}{dx}(2x^7 + 5x)$ का मान ज्ञात करें। **(उत्तर : $14x^6 + 5$)**

नोट

उदाहरण 4. फलन $1 + x + \left(\frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\right) + \ldots\ldots$ का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{d}{dx}\left\{1 + x + \left(\frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\right) + \ldots\ldots\right\}$

$$= \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2!}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4!}\right) + \ldots..$$

$$= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \ldots..$$

$$= 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots..$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots..$$ **उत्तर**

प्रश्नावली 3.1

निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए :

1. $3x^3, x^{-5}, x^9$

2. $3x^2, 6x^{-3}, \frac{x^5}{3}$

3. $x^{1/2}, x^{7/3}, x^{-5/2}$

4. $\sqrt{x^3}, \sqrt{x}, \sqrt{x^{-7}}$

5. $3x^{1/3}, 5x^{1/7}, 2x^{1/4}$

6. $\frac{7}{x^2}, \frac{5}{x^{3/2}}, \frac{1}{x}$

7. $x + \frac{2}{x}$

8. $x^m + a^n$

9. $ax^2 + bx + c$

10. $(ax)^m + (2b)^m$

11. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{a}$

12. $y = (ax)^m + \left(\frac{b}{x}\right)^n$

13. $y = ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \ldots\ldots..$

14. $y = a + \frac{a}{x} + \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^3 + \ldots\ldots..$

15. यदि $y = x^5 + 2x^4 + 7$, तो $x = 0$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

16. यदि $y = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots\ldots..$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

नोट

उत्तर

1. $9x^2, -5x^{-6}, 9x^8$ 2. $6x, -18x^{-4}, \frac{5}{3}x^4$ 3. $\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}, -\frac{5}{2}x\frac{-7}{2}$

4. $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{-7}{2}x^{\frac{-9}{2}}$ 5. $x^{\frac{-2}{3}}, \frac{5}{6}x^{\frac{-6}{7}}, \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{4}}$ 6. $14x^{-3}, \frac{-15}{2}x^{\frac{-5}{2}}, -\frac{1}{x^2}$

7. $1-\frac{2}{x^2}$ 8. mx^{m-1} 9. $2ax+b$

10. $ma^m x^{m-1}$ 11. $\frac{1}{4\sqrt{x}}$ 12. $a^m mx^{m-1} - nb^n x^{-n-1}$

13. $a + 2ax + 3ax^2 + \ldots\ldots$ 14. $-\frac{a}{x^2} - \frac{2a^2}{x^3} - \ldots\ldots$ 15. $\frac{dy}{dx} = 0$

16. $n_{c_1} + 2n_{c_2}x + \ldots\ldots$

3.7 फलन e^x का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक, जबकि e (Exponential) चर घातीय है (Differential coeffcient of Function e^x Respect to x when e is Exponential)

यहाँ $f(x) = e^x$

तो $f(x+h) = e^{x+h}$.

अत: e^x का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक $\frac{d}{dx}e^x$ है।

पुन: $$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!}\ldots\ldots - 1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x h\frac{\left(\frac{1}{1!} + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\ldots\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x \{1 + h \text{ एक अभिसारी श्रेणी}\}$$

$$= e^x \left(\frac{1}{1\,!} + 0\right) = e^x.$$

$\therefore$ $$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

3.8 फलन a^x का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक, जबकि a एक अचर है (Differential Coefficient of Function a^x Respect to x when a is a Non-Variable)

यहाँ $\qquad f(x) = a^x$

तो $\qquad f(x+h) = a^{x+h}$

अत: a^x का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक $\dfrac{d}{dx}\, a^x$ है।

पुन: $$\frac{d}{dx}\, a^x = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x\,(a^h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x \left[1 + \dfrac{h \log_e a}{1\,!} + \dfrac{h^2 (\log_e a)^2}{2\,!} + ... - 1\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x \left[\dfrac{h \log_e a}{1\,!} + \dfrac{h^2 (\log_e a)^2}{2!} + ...\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x .h \left[\dfrac{\log_e a}{1\,!} + \dfrac{h (\log_e a)^2}{2\,!} + ...\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a^x \left[\frac{\log_e a}{1\,!} + h\,(\text{एक अभिसारी श्रेणी})\right]$$

$$= a^x \left[\frac{\log_e a}{1\,!} + 0\right] = a^x \log_e a.$$

$\therefore$ $$\boxed{\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \log_e a}$$

नोट

3.9 फलन $\log_e x$ का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक, जबकि आधार चर घातीय है (Differential Coefficient of Function $\log_e x$ Respect to x, when Base is Exponential)

यहाँ $$f(x) = \log_e x$$

तो $$f(x+h) = \log_e (x+h)$$

अत: $\log_e x$ का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक $\dfrac{d}{dx}\log_e x$ है।

पुन:
$$\frac{d}{dx}\log_e x = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e (x+h) - \log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e x\,(1+h/x) - \log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e x + \log_e (1+h/x) - \log_e x}{h}$$

[सूत्र : $\log_e (mn) = \log_e m + \log_e n$]

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e (1+h/x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h}{x} - \dfrac{h^2}{2x^2} + \dfrac{h^3}{3x^3} - \dfrac{h^4}{4x^4} + \ldots\ldots}{h}$$

$$\left[\text{सूत्र : } \log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{h}{2x^2} + \dfrac{h^2}{3x^3} - \dfrac{h^3}{4x^4} + \ldots..\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \frac{h^3}{4x^4} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x} - h \times (\text{एक अभिसारी श्रेणी})\right\} = \frac{1}{x}.$$

$\therefore$
$$\boxed{\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}}$$

> *नोट्स* $\log_e x$ को $\ln x$ द्वारा भी निरूपित करते हैं।

नोट

3.10 फलन $\log_a x$ का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक, जबकि लघुगणक का आधार कोई अचर है (Differential Coefficient of function $\log_e x$, Respect to x when base of logrithimics is a non-variable)

यहाँ $f(x) = \log_a x = (\log_e x) \log_a e$ [सूत्र से]

$$= \log_a e . \log_e x$$

अत: फलन $\log_a x$ का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक $\frac{d}{dx} \log_a x$

$$= \frac{d}{dx} \log_a e . \log_e x = \log_a e \frac{d}{dx} \log_e x,$$

$$= \log_a e . \frac{1}{x} \qquad \left[\because \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e}$$

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $6x^{1/3} + 2e^x$ का अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\frac{d}{dx} (6x^{1/3} + 2e^x) = \frac{d}{dx} (6x^{1/3}) + \frac{d}{dx} (2e^x)$$

$$= 6. \frac{d}{dx} (x^{1/3}) + 2 \frac{d}{dx} (e^x)$$

$$= 6. \frac{1}{3} x^{-2/3} + 2e^x = 2x^{-2/3} + 2e^x.$$ उत्तर

उदाहरण 2. $6 \log x - \sqrt{x} - 7$ का अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : $$\frac{d}{dx} (6 \log x - \sqrt{x} - 7) = 6. \frac{d}{dx} \log x - \frac{d}{dx} (x^{1/2}) - \frac{d}{dx} (7)$$

$$= 6. \frac{1}{x} - \frac{1}{2} x^{-1/2} - 0 = \frac{6}{x} - \frac{1}{2} x^{-1/2}.$$ उत्तर

उदाहरण 3. फलन $5\sqrt{x} + 7 \log_e x - 11 \log_a x$ का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : $$\frac{d}{dx} (5\sqrt{x} + 7 \log_e x - 11 \log_a x) = \frac{d}{dx} (5x^{1/2}) + \frac{d}{dx} (7 \log_e x) - \frac{d}{dx} (11 \log_a x)$$

$$= 5 \frac{d}{dx} x^{1/2} + 7. \frac{d}{dx} \log_e x - 11. \frac{d}{dx} \log_a x$$

$$= \frac{5}{2} x^{-1/2} + \frac{7}{x} - 11 \log_a e . \frac{1}{x}.$$ उत्तर

प्रश्नावली 3.2

निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए :

1. $e^x + \log_e x + l^x$

2. $\dfrac{1}{2x} + 7e^x$

3. $\dfrac{x^3 \log_e x + x - x^3 e^x}{x^3}$

4. $5 \log_{10} x + 3$

5. $3 \log_e x + x^{3/2} + 3$

6. $x(1 + x^2) + a^x$

7. $e^x + a^x + 1$

8. $\log_a x + \log_e x^2$

9. $\log_{10} x$

10. $7x^{-2/7} + \log_2 x$

11. $\dfrac{xe^x - 1}{x}$

12. $\sqrt{a + 2a^2 e^x + a^3 e^{2x}}$

13. $\sqrt[3]{1 + 3 \log_a x + 3(\log_a x)^2 + (\log_a x)^3}$

14. $\log_e \sqrt{x} + a^x + 3$

15. $\dfrac{1}{a^x} + \log_a x.$

उत्तर

1. $e^x + \dfrac{1}{x} + l^x \log_e l$

2. $-\dfrac{1}{2x^2} + 7e^x$

3. $\dfrac{1}{x} - 2x^{-3} - e^x$

4. $\dfrac{5}{x} \log_{10} e$

5. $\dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{2} x^{1/2}$

6. $1 + 3x^2 + a^x \log_e a$

7. $e^x + a^x \log_e a$

8. $\dfrac{1}{x} \log_e a + \dfrac{2}{x}$

9. $\dfrac{1}{x} \log_{10} e$

10. $-2x^{-9/7} + \dfrac{1}{x} \log_2 e$

11. $e^x + x^{-2}$

12. $a^{3/2} e^x$

13. $\dfrac{1}{x} \log_a e$

14. $\dfrac{1}{2x} + a^x \log_e a$

15. $-a^{-x} \log_e a + \dfrac{1}{x} \log_a e$

3.11 दो फलनों के भागफल का अवकल-गुणांक (Differential Coefficient of the Quotient of Two Functions)

मान लो
$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \text{ तो } F(x+h) = \frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} F(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(x+h) f_2(x) - f_1(x) f_2(x+h)}{h f_2(x+h) f_2(x)}$$

नोट

अंश में $f_1(x)\, f_2(x)$ को जोड़ने और घटाने पर

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f_2(x)\{f_1(x+h) - f_1(x)\} - f_1(x)\{f_2(x+h) - f_2(x)\}}{hf_2(x+h)\, f_2(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f_2(x)\left\{\dfrac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}\right\} - f_1(x)\left\{\dfrac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}\right\}}{f_2(x+h) f_2(x)}$$

$$= \frac{f_2(x) \cdot \dfrac{d}{dx} f_1(x) - f_1(x) \dfrac{d}{dx} f_2(x)}{[f_2(x)]^2}$$

अर्थात् दो फलनों के भागफल का अवकल-गुणांक (Diff. Coeff.)

$$= \frac{\textbf{(हर) अंश का अवकल गुणांक) – (अंश) (हर का अवकल – गुणांक)}}{\textbf{हर का वर्ग}}$$

$$= \frac{\textbf{Denr. (Diff. coeff. of Numr.) – Numr. (Diff. coeff. of Denr.)}}{\textbf{Square of Denominator}}$$

क्या आप जानते हैं

$$\left[\begin{array}{l} \text{यदि } y = \dfrac{u}{v} \text{ तो} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}. \end{array}\right]$$

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $y = \dfrac{e^x}{x}$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\frac{dy}{dx} = \frac{x\dfrac{d}{dx}e^x - e^x \dfrac{d}{dx}x}{x^2} = \frac{xe^x - e^x.1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$ उत्तर

उदाहरण 2. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{\log_e x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\log_e x}\right) = \frac{\log_e x \cdot \dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot \dfrac{d}{dx}(\log_e x)}{(\log_e x)^2}$$

$$= \frac{(\log_e x) \cdot \cos x - (\sin x) \cdot \dfrac{1}{x}}{(\log_e x)^2}$$

$$= \frac{x \log_e x \cos x - \sin x}{x (\log_e x)^2}.$$ उत्तर

नोट

उदाहरण 3. फलन $\dfrac{x^n}{\log_e x}$ का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^n}{\log_e x}\right\} = \frac{\log_e x \dfrac{d}{dx}x^n - x^n \dfrac{d}{dx}\log_e x}{(\log_e x)^2}$$

$$= \frac{\log_e x . nx^{n-1} - x^n \cdot \dfrac{1}{x}}{(\log_e x)^2} = \frac{nx^{n-1}\log_e x - x^{n-1}}{(\log_e x)^2}$$

$$= \frac{x^{n-1}(n \log_e x - 1)}{(\log_e x)^2}.$$ **उत्तर**

उदाहरण 4. यदि $y = \dfrac{x}{x+5}$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$x\frac{dy}{dx} = y(1-y).$$

हल : दिया है, $$y = \frac{x}{x+5}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x+5)\cdot \dfrac{d}{dx}(x) - x \cdot \dfrac{d}{dx}(x+5)}{(x+5)^2} = \frac{(x+5).1 - x.1}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{x+5-x}{(x+5)^2} = \frac{5}{(x+5)^2} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{(x+5)^2} \quad \ldots(1)$$

तथा $$y(1-y) = \frac{x}{x+5}\left(1 - \frac{x}{x+5}\right) = \frac{x}{x+5}\left(\frac{5}{x+5}\right) = \frac{5x}{(x+5)^2} \quad \ldots(2)$$

अत: (1) और (2) से,

$$x\frac{dy}{dx} = y(1-y).$$ **उत्तर**

प्रश्नावली 3.3

निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए :

1. $\dfrac{1}{x^{1/4}}$ **2.** $\dfrac{x^n}{\log_e x}$

3. $\dfrac{x}{a^2+x^2}$ **4.** $\dfrac{x^2}{e^2+x^2}$

5. $\dfrac{e^x}{1+x^2}$ **6.** $\dfrac{e^x}{1+e^x}$

7. यदि $f(x) = \dfrac{x^3}{a^2-x^2}$, तो $f'\left(\dfrac{a}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

नोट

8. यदि $y = \dfrac{x-4}{2\sqrt{x}}$, तो $x = 4$ पर $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। क्या $x = 0$ पर $\dfrac{dy}{dx}$ का मान मिल सकता है?

9. यदि $y = \dfrac{5x^2 + 6x + 7}{2x^2 + 3x + 4}$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

10. यदि $y = \dfrac{a^x}{x^n}$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए:

11. ***(i)*** $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}$ ***(ii)*** $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

12. ***(i)*** $\dfrac{xe^x - 1}{x}$ ***(ii)*** $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

उत्तर

1. $-\dfrac{1}{4}x^{-5/4}$ 2. $\dfrac{nx^{n-1}\log_e x - x^{n-1}}{(\log_e 2)^2}$ 3. $\dfrac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2}$

4. $\dfrac{2xe^2}{(e^2 + x^2)^2}$ 5. $\dfrac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$ 6. $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

7. $\dfrac{11}{19}$ 9. $\dfrac{3(x^2 + 4x + 1)}{(2x^2 + 2x + 4)^2}$ 10. $\dfrac{a^x}{x^n}[\log_e a - \dfrac{n}{x}]$

11. (*i*) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2}$ (*ii*) $\dfrac{-4}{[e^x - e^{-x}]^2}$ 12. (*i*) $e^x + \dfrac{1}{x^2}$

(*ii*) $\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ 13. $\dfrac{3x^2 + 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca)}{(x+a)^2(x+b)^2(x+c)^2}$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)–

(*i*) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)\} = \dfrac{d}{dx}f_1(x) \pm$ ....

(*a*) $\dfrac{d}{dx}f_2$ (*b*) $\dfrac{d}{dx}f_1$ (*c*) $\dfrac{d}{dx}f(x)$ (*d*) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)\}$

नोट

(*ii*) $\frac{d}{d(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का मान क्या होगा?

(*a*) $\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ (*b*) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ (*c*) $-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ (*d*) $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$

(*iii*) $3x^3$ का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक कितना होगा?

(*a*) $6x^2$ (*b*) $3x^2$ (*c*) $9x^2$ (*d*) $9x$

(*iv*) $\frac{d}{dx}(e^x) = ...$

(*a*) e (*b*) 1 (*c*) $e^{\frac{1}{x}}$ (*d*) e^x

(*v*) $\frac{d}{dx}\log_a x = ... \log_a e$

(*a*) $\frac{1}{x}$ (*b*) x (*c*) $\log_a$ (*d*) $\log x$

3.12 सारांश (Summary)

- $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ को फलन y का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक (Differential coefficient of y with respect to x) या अवकलज (Derivative) कहते हैं। स्वतन्त्र चर के किसी प्रकार के सन्देह से बचने के लिए कहा जाता है कि फलन का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ को $\frac{d}{dx}(y)$ या $\frac{dy}{dx}$ लिखते हैं। इस प्रकार सीमा ज्ञात करने की इस क्रिया को अवकलन करना कहते हैं या किसी फलन के अवकल-गुणांक ज्ञात करने की संक्रिया को अवकलन (Differentiation) कहते हैं।
- यदि x का कोई फलन $f(x)$ और $x + \delta x$ का वही फलन $f(x + \delta x)$ हो तो $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ का सीमान्त मान (limiting value), x के सापेक्ष $f(x)$ का अवकल-गुणांक या अवकलन (differential coefficient) कहलाता है।
- $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d}{dx}f_1(x) \pm \frac{d}{dx}f_2(x)$
- अत: दो फलनों के योग या अन्तर का अवकल-गुणांक उनके अवकल-गुणांक के योग या अन्तर के बराबर होता है।
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a$ अर्थात् दो फलनों के भागफल का अवकल-गुणांक (Diff. Coeff.)

3.13 शब्दकोश (Keywords)

- **अवकल-गुणांक** (Differential Coefficient): अवकलज।
- **वृद्धि** (growth): बढ़ोतरी

3.14 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. $\frac{d}{dx}(-6x^2)$ का मान निकालें। (**उत्तर** : $-12x$)
2. $\frac{d}{dx}(5x^6 + 2x)$ का मान निकालें। (**उत्तर** : $30x^5 + 2$)
3. सिद्ध करें कि $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a$.
4. $6\log x - \sqrt{x} - 7$ का अवकल गुणांक ज्ञात करें। (**उत्तर** : $\frac{6}{x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$)
5. यदि $y = \frac{x}{x+5}$ तो साबित करें कि $x\frac{dy}{dx} = y(1-y)$।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1.	(*i*) अवकलन	(*ii*) गुणनफल	(*iii*) a	(*iv*) $n - 1$	(*v*) $63x^6$
2.	(*i*) (*a*)	(*ii*) (*b*)	(*iii*) (*c*)	(*iv*) (*d*)	(*v*) (*a*)

3.15 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
2. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
7. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*

नोट

इकाई–4 : लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- लघुगणकीय अवकलन ज्ञात करने में।
- अनन्त श्रेणियों के योगफल निकालने हेतु।
- अस्पष्ट फलन का परिकलन करने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

यदि ऐसे फलनों का अवकलन करना हो जिसमें घातांक भी उसी चर राशि का फलन हो अथवा वह फलन जिसका अवकलन करना हो कई फलनों का गुणनफल या भागफल हो, तो ऐसे फलनों का अवकलन उनका लघुगणक लेकर ज्ञात किया जाता है। इस प्रक्रिया को **लघुगणकीय अवकलन** कहते हैं।

4.1 लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation)

x के ज्ञात फलन को y के बराबर मान लो। अब दोनों पक्षों का लघुगणक लो जिससे घातांक गुणा में, गुणा जोड़ में, इत्यादि परिवर्तित हो जायेंगे।

अब दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करके $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

याद रखो कि y के फलन का x के सापेक्ष अवकलन करने के लिए फलन का y के सापेक्ष अवकलन करके $\frac{dy}{dx}$ से गुणा करते हैं।

सावधानी $\log(a + b) \neq \log a + \log b$

अत: यदि $y = x^x + (\sin x)^{\cos x}$ हो, तो $\log y \neq \log x^x + \log (\sin x)^{\cos x}$

ऐसे प्रश्नों में प्रत्येक पद का अवकल गुणांक अलग-अलग ज्ञात करना पड़ेगा। तदुपरान्त संयुक्त अवकल गुणांक प्राप्त होगा।

नोट्स कुछ उपयोगी सूत्र:

(*i*) $\log (m \,.\, n) = \log m + \log n$

(*ii*) $\log\left(\frac{m}{n}\right) = \log m - \log n$

(*iii*) $\log (m)^n = n \log m.$

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. फलन $e^x \,.\, \log_e x \,.\, \tan x$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये।

हल : माना $y = e^x \,.\, \log_e x \,.\, \tan x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = \log e^x + \log (\log_e x) + \log \tan x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x}(e^x) + \frac{1}{\log_e x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\tan x}(\sec^2 x)$$

$$= 1 + \frac{1}{x\log_e x} + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \frac{1}{x\log_e x} + \frac{1}{\sin x\cos x} = 1 + \frac{1}{x\log_e x} + 2\operatorname{cosec} 2x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[1 + \frac{1}{x\log_e x} + 2\operatorname{cosec} 2x\right]$$

अत: $$\frac{dy}{dx} = e^x \log_e x \tan x\left[1 + \frac{1}{x\log_e x} + 2\operatorname{cosec} 2x\right].$$ **उत्तर**

नोट

उदाहरण 2. यदि $y = x^{sin^{-1}x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$y = x^{\sin^{-1} x}$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log y = \log x^{\sin^{-1} x} = \sin^{-1} x \,.\, \log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x \,.\, \frac{1}{x} + \log x \,.\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{x} \,.\, \sin^{-1} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,.\, \log x\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = x^{\sin^{-1} x}\left[\frac{1}{x}\sin^{-1} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,.\, \log x\right].$$ **उत्तर**

उदाहरण 3. फलन 10^x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए, जबकि 10 एक अचर है।

हल : मान लो $$y = 10^x$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = \log 10^x$$

या $$\log y = x \log 10$$

या $$\log y = x.$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$y = 10^x$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = 10^x.$$ **उत्तर**

उदाहरण 4. फलन $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

हल : मान लीजिए $$y = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = \log \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

या $$\log y = \log 1 - \log (x + a) - \log (x + b) - \log (x + c)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+c}$$

या $$\frac{dy}{dx} = -y\left[\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c}\right]$$

या $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\left[\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c}\right].$$ उत्तर

उदाहरण 5. यदि $(\sin y)^x = a$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$(\sin y)^x = a$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log (\sin y)^x = \log a$$

या $$x \log \sin y = \log a$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$x \cdot \frac{1}{\sin y} \cdot \cos y \frac{dy}{dx} + \log \sin y = 0$$

$$x \cot y \frac{dy}{dx} = -\log \sin y$$

या $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\log \sin y}{x \cot y}.$$ उत्तर

उदाहरण 6. यदि $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $$(\cos x)^y = (\sin y)^x$$

दो पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$y \log \cos x = x \log \sin y$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y \frac{1}{\cos x} x^{-\sin x} + \log \cos x \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{\sin y} \cdot \cos y \cdot \frac{dy}{dx} + \log \sin y \cdot 1$$

$$-y \tan x + \log \cos x \frac{dy}{dx} = x \cot y \frac{dy}{dx} + \log \sin y$$

$$\frac{dy}{dx}(\log \cos x \_ x \cot y) = (\log \sin y + y \tan x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log \sin y + y \tan x}{\log \cos x - x \cot y}.$$ उत्तर

नोट

उदाहरण 7. $\log(xy) = x^2 + y^2$ **का x के सापेक्ष अवकल गुणांक $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\log(xy) = x^2 + y^2$$

$$\log x + \log y = x^2 + y^2$$

x के सापेक्ष अवकलन से

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - 2y\right) = 2x - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1-2y^2}{y}\right) = \frac{2x^2-1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}.$$

उत्तर

प्रश्नावली 4.1

लघु उत्तरीय प्रश्न

निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए–

1. x^x.
2. $x^{\sin x}$.
3. $(\log x)^x$.
4. $(1 + x)^x$.
5. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
6. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
7. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
8. $x^x + a^x + x^a$.
9. $\dfrac{x\sqrt{1+x}}{(1+x^2)^{3/2}}$.
10. e^{x^x}.
11. $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$.
12. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{\sqrt{x-c}}$.
13. $(x \log x)^{\log \log x}$.
14. यदि $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.
15. यदि $y = 10^{10^x}$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।
16. यदि $y = \dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर **नोट**

1. $[x^x(1 + \log x)]$
2. $[\sin x\,(\cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x})]$
3. $(\log x)^x\,(\log\log x + \dfrac{1}{\log x})$
4. $(1 + x)^x \left[\dfrac{x}{1+x} + \log(1+x)\right]$
5. $(x - 2)\,(x - 3) + (x - 11)\,(x - 3) + (x - 1)\,(x - 2)$
6. $\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$
7. $\dfrac{-1}{(1+x)^{3/2}\,(1-x)^{1/2}}$
8. $x^x \log_e x + a^x \log_e a + ax^{a-1}$
9. $\dfrac{2 + 3x - 4x^2 - 3x^3}{2\sqrt{(1+x)}\,(1+x^2)^{5/2}}$
10. $e^{x^x} x^x\,(1 + \log_e x)$
11. $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}\left(\dfrac{1-x^2}{x^4+x^2+1}\right)$
12. $\dfrac{(x-a)\,(x-b)}{\sqrt{x-c}}\left[\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} - \dfrac{1}{2\,(x-c)}\right]$
13. $(x \log x)\,(\log\log x - 1)$
14. $10^x \cdot 10^{10^x}\,(\log_e 10)^2$
15. $\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3\,e^x}\left[\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{2\,(x-1)} - \dfrac{3}{x+4} - 1\right]$

4.2 अनन्त श्रेणियों का योगफल (Sums of infinite tables)

उदाहरण 1. यदि $y = x^{x^{x^{\cdots\infty}}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{1 - y\log x}$.

हल : $y = x^{x^{x^{\cdots\infty}}} = x^y$, क्योंकि $x^{x^{\cdots\infty}} = y$.

लघुगणक लेने पर $\log y = y \log x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = y\,.\frac{d}{dx}\log x + \log x\,\frac{dy}{dx}$$

$$= y\,.\frac{1}{x} + \log x\,\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{y} - \log x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

अत: $$x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}.$$ इति सिद्धम्।

उदाहरण 2. यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots\infty}}}$, सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{2y - 1}$.

नोट

हल : दिया है, $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots \infty}}}$

$\Rightarrow$ $y = \sqrt{\sin x + y}$

अत: $y^2 = \sin x + y$, वर्ग करने पर

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx}$$

$$(2y-1)\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}.$$

इति सिद्धम्।

उदाहरण 3. **यदि** $y = e^{x + e^{x + e^{x + \ldots\infty}}}$ **तो सिद्ध कीजिये कि**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}.$$

हल : दिया है, $y = e^{x + e^{x + e^{x + \ldots\infty}}}$

$\Rightarrow$ $y = e^{x+y}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log \{e^{x+y}\}$$
$$= (x+y)\log e$$
$$= x + y, \qquad [\because \log e = 1]$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{y} - 1\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1-y}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}.$$

इति सिद्धम्।

उदाहरण 4. **यदि** $y = a^{x^{a^{x\ldots\infty}}}$ **तो सिद्ध कीजिए कि**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \log y}{x(1 - y\log x . \log y)}.$$

हल : यहाँ $y = a^{x^{a^{x\ldots\infty}}} = a^{x^y}$

नोट

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = x^y \log a$$

पुन: दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log(\log y) = y \log x + \log(\log a)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{\log y} \cdot \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dx}(\log x) + 0$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{y \log y} \log x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1 - y\log x \,.\, \log y}{y \log y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \log y}{x(1 - y\log x \,.\, \log y)}.$$

इति सिद्धम्।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

(*i*) ऐसे फलन जिनका अवकलन लघुगणक लेकर ज्ञात किया जाता है उसे .... अवकलन कहते हैं।

(*ii*) $\log\left(\frac{m}{n}\right) = \log m -$ ....

(*iii*) $\log (m)^n$ .... $\log m$

(*iv*) .... $= \log m + \log n$

(*v*) $\log\left(\frac{25}{12}\right) = \log 25 - \log$ ....

प्रश्नावली 4.2

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots \infty}}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(2y-1)\frac{dy}{dx} = 1.$

2. यदि $y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \ldots \infty}}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(2y-1)\frac{dy}{dx} = \sec^2 x.$

3. यदि $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}\ldots\infty}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2 - y\log x}.$

4. यदि $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\ldots\infty}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cot x}{1 - y\log(\sin x)}.$

नोट

5. यदि $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \ldots + \infty}}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x(2y-1)}$.

6. यदि $y = x^2 + \cfrac{1}{x^2 + \cfrac{1}{x^2 + \ldots\ldots}}$ तो सिद्ध कीजिए $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy^2}{1+y^2}$.

4.3 अस्पष्ट फलन (Implicit Function)

यदि x और y के बीच कोई ऐसा समीकरण दिया हो जिसे तुरन्त y के लिए हल नहीं किया जा सके, तो y को x का अस्पष्ट फलन (implicit function) कहते हैं। इसके विपरीत यदि y का मान x के रूप में ज्ञात किया जा सके, तो y को x का स्पष्ट फलन (explicit function) कहते हैं।

क्या आप जानते हैं **अस्पष्ट फलन का अवकलन**–किसी अस्पष्ट फलन (Implicit Function) से dy/dx का मान ज्ञात करने के लिए दिये हुए समीकरण के प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करो तथा फिर dy/dx के पद एक ओर करके उसका मान ज्ञात कीजिए।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है: $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$a \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + 2h\frac{d}{dx}(xy) + b \cdot \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

या
$$2ax + 2h\left(x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 1\right) + 2by \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

या
$$2(hx + by)\frac{dy}{dx} = -2(ax + hy)$$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{ax + hy}{hx + by}\right).$$

उत्तर

उदाहरण 2. यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$a\frac{d}{dx}(x^2) + 2h \cdot \frac{d}{dx}(xy) + b \cdot \frac{d}{dx}(y^2) + 2g \cdot \frac{d}{dx}(x) + 2f \cdot \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(c) = 0$$

नोट

या $$a(2x) + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + b\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2g\,.\,1 + 2f\,.\,\frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

या $$2(hx + by + f)\frac{dy}{dx} = -2(ax + hy + g)$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{(ax + hy + g)}{(hx + by + f)}.$$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $y = x^y$, तो सिद्ध कीजिए कि $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{1 - y\log x}$.

हल : दिया है, $y = x^y$, लघुगणक लेने पर

$$\log y = y \log x.$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y\,.\,\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\,.\,\frac{dy}{dx}$$

$$= y\,.\,\frac{1}{x} + \log x\,.\,\frac{dy}{dx}$$

या $$\left(\frac{1}{y} - \log x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

अत: $$x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}.$$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि $\sin y = x \sin (a + y)$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a}.$$

हल : दिया है, $\sin y = x \sin (a + y)$ या $x = \dfrac{\sin y}{\sin(a + y)}$

अब दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$1 = \frac{\sin (a + y)\,.\,\frac{d}{dx}\sin y - \sin y\,.\,\frac{d}{dx}\sin (a + y)}{\{\sin (a + y)\}^2}$$

या $$\sin^2 (a + y) = \sin (a + y)\,.\,\cos y\,\frac{dy}{dx} - \sin y\,.\,\cos (a + y)\,\frac{dy}{dx}$$

या $$\sin^2 (a + y) = \{\sin (a + y) \cos y - \sin y \cos (a + y)\}\,\frac{dy}{dx}$$

या $$\sin^2 (a + y) = \sin (a + y - y)\,\frac{dy}{dx}$$

या $$\sin a\,\frac{dy}{dx} = \sin^2 (a + y)$$

नोट

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}.$$ इति सिद्धम्

उदाहरण 5. यदि $x^y = e^{x-y}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log x}{(1+\log x)^2}$.

हल : दिया है, $x^y = e^{x-y}$, दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$y \log_e x = (x-y) \log e \text{ या } y \log_e x = x - y$$

या $$y(1+\log x) = x \qquad \text{या} \qquad y = \frac{x}{1+\log x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x).1 - x(1/x)}{(1+\log x)^2} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}.$$

टास्क $x^{\sin x}$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात करें। **उत्तर :** $[\sin x\,(\cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x})]$

प्रश्नावली 4.3

$\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए–

1. $xy = c$.

2. $x^2 + y^2 = a^2$.

3. $3x^2 + y^2 = 5$.

4. $5x^2 + 5y^2 - 11x - 9y - 12 = 0$.

5. $x^n + y^n = a^n$.

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

7. $y^2 = 4ax$

8. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

9. यदि $x^p y^q = (x+y)^{p+q}$, तो सिद्ध कीजिए $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

10. $x^y + y^x = a^b$

11. $y^x = x^y$

12. $x^x + y^y = 1$

13. यदि $y\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{(1-y^2)} = 1$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(1-y^2)}{(1-x^2)}} = 0.$$

14. यदि $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

15. यदि $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = -(1 + x)^{-2}.$$

उत्तर

1. $-\dfrac{y}{x}$	2. $-\dfrac{x}{y}$	3. $\dfrac{-3x}{y}$
4. $-\dfrac{(10x-11)}{10y-9}$	5. $-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}$	6. $\dfrac{-b^2x}{a^2y}$
7. $\dfrac{2a}{y}$	8. $\dfrac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}$	10. $\dfrac{-yx^{y-1}+y^x\log y}{xy^{x-1}+x^y\log x}$
11. $\dfrac{y(y-x\log x)}{x(x-y\log x)}$	12. $-\dfrac{x^x[1+\log x]}{y^y(1+\log y)}$	

4.4 प्राचलिक फलन (Parametric Function)

कभी-कभी x और y दोनों किसी तीसरी चर राशि के फलनों के रूप में दिये रहते हैं। इस तीसरी राशि को प्राचल (Parameter) कहते हैं और इस प्रकार के समीकरण **प्राचलिक समीकरण** कहलाते हैं। इस प्रकार के सम्बन्धों से हम प्राचल का विलोपन (elimination) किये बिना ही dy/dx ज्ञात कर सकते हैं।

जैसे, यदि $x = f_1(t)$ और $y = f_2(t)$; जहाँ t स्वतन्त्र चर राशि है तथा x और y परतन्त्र चर राशियाँ हैं तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}.$$

अत: x के सापेक्ष y का अवकल-गुणांक, प्राचल के सापेक्ष y और x के अवकल-गुणांकों का भागफल होता है।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $x = at^2$ तथा $y = 2\,at$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $x = at^2$

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt} = 2at$$

तथा $y = 2at$

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

नोट

$$= \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}.$$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $x = a\cos\theta$ और $y = b\sin\theta$, तो dy/dx ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$ और $\frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\frac{b}{a}\cot\theta.$$ उत्तर

प्रश्नावली 4.4

$\frac{dy}{dx}$ **ज्ञात कीजिए :**

1. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$
2. $x = \cos t,\ y = \sin t.$
3. $x = \log t,\ y = e^t + \cos t.$
4. यदि $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ तो सिद्ध कीजिए कि

   (*i*) $\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ (*ii*) $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए जब $t = \frac{1}{2}$ है।

उत्तर

1. $\frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$ 2. $-\cot t$ 3. $t(e^t - \sin t)$

4. (*ii*) $-3/2$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)–

(*i*) यदि x और y के बीच कोई ऐसा समीकरण दिया हो जिसे तुरंत y के लिए हल नहीं किया जा सके, तो y को x का कौन-सा फलन कहेंगे?

(*a*) अस्पष्ट (*b*) स्पष्ट (*c*) समांतर (*d*) संगत

(*ii*) यदि y का मान x के रूप में ज्ञात किया जा सके, तो y को x का कौन-सा फलन कहेंगे?

(*a*) अस्पष्ट (*b*) स्पष्ट (*c*) समांतर (*d*) संगत

(*iii*) $xy = c$ का मान होगा–

(*a*) $-\frac{x}{y}$ (*b*) $\frac{x}{y}$ (*c*) $-\frac{y}{x}$ (*d*) $\frac{y}{x}$

4.5 सारांश (Summary)

नोट

- यदि ऐसे फलनों का अवकलन करना हो जिसमें घातांक भी उसी चर राशि का फलन हो अथवा वह फलन जिसका अवकलन करना हो कई फलनों का गुणनफल या भागफल हो, तो ऐसे फलनों का अवकलन उनका लघुगणक लेकर ज्ञात किया जाता है। इस प्रक्रिया को **लघुगणकीय अवकलन** कहते हैं।
- $\log (m\,.\,n) = \log m + \log n$
- $\log \left(\dfrac{m}{n}\right) = \log m - \log n$
- $\log (m)^n = n \log m$.
- यदि x और y के बीच कोई ऐसा समीकरण दिया हो जिसे तुरन्त y के लिए हल नहीं किया जा सके, तो y को x का अस्पष्ट फलन (implicit function) कहते हैं। इसके विपरीत यदि y का मान x के रूप में ज्ञात किया जा सके, तो y को x का स्पष्ट फलन (explicit function) कहते हैं।
- कभी-कभी x और y दोनों किसी तीसरी चर राशि के फलनों के रूप में दिये रहते हैं। इस तीसरी राशि को प्राचल (Parameter) कहते हैं और इस प्रकार के समीकरण **प्राचलिक समीकरण** कहलाते हैं।

4.6 शब्दकोश (Keywords)

- फलन (Function): कार्य।
- अनन्त (Infinite): जिसका अंत न हो।

4.7 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. यदि $y = x^{\sin^{-1} x}$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ का मान निकालें। (**उत्तर :** $x^{\sin^{-1} x}\left[\dfrac{1}{x}\sin^{-1} x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\log x\right]$)
2. यदि $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ हो, तो $\dfrac{dy}{dx}$ निकालें। (**उत्तर :** $\dfrac{\log \sin y + y \tan x}{\log \cos x - x \cot y}$)
3. यदि $y = x^y$, तो सिद्ध करें कि $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{1 - y\log x}$.
4. यदि $x = a\cos\theta$ और $y = b\sin\theta$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ परिकलित करें। (**उत्तर :** $-\dfrac{b}{a}\cot\theta$)

नोट

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. (*i*) लघुगणकीय (*ii*) $\log n$ (*iii*) n (*iv*) $\log (m.\ n)$ (*v*) 12.
2. (*i*) (*a*) (*ii*) (*b*) (*iii*) (*c*).

4.8 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
2. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
6. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*

नोट

इकाई–5 : द्वितीय एवं उच्चतर क्रम के अवकलन (Second and Higher Order Differentiation)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- उत्तरोत्तर अवकलन ज्ञात करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

यदि y, x का फलन है तो $\frac{dy}{dx}$ भी x का फलन होगा। इसके अवकल-गुणांक को y का द्वितीय अवकल-गुणांक तथा इसे तृतीय अवकल-गुणांक की संज्ञा देते हैं।

5.1 उत्तरोत्तर अवकलन (Successive Differentiation)

यदि y, x का कोई फलन हो तो x के सापेक्ष y का अवकल-गुणांक अर्थात् $\frac{dy}{dx}$ भी x का फलन होता है जिसका फिर से अवकलन किया जा सकता है। $\frac{dy}{dx}$ के अवकल-गुणांक $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ को y का **द्वितीय अवकल-गुणांक** कहते हैं, इसी प्रकार y के द्वितीय अवकल-गुणांक को y का **तृतीय अवकल-गुणांक** कहते हैं। इन विविध अवकलनों को क्रमानुसार $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, ...$ द्वारा प्रकट करते हैं।

नोट उत्तरोत्तर अवकलज के लिए प्रमुख संकेतन निम्न तालिका में दर्शाये गए हैं–

मूल फलन $y = f(x)$	साधारण संकेतन	अन्य संकेतन
प्रथम अवकलज	$\frac{dy}{dx}$	$f'(x), Dy, y_1$
द्वितीय अवकलज	$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$	$f''(x), D^2y, y_2$
तृतीय अवकलज	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$	$f'''(x), D^3y, y_3$
....	....	....
nवाँ अवकलज	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$	$f^n(x), D^n y, y_n$

इसी प्रकार यदि $y = x^7$, तो $\frac{dy}{dx} = 7x^6$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}(7x^6) = 42x^5$$

और

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(42x^5) = 210x^4.$$

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ तो $f''''(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$
$$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e + 0$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d + 0$$
$$f'''(x) = 60ax^2 + 24bx + 6c + 0$$
$$f''''(x) = 120ax + 24b.$$

उत्तर

उदाहरण 2. यदि $y = A \sin mx + B \cos mx$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0.$$

हल : दिया है, $y = A \sin mx + B \cos mx$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = A \cos mx . \frac{d}{dx}(mx) + B(-\sin mx).\frac{d}{dx}(mx)$$
$$= Am \cos mx - Bm \sin mx$$

x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर, **नोट**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Am(-\sin mx).\frac{d}{dx}(mx) - Bm\cos mx.\frac{d}{dx}(mx)$$
$$= -Am^2 \sin mx - Bm^2 \cos mx$$
$$= -m^2(A\sin mx + B\cos mx) = -m^2y$$

अतः $\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0.$

उदाहरण 3. यदि $y = \sin(\sin x)$, तो सिद्ध कीजिए कि $y_2 + y_1 \tan x + y\cos^2 x = 0.$

हल : दिया है, $y = \sin(\sin x)$

$$y_1 = [\cos(\sin x)].\cos x \quad ...(1)$$

पुनः अवकलन करने पर

$$y_2 = [\cos(\sin x)].(-\sin x) + \cos x.[-\sin(\sin x)]\cos x$$
$$= -\sin x\cos(\sin x) - \cos^2 x\sin(\sin x)$$
$$= -\sin x\cos(\sin x) - y\cos^2 x, \quad [\because y = \sin(\sin x)]$$
$$= -\sin x.\frac{y_1}{\cos x} - y\cos^2 x, \quad [(1) \text{ से}]$$

अतः $y_2 + y_1 \tan x + y\cos^2 x = 0.$

उदाहरण 4. यदि $y = e^{ax}\sin bx$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0.$$

हल : दिया है, $y = e^{ax}\sin bx \quad ...(1)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\frac{d}{dx}(\sin bx) + \sin bx.\frac{d}{dx}(e^{ax})$$
$$= e^{ax}\cos bx.\frac{d}{dx}(bx) + \sin bx.e^{ax}.\frac{d}{dx}(ax)$$
$$= be^{ax}\cos bx + ae^{ax}\sin bx$$
$$= be^{ax}\cos bx + ay, \text{ [समीकरण (1) से]} \quad ...(2)$$

x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = b\left[e^{ax}.\frac{d}{dx}(\cos bx) + \cos bx.\frac{d}{dx}(e^{ax})\right] + a\frac{dy}{dx}$$
$$= b\left[e^{ax}.(-\sin bx).\frac{d}{dx}(bx) + \cos bx.e^{ax}.\frac{d}{dx}(ax)\right] + a\frac{dy}{dx}$$

नोट

$$= b\,[-be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx] + a\frac{dy}{dx}$$

$$= -b^2 e^{ax}\sin bx + a\,(be^{ax}\cos bx) + a\frac{dy}{dx}$$

$$= -b^2 y + a\left(\frac{dy}{dx} - ay\right) + a\frac{dy}{dx} = 2a\frac{dy}{dx} - (a^2 + b^2)y,$$

समीकरण (1) और (2) से

अत: $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)\,y = 0.$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. **रिक्त स्थानों की पूर्ति करें** (Fill in the blanks)−

(*i*) $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ y का .... अवकल-गुणांक कहते हैं।

(*ii*) $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$.........

(*iii*) $\frac{d}{dx}(........) = \frac{d^2y}{dx^2}$.

प्रश्नावली 5.1

1. यदि $y = 8x^3 + 4x^2 + 3x + 11$ तो $\frac{d^3y}{dx^3}$ ज्ञात कीजिए।

2. यदि $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ तो $\frac{d^3y}{dx^3}$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $y = x^2 \log x$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x}$.

निम्नलिखित फलनों के द्वितीय अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए :

4. (*i*) $x^3 \log x$. (*ii*) $x \log x$.

5. $\sin(\cos x)$.

6. $x^3 e^{4x}$. **7.** $\tan e^x$.

8. e^{nx} का nवाँ अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए।

9. यदि $y = A\sin px + B\cos px$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0$.

10. यदि $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2xy}{(ax - y^2)^3}$.

11. यदि y, z का फलन है तथा $z = ax$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 \frac{d^2y}{dz^2}$.

12. यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$, तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 = 2$.

13. यदि $y = e^{\tan^{-1} x}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(1 + x^2)\, y_2 + (2x - 1)\, y_1 = 0$.

14. यदि $\sqrt{x+y} + \sqrt{y-x} = c$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{c^2}$.

15. यदि $x^2 + xy + y^2 = a^2$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{6a^2}{(x+2y)} = 0$.

16. यदि $y = \tan^{-1} \frac{1 - 2\log x}{1 + 2\log x} + \tan^{-1} \frac{3 + 2\log x}{1 - 6\log x}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

17. यदि $p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2p}{d\theta^2} + p = \frac{a^2b^2}{p^3}$.

18. यदि $y = e^{a \sin^{-1} x}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 - a^2y = 0$.

19. यदि $y = \sin (m \sin^{-1} x)$, तो सिद्ध करो कि $(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 + m^2y = 0$.

5.2 सारांश (Summary)

- यदि y, x का कोई फलन हो तो x के सापेक्ष y का अवकल-गुणांक अर्थात् $\frac{dy}{dx}$ भी x का फलन होता है जिसका फिर से अवकलन किया जा सकता है। $\frac{dy}{dx}$ के अवकल गुणांक $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ को y का **द्वितीय अवकल-गुणांक** कहते हैं।

5.3 शब्दकोश (Keywords)

- उत्तरोत्तर (Successive): क्रमागत।
- विविध (Miscellaneous): मिश्रित।

5.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. यदि $y = x^3 - \frac{1}{x^3}$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए। (उत्तर : $6x - 12x^{-5}$)

2. यदि $y = x^3 \log x$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{6}{x}$.

3. यदि $y = e^{ax} \sin bx$ हो, तो सिद्ध करें कि $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)\, y = 0$.

नोट

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. (*i*) द्वितीय (*ii*) $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ (*iii*) $\dfrac{dy}{dx}$.

5.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
6. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*

नोट

इकाई–6 : अवकलन : सापेक्ष (Differentiation: Partial)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- किसी फलन का किसी दूसरे फलन के सापेक्ष अवकलन ज्ञात करने की विधि को समझ सकेंगे।

प्रस्तावना (Introduction)

किसी फलन का किसी दूसरे फलन के सापेक्ष अवकल-गुणांक प्रथम फलन का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक और दूसरे फलन का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक का अनुपात होता है।

6.1 किसी फलन का किसी दूसरे फलन के सापेक्ष अवकलन (Differentiation of a Function in Respect of other Function)

मान लीजिए $y_1 = f_1(x)$ तथा $y_2 = f_2(x)$

अर्थात् y_1 तथा y_2, x के दो फलन हैं, दोनों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1'(x) \text{ तथा } \frac{dy_2}{dx} = f_1'(x)$$

अब y_1 का y_2 के सापेक्ष अवकल-गुणांक $\frac{dy_1}{dy_2}$

नोट

नोट्स

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\frac{dy_1}{dx}}{\frac{dy_2}{dx}} = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$

अतः
$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_1 \text{ का } x \text{ के सापेक्ष अवकल - गुणांक}}{y_2 \text{ का } x \text{ के सापेक्ष अवकल - गुणांक}}$$

क्या आप जानते हैं

साध्य–किसी फलन का किसी दूसरे फलन के सापेक्ष अवकल-गुणांक प्रथम फलन का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक और दूसरे फलन का x के सापेक्ष अवकल-गुणांक का अनुपात होता है।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $\tan^{-1} x$ का अवकल-गुणांक $\sin^{-1} x$ के सापेक्ष $x = \frac{1}{2}$ पर ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\frac{d(\tan^{-1} x)}{d(\sin^{-1} x)} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$$

$x = \frac{1}{2}$ पर
$$= \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$
उत्तर

उदाहरण 2. $e^{\tan x}$ का अवकल-गुणांक $\sin x$ के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y_1 = e^{\tan x}$ तथा $y_2 = \sin x$

यहाँ $dy_1 = \frac{d}{dx} e^{\tan x} = e^{\tan x}. \sec^2 x$

और $dy_2 = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

अतः $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{de^{\tan x}}{d \sin x} = \frac{e^{\tan x}. \sec^2 x}{\cos x} = \frac{e^{\tan x}}{\cos^3 x}.$ **उत्तर**

उदाहरण 3. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ का अवकल-गुणांक $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y_1 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ तथा $y_2 = \tan^{-1} x$

नोट

$x = \tan\theta$ रखने पर

$$y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{\tan^{-1}x}{2}$$

$\therefore$
$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan^{-1}x}{2}\right) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

तथा
$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$\therefore$
$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{d[\tan^{-1}\{\sqrt{1-x^2}-1\}/x}{d(\tan^{-1}x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2(1+x^2)}}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{2}.$$

उत्तर

> *टास्क* $\tan^{-1}x$ का अवकल-गुणांक $\sin^{-1}x$ के सापेक्ष $x = \frac{1}{3}$ पर ज्ञात कीजिए। (**उत्तर :** $\frac{3\sqrt{2}}{5}$)

उदाहरण 4. $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ का $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ तथा $y_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ रखने पर,

$$y_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$$

तब
$$\frac{dy_1}{dx} = 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

नोट

तथा $$y_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1} x$$

तब $$\frac{dy_2}{dx} = 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

$\therefore$ $$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{d[\tan^{-1}\{2x/(1-x^2)\}]}{d[\sin^{-1}\{2x/(1+x^2)\}]}$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}[\tan^{-1}\{2x/(1-x^2)\}]}{\frac{d}{dx}\sin^{-1}\{2x/(1+x^2)\}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \times \frac{1+x^2}{2} = 1.$$ उत्तर

उदाहरण 5. फलन $f(x) = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ का $\sin^{-1} x$ के सापेक्ष अवकल-गुणांक ज्ञात करें।

हल : माना $$y_1 = \sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$x = \sin\theta$$

$$y_1 = \sin^{-1}(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}) = \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$y_1 = \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$y_1 = 2\theta = 2\sin^{-1}x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

पुनः $$y_2 = \sin^{-1} x$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

तब $$\frac{d\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})}{d\sin^{-1}x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 2.$$ उत्तर

उदाहरण 6. यदि $\sqrt{1-x^6} + \sqrt{1-y^6} = a^3(x^3-y^3)$ हो, तो सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}\sqrt{\frac{1-y^6}{1-x^6}}$.

हल : माना $x^3 = \sin\theta$, $y^3 = \sin\phi$, तब $\sqrt{1-x^6} + \sqrt{1-y^6} = a^3(x^3-y^3)$

नोट

या $\sqrt{1-\sin^2\theta} + \sqrt{1-\sin^2\phi} = a^3(\sin\theta - \sin\phi)$

$$\cos\theta + \cos\phi = a^3(\sin\theta - \sin\phi)$$

$$2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2} = a^3.2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$

$\Rightarrow$ $$\cot\frac{\theta-\phi}{2} = a^3$$

$\Rightarrow$ $$\theta - \phi = 2\cot^{-1}a^3$$

$\Rightarrow$ $$\sin^{-1}x^3 - \sin^{-1}y^3 = 2\cot^{-1}a^3$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}.3x^2 - \frac{1}{\sqrt{1-y^6}}.3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}\sqrt{\frac{1-y^6}{1-x^6}}.$$ उत्तर

उदाहरण 7. यदि $y = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$, तब $x = 0$ पर $\dfrac{dy}{dx}$ तथा $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$y = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = (1+x+x^2+x^3)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -(1+x+x^2+x^3)^{-2}(1+2x+3x^2)$$

$x = 0$ पर $$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(1+x+x^2+x^3)^{-3}(1+2x+3x^2) - (1+x+x^2+x^3)^{-2}(2+6x)$$

$x = 0$ पर $$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$ उत्तर

उदाहरणः 8. यदि $\sin y = x\cos(a+y)$, तो सिद्ध कीजिए $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2(a+y)}{\cos a}$ तथा $x = 0$ पर $\dfrac{dy}{dx} = \cos a$.

हल : $$\sin y = x\cos(a+y)$$

$\Rightarrow$ $$x = \frac{\sin y}{\cos(a+y)}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

नोट

$$1 = \frac{\cos(a+y)\cos y\dfrac{dy}{dx} - \sin y.\{-\sin(a+y)\}\dfrac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$1 = \frac{\{\cos(a+y).\cos y + \sin(a+y).\sin y\}\dfrac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$1 = \frac{\cos(a+y-y)\dfrac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$1 = \frac{\cos a}{\cos^2(a+y)}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\cos a}$$

पुन: जब $x = 0$

तब $\sin y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = n\pi$

$x = 0$ पर, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+n\pi)}{\cos a}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 a}{\cos a}\ \cos a.$$

उदाहरण 9. यदि $y = (\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2$, तो सिद्ध कीजिए

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 4.$$

हल : $$y = (\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(\sin^{-1} x - \cos^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = 2(\sin^{-1} x - \cos^{-1} x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x).\frac{dy}{dx} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$\frac{(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1-x^2}} = 2.\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 4.$$

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)–

(*i*) ax^7 का x^7 के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा–

(*a*) a (*b*) x (*c*) x^7 (*d*) a^2

(*ii*) $\log x$ का $\tan x$ के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा–

(*a*) $\frac{\sin^2 x}{x}$ (*b*) $\frac{\cos^2 x}{x}$ (*c*) $\frac{x}{\cos^2 x}$ (*d*) $\frac{x}{\sin^2 x}$

(*iii*) $\tan^{-1}x$ का अवकल-गुणांक $\sin^{-1} x$ के सापेक्ष $x = \frac{1}{2}$ पर होगा–

(*a*) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (*b*) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ (*c*) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (*d*) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

प्रश्नावली 6.1

निम्नलिखित का अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए :

1. x^5 का x^2 के सापेक्ष। **2.** e^x का $\sqrt{x}$ के सापेक्ष।

3. $x \sin^{-1} x$ का $\sin^{-1} x$ के सापेक्ष।

4. $\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ का $\sqrt{x}$ के सापेक्ष। **5.** $(\log \sin x)^{\sin x}$ का $\sin x$ के सापेक्ष।

6. $\log (x^2 + 2x + 1)$ का $(x^2 + 2x)$ के सापेक्ष।

7. $\sec^{-1} \frac{1}{2x^2 - 1}$ का $\sqrt{1 - x^2}$ के सापेक्ष $x = \frac{1}{2}$ पर मान बताइए।

उत्तर

1. $\frac{5}{2}x^3$ 2. $2\sqrt{x}\, e^x$ 3. $x + \sqrt{1 - x^2}.\sin^{-1} x$

4. $\frac{-2}{1+x}$ 5. $(\log \sin x)^{\sin x}.\,[\log (\log \sin x + 1 \log \sin x)]$

6. $\frac{1}{x^2 + 2x + 1}$ 7. 4.

नोट

6.2 सारांश (Summary)

- मान लीजिए $y_1 = f_1(x)$ तथा $y_2 = f_2(x)$ अर्थात् y_1 तथा y_2, x के दो फलन हैं, दोनों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1'(x) \text{ तथा } \frac{dy_2}{dx} = f_2'(x)$$

6.3 शब्दकोश (Keywords)

- सापेक्ष (Partial): आंशिक।

6.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ का अवकल-गुणांक $\tan^{-1}x$ के सापेक्ष ज्ञात कीजिए। (उत्तर : $\frac{1}{2}$)

2. यदि $\sqrt{1-x^6} + \sqrt{1-y^6} = a^3(x^3 - y^3)$ हो, तो साबित करें कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}\sqrt{\dfrac{1-y^6}{1-x^6}}$

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

(*i*) (*a*) (*ii*) (*b*) (*iii*) (*c*).

6.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
5. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
9. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*

नोट

इकाई–7 : समरूप फलन एवं यूलर्स प्रमेय (Homogeneous Function and Euler's Theorem)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- समरूप फलन की परिभाषा जानने में।
- यूलर्स प्रमेय को भलीभाँति समझने हेतु।
- कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन की जानकारी हेतु।
- सी.ई.एस. (स्थिर प्रतिस्थापन लोच) उत्पादन फलन से अवगत होने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

एक विशेष प्रकार के फलन जो अधिकतर प्रयोग होते हैं, समरूप फलन कहलाते हैं।
यूलर्स प्रमेय बताती है कि जब सभी उत्पत्ति के साधन एक दिए हुए अनुपात में बढ़ाये जाते हैं तो परिणामस्वरूप उत्पादन भी उसी अनुपात में बढ़ जाएगा।
यूलर्स प्रमेय का आर्थिक क्षेत्र में विशेषकर वितरण क्षेत्र में विशेष महत्त्वपूर्ण स्थान है। उत्पादन विभिन्न साधनों के संयुक्त संयोग से होता है।
कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन का आर्थिक क्षेत्र में महत्त्वपूर्ण स्थान है। वर्तमान में अर्थशास्त्री कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन का विभिन्न आर्थिक क्षेत्रों में प्रयोग करने लग गये हैं।

नोट

7.1 समरूप फलन : परिभाषा (Homogeneous Function: Definition)

अर्थशास्त्र में अधिकतर प्रयोग होने वाले एक विशेष प्रकार के फलन को समरूप फलन कहते हैं।

उदाहरणार्थ,

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

यदि $x \to tx$ and $y \to ty$ उपरोक्त फलन में रखते हैं जहाँ t धनात्मक स्थिरांक है।

तो, $$f(tx, ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2 (x^2 - y^2)$$
$$= t^2 f(x, y)$$

यदि फलन $f(x, y) = x^3 - y^3$ है तो

$$f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$$
$$f(x, y) = x^n - y^n$$

तो $$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

समरूप फलन का अन्य उदाहरण,

$$f(x, y) = x^2 + xy - 3y^2$$

तो, $$f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$$
$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$$

और, $$f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$$

फलन को निम्न प्रकार लिख सकते हैं–

$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

नोट्स उपरोक्त फलन $f(x, y)$ n कोटि का समरूप फलन है। अर्थशास्त्र में अधिकतर शून्य कोटि के फलन का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण 1: $f(x, y, z) = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}$

तो, $$f(tx, ty, tz) = \frac{tx}{tz} + \frac{ty}{tz} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = f(x, y, z) = t^0 f(x, y, z)$$

उदाहरण 2: $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{xz} + \dfrac{z^2}{xy}$

$$f(tx, ty, tz) = \frac{t^2x^2}{t^2yz} + \frac{t^2y^2}{t^2xz} + \frac{t^2z^2}{t^2xy}$$
$$= t^0 f(x, y, z)$$

उदाहरण 3: यदि q मात्रा, p कीमत तथा y आय है तो मांग फलन निम्न हैं

$q = f(p, y) = \dfrac{y}{kp}$ जहाँ k स्थिरांक है।

तो,
$$f(tp, ty) = \frac{ty}{kp} = \frac{y}{kp} t^0 f(p, y)$$
$$q = f(p, y) = f(tp, ty)$$

अतः जब मूल्य p और आय x एक ही अनुपात में बदलते हैं तो मांग q में कोई परिवर्तन नहीं होता।

7.2 यूलर्स प्रमेय (Euler's Theorem)[1]

यूलर्स प्रमेय बताती है कि जब सभी उत्पत्ति के साधन एक दिये हुए अनुपात में बढ़ाये जाते हैं तो परिणामस्वरूप उत्पादन भी उसी अनुपात में बढ़ जायेगा, यदि प्रत्येक उत्पत्ति के साधन को उसकी सीमान्त उत्पादकता के मूल्य के बराबर पुरस्कार दिया जाता है तथा कुल उत्पादन पूर्णरूप से परिसमाप्त हो जाता है।[1] गणितीय रूप में यूलर्स प्रमेय को निम्न रूप में दर्शाया जा सकता है। यदि उत्पादन फलन, $p = f(L, K)$ एक रेखीय समरूप फलन (Linear Homogenous Function) होती है—

$$P = L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K}, \text{ दूसरे शब्दों में } P = LMP_L + KMP_K$$

जहाँ $P =$ कुल उत्पादन $L =$ श्रम साधन की इकाइयाँ, $K =$ पूँजी साधन की इकाइयाँ, $\dfrac{\partial P}{\partial L}$ या $MP_L =$ श्रम की सीमान्त उत्पादकता तथा $\dfrac{\partial P}{\partial K}$ = या $MP_K =$ पूँजी की सीमांत उत्पादकता को दर्शाते हैं।

मान्यताएँ (Assumptions)

प्रेमय निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण मान्यताओं पर आधारित है—

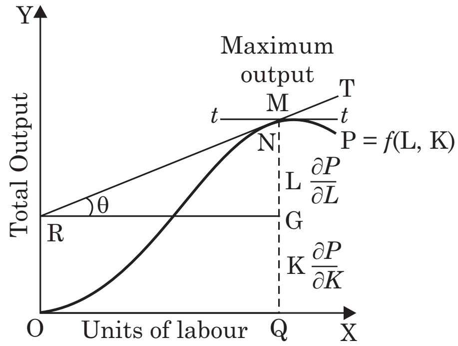
1. पैमाने के स्थिर प्रतिफल का नियम (The Law of Constant Returns of Scale) क्रियाशील होता है। यह तभी सम्भव होता है जबकि उत्पादन फलन रेखीय समरूप तथा एक कोटि (Degree) की होती है।
2. बाजार में पूर्ण प्रतिस्पर्द्धा की स्थिति पायी जाती है।
3. यह उत्पत्ति के साधन की विभाज्यता की मान्यता को लेकर चलती है।
4. दिये हुए समय के लिए तकनीकी स्थिर होती है।

7.2.1 यूलर्स प्रमेय का चित्रमय प्रदर्शन (Diagramatical Presentation of Euler's Theorem)

यूलर्स प्रमेय को उपरोक्त मान्यताओं को ध्यान में रखकर चित्र द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। मान लीजिये उत्पादन फलन $P = f(L, K)$ है तो दोनों साधन L तथा K का कुल उत्पादन P पर प्रभाव पड़ता है। प्रथम, हम L साधन का क्रम उत्पादन P पर प्रभाव देखेंगे जबकि K साधन स्थिर रहता है। इसके पश्चात् K साधन का P पर प्रभाव देखेंगे जबकि L साधन स्थिर रहता है।

1. Euler's Theorem states that all factors of production are increased in a given proportion resulting output will also increase in the same proportion each factor of production (input) is paid the value of its marginal product, and the total output is just exhausted.

नोट



रेखाचित्र 7.1

रेखाचित्र 7.1 में L साधन की इकाइयाँ X-अक्ष पर तथा कुल उत्पादन को Y-अक्ष पर मापा गया है। TP कुल उत्पादन को दर्शाते हैं। M बिन्दु पर कुल उत्पादन अधिकतम होता है। मान लीजिये कुल उत्पादन वक्र TP पर N बिन्दु पर TI स्पर्श रेखा खींची गयी है। N बिन्दु से X-अक्ष पर लम्बवत् रेखा खींची गयी है जो X-अक्ष पर Q बिन्दु पर मिलती है।

अब, N बिन्दु पर ढाल (Slope) $\frac{\partial P}{\partial K} = \tan\theta$

$$= \frac{NG}{RG} = \frac{NG}{OQ}$$

अब $$L\frac{\partial P}{\partial L} = OQ\frac{NG}{OQ} = NG \qquad \ldots(i)$$

यूलर्स प्रमेय, $$P = L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K}$$

या $$K\frac{\partial P}{\partial K} = P - L\frac{\partial P}{\partial L} = QN - NG = QG \qquad \ldots(ii)$$

जहाँ $P =$ कुल उत्पादन स्तर

$$P = L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K}$$

या $QN = NG + QG$

इस प्रकार कुल उत्पादन QN, NG तथा OG भागों में विभाजित होता है। जहाँ NG तथा QG क्रमश: L साधन तथा K को दिये जाने वाले पुरस्कार हैं। इस प्रकार यदि किसी फर्म के प्रत्येक साधन को उसकी सीमान्त उत्पादकता के बराबर पुरस्कार दिया जाता है तो कुल उत्पादन पूर्वरूप से परिसमाप्त हो जायेंगे।

7.2.2 यूलर्स प्रमेय का गणितीय हल (Mathematical Solution of Eulers Theorem)

यूलर्स प्रमेय समरूप फलन की सहायता से सीमान्त उत्पादकता के सिद्धांत में एक विशेष संबंध को बताती है। यदि $u = f(x, y)$ एक h कोटि का समरूप फलन है तो यह प्रमेय अग्रलिखित संबंध को दर्शाती है–

$$= xf_{tx} + yf_{ty}$$

नोट

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{(R.H.S.)} = \frac{\partial t^h}{\partial t} f(x, y) + t^h \frac{\partial f(x, y)}{\partial t} \text{ (L.H.S.)}$$
$$= ht^{h-1} f(x, y) - 0$$
$$= ht^{h-1} f(x, y)$$

जहाँ L.H.S. बायें है और R.H.S दायें है तो L.H.S. = R.H.S.

$$xf_{tx} + yf_{ty} = ht^{h-1} f(x, y)$$

अत: यदि $t = 1$ तो, t की कुछ भी संख्या हो सकती है।

$$xf_x + yf_y = hf(x, y)$$

h समीकरण की कोटि है। यदि हम समरूप रेखीय फलन ले तो $h = 1$

तो $$xf_x + yf_y = f(x, y)$$

या $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

यदि द्वितीय कोटी समीकरण लें तो ये होगा

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$$

दो चरों से अधिक के लिए सामान्यीकरण करने पर

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \dots = ku(x, y, z\dots)$$

जहाँ k समीकरण की कोटि है।

$$f(x, y, z) = 3x + 2y - 4z$$

एक समरूप रेखीय फलन है

तो मूल के अनुसार

$$xf_x + yf_y + zf_z = 1 \times (3x + 2y - 4z)$$
$$f_x = 3, f_y = 2, f_z = -4$$

अत: बायाँ पक्ष निम्न होगा;

$$\text{L.H.S.} = 3x + 2y - 4z = \text{R.H.S.}$$

7.2.3. यूलर्स प्रमेय का महत्त्व (Importance of Euler's Theorem)

यूलर्स प्रमेय का आर्थिक क्षेत्र में, विशेषकर वितरण क्षेत्र में विशेष महत्त्वपूर्ण स्थान है। उत्पादन विभिन्न साधनों के संयुक्त संयोग से होता है। अब सवाल उठता है कि कुल उत्पादन को उत्पत्ति के विभिन्न साधनों में किस प्रकार वितरित किया जाये। यदि उत्पादन फलन समरूप होती है तो हमें यह बताता है कि प्रत्येक साधन को उसकी सीमान्त उत्पादकता के बराबर पुरस्कार प्राप्त होना चाहिए ताकि कुल उत्पादन पूर्णरूप से परिसमाप्त हो जायेगा। इसके अतिरिक्त यह प्रमेय उत्पादक की अल्पकालीन समस्याओं को हल करने में मदद करती है—उत्पादन का प्रत्येक साधन में आवंटन तथा कुल उत्पादन को विभिन्न साधनों के मध्य वितरण इत्यादि समस्याओं को हल करती है। प्रमेय फर्म को यह भी बताती है कि साधनों का किस प्रकार से प्रयोग करना चाहिए। उत्पत्ति के साधन को उस सीमा तक प्रयोग करना चाहिए जहाँ उसका मूल्य उसकी सीमान्त आगम उत्पादकता के बराबर हो जाये। इस प्रकार यह उत्पत्ति के साधन की कीमत निर्धारण में भी सहायता करती है।

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. अर्थशास्त्र में अधिकतर प्रयोग होने वाले एक विशेष प्रकार के फलन को ········· फलन कहते हैं।
2. ········· प्रमेय समरूप फलन की सहायता से सीमान्त उत्पादकता के सिद्धांत में एक विशेष संबंध को बताती हैं
3. यूलर्स प्रमेय का ·········· क्षेत्र में विशेष महत्त्वपूर्ण स्थान है।
4. ········· विभिन्न साधनों के संयुक्त संयोग से होता है।
5. यदि उत्पादन फलन ········· होती है तो हमें यह बताता है कि प्रत्येक साधन को उसकी सीमान्त उत्पादकता के बराबर पुरस्कार प्राप्त होना चाहिए ताकि कुल उत्पादन पूर्ण रूप से परिसमाप्त हो जाएगा।

7.3 कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन (Cobb-Douglas Production Function)

कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन का आर्थिक क्षेत्र में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है। इस उत्पादन फलन के प्रतिपादन का श्रेय सी.डब्ल्यू. कॉब (C.W. Cobb) तथा डी. एच. डोग्लस को दिया जाता है। उन्होंने इस फलन का अनुमान लगाने के लिए विश्व के विभिन्न उद्योगों का अध्ययन किया। इस प्रकार इसका प्रयोग उत्पादन के सामान्य नियम (Universal law) के रूप में किया जाता है।

क्या आप जानते हैं कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन को सामान्य रूप में निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है–

$$P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$$

जहाँ P = उत्पादन, L = श्रम साधन, K = पूँजी साधन, u = त्रुटि (Disturbance Terms) तथा A एक स्थिर राशि है।

α तथा β धनात्मक प्राचल (Parameters) हैं। इसके साथ $\alpha > 0, \beta > 0, L > 0$ तथा $\alpha + \beta = 1$ होता है। कुछ अर्थशास्त्री इस उत्पादन फलन को u के बिना भी दर्शाते हैं।

$$P = AL^{\alpha} K^{\beta} (\alpha > 0, \beta > 0)$$

यदि $\alpha + \beta = 1$

कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन में दो उत्पत्ति के साधन होते हैं अर्थात्

$$P = f(L, K)$$

यदि दोनों तरफ किसी स्थिर λ (Lemda) से गुणा कर दिया जाये तो

$$\lambda P = f(\lambda L, \lambda K)$$

तब,
$$f(\lambda L, \lambda K) = A(\lambda L)^{\alpha} (\lambda K)^{\beta} u$$
$$= \lambda^{\alpha+\beta} AL^{\alpha} K^{\beta} u$$
$$= \lambda \alpha + \beta P \qquad (\text{चूंकि } P = AL^{\alpha} K^{\beta} u)$$

यदि $\alpha + \beta = 1$, तब उत्पादन पैमाने के स्थिर प्रतिफल के अंतर्गत होगा।

नोट

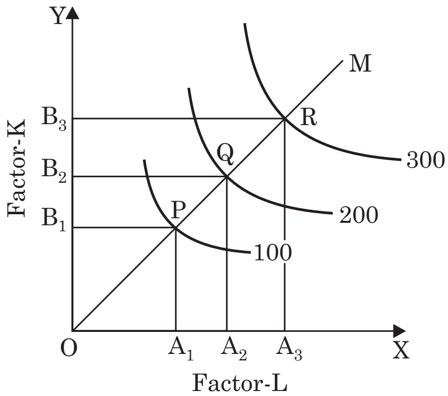
यदि $\alpha + \beta > 1$, पैमाने का बढ़ता हुआ प्रतिफल कार्यशील होगा।

तथा $\alpha + \beta < 1$, पैमाने का घटता हुआ प्रतिफल कार्यशील होगा।

7.3.1 कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन की विशेषताएँ (Characteristics of Cobb Douglas Production Function)

1. यदि उत्पत्ति के साधनों में किसी स्थिर राशि λ से वृद्धि की जाती है तो उत्पादन भी λ गुणा बढ़ जायेगा। कॉब–डोग्लस उत्पादन फलन $P = L_{\alpha} K^{\beta} u$ है तो यदि श्रम L तथा पूँजी (K) λ से गुणा बढ़ा दिये जायें तो

$$
\begin{aligned}
p^{t} &= A\,(\lambda L)^{\alpha}\,(\lambda K)^{\beta}\,u \\
&= \lambda^{\alpha+\beta} A L^{\alpha} K^{\beta} u \\
&= \lambda\, A L^{\alpha} K^{\beta} u && (\text{यदि } \alpha + \beta = 1) \\
&= \lambda P
\end{aligned}
$$



रेखाचित्र 7.2

इस प्रकार जिस अनुपात में साधनों को बढ़ाया जाता है उसी अनुपात में उत्पादन भी बढ़ जाता है। इसको रेखाचित्र 7.2 की सहायता से भी स्पष्ट किया जा सकता है। X-अक्ष पर साधन L (श्रम) तथा Y-अक्ष पर साधन K (पूंजी) को लिया गया है। उत्पादन की 100 इकाइयाँ उत्पादित करने के लिए साधन L की OA_1 इकाइयाँ तथा साधन K की OB_1 इकाइयाँ काम में ली जाती हैं। यदि उत्पादन की 200 इकाइयाँ उत्पादित करते हैं तो साधन L तथा साधन R को भी दुगुनी आवश्यकता पड़ेगी। यहाँ OA_2 बिल्कुल OA_1 का दुगुना है। इसी प्रकार OB_2 बिल्कुल OB_1 का दुगुना है। इसी प्रकार उत्पादन की 300 इकाइयों के लिए साधन A तथा B को तीन गुनी इकाइयों की आवश्यकता होगी। जैसा कि रेखाचित्र 7.2 में स्पष्ट किया गया है।

इसको दूसरे तरीके से भी स्पष्ट किया जा सकता है। OM उत्पादन का विस्तार पथ है जो P, Q तथा R संतुलन बिन्दुओं को मिलाती है। ये सभी संतुलन बिन्दु समान अन्तर पर होंगे अर्थात् $OP = PQ = QR$, जो यह बताता है कि उत्पादन उसी अनुपात में बढ़ेगी जिस अनुपात में साधन बढ़ाये जाते हैं।

2. उत्पादन फलन समरूप तथा एक कोटि का होता है: यदि उत्पादन फलन समरूप तथा एक कोटि (Degree) का होता है तो उसका अभिप्राय यह है कि उत्पादन स्थिर पैमाने के प्रतिफल के अंतर्गत आता है, अर्थात्

उत्पादन फलन, $\quad P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$

दोनों तरफ log लेने पर

नोट

$$\log P = \log A + \alpha \log L + \beta \log K + \log u$$

पृथक्-पृथक् रूप में L तथा K के सन्दर्भ में आंशिक अवकलन (Differentiate) करने पर

$$\frac{1 \partial P}{P\ \partial L} = \frac{\alpha}{L} \quad \ldots(i)$$

तथा

$$\frac{1 \partial P}{P\ \partial K} = \frac{\beta}{K} \quad \ldots(ii)$$

(i) तथा (ii) को पुन: लिखने पर

$$L\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha P \quad \ldots(iii)$$

$$K\frac{\partial P}{\partial L} = \beta P \quad \ldots(iv)$$

समीकरण (iii) एवं (iv) को जोड़ने पर

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial L} = P\alpha + P\beta = P\,(\alpha + \beta)$$

$$= P \qquad [\because \quad \alpha + \beta = 1]$$

3. यदि उत्पादन फलन समरूप तथा एक कोटि का होता है तो प्रतिस्थापन की लोच (Elasticity of Substitution) सदैव इकाई के बराबर होती है। यदि उत्पादन फलन $P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$ जहाँ $\alpha + \beta = 1$

हम जानते हैं कि

$$\text{प्रतिस्थापन की लोच} = \sigma = \frac{\text{साधन की मात्रा अनुपात में परिवर्तन}}{\text{साधन की कीमत अनुपात में प्रतिशत परिवर्तन}}$$

$\therefore$

$$\sigma = \frac{\partial(K/L)/(K/L)}{\partial(P_L/P_K)/P_L/P_K} = \frac{\partial(K/L)/K/L}{\partial R/R}$$

जहाँ K/L = साधन मात्रा अनुपात

$R = P_L P_K$ = साधन कीमत अनुपात

हम जानते हैं कि सीमान्त प्रतिस्थापन तकनीकी की दर $= \dfrac{\partial K}{\partial L}$

$\therefore$

$$\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K} = R$$

अन्य शब्दों में, $R = \dfrac{\partial P/\partial L}{\partial P/\partial K}$

हमारा उत्पादन फलन $P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$

L तथा K के संदर्भ में पृथक्-पृथक् अवकलन करने पर

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \beta A L^{\alpha} K^{\beta} u$$

नोट

अत: $\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta-1} u$

$$R = \frac{\partial P/\partial L}{\partial P/\partial K} = \frac{\alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta} u}{\beta A L^{\alpha} K^{\beta} u} = \frac{\alpha}{L}\frac{K}{\beta}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{K}{L}\right)$$

$$\partial R = \alpha/\beta\partial\,(K/L)$$

अत: $$\sigma = \frac{\partial(K/L)/K/L}{\partial(P_L/P_K)/P_L/P_K} = \frac{\partial(K/L)/K/L}{\partial R/R}$$

$$\sigma = \frac{\partial(K/L)/K/L}{\frac{\partial(K/L)\cdot\alpha/b}{(K/L)\cdot\alpha/b}} = 1$$

इति सिद्धम्

4. उत्पादन के लिए पूँजी तथा श्रम आवश्यक साधन होते हैं– उत्पादन के लिए धन शून्य हो जाये तो कुल उत्पादन भी शून्य हो जायेगा

उत्पादन फलन, $P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$

माना $L = 0$

$P = A.B.\ K^{\beta} u = 0$

माना $K = 0$

$P = AL^{\alpha}\,.O.\ u. \ = 0$

अत: उत्पत्ति के लिए दोनों साधन आवश्यक हैं।

5. यदि उत्पादन फलन ($P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$) रेखीय तथा समरूप होती है तो α तथा β क्रमश: कुल उत्पादन में श्रम तथा पूँजी के हिस्से को प्रदर्शित करते हैं।

उत्पादन फलन, $P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$

L तथा K के संदर्भ में पृथक्-पृथक् अवकलन करने पर

$$\frac{1}{P} = \frac{\partial p}{\partial L}\alpha.\frac{1}{L}$$

$$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial K} = \beta.\frac{1}{K}$$

$\therefore$ $$\alpha = \frac{L}{P}\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{\text{श्रम}}{\text{उत्पादन}} \times \text{श्रम का सीमान्त उत्पादन}$$

$$= \frac{\text{मजदूरी का हिस्सा}}{\text{उत्पादन}}$$

= श्रमिक का कुल उत्पादन में हिस्सा।

तथा $$\beta = \frac{K}{P}\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{\text{पूँजी}}{\text{उत्पादन}} \times \text{पूँजी का सीमान्त उत्पादन}$$

नोट

$$= \frac{\text{पूँजी का हिस्सा}}{\text{उत्पादन}}$$

$$= \text{पूँजी का उत्पादन में हिस्सा} \qquad \text{इति सिद्धम्}$$

6. उत्पादन फलन के तथा क्रमशः श्रम लोच तथा पूँजी लोच को प्रदर्शित करते हैं। उत्पादन फलन की विशेषता (5) से

$$\alpha = \frac{L}{P}\frac{\partial P}{\partial L}$$

$$= \frac{\partial P/P}{\partial L/L} = \text{श्रम की लोच}$$

$$\beta = \frac{K}{P}\frac{\partial P}{\partial K}$$

$$= \frac{\partial P/P}{\partial K/K} = \text{पूँजी की लोच} \qquad \text{इति सिद्धम्}$$

कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन का विस्तार पथ (Expansion Path) रेखीय समरूप होता है तथा मूल बिन्दु से होकर गुजरता है।

कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन

$$P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$$

दोनों तरफ 'Log' लेने पर

$$\log P = \log A + \alpha \log L + \beta \log K + \log u$$

L तथा K के संदर्भ में पृथक्-पृथक् रूप में अवकलन करने पर

$$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\alpha}{L} \qquad \ldots(A)$$

$$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial \mathrm{K}} = \frac{\beta}{K} \qquad \ldots(B)$$

समीकरण (A) तथा (B) को पुनः लिखने पर

$$MP_L = \frac{\partial P}{\partial L} = P \cdot \frac{\alpha}{L}$$

तथा
$$MP_K = \frac{\partial P}{\partial L} = P \cdot \frac{\beta}{\mathrm{K}}$$

∴
$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{P\alpha/L}{\beta P/K} = \frac{P_L}{P_K}$$

अथवा
$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{K}{L} = \frac{P_L}{P_K}$$

नोट

अथवा $$\alpha \cdot KP_K = \beta \cdot LP_L$$

अथवा $$\alpha \cdot KP_K - \beta\, LP_L = 0$$

अत: उत्पादन फलन का विस्तार पथ रेखीय समरूप है तथा मूल बिन्दु से गुजरती है।

7.3.2 कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन का आर्थिक महत्त्व (Economic Significance of Cobb- Douglas Production Function)

कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन का आर्थिक क्षेत्र में महत्त्वपूर्ण स्थान है। वर्तमान में कई अर्थशास्त्री कॉब डोग्लस उत्पादन फलन का विभिन्न आर्थिक क्षेत्रों में प्रयोग करने लग गये हैं। इस फलन का प्रयोग दिन-प्रतिदिन विशेषकर विभिन्न उद्योगों तथा कृषि क्षेत्रों में बढ़ने लग गया है। यह इन क्षेत्रों के लिये महत्त्वपूर्ण सूचनायें प्रदान करती है। यह विभिन्न नीतियों के निर्माण करने में भी काम आती है।

इस फलन की सहायता से हम श्रम पूँजी की सीमान्त उत्पादकता (Marginal Productivity) निकाल सकते हैं और इस प्रकार यह मजदूरी निर्धारण के सिद्धान्त में सहायता देती है। (उत्पादन फलन उत्पादन तकनीकी का वर्णन करता है।) इस फलन से यह भी मालूम किया जा सकता है कि किसी साधन को दिया जाने वाला पुरस्कार उसकी सीमान्त उत्पादकता के बराबर है या नहीं। इसी प्रकार यह फलन कृषि में आर्थिक लोच का निर्धारण करने में भी मदद करता है। इस उत्पादन फलन के तथा पैरामीटर्स लोच गुणांक (Elasticity Coefficients) को प्रदर्शित करते हैं। ये लोच गुणांक अन्तर्राष्ट्रीय या आन्तरिक क्षेत्रों के मध्य तुलना करने में सहयोग कर सकते हैं।

यह विवेचना की जा चुकी है जब फलन रेखीय तथा समरूप होता है और $\alpha + \beta = 1$ होता है तो फलन स्थिर फलन के अन्तर्गत कार्यशील होगा। जब $\alpha + \beta > 1$ तथा $\alpha + \beta < 1$ होता है। तो फलन क्रमश: बढ़े हुये तथा घटते हुये पैमाने के प्रतिफल के अन्तर्गत कार्यशील होगा। इस प्रकार यह फलन पैमाने के विभिन्न प्रतिफलनों के नियमों का अध्ययन करने में सहयोग देता है। इसके अतिरिक्त यह फलन उत्पत्ति के साधनों की प्रतिस्थापिता (Substitutability) के लिये आवश्यक सूचनायें प्रदान करता है।

संक्षेप में, यह फलन आर्थिक क्षेत्र में विशेषकर कृषि तथा उद्योगों में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। यह श्रम नीतियाँ, अन्त: क्षेत्र तुलना, साधनों की प्रतिस्थापिता तथा समरूपता कोटि (Degree of Homogeneity) का निर्धारण करने में प्रयोग किया जाता है।

7.3.3 कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन की सीमायें (Limitations of Cobb-Douglas Production Functions)

यद्यपि कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन का आर्थिक क्षेत्र में विस्तृत प्रयोग किया जाता है तथा इसका प्रयोग विशेषकर कृषि तथा निर्माणकारी उद्योगों में बढ़ता रहता है, किन्तु विभिन्न अर्थशास्त्रियों के द्वारा इस फलन की आलोचनायें की जाती हैं। इस फलन के मुख्य आलोचक **प्रो.के.जे. अरो. (K.J. Arrow), एच.बी. चेनरी (H.B. Chenery), बी. एस. मिन्हास (B.S. Minhas), तथा आर.एम. सेलो (R.M. Salow)** रहे हैं। इसकी निम्न मुख्य आलोचनायें की जाती हैं–

1. इस फलन का मुख्य दोष यह है कि यह केवल उत्पत्ति के दो साधन (श्रम तथा पूँजी) को लेकर चलती है जबकि वास्तविकता यह है कि उत्पादन प्रविधियों में अन्य साधनों का भी समान महत्त्व होता है। दूसरे शब्दों में, यह फलन कई साधनों (दो साधनों से अधिक) के लिये लागू नहीं होता है। इसके अतिरिक्त इसका प्रयोग केवल निर्माणकारी उद्योगों में ही किया जा सकता है। इस प्रकार इस फलन से प्रयोग का क्षेत्र संकुचित हो जाता है।

नोट

2. यह उत्पादन फलन केवल पैमाने के स्थिर प्रतिफल के अन्तर्गत कार्यशील होता है। पैमाने के बढ़ते एवं घटते हुय प्रतिफल के नियम भी उत्पादन प्रक्रियाओं में क्रियाशील रहते हैं। किन्तु यह फलन इन नियमों में कार्य नहीं करता है।

3. फलन इस मान्यता पर आधारित है कि तकनीकी ज्ञान स्थिर रहता है और उत्पादन प्रक्रियाओं में तकनीकी परिवर्तन नहीं होते हैं। किन्तु उत्पत्ति का पैमाना भी तकनीकी परिवर्तन में परिवर्तित हो सकता है। इस प्रकार स्थिर तकनीकी की यह मान्यता अवास्तविक है।

4. कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन यह मानकर चलता है कि सभी साधन (Inputs) समरूप होते हैं। वास्तव में एक साधन की सभी इकाइयाँ भी समान कुशल नहीं होती हैं। उदाहरणस्वरूप, श्रम जनसंख्या में कुछ श्रमिक तो कुशल होते हैं तथा कुछ नहीं।

5. यह उत्पादन फलन की कोई उच्चतम सीमा निर्धारित नहीं करता है। इसी सन्दर्भ में **एम. प्रो. चाँद** (M.Chand) का कहना है, "चूँकि फलन P (उत्पादन) के लिये कोई उच्चतम सीमा निश्चित नहीं करता है, इसलिये यह सुविधाजनक होगा कि व्यवहार में फलन का सांख्यिकीय माप करने के लिये इसके मूल्यों को एक सीमा से बाहर न प्रयोग किया जाये।"[1]

6. फलन के α तथा β क्रमशः उत्पादन में श्रम तथा पूँजी के हिस्से को प्रदर्शित करते हैं। यह तभी सच होता है जबकि बाज़ार में पूर्ण प्रतिस्पर्धा की स्थिति पायी जाती है। किन्तु यदि अर्थव्यवस्था में अपूर्ण प्रतिस्पर्धा या एकाधिकार की स्थिति पायी जाये तो उपरोक्त सम्बन्ध प्राप्त नहीं किया जा सकता।

7. चूँकि यह साधनों की केवल धनात्मक सीमान्त उत्पादकता पर ध्यान देता है, इस प्रकार यह साधन की ऋणात्मक सीमान्त उत्पादकता को भुला देता है। जबकि किसी साधन की सीमान्त उत्पादकता शून्य या ऋणात्मक भी हो सकती है।

8. अन्तिम, फलन उत्पादन के साधनों के अन्तः सम्बन्ध के बारे में जानकारी देने में असमर्थ होता है।

7.4 सी.ई.एस. (स्थिर प्रतिस्थापन लोच) उत्पादन फलन (The C.E.S. Production Function)

कॉब-डोग्लस उत्पादन में यह विवेचना की जा चुकी है कि इसमें प्रतिस्थापन की लोच (Elasticity of Substitution) सदैव इकाई होती है। यहाँ हम एक ऐसी उत्पादन फलन की विवेचना करेंगे जिसमें प्रतिस्थापन की लोच स्थिर (आवश्यक नहीं है कि प्रतिस्थापन लोच इकाई के बराबर हो) होती है। यह स्थिर प्रतिस्थापन लोच उत्पादन फलन (Constant Elasticity Substitution Production Function) के नाम से जाना जाता है। इस फलन का प्रतिपादन दो विभिन्न अर्थशास्त्रियों के समूहों ने किया है। प्रथम समूह में **के.जे. अरो (K.J. Arrow)**, **चेनरी** (Chenery), **बी.एस. मिन्हास** (B.S. Minhas) तथा **आर.एम. सेलो** (R. M. Salow) आते हैं जबकि दूसरे में **एम. ब्राऊन** (M. Brown) **डी कनी** (De Cani) आते हैं। यद्यपि इस फलन को उन्होंने भिन्न रूपों में प्रतिपादित किया था किन्तु परिणाम (Result) समान थे। प्रथम समूह ने सी.ई.एस. (C.E.S.) उत्पादन फलन को निम्न प्रकार दर्शाया है–

$$P = \gamma[\delta C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha}$$

$$(\gamma > 0,\ 0 < \delta < 1,\ \alpha > -1)$$

जहाँ P = उत्पादन; C = पूँजी साधन; N = श्रम साधन; α = प्रतिस्थापन पैरामीटर (Substitution Parameter); γ = तकनीकी कुशलता गुणांक या कुशलता पैरामीटर (Technical Efficiency Coefficient or Efficiency Parameter) (सी.ई.एस. फलन में यह कॉब-डोग्लस में A की भाँति प्रयोग किया जाता है); δ = पूँजी तीव्रता गुणांक (Coefficient of Capital Intensity) (यहाँ कॉब-डोग्लस फलन में α की भाँति कार्य करता है।);

$1 - \delta$ = श्रम तीव्रता गुणांक (Labour Intensity Coefficient)

v = समरूपता कोटि (Degree of Homogeneity)

7.4.1 सी.ई.एस. उत्पादन फलन के गुण (Properties of C.E.S. Production Function)

1. यदि उत्पादन फलन रेखीय तथा समरूप होती है तो प्रतिस्थापन लोच (σ) स्थिर $\left(\dfrac{1}{1+\alpha}\right)$ के बराबर होती है जबकि उत्पादन फलन $P = \gamma(\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)\, N^{-\alpha}]^{-v/\alpha}$ होता है, बशर्ते $\gamma > 0,\ 0 < \delta < 1$ तथा $\alpha > -1$

उपपत्ति–परिभाषा के अनुसार प्रतिस्थापन की लोच

$$\sigma = \frac{\partial \log (N/C)}{\partial \log R} = \frac{\partial\, (N/C)/N/C}{\partial\, R/R}$$

यहाँ, $\dfrac{N}{C}$ = उत्पादन साधनों का अनुपात तथा $R = \dfrac{P_C}{P_N}$ = मूल्य अनुपात।

अब उत्पादन फलन

$$P = \gamma\, [\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha} \qquad \text{...(7.1)}$$

N के सापेक्ष में आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \gamma\, [-v/\alpha]\, [\delta\, C^{-\alpha} + (1-\alpha)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha}\, -1 \times [-\alpha(1-\delta)N^{-\alpha-1}]$$

$$= \frac{\gamma v}{\alpha}\, [\delta C^{-\alpha} + (1-\alpha)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha - 1}\ \ [\alpha(1-\delta)N^{-(\alpha+1)}] \qquad \text{...(7.2)}$$

समीकरण (7.1) से

$$\left[\frac{P}{\gamma}\right] = [\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha}$$

अथवा
$$\left[\frac{P}{\gamma}\right]^{-\alpha/v} = [\delta\, C^{-\alpha} + (1-\alpha)N^{-\alpha}]$$

अथवा
$$\left[\frac{P}{\gamma}\right]^{-(\alpha/v)(-v/\alpha-1)} = [\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha - 1} \qquad \text{...(7.3)}$$

समीकरण (7.3) को समीकरण (7.2) में रखने पर

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \gamma v \left[\frac{P}{\gamma}\right]^{1+\alpha/v} = (1-\delta)N^{-(1+\alpha)} \qquad \text{...(7.4)}$$

पुनः समीकरण (7.1) को C के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$\frac{\partial P}{\partial C} = \gamma v[\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha 1}\ \delta\ \cdot C^{-1+\alpha}$$

नोट

$$= \gamma v \left[\frac{P}{\gamma}\right]^{1+\alpha/v} \delta C^{-(1+\alpha)} \quad \text{[समीकरण (7.3) से]}$$

हम जानते हैं कि

$$MTRS = \frac{\partial P/\partial C}{\partial P/\partial N} = \frac{\partial N}{\partial C} = R$$

$\therefore$

$$R = \frac{\gamma v \left[\frac{P}{\gamma}\right]^{1+\alpha/v} \delta C^{-(1+\alpha)}}{\gamma v \left[\frac{P}{\gamma}\right]^{1+a/v} (1-\delta) N^{-(1+a)}}$$

अथवा

$$= \frac{d}{1-d}\left(\frac{C}{N}\right)^{(1+a)}$$

अथवा

$$R = \frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{N}{C}\right)^{1+\alpha}$$

दोनों तरफ log लेने पर

$$\log R = \log\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) + (1+\alpha)\log\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$= \log \delta' + (1+\alpha)\log G$$

यहाँ, $\delta' = \frac{\delta}{1-\delta}$ तथा $G = \frac{N}{C}$ रखने पर

G के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial G} = \frac{1+\alpha}{G}$$

अथवा

$$\frac{G}{R}\cdot\frac{\partial R}{\partial G} = 1+\alpha$$

अथवा

$$\frac{\partial G}{G}/\partial R/R = \frac{1}{1+\alpha}$$

अथवा

$$\frac{\partial(NC)/N/C}{\partial R/R} = \frac{1}{1+\alpha}$$

$\therefore$ प्रतिस्थापन का लोच $= \sigma = \frac{1}{1+\alpha}$ **इति सिद्धम्**

2. **सी.ई.एस. के सीमान्त उत्पाद** (Marginal Product) **सदैव धनात्मक होते हैं अर्थात् शून्य से अधिक होते हैं तथा कभी ऋणात्मक नहीं होते हैं।**

उपपत्ति—उत्पादन फलन

$$P = \gamma[\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha}$$

नोट

N के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \gamma^{\alpha/v} \cdot \gamma P^{1+\alpha/v}(1-\delta)N^{-\alpha-1} \text{ (प्रथम विशेषता से)}$$

$$Or\ MP_N = \gamma^{\alpha/v} \cdot v(1-\delta)P^{1+\alpha} N^{-(1+\alpha)}$$

$$= R_1 \frac{P^{1+\alpha/v}}{N^{1+\alpha/v}} \text{ यहाँ } R_1 = \gamma^{-\alpha/v}(1-\delta)$$

यदि उत्पादन स्थिर प्रतिफलन के अन्तर्गत होता है तो $v = 1$

$$\therefore \quad MP_N = R_1 \frac{P^{1+\alpha}}{N^{1+\alpha}} = R_1 \left[\frac{P}{N}\right]^{1+\alpha}$$

अथवा
$$MP_N = R_1 \left(\frac{P}{N}\right)^{1/\sigma} \qquad \left[\text{यहाँ, } \sigma = \frac{1}{1+\alpha}\right]$$

$\therefore$ $MP_N =$ धनात्मक अथवा $MP_N > 0$

पुनः $P = \gamma[\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha}$

C के सापेक्ष में आंशिक अवकलन करने पर

$$MP_C = \frac{\partial P}{\partial C} = \gamma^{-\alpha/v} \cdot vp^1 + \alpha\delta\, C^{-\alpha-1}$$

$$= \gamma^{-\alpha/v} \cdot v\delta P^{-1+\alpha/v}\, C^{-(1+\alpha)} \text{ (प्रथम विशेषता से)}$$

अथवा
$$MP_C = R_2 \frac{P^{1+\alpha/v}}{C^{1+\alpha/v}} \qquad \text{यहाँ, } R_2 = \gamma^{-\alpha/w} v\delta$$

यदि उत्पादन फलन स्थिर प्रतिफल के अन्तर्गत क्रियाशील हो तो $v = 1$

अतः
$$MP_C = R_2 \frac{P^{1+\alpha}}{C^{1+\alpha}} = R_2 \left(\frac{P}{C}\right)^{1+\alpha}$$

$$= R_2 \left(\frac{P}{C}\right)^{1/\sigma} \qquad \left[\text{यहाँ}, \sigma = \frac{1}{1+\alpha}\right]$$

= धनात्मक

अतः $MP_C > 0$

3. उत्पादन फलन के सीमान्त उत्पादन वक्र नीचे की ओर गिरते हुये होते हैं अर्थात्

$$\frac{\partial^2 P}{\partial M^2} < 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial C^2} < 0$$

टास्क सी.ई.एस. उत्पादन फलन के क्या गुण हैं?

नोट

7.4.2 सी.ई.एस. उत्पादन फलन का कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन पर लाभ (Advantages of C.E.S. Production Function Over Cobb-Douglas Production Function)

1. सी. ई. एस. (C.E.S.) उत्पादन फलन कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन की अपेक्षा अधिक सामान्य उत्पादन तकनीकी प्रदर्शित करता है। सी.ई.एस. उत्पादन फलन में प्रतिस्थापन लोच स्थिर होती है तथा तथा आवश्यक नहीं है कि यह लोच इकाई के बराबर हो।

2. सी. ई. एस. उत्पादन फलन कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन की अपेक्षा अधिक महत्त्वपूर्ण पैरामीटर्स (Parameters) रखता है। इस प्रकार इसका प्रतिस्थापितता (Substitutability) तथा कुशलता में अधिक विस्तृत क्षेत्र है।

3. कॉब-डोग्लस फलन सी.ई.एस. उत्पादन फलन का ही एक विशेष रूप होता है। यदि सी.ई.एस. फलन $\alpha = 0$ में रख दें तो कॉब-डोग्लस फलन प्राप्त हो जायेगा।

4. सी.ई.एस. उत्पादन फलन के पैरामीटर्स का अनुमान लगाना आसान होता है। इसके अतिरिक्त इस फलन ने कॉब-डोग्लस फलन की सभी समस्याओं तथा अवास्तविक मान्यताओं को दूर कर दिया है।

7.4.3 सी.ई.एस. उत्पादन फलन की सीमायें (Limitations of C.E.S. Production Function)

यद्यपि सी.ई.एस. उत्पादन फलन ने कॉब-डोग्लस फलन की सभी समस्याओं तथा अवास्तविक मान्यताओं को दूर कर दिया है और अर्थशास्त्र में भी इसका क्षेत्र व्यापक है, किन्तु फिर भी इसकी निम्न आलोचनायें की जाती हैं–

1. सी.ई.एस. उत्पादन फलन भी कॉब-डोग्लस की भाँति उत्पत्ति के केवल दो साधनों (श्रम तथा पूँजी) को लेकर चलता है। यह उत्पत्ति के अधिक साधनों के लिये लागू नहीं होता है। **प्रो.एच.उजावा** (Prof. H. Uzawa) का कहना है कि इस फलन को n-उत्पत्ति के साधनों के लिये लागू करना कठिन है।

उदाहरण–यदि $x = A\sqrt{ab}$ उत्पादन फलन है, a तथा b साधन के लिए माँग ज्ञात कीजिये जबकि उनकी कीमतें P_a तथा P_b स्थिर हैं। यदि माँग वक्र $x = \beta - \alpha p$ हों तो साधन की माँग कीमतों तथा स्थिरांक में क्या होगी?

If $x = A\sqrt{ab}$ is the production function, find the factor demand for 'a' and 'b' when their prices are P_a and P_b. If the demand curve is $x = \beta - a\,p$ what is the factor demand in terms of prices and constants.

हल (Solution)–दिया हुआ उत्पादन फलन

$$x = A\sqrt{ab}$$

$$= Aa^{1/2}b^{1/2} \qquad \ldots(i)$$

समीकरण (i) को पृथक्-पृथक् रूप में 'a' तथा 'b' के सन्दर्भ में अवकलन करने पर

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{1}{2}Aa^{-1/2}b^{1/2}$$

तथा

$$\frac{\partial x}{\partial b} = \frac{1}{2}Aa^{1/2}b^{-1/2} \qquad \ldots(ii)$$

नोट

समीकरण (i) तथा (ii) से

$$MP_a = \frac{1}{2}\frac{Aa^{1/2}b^{1/2}}{a} = \frac{x}{2a} \qquad \left(x = A\sqrt{ab}\right)$$

$$MP_b = \frac{1}{2}\frac{Aa^{1/2}b^{1/2}}{b} = \frac{x}{2b}$$

किन्तु हम जानते हैं कि

$$\frac{MP_a}{MP_b} = \frac{P_a}{P_b}$$

$$\frac{x/2a}{x/2b} = \frac{P_a}{P_b}$$

अथवा $$\frac{b}{a} = \frac{P_a}{P_b}$$

अथवा $$b = \frac{P_a}{P_b} \text{ तथा } a = b\frac{P_b}{P_a}$$

'a' तथा 'b' का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\frac{x}{A} = a\sqrt{P_a/P_b}$$

अथवा $$a = \frac{x}{A} = \sqrt{P_a/P_b} \qquad ...(iii)$$

इसी प्रकार से $$b = \frac{x}{A}\sqrt{P_a/P_b} \qquad ...(iv)$$

समीकरण (iii) तथा (iv) a तथा b साधन की कीमतों के रूप में साधन माँग को प्रदर्शित करते हैं।

अब, माँग वक्र

$$x = \beta - \alpha p$$

चूँकि $$TC = ap_a + bp_b$$

a तथा b का मान रखने पर

$$TC = ap_a + a\frac{p_a}{P_b}\cdot\ pb = 2ap_a$$

$$= 2p_a\frac{x}{A}\sqrt{P_b/P_a} \qquad \text{[समीकरण } (iii) \text{ से]}$$

x के सन्दर्भ में अवकलन करने पर

$$\frac{\partial(TC)}{\partial x} = \frac{2p_a}{A}\sqrt{p_b/p_a} = \frac{2}{A}\sqrt{(P_aP_b)}$$

$$MC = \frac{2}{A}\sqrt{(p_a\ p_b)}$$

नोट

चूँकि $MC = p$ (पूर्ण प्रतियोगिता की स्थिति में)

पुनः $x = \beta - \alpha p$

$$= \beta - \alpha \frac{2}{A}\sqrt{(p_a \ p_b)}$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$= \beta - \alpha \frac{2}{A}\sqrt{(p_a p_b)} = Aa^{1/2}b^{1/2} = Aa^{1/2}b^{1/2}\sqrt{P_a / P_b}$$

अथवा
$$= \frac{1}{A}\left(\beta - \frac{2\alpha}{A}\sqrt{(p_a p_b)}\right)\sqrt{p_a / p_b} = a$$

अथवा
$$= \frac{1}{A}\left(\beta - \frac{2\alpha}{A}\sqrt{(p_a p_b)}\right)\sqrt{p_a / p_b} = a$$

इसी प्रकार से
$$b = \frac{1}{A}\left(\beta - \frac{2\alpha}{A}\sqrt{(p_a p_b)}\right)\sqrt{p_a / p_b} \qquad \ldots(vi)$$

समीकरण (v) तथा (vi) साधन a तथा b के साधन माँग को प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण–(अ) यदि उत्पादन इस प्रकार है–

$$Q = A\,K^{\alpha}\,L^{\beta}$$

तो पूँजी (K) व श्रम (L) की सीमान्त उत्पादकता ज्ञात कीजिये।

(ब) उपर्युक्त उत्पादन फलन में पूँजी व श्रम की उत्पादन लोच है। इसे सिद्ध कीजिये।

हल (Solution)–(अ) दी हुई उत्पादन फलन है–

$$Q = A\,K^{\alpha}\,L^{\beta} \qquad \ldots(i)$$

समीकरण 'K' तथा 'L' के संदर्भ में पृथक्-पृथक् आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha\,K^{\alpha-1}\,L^{\beta} \qquad \ldots(ii)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = A\beta\,K^{\alpha}\,L^{\beta-1} \qquad \ldots(iii)$$

फलन (ii) एवं (iii) क्रमशः पूँजी K तथा श्रम L की सीमान्त उत्पादकता को दर्शाते हैं। इन्हें सरल रूप में पुनः लिखने पर

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\alpha}{K} \qquad (\because \quad Q = AK^{\alpha}\,L^{\beta})$$

तथा
$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\beta}{L}\cdot Q$$

नोट

(ब) पूँजी की उत्पादन लोच

$$= \frac{K}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{K}{Q} \cdot A\alpha\, K^{\alpha-1}L^{\beta}$$

$$= \frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\, A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = \alpha\frac{A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}} = \alpha$$

श्रम की उत्पादन लोच

$$= \frac{L}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{L}{Q} \cdot A\beta\, K^{\alpha}L^{\beta-1}$$

$$= \frac{L}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\, A\,\beta\, K^{\alpha}\, L^{\beta-1}$$

$$= \frac{\beta}{AK^{\alpha}\, L^{\beta-1}}\, AK^{\alpha}\, L^{\beta-1} = \beta$$

इस प्रकार α तथा β दी हुई उत्पादन फलन में पूँजी व श्रम की उत्पादन की लोच को प्रदर्शित करते हैं।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)—

6. कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन के प्रतिपादन का श्रेय किसे दिया जाता है?

   (*a*) सी.डब्ल्यू. कॉब तथा डी.एच. डोग्लस (*b*) कॉब और मार्शल

   (*c*) डोग्लस एवं अरस्तु (*d*) उपरोक्त सभी

7. उत्पादन फलन है—

   (*a*) $P = A\,L^{\beta}\,K^{\alpha}u$ (*b*) $P = AL^{\alpha}K^{\beta}\,u$

   (*c*) $P = L^{\alpha}\,K^{\beta}$ (*d*) $AK^{\beta}\,u$

8. सी.ई.एस. के सीमान्त उत्पाद सदैव होते हैं—

   (*a*) ऋणात्मक (*b*) घनात्मक (*c*) धनात्मक (*d*) इनमें से कोई नहीं

7.5 सारांश (Summary)

- अर्थशास्त्र में अधिकतर प्रयोग होने वाले एक विशेष प्रकार के फलन को समरूप फलन कहते हैं।
- यूलर्स प्रमेय बताती है कि जब सभी उत्पत्ति के साधन एक दिये हुए अनुपात में बढ़ाये जाते हैं तो परिणामस्वरूप उत्पादन भी उसी अनुपात में बढ़ जायेगा, यदि प्रत्येक उत्पत्ति के साधन को उसकी सीमान्त उत्पादकता के मूल्य के बराबर पुरस्कार दिया जाता है तथा कुल उत्पादन पूर्णरूप से परिसमाप्त हो जाता है।
- यूलर्स प्रमेय का आर्थिक क्षेत्र में, विशेषकर वितरण क्षेत्र में विशेष महत्त्वपूर्ण स्थान है। उत्पादन विभिन्न साधनों के संयुक्त संयोग से होता है।

नोट

- कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन का आर्थिक क्षेत्र में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है। इस उत्पादन फलन के प्रतिपादन का श्रेय सी.डब्ल्यू. कॉब (C.W. Cobb) तथा डी. एच. डोग्लस को दिया जाता है।
- यदि उत्पादन फलन समरूप तथा एक कोटि (Degree) का होता है तो उसका अभिप्राय यह है कि उत्पादन स्थिर पैमाने के प्रतिफल के अंतर्गत आता है।
- कॉब-डोगलस उत्पादन फलन का आर्थिक क्षेत्र में महत्त्वपूर्ण स्थान है। वर्तमान में अर्थशास्त्री कॉब डोग्लस उत्पादन फलन का विभिन्न आर्थिक क्षेत्रों में प्रयोग करने लग गये हैं।
- यद्यपि कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन का आर्थिक क्षेत्र में विस्तृत प्रयोग किया जाता है तथा इसका प्रयोग विशेषकर कृषि तथा निर्माणकारी उद्योगों में बढ़ता रहा है, किन्तु विभिन्न अर्थशास्त्रियों के द्वारा इस फलन की आलोचनायें की जाती हैं।
- कॉब-डोग्लस उत्पादन में यह विवेचना की जा चुकी है कि इसमें प्रतिस्थापन की लोच (Elasticity of Substitution) सदैव इकाई होती है।
- सी. ई. एस. (C.E.S.) उत्पादन फलन कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन की अपेक्षा अधिक सामान्य उत्पादन तकनीकी प्रदर्शित करता है।

7.6 शब्दकोश (Keywords)

- समरूप (Homogeneous)– समांगी।
- प्रमेय (Theorem)– साध्य, जिसे प्रमाणित किया जा सके।

7.7 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. समरूप फलन को उदाहरण सहित परिभाषित करें।
2. यूलर्स प्रमेय की सप्रसंग व्याख्या करें।
3. यूलर्स प्रमेय के गणितीय हल को लिखें।
4. कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन की व्याख्या करें।
5. कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन के आर्थिक महत्त्व का वर्णन करें।
6. कॉब-डोग्लस उत्पादन फलन की सीमाओं को लिखें।
7. स्थिर प्रतिस्थापन लोच (सी.ई.एस.) उत्पादन फलन की व्याख्या करें।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. समरूप	2. यूलर्स	3. आर्थिक	4. उत्पादन	5. समरूप।
6. (*a*)	7. (*b*)	8. (*c*)		

7.8 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
4. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
9. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*

नोट

इकाई–8 : अवकलन का अर्थशास्त्र में उपयोग (Use of Differentiation in Economics)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- अर्थशास्त्र में अवकलन के उपयोग को जान सकेंगे।
- सीमान्त आगम और माँग की लोच की व्याख्या कर पाएँगे।
- कुल लागत से सीमांत लागत तथा कुल आगम से सीमान्त आगम निकालने के तरीकों को जान पाएँगे।

प्रस्तावना (Introduction)

अवकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग दिनों-दिन बढ़ता जा रहा है। प्रस्तुत पाठ में अवकलन का अर्थशास्त्र में उपयोग की चर्चा करेंगे।

8.1 अर्थशास्त्र में अवकलन का उपयोग (Use of Differentiation in Economics)

अवकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग दिनों-दिन बढ़ता जा रहा है। अवकलन का अर्थशास्त्र में उपयोग निम्नलिखित बिन्दुओं के आधार पर स्पष्ट किया जा सकता है–

8.1.1 लोच (Elasticity)

अर्थशास्त्र में लोच निकालने के लिए अवकलन का प्रयोग किया जाता है। यदि कोई फलन $y = f(x)$ हो तो y के संघ में x की लोच अग्रलिखित प्रकार से ज्ञात की जा सकती है–

$$E_x = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

नोट्स यदि माँग फलन $q = f(p)$ हो तो माँग की लोच (E_d) निम्न प्रकार निकाली जा सकती है–

$$E_d = \underset{\Delta p \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = \frac{p}{q}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

उदाहरण 1. यदि माँग फलन $q = 300 - 4 . p^2$ है तो कीमत $p = 2$ होने पर माँग की लोच निकालिये।

हल : माँग की लोच $E_d = \dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp}$; यहाँ पर $q = 300 - 4p^2$, $\dfrac{dq}{dp} = -8p$

$\therefore$ $$E_d = \frac{p}{300 - 4p^2} \times -8p = \frac{-8p^2}{300 - 4p^2}$$

यदि $p = 2$ हो तो $$E_d = \frac{-8 \times 4}{300 - (4 \times 4)} \times -8p = \frac{-32}{292} = \frac{-8}{73}$$

8.1.2 सीमान्त आगम और माँग की लोच (Marginal Revenue and Elasticity of Demand)

हम जानते हैं कि कुल आगम = कीमत × मात्रा

अथवा $$TR = p \times q \qquad [p = \text{मूल्य}, q = \text{मात्रा}]$$

q के संदर्भ में अवकलन करने पर

$$MR = \frac{d(TR)}{dq} = \frac{d}{dq}(d \times q)$$

$$MR = \left[p + q\frac{dp}{dq}\right] = p\left[1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right]$$

अथवा

$$MR = p\left[1 + \frac{1}{E_d}\right] \qquad \therefore \left[E_d = \frac{q}{p}\frac{dq}{dp}\right]$$

अथवा $$MR = AR\left[1 + \frac{1}{E_d}\right]$$

क्या आप जानते हैं चूँकि माँग की लोच सदैव ऋणात्मक होती है अत: उपर्युक्त सम्बन्ध को निम्न प्रकार से दर्शा सकते हैं–

$$MR = AR\left[1 - \frac{1}{E_d}\right].$$

नोट

8.1.3 कुल लागत से सीमान्त लागत तथा कुल आगम से सीमान्त आगम निकालना (Finding Marginal Cost from Total Cost and Marginal output from Total output)

माना कुल लागत फलन $C = f(q)$, q कुल उत्पादन की मात्रा दर्शाता है।

तब सीमान्त लागत $(MC) = \dfrac{d}{dq}(C)$

इसी प्रकार कुल आगम फलन $(R) = f(p, q)$

तब सीमान्त आगम $(MR) = \dfrac{d}{dq}(R)$

उदाहरण 2. माना कुल लागत $C = 15 + 10q - 9q^2 + q^3$ दी हुई है तो सीमान्त लागत (MC) निकालिये।

हल : कुल लागत $C = 15 + 10q - 9q^2 + q^3$

q के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$MC = \frac{dc}{dq} = 10 - 18q + 3q^2.$$

उदाहरण 3. माना कुल आगम $R = 6q - 9q^2$ दिया हुआ है तो सीमान्त (MR) निकालिये तथा उपरोक्त लागत फलन को लेते हुए समय मात्रा निकालिये।

हल : कुल लागत $\qquad R = 6q - 9q^2$

'q' के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$MR = \frac{dR}{dq} = 6 - 18q$$

साम्य की दशा में $MR = MC$, अत:

$$6 - 18q = 10 - 18q + 3q^2$$

या $\qquad 3q^2 = 4$

$$q^2 = \frac{4}{3} \quad \text{या} \quad q = \pm\sqrt{4/3}\,.$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. अवकलन का .... में प्रयोग दिनों-दिन बढ़ता जा रहा है।
2. अर्थशास्त्र में लोच निकालने के लिए .... का प्रयोग किया जाता है।
3. आगम = कीमत × ....
4. कीमत = $\dfrac{\text{.........}}{\text{मात्रा}}$
5. $MR = \text{..........}\left[1 - \dfrac{1}{E_d}\right]$

नोट

8.1.4 एकाधिकारी में साम्यावस्था : अधिकतम लाभ ज्ञात करना (Equalibrium in monopoly: Finding Maximum Profit)

अवकलन की सहायता से एकाधिकार की साम्यावस्था ज्ञात कीजिए। उसके अधिकतम लाभ को आसानी से दर्शा सकते हैं–

एकाधिकारी की साम्यावस्था $MR = MC$ होती है अर्थात्

$$\frac{d\,(R)}{dq} = \frac{d(C)}{dq}$$

कुल लाभ $\pi = R - C$

अधिकतम लाभ की दशा में निम्नलिखित दो शर्तों का होना आवश्यक है–

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \qquad ...(i)$$

तथा

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0 \text{ (ऋणात्मक)} \qquad ...(ii)$$

उदाहरण 4. यदि माँग फलन $p = 20 - 5q$ है और औसत लागत फलन $Ac = q$ है तो एकाधिकार का साम्य मूल्य एवं अधिकतम लाभ बताइये।

हल : (i) दिया हुआ माँग फलन $p = 20 - 5q$

और $AC = q$

कुल आगम $= p \times q$

$= (20 - 5q)q = 20q - 5q^2$

q के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$MR = \frac{d(R)}{dq} = 20 - 10q$$

कुल लागत $(C) = AC \times q = q \times q = q^2$

q के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$MC = \frac{DC}{dq} = 2q$$

साम्यावस्था में, $MR = MC$

$20 - 10q = 2q$

अथवा $8q = 20$

या $q = \frac{20}{8} = 2.5$

(ii) कुल लाभ $(\pi) = R - C$

$= 20q - 5q^2 - q^2$

$= 20q - 6q^2$

नोट

अधिकतम लाभ के लिए $\quad \dfrac{d\pi}{dq} = 0$ तथा $\dfrac{d^2\pi}{dq^2} < 0$

अत: $\quad \dfrac{d\pi}{dq} = 20 - 12q = 0$

या $\quad 12q = 20$

या $\quad q = \dfrac{20}{12} = \dfrac{5}{3}$

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -12 = \text{ऋणात्मक}$$

अत: $q = \dfrac{5}{3}$ पर एकाधिकारी लाभ अधिकतम होगा।

> *नोट्स* $\dfrac{d(R)}{dq}$ तथा $\dfrac{d(C)}{dq}$ में संबंध स्थापित करें।

उदाहरण 5. माँगफलन $Q = 23 - 4p + p^2$ दी हुई है जिसमें P और Q क्रमश: वस्तु की कीमत एवं मात्रा हैं। माँग की लोच क्या होगी जब वस्तु की कीमत (*i*) 8 रुपये तथा (*ii*) 5 रुपये है।

हल : दी हुई माँग का फलन

$$Q = 25 - 4p + p^2 \left[\frac{p}{q}\alpha - \frac{dq}{p}\right]$$

'p' के संदर्भ में आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -4 + 2p$$

हम जानते हैं कि

$$\text{माँग की लोच} = \frac{\text{माँगी जाने वाली मात्रा में प्रतिशत परिवर्तन}}{\text{वस्तु की कीमत में प्रतिशत परिवर्तन}}$$

$$E_d = \frac{\partial Q/Q}{\partial p/p} = \frac{P}{Q}\frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$= \frac{P}{Q}(-4 + 2p) = \frac{-4p + 2p^2}{25 - 4p + p^2}$$

$$Ed_{(p=8)} = \frac{-32 + 128}{25 - 32 + 64} = \frac{96}{57} = +1.6$$

$$Ed_{(p=5)} = \frac{-20 + 50}{25 - 20 + 25} = \frac{30}{30} = +1$$

अतः जब कीमत 8 रुपये है तो माँग की लोच 1.6 तथा कीमत 5 रुपये हो जाने पर माँग की लोच इकाई होगी।

उदाहरण 6. यदि माँग वक्र $Q = 150 - 15p$ हो तो माँग की लोच ज्ञात कीजिये जबकि $p = 4$ है।

हल : दी हुई माँग फलन है–

$$Q = 150 - 15P$$

'p' में संदर्भ में अवकलन करने पर

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -15$$

हम जानते हैं कि

माँग की लोच $$(E_d) = \frac{P\partial Q}{Q\partial p} = \frac{-15p}{150-15p}$$

$$E_{d(p=4)} = \frac{-15\times 4}{150-(15\times 4)} = \frac{-60}{150-60} = \frac{-60}{90} = -0.66$$

प्रश्नः निम्नलिखित पर संक्षिप्त नोट लिखिये–(I) माँग की तिरछी लोच, (II) पूर्ति लोच, (III) माँग की आय लोच, (IV) औसत आगम, सीमान्त आगम तथा माँग की लोच में सम्बन्ध, (V) क्षतिपूरक माँग फलन तथा (VI) माँग की स्थापन्न माँग।

(Write short notes on following–(I) Cross elasticity of demand, (II) Easticity of supply, (III) Income elasticity of demand, (IV) Relationship between average revenue, marginal revenue and elasticity of demand, (V) Compensated demand function and (VI) Elasticity of substitution of demand).

उत्तरः (I) माँग की तिरछी लोच (Cross Elasticity of Demand)

माँग फलन यह दर्शाता है कि किसी वस्तु की माँग उस वस्तु की कीमत का फलन होता है। किन्तु किसी वस्तु की माँग दूसरी सम्बन्धित वस्तुओं की कीमत का भी फलन होती है। माँग की तिरछी लोच यह बताती है कि सम्बन्धित वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाये तो उनके कारण वस्तु की माँग में परिवर्तन हो जायेगा। माना यहाँ दो वस्तु X तथा Y हैं। यहाँ Y–वस्तु की कीमत के कारण X–वस्तु की माँग में परिवर्तन होता है, अर्थात्

$$E_C = \frac{X-\text{वस्तु क मात्रा में प्रतिशत परिवर्तन}}{Y-\text{वस्तु की कीमत में प्रतिशत परिवर्तन}}$$

उदाहरण 7. यदि किसी पूर्ण प्रतियोगी फर्म का माँग एवं पूर्ति फलन निम्न है–

माँग फलन $P = 30 - x$

पूर्ति (लागत) फलन $C = x^2 + 6x + 7$

तो उत्पादन के किस स्तर पर लाभ अधिकतम होगा तथा मूल्य, लाभ तथा सकल आगम के संगत मान क्या होंगे?

हलः फर्म के अधिकतम लाभ की दशा में निम्न शर्तें पूर्ण होनी आवश्यक हैं–

$$MR = MC \text{ अथवा } \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0 \qquad \ldots(i)$$

तथा $$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} < 0 \qquad \ldots(ii)$$

नोट

यहाँ सकल लाभ π = कुल आगम (R) = कुल लागत (C)

कुल आगम (R) = मूल्य × वस्तु की मात्रा

$$= P \,.\, x = (30 - x) \,.\, x = 30x - x^2$$

$$MR = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(30x - x^2) = 30 - 2x$$

इसी प्रकार $C = x^2 + 6x + 7$

$$MC = \frac{\partial C}{\partial x} = 2x + 6$$

संतुलन की दशा में $MR = MC$

$$30 - 2x = 2x + 6$$

या $-4x = -30 + 6 = -24$

या $x = \dfrac{24}{4} = 6$

x का मान दूसरी तरह भी निकाला जा सकता है–

$$\pi = R - c = (30x - x^2) - (x^2 + 6x + 7)$$
$$= 30x - x^2 - x^2 - 6x - 7$$
$$= 24x - 2x^2 - 7$$

x के संदर्भ में अवकलन करने पर

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 24 - 4x$$

अधिकतम लाभ के लिए $\dfrac{\partial \pi}{\partial x} = 0$ या $24 - 4x = 0$ या $-4x = 24$ या $x = 6$

अधिकतम लाभ की द्वितीय शर्त $\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} < 0$

अत: $\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = 4 < 0$ अत: यह शर्त पूर्ण होती है।

माँग फलन में $x = 4$ रखने पर

$$p = 30 - x = 30 - 4 = 26$$

सकल आगम $(R) = 30x - x^2$

$x = 6$ रखने पर

$$R = (30 \times 6) - (6 \times 6) = 180 - 36 = 144$$

इसी प्रकार $\pi = 24x - 2x^2 - 7$ ($x = 6$ रखने पर)

$$= (24 \times 6) - (2 \times 6 \times 6) - 7$$
$$= 144 - 72 - 7 = 65.$$

उदाहरण 8. यदि पूर्ण प्रतियोगिता के अन्तर्गत किसी फर्म का कुल लागत फलन,

$$C = 0.3x^3 - 3x^2 + 20x + 15$$

हो तो इसका पूर्ति फलन ज्ञात करो।

नोट

हल : हम जानते हैं कि पूर्ति फलन के लिए

$P \geq AVC$ यहाँ, $P =$ मूल्य, $AVC =$ औसत परिवर्तनशील लागत

हमें ज्ञात है कि $$AVC = \frac{TVC}{x} = \frac{TC - TFC}{x}$$

यहाँ $TVC =$ कुल परिवर्तनशील लागत, $TC =$ कुल लागत, TFC कुल स्थिर लागत तथा $x =$ वस्तु की मात्रा है। अत:

$$AVC = \frac{\left(0.3x^3 - 3x^2 + 20x + 15\right) - 15}{x} \qquad (\because \quad TFC = 15)$$

$$= 0.3x^2 - 3x + 20$$

AVC को न्यूनतमीकरण करने पर $\frac{\partial(AVC)}{\partial x} = 0$ तथा $\frac{\partial^2(AVC)}{\partial x^2} > 0$

अत: $$\frac{\partial(AVC)}{\partial x} = \frac{\partial\left(0.3x^2 + 3x + 20\right)}{\partial x} = 0.6x - 3 = 0$$

या $0.6x = 3$ अत: $x = 5$

$\frac{\partial^2(AVC)}{\partial x^2} = 0.6 > 0$ अत: $x = 5$ पर AVC न्यूनतम होगी।

न्यूनतम AVC निकालने के लिए $x = 5$ रखने पर

$$AVC = (3 \times 5 \times 5) - (3 \times 5) + 20$$

$$= 7.5 - 15 + 20 = 12.5$$

यदि $P < AVC = 12.5$, उत्पादन स्तर शून्य होगा।

यदि $P > AVC = 12.5$, तब पूर्ति स्तर धनात्मक होगा।

पूर्ति फलन ज्ञात करने के लिए

$$MC = \frac{\partial C}{\partial x} = 3x \,.\, 0.3x^2 - 6x + 20$$

$$= 0.9x^2 - 6x + 20$$

चूँकि पूर्ण प्रतियोगिता में संतुलन की स्थिति में

$$P = MC$$

अत: $$P = 0.9x^2 - 6x + 20$$

या $0.9x^2 - 6x + 20 - P = 0$

X का मान ज्ञात करने के लिए द्विघात समीकरण को हल करने पर

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times .9(20 - P)}}{2 \times .6}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 3.6(20 - P)}}{1.2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 72 + 3.6P}}{1.2}$$

नोट

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-36P - 3.6P}}{1.2}$$

अत: $P \geq 12.5$ तो पूर्ति फलन $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{3.6P - 36}}{1.2}$

तथा $P < 12.5$ हो तो पूर्ति फलन $x = 0$ होगा।

उदाहरण 9. किसी एकाधिकारी का माँग फलन तथा लागत फलन निम्न हैं–

$$\boldsymbol{P = 50 - 6q} \qquad \textbf{(माँग फलन)}$$

$$\boldsymbol{x = 60 + 14q} \qquad \textbf{(लागत फलन)}$$

निर्गत मूल्य तथा लाभ का संतुलन स्तर क्या होगा? लाभ अधिकतमीकरण की द्वितीय शर्त को सिद्ध करो।

हल : माँग फलन एवं लागत फलन निम्न हैं–

$$P = 50 - 6q \qquad ...(i)$$

$$x = 60 + 14q \qquad ...(ii)$$

कुल आगम फलन $(R) = p \times q$

$$= (50 - 6q)q = 50q - 6q^2 \qquad ...(iii)$$

लाभ $(\pi) = R - C$

$$= 50q - 6q^2 - 60 - 14q \qquad ...(iv)$$

$$= 36q - 6q^2 - 60$$

लाभ अधिकतमीकरण हेतु

समीकरण (iv) को 'q' के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$\frac{d\pi}{dq} = 36 - 12q = 0$$

अथवा $12q = 36$

अथवा $q = \dfrac{36}{12} = 3$

q का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\text{मूल्य} = p = 50 - (6 \times 3) = 50 - 18 = 32$$

समीकरण (iv) में q का मान रखने पर

$$\text{लाभ} = \pi = 36 \times 3 - 6 \times 3 \times 3 - 60$$

$$= 108 - 54 - 60$$

$$= 108 - 114 = -6$$

लाभ अधिकतमीकरण की द्वितीय शर्त

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$$

यहाँ, $\dfrac{d^2\pi}{dq^2} = -12 < 0.$

नोट

उदाहरण 10. किसी एकाधिकारी फर्म का रेखीय फलन

$$\boldsymbol{p = 15 - 0.5q}$$

तथा कुल लागत फलन

$$\boldsymbol{C = 0.5q^2 + 5q + 10}$$

हो तो निर्गत (q), मूल्य (p), समग्र लाभ (π) तथा कुल आगम के अनुकूलतम मान ज्ञात करो।

(अ) लाभ अधिकतमीकरण के अन्तर्गत।

(ब) बिक्री अथवा आगम अधिकतमीकरण।

हल : (अ) हमें ज्ञात है—

$$p = 15 - 0.5q \qquad \ldots(i)$$

$$C = 0.5q^2 + 5q + 10 \qquad \ldots(ii)$$

$\therefore$ कुल आगम $(R) = pq = (15 - 0.5q)q$

$$= 15q - 0.5q^2 \qquad \ldots(iii)$$

कुल लाभ $(\pi) = R - C$

$$= 15q - 0.5q^2 - 0.5q^2 - 5q - 10$$

$$= 10q - q^2 - 10 \qquad \ldots(iv)$$

लाभ अधिकतमीकरण हेतु,

$$\frac{d\pi}{dq} = 10 - 2q = 0$$

अथवा $2q = 10$

अथवा $q = \dfrac{10}{2} = 5$

q का मान (i), (iii) तथा (iv) में रखने पर

$$p = 15 - (0.5 \times 5) = 15 - 2.5$$

$$= 12.5$$

$$R = 15 \times 5 - (0.5 \times 5 \times 5)$$

$$= 75 - 12.5 = 62.5$$

$$\pi = (10 \times 5) - (5 \times 5) - 10$$

$$= 50 - 35 = 15$$

(ब) कुल आगम फलन

$$R = 15\,q - 0.5q^2$$

R अधिकतम होगा यदि

$$\frac{dR}{dq} = 15q - (0.5 \times 2)q = 0$$

अथवा $15 - q = 0$

अथवा $q = 15$

नोट

q का मान (i), (ii) तथा (iv) में रखने पर

$$\pi = 15 - (0.5 \times 15)$$
$$= 15 - 7.5 = 7.5$$
$$R = 15 \times 15 - 0.5 \times 15 \times 15$$
$$= 225 - 112.5$$
$$= 112.5$$
$$\pi = (10 \times 15) - (15 \times 15) - 10$$
$$= 150 - 225 - 10$$
$$= -85.$$

उदाहरण 11. किसी एकाधिकारी का रेखीय माँग फलन

$$\boldsymbol{p = 12 - 0.4q}$$

तथा लागत फलन

$$\boldsymbol{C = 0.6q^2 + 4q + 5}$$

हो तो निर्गत (q), मूल्य (p) तथा समस्त लाभ (π) की लाभ अधिकतमीकरण के अन्तर्गत गणना कीजिये?

हल : हमें ज्ञात है।

$$P = 12 - 0.4q \qquad ...(i)$$
$$C = 0.6q^2 + 4q + 5 \qquad ...(ii)$$

कुल आगम,

$$R = p \times q$$
$$= (12 - 0.4q) \times q$$
$$= 12q - 0.4q^2 \qquad ...(iii)$$

कुल लाभ,

$$\pi = \pi = R - c$$
$$= (12q - 0.4q^2) - (0.6q^2 + 4q + 5)$$
$$= 12q - 0.4q^2 - 0.6q^2 - 4q - 5$$
$$= 8q - q^2 - 5 \qquad ...(iv)$$

लाभ अधिकतमीकरण हेतु,

$$\frac{d\pi}{dq} = 8 - 2q = 0$$

अथवा

$$2q = 8$$
$$q = \frac{8}{2} = 4$$

द्वितीय शर्त हेतु,

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -2 < 0$$

q का मान समीकरण (i) तथा (iv) में रखने पर

$$p = 12 - (0.4 \times 4)$$
$$= 12 - 1.6 = 10.4$$
$$\pi = (8 \times 4) - (4 \times 4) - 5$$

नोट

$$= 32 - 16 - 5$$
$$= 16 - 5 = 11.$$

उदाहरण 12. किसी एकाधिकारी फर्म का माँग फलन

$$\boldsymbol{p = 140 - 6q}$$

तथा कुल लागत फलन

$$\boldsymbol{C = 60 + 20q}$$

हो तो निर्गत (q), मूल्य (p), समस्त आगम (R) तथा लाभ (π) के अनुकूलतम स्तर ज्ञात कीजिये। लाभ अधिकतमीकरण की द्वितीय शर्त भी बताइये।

यदि एकाधिकारी पूर्ण प्रतियोगी हो जाये तो उसके मूल्य (p), निर्गत (q) तथा लाभ के क्या मान होंगे?

हल : दिये हुये मान हैं–

$$P = 140 - 6q \qquad ...(i)$$
$$C = 60 + 20q \qquad ...(ii)$$

अतः कुल आगम, $R = P \times q$

$$= (140q - 6q)q = 140q - 6q^2 \qquad ...(iii)$$

कुल लाभ, $\pi = R - C$

$$= 140q - 6q^2 - 60 - 20q$$
$$= 120q - 6q^2 - 60 \qquad ...(iv)$$

लाभ अधिकतमीकरण हेतु,

$$\frac{d\pi}{dq} = 120 - 12q = 0$$

अथवा $12q = 120$

अथवा $q = \frac{120}{12} = 10$

q का मान समीकरण (i), (iii) तथा (iv) में रखने पर

$$P = 140 - (6 \times 10) = 140 - 60 = 80$$
$$R = (140 \times 10) - (6 \times 10 \times 10)$$
$$= 1400 - 600 = 800$$
$$\pi = (120 \times 10) - (6 \times 10 \times 10) - 60$$
$$= 1200 - 600 - 60$$
$$= 1200 - 660 = 540$$

लाभ अधिकतमीकरण की द्वितीय शर्त,

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -12 < 0$$

यदि एकाधिकार पूर्ण प्रतियोगी हो जाये तो संतुलन की दिशा में $MC = P$ होगा।

($\therefore$ पूर्ण प्रतियोगिता में $P = MR$)

नोट

अब, $C = 60 + 20q$

'q' के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$MC = \frac{dC}{dq} = 20$$

अत: $20 = 140 - 6q$ $(\because \quad MC = P)$

अथवा $6q = 140 - 20 = 120$

$q = 20$ और $p = 20$

तथा $\pi = -60$

लाभ ऋणात्मक होगा।

उदाहरण 13. दो पृथक् बाज़ारों के माँग फलन व लागत फलन निम्न है।

$$\boldsymbol{P_1 = 80 - 5q_1, P_2 = 180 - 29q_2}$$

और $\mathbf{C = 50 + 20\ (q_1 + q_2).}$

मूल्य विभेद की स्थिति में दोनों बाज़ारों के मूल्य, उत्पादन, सीमान्त आगम तथा उत्पादक का कुल लाभ ज्ञात कीजिये।

हल : हमें ज्ञात है–

$$P_1 = 80 - 5q_1 \quad \ldots(i)$$

$$P_2 = 180 - 29q_2 \quad \ldots(ii)$$

$$C = 50 + 20(q_1 + q_2) \quad \ldots(iii)$$

प्रथम बाजार का कुल आगम

$$R_1 = P_1q_1 = (80 - 5q_1)q_1$$

$$= 80q_1 - 5q^2 \quad \ldots(iv)$$

द्वितीय बाजार का कुल आगम

$$R_2 = p_2q_2 = (180 - 29q_2)q_2$$

$$= 180q_2 - 29q_2^2 \quad \ldots(v)$$

समीकरण (iv) को q_1 के सापेक्ष में आंशिक अवकलन करके शून्य के बराबर रखने पर

$$MR_1 = \frac{\partial R_1}{\partial q_1} = 80 - 10q_2 = 0 \quad \ldots(vi)$$

अथवा $10q_1 = 80$ या $q_1 = 8$

इसी प्रकार समीकरण (v) का आंशिक अवकलन करके शून्य के बराबर रखने पर

$$MR_2 = \frac{\partial R_2}{\partial q_2} = 180 - 58q_1 = 0 \quad \ldots(vii)$$

अथवा $58q_2 = 180$ या $q_2 = \frac{180}{58} = \frac{90}{29}$

$\boxed{\text{कुल लाभ } \pi = R_1 + R_2 - C}$

$$= 80q_1 - 5q_1^2 + 180q_2 - 29q_2^2 - 50 - 20q_1 - 20q_2$$

$$= 60q_1 - 5q_1^2 + 160q_2 - 29q_2^2 - 50 \quad \ldots(viii)$$

नोट

q_1 तथा q_2 का मान समीकरण (*i*), (*ii*), (*vi*) (*vii*) तथा (*viii*) में रखने पर

$$P_1 = 80 - 5 \times 8 = 80 - 40 = 40$$

$$P_2 = 180 - 29 \times \frac{90}{29} = 180 - 90 = 90$$

$$MR_1 = 80 - 10 \times 8 = 0$$

$$MR_2 = 180 - 58 \times \frac{90}{29} = 0$$

$$\pi = (60 \times 8) - (5 \times 8 \times 8) + 160 \times \frac{90}{29} - 29 \times \frac{90 \times 90}{29 \times 29} - 50$$

$$= 240 - 320 + \frac{14400}{29} - \frac{8100}{29} - 50$$

$$= -130 + \frac{14400 - 8100}{29}$$

$$= -130 + \frac{6300}{29} = -130 + 217\frac{7}{29}$$

$$= 87\frac{7}{29}.$$

उदाहरण 14. एक एकाधिकारी के दो बाजारों के माँग फलन तथा कुल लागत फलन निम्नलिखित हैं–

$$\boldsymbol{P_1 = 2 - q_1}$$
$$\boldsymbol{P_2 = 9 - 6q_2}$$
$$\boldsymbol{C = q_1 + q_2}$$

मूल्य विभेद की स्थिति में दोनों बाजारों में मूल्य, उत्पादन (विक्रय मात्रा), सीमान्त आगम तथा एकाधिकारी का लाभ निकालिए। बाजार A तथा बाजार B की माँग लोच भी ज्ञात कीजिये।

हल : हमें ज्ञात है–

$$P_1 = 2 - q_1 \quad \ldots(i)$$
$$P_2 = 9 - 6q_2 \quad \ldots(ii)$$
$$C = q_1 + q_2 \quad \ldots(iii)$$

बाजार A के लिए कुल आगम

$$R_1 = P_1 q_1 = 2q_1 - q_1^2 \quad \ldots(iv)$$

बाजार B के लिए कुल आगम

$$R_2 = p_2 q_2 = 9q_2 - 6q_2^2 \quad \ldots(v)$$

समीकरण (*iv*) तथा (*v*) का q_1 तथा q_2 के सापेक्ष में पृथक्-पृथक् अवकलन करने पर

$$MR_1 = \frac{\partial R_1}{\partial q_1} = 2 - 2q_1 \quad \ldots(vi)$$

$$MR_2 = \frac{\partial R_2}{\partial q_2} = 9 - 12q_2 \quad \ldots(vii)$$

नोट

कुल लाभ,
$$\pi = R_1 + R_2 - C$$
$$= 2q_1 - q_1^2 + 9q_2 - 6q_2^2 - q_1 - q_2$$
$$= q_1 - q_1^2 = 8q_2 - q_2^2 \qquad ...(viii)$$

लाभ अधिकतमीकरण हेतु,

समीकरण $(viii)$ का q_1 तथा q_2 के सापेक्ष में पृथक्-पृथक् अवकलन करके शून्य के बराबर रखने पर

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 1 - 2q_1 = 0 \text{ अथवा } q_1 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 8 - 12q_2 = 0 \text{ अथवा } q_2 = \frac{2}{3}$$

q_1 तथा q_2 का मान रखने पर

$$P_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$P_2 = 9 - 6 \times \frac{2}{3} = 9 - 4 = 5$$
$$MR_2 = 2 - 2 \times \frac{1}{2} = 1$$
$$MR_2 = 9 - 12 \times \frac{2}{3} = 1$$

यहाँ $MR_1 = MR_2$ है किन्तु $P_1 \neq P_2$

अब,
$$\begin{bmatrix} MR_1 = P_1\left(1 - \frac{1}{e_1}\right) \text{यहाँ, } e_1 = \text{बाजार } A \text{ की लोच} \\ MR_2 = P_2\left(1 - \frac{1}{e_2}\right) \text{ यहाँ, } e_2 = \text{बाज़ार } B \text{ की लोच} \end{bmatrix}$$

MR_1, MR_2, P_1 तथा P_2 का मान रखने पर

$$\begin{bmatrix} 1 = 1.5\left(1 - \frac{1}{e_1}\right) \text{अथवा } e_1 = 3 \\ 1 = 5\left(1 - \frac{1}{e_2}\right) \text{ अथवा } e_2 = \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

इस प्रकार बाज़ार A में माँग की लोच बाज़ार की अपेक्षा अधिक है, अतः बाज़ार A में वस्तु की कीमत बाज़ार B की अपेक्षा कम है।

उदाहरण 15. किसी एकाधिकारात्मक प्रतियोगी फर्म के माँग फलन तथा लागत फलन निम्नांकित हैं–

$$\boldsymbol{P = 36 - 5q}$$
$$\boldsymbol{C = q^2 + 6q + 5}$$

फर्म का लाभ, उत्पादन स्तर (q) तथा मूल्य (p) का मान बताइये। इस फर्म की एकाधिकारिक क्षमता कितनी है? इसके लिए माँग लोच निकालिये।

हल : हमें ज्ञात है–

$$P = 36 - 5q \quad ...(i)$$

$$C = q^2 + 6q + 5 \quad ...(ii)$$

$$\therefore \quad R = Pq = 36q - 5q^2 \quad ...(iii)$$

$$\therefore \quad MR = \frac{dR}{dq} = 36 - 10q \quad ...(iv)$$

तथा

$$\pi = R - C$$

$$= 36q - 5q^2 - q^2 - 6q - 5$$

$$= 30q - 6q^2 - 5 \quad ...(v)$$

लाभ अधिकतमीकरण हेतु

$$\frac{d\pi}{dq} = 30 - 12q = 0$$

$$12q = 30$$

या

$$q = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2.5$$

q का मान (i), (iv) तथा (v) में रखने पर

$$P = 36 - 5 \times \frac{5}{2} = 36 - \frac{25}{2} = 36 - 12.5 = 23.5$$

$$MR = 36 - 10q$$

$$= 36 - 10 \times \frac{5}{2} = 36 - 25 = 11$$

$$\pi = 30q - 6q^2 - 5$$

$$= 30 \times \frac{5}{2} - 6 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} - 5$$

$$= 75 - \frac{75}{2} - 5$$

$$= 37.5 - 5 = 32.5$$

चूँकि यहाँ $P > MR$ है, अतः फर्म की एकाधिकारिक क्षमता $= \dfrac{P - MR}{MR} \times 100$

$$= \frac{23.5 - 11}{11} \times 100$$

$$= \frac{12.5 \times 100}{11} = 113.6\%$$

इस स्थिति में फर्म मूल्य में 113.6% वृद्धि करने की एकाधिकारिक क्षमता है।

अतः माँग की लोच $(e) = \dfrac{P}{P - MR}$

नोट

$$= \frac{23.5}{23.5-11} = \frac{23.5}{12.5}$$

$$= 1.8.$$

उदाहरण 16. यदि माँग फलन तथा लागत फलन निम्न हैं।

$$\boldsymbol{P = 100 - 0.5(q_1 + q_2)}$$
$$\boldsymbol{C_1 = 5q_1}$$
$$\boldsymbol{C_2 = .5q_2^2}$$

हों तो q_1, q_2 P, π तथा π_2 का मान ज्ञात कीजिये।

लाभ अधिकतमीकरण की दशा में दोनों फर्मों की द्वितीय श्रेणी की शर्त ज्ञात कीजिए। क्या एक फर्म के उत्पादन में वृद्धि होने से दूसरे के उत्पादक स्तर में कमी होगी?

हल : हमें ज्ञात हैं,

$$P = 100 - 0.5(q_1 + q_2)$$
$$C_1 = 5q_1$$
$$C_2 = 0.5q_2^2$$

प्रथम फर्म का कुल आगम

$\therefore$ $$R_1 = Pq_1 = [100 - 0.5(q_1 + q_2)]q_1$$

द्वितीय $= 100q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_2$

तथा द्वितीय फर्म का कुल आगम

$$R_2 = Pq_2 = [100 - 0.5(q_1 + q_2)]q_2$$
$$= 100q_2 - 0.5\,q_1q_2 - 0.5q_2^2$$

प्रथम फर्म का लाभ फलन

$$\pi_1 = R_1 - C_1$$
$$= 100q_1 - 0.5\,q_1^2 - 0.5q_1q_2 - 5q_1$$
$$= 95q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_1q_2$$

द्वितीय फर्म का लाभ फलन

$$\pi_2 = R_2 - C_2$$
$$= 100q_2 - 0.5q_1q_2 - 0.5q_2^2 - 0.5q_2^2$$
$$= 100q_2 - 0.5\,q_1q_2 - q_2^2$$

लाभ अधिकतमीकरण

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 95 - q_1 - 0.5q_2 = 0$$

अथवा $$q_1 + 0.5q_2 = 95 \qquad ...(i)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 100 - 0.5q_1 - 2q_1 = 0$$

अथवा $$0.5q_1 + 2q_2 = 100 \qquad ...(ii)$$

नोट

समीकरण (i) को 4 से गुणा करने पर

$$4q_1 + 2q_2 = 380 \qquad ...(iii)$$

समीकरण (iii), समीकरण (ii) में घटाने पर

$$3.5\, q_1 = 280$$

या $$q_1 = \frac{280}{3.5} = 80$$

q_1 का मान समीकरण ....(i) में रखने पर

$$80 + 0.5q_2 = 95$$

या $$0.5q_2 = 95 - 80 = 15 \text{ या } q_2 = \frac{15}{0.5} = 7.5$$

q_1 तथा q_2 का मान माँग फलन तथा लाभ फलन में रखने पर

$$P = 100 - 0.5(q_1 + q_2)$$
$$= 100 - 0.5(80 + 7.5)$$
$$= 100 - 0.5 \times 87.5 = 100 - 43.75 = 56.25$$
$$\pi_1 = 95 \times 80 - (0.5 \times 80 \times 80) - (0.5 \times 7.5 \times 80)$$
$$= 7600 - 3200 - 300 = 4100$$
$$\pi_2 = 100 \times 7.5 - 0.5 \times 7.5 \times 80 - 7.5 \times 7.5$$
$$= 75 - 300 - 56.25 = -281.25$$

द्वितीय श्रेणी की शर्त–

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} = -1 < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial q_2^2} = -2 < 0$$

प्रतिक्रिया फलन, (i) तथा (ii) द्वारा

$$q_1 = 95 - 0.5q_2$$

तथा $$q_2 = \frac{100 - 0.5q_1}{2} = 50 - 0.25q_1$$

चूँकि इन वक्रों का ढाल ऋणात्मक है, अत: एक फर्म के उत्पादन में वृद्धि होने पर दूसरी फर्म के उत्पादन में कमी होगी।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

निम्नलिखित कथनों में सत्य अथवा असत्य की पहचान करें (State whether the following statements are True or False)

6. अवकलन की सहायता से एकाधिकार की साम्यावस्था ज्ञात की जाती है।
7. $\frac{d(R)}{dq} \neq \frac{d(c)}{dq}$

नोट

8. $MR = MC$

9. $AVC = \dfrac{TC - TVC}{x}$

10. $AVC = \dfrac{TC - TFC}{x}$

8.2 सारांश (Summary)

- अर्थशास्त्र में लोच निकालने के लिए अवकलन का प्रयोग किया जाता है।
- माँग फलन यह दर्शाता है कि किसी वस्तु की माँग उस वस्तु की कीमत का फलन होता है। किन्तु किसी वस्तु की माँग दूसरी सम्बन्धित वस्तुओं की कीमत का भी फलन होती है। माँग की तिरछी लोच यह बताती है कि सम्बन्धित वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाये तो उनके कारण वस्तु की माँग में परिवर्तन हो जायेगा।

8.3 शब्दकोश (Keywords)

- उपयोग (use)—अनुप्रयोग।
- लोच (Elasticity)—लचीला।

8.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. लोच निकालने की विधि को लिखें।
2. सीमान्त आगम और माँग की लोच में संबंध स्थापित करें।
3. कुल लागत से सीमान्त लागत तथा कुल आगम से सीमान्त आगम किस प्रकार निकाला जाता है?
4. यदि माँग फलन $P = 20 - 5q$ है और औसत लागत फलन $AC = q$ है तो एकाधिकार का साम्य मूल्य एवं अधिकतम लाभ बताइये। (**उत्तर** : साम्य मूल्य $= 2.5$, अधिकतम लाभ $= \dfrac{5}{3}$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. अर्थशास्त्र	2. अवकलन	3. मात्रा	4. आगम	5. AR.
6. सत्य	7. असत्य	8. सत्य	9. असत्य	10. सत्य

8.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*

4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
6. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
9. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*

नोट

इकाई–9 : उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ : एक चर (Maxima and Minima : one variable)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस अध्याय के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की संकल्पना को जानने हेतु।
- उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की परिभाषा को समझने हेतु।
- उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात करने के प्रतिबंध संबंधी जानकारी प्राप्त होगी।
- फलन $y = f(x)$ का उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान ज्ञात करने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

यदि आपके मकान की ऊँचाई **अगल-बगल** (दाएँ और बाएँ) में स्थित दोनों मकानों की ऊँचाई से **अधिक** है तो आपके मकान की ऊँचाई **उच्चिष्ठ** (Maximum) कहलायेगी और यदि आपके मकान की ऊँचाई अगल-बगल (दाएँ और बाएँ) में स्थित दोनों मकानों की ऊँचाई से **कम** है तो आपके मकान की ऊँचाई **निम्निष्ठ** (Minimum) कहलायेगी।

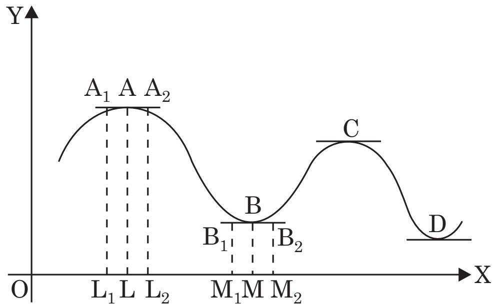
9.1 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ की संकल्पना (Concept of Maxima and Minima)

नोट

गणित का एक मुख्य उपयोग किसी फलन के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात करने में होता है। यदि कोई फलन अपने स्वतन्त्र चर के किसी निश्चित मान तक लगातार बढ़ता है और स्वतन्त्र चर के उच्च मानों के लिए घटता है तो अपने बढ़ने वाली स्थिति से घटने वाली स्थिति में आने में फलन उच्चतम मान प्राप्त करता है। इसी प्रकार जब फलन स्वतन्त्र चर के किसी निश्चित बिन्दु तक घटता है और उससे अगले मानों के लिए बढ़ता है तो घटती हुई स्थिति से बढ़ने वाली स्थिति के आने में फलन निम्नतम मान प्राप्त करता है। इससे स्पष्ट है कि उच्चिष्ठ बिन्दु पर फलन का मान उसके ठीक पहले और ठीक पश्चात् (small neighbourhood) के बिन्दुओं पर के मानों से अधिक होता है और निम्नतम बिन्दु पर उसके ठीक पहले तथा उसके ठीक बाद (small neighbourhood) के बिन्दुओं पर के मानों से कम होता है।

उदाहरणार्थ: मान लीजिए फलन $y = x^3 - 6x^2 - 2$, x के सभी मानों के लिए जो 1 से कम है। अर्थात् $(x < 1)$ y का मान भी बढ़ता है और $1 < x < 3$ के लिए y का मान घटता है।

अत: इसके मध्य y का मान एक उच्चतम मान है।



मान लो $y = f(x)$, एक फलन है। $y = f(x)$ का आलेख चित्र के अनुसार निरूपित है। इस वक्र पर A, B, C, D चार बिन्दु हैं जिन पर स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समान्तर हैं।

अब फलन $f(x)$ का मान A और C पर अधिक है और A तथा C के आगे बढ़ने पर $f(x)$ के मान का बढ़ना रुक जाता है, किन्तु घटना प्रारम्भ हो जाता है। अत: A तथा C बिन्दुओं पर $f(x)$ फलन अधिकतम मान ग्रहण करता है। अत: बिन्दु A तथा C पर फलन का मान उच्चिष्ठ (Maximum) कहलाता है। इसी प्रकार B तथा D पर फलन का मान घटना बन्द हो जाता है अर्थात् आगे बढ़ने पर $f(x)$ का बढ़ना प्रारम्भ हो जाता है। अत: $f(x)$ फलन B और D पर जो मान प्राप्त करता है उन्हें निम्निष्ठ (Minimum) कहते हैं।

उच्चिष्ठ (Maxima)

मान लो वक्र पर स्थित बिन्दु A के लिए $x = a = OL$

$\therefore \quad x = a$ पर, $y = f(a) = AL$

अब बिन्दु A के बायीं ओर लघु सामीप्य (small neighbourhood) में कोई बिन्दु A_1 लो जिसके लिए $x = a - h = OL_1$, यहाँ h बहुत छोटा है।

अत: $\quad x = a - h$ पर, $y = f(a - h) = A_1L_1 < AL$

इसी प्रकार बिन्दु A के दायीं ओर लघु सामीप्य (small neighbourhood) में कोई बिन्दु A_2 लो जिसके लिए

$$x = a + h = OL_2.$$

अत: $x = a + h$ पर, $\quad y = f(a + h) = A_2L_2 < AL$

अब चूँकि A_1L_1, AL से छोटा है, अर्थात् $A_1L_1 < AL$

$\therefore \quad f(a - h) < f(a)$ या $f(a) > f(a - h)$

और चूँकि A_2L_2, AL से छोटा है, अर्थात् $A_2L_2 < AL$

VED1
E\L-LOVELY-H\math9-1 IInd 6-8-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

नोट

$\therefore \qquad f(a+h) < f(a)$ या $f(a) > f(a+h)$

अतः बिन्दु A (जिसके लिए $x = a$) पर $f(x)$ का मान, अर्थात् $f(a)$ A के बायें या दायें प्रत्येक बिन्दु पर $f(x)$ के संगत मानों, अर्थात् $f(a-h)$ और $f(a+h)$ से बड़ा है।

9.2 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ की परिभाषा (Definition of Maxima and Minima)

उच्चिष्ठ (Maxima)

मान लो $y = f(x)$ कोई दिया हुआ फलन है और $x = a$ कोई दिया हुआ बिन्दु है।

माना बिन्दु $x = a$ के बायीं ओर (L.H.S.) स्थित कोई निकटतम बिन्दु $x = a - h$ तथा बिन्दु $x = a$ के दायीं ओर (R.H.S.) स्थित कोई निकटतम बिन्दु $x = a + h$ है, जहाँ h अत्यन्त अल्प राशि है।

बिन्दु $x = a$ पर फलन $f(x)$ का मान $= f(a)$

बिन्दु $x = (a-h)$ पर फलन $f(x)$ का मान $= f(a-h)$

और बिन्दु $x = (a+h)$ पर फलन $f(x)$ का मान $= f(a+h)$.

बिन्दु $x = a$ पर फलन $f(x)$ **उच्चिष्ठ** कहलाता है, यदि

$$\boxed{f(a-h) < f(a) > f(a+h)}$$

अर्थात् $x = a$ पर $f(x)$ का मान $f(a)$, **बाएँ तथा दाएँ** स्थित निकटतम बिन्दुओं पर उसके मानों $f(a-h)$ तथा $f(a+h)$ **दोनों से बड़ा** है।

नोट्स कोई फलन $f(x)$, $x = a$ पर तब उच्चिष्ठ (maximum) कहलाता है, जब $f(a)$ उन सब मानों से बड़ा हो जो $x = a$ के लघु सामीप्य में x प्रत्येक मान के लिए $f(x)$ ग्रहण कर सकता है।

निम्निष्ठ (Minima)

मान लो वक्र पर स्थित बिन्दु B के लिए $x = a = OM$

$\therefore \qquad x = a$ पर, $y = f(a) = BM.$

अब बिन्दु B के बायीं ओर लघु सामीप्य (small neighbourhood) में कोई बिन्दु B_1 लो जिसके लिए $x = a - h = OM_1$, जहाँ h बहुत छोटा है।

अतः $x = a - h$ पर, $y = f(a-h) = B_1M_1 > BM.$

इसी प्रकार बिन्दु B के दायीं ओर लघु सामीप्य (small neighbourhood) में कोई बिन्दु B_2 लो जिसके लिए $x = a + h = OM_2$.

अतः $x = a + h$ पर, $\qquad y = f(a+h) = B_2M_2 > BM$

अब चूँकि B_1M_1, BM से बड़ा है, अर्थात् $B_1M_1 > BM$

$\therefore \qquad f(a-h) > f(a)$ या $f(a) < f(a-h)$

और चूँकि B_2M_2, BM से बड़ा है, अर्थात् $B_2M_2 > BM.$

$\therefore \qquad f(a+h) > f(a)$ या $f(a) < f(a+h).$

अत: बिन्दु B (जिसके लिए $x = a$) पर $f(x)$ का मान, अर्थात् $f(a)$, B के बायें या दायें प्रत्येक बिन्दु पर $f(x)$ के संगत मानों, अर्थात् $f(a-h)$ और $f(a+h)$ से छोटा है।

बिन्दु $x = a$ पर फलन $f(x)$ **निम्निष्ठ** कहलाता है, यदि

$$\boxed{f(a-h) > f(a) < f(a+h)}$$

अर्थात् $x = a$ पर $f(x)$ का मान $f(a)$, बाएँ तथा दाएँ स्थित निकटतम बिन्दुओं पर उसके मानों $f(a-h)$ तथा $f(a+h)$ **दोनों से छोटा** है।

किसी फलन के उच्चिष्ठ मान (Maximum) का यह अर्थ नहीं है कि वह उसका सबसे बड़ा मान है तथा न निम्निष्ठ मान का यह अर्थ है कि वह सबसे छोटा मान है। किसी फलन के बहुत से उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान हो सकते हैं और यह सम्भव है कि एक उच्चिष्ठ मान दूसरे निम्निष्ठ मान से छोटा हो। A पर फलन या कोटि का उच्चिष्ठ मान है, इसका अर्थ केवल यह है कि इस बिन्दु के आसपास वाले दोनों ओर के बिन्दुओं से इसका मान सबसे अधिक है तथा इसी प्रकार बिन्दु B पर फलन या कोटि का मान निम्निष्ठ (minimum) है, इसका अर्थ केवल यह है कि इस बिन्दु के आसपास वाले दोनों बिन्दुओं से इस बिन्दु पर कोटि का मान सबसे कम है।

9.3 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने के प्रतिबन्ध (Conditions to Finding Maxima and Minima)

किसी बिन्दु $x = a$ पर फलन $y = f(x)$ के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान ज्ञात करने के प्रतिबन्ध निम्न हैं–

(*i*) अनिवार्य प्रतिबन्ध (Necessary Condition)

उच्चिष्ठ (maximum) तथा निम्निष्ठ (minimum) दोनों ही के लिए अनिवार्य प्रतिबन्ध निम्न है–

$$\boxed{f'(x) = 0 \text{ अथवा } \frac{dy}{dx} = 0}$$

(*ii*) पर्याप्त प्रतिबन्ध (Sufficient Condition)

उच्चिष्ठ (maximum) तथा निम्निष्ठ (minimum) के लिये पर्याप्त प्रतिबन्ध निम्न प्रकार हैं–

उच्चिष्ठ (maximum) के लिए:

$$x = a \text{ पर } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ का मान = ऋणात्मक राशि}$$

निम्निष्ठ (minimum) के लिए:

$$x = a \text{ पर } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ का मान = धनात्मक राशि}$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. गणित का एक मुख्य उपयोग किसी ……… के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात करने में होता है।
2. किसी फलन के बहुत से उच्चिष्ठ और ……… मान हो सकते हैं।

नोट

3. .... के लिए $x = a$ पर $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का मान ऋणात्मक होता है।

4. निम्निष्ठ के लिए $x = a$ पर $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का मान .... होता है।

9.4 उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ किसी के भी न होने का प्रतिबन्ध (Conditions to Absent of Maxima or Minima)

बिन्दु $x = a$ पर फलन $y = f(x)$ न तो उच्चिष्ठ होगा और न ही निम्निष्ठ होगा, यदि

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} \text{ का मान } = 0 \text{ तथा } \frac{d^3y}{dx^3} \text{ का मान } \neq 0}$$

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मानों के गुण :

1. उच्चिष्ठ मान के बाद निम्निष्ठ मान और निम्निष्ठ मान के बाद उच्चिष्ठ मान आता है अर्थात् उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान एकान्तर क्रम से आते हैं।
2. फलन के दो समान मानों के मध्य कम-से-कम एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान अवश्य होता है।
3. उन बिन्दुओं पर जहाँ फलन का मान उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ है स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समान्तर होती हैं। अत: ऐसे बिन्दुओं पर $\dfrac{dy}{dx}$ का मान शून्य होगा $\dfrac{dy}{dx} = 0$ मान देकर प्राप्त समीकरण को हल करने से x के मान ज्ञात हो जाते हैं जिन पर फलन का मान उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ होता है।
4. फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ बिन्दुओं पर $\dfrac{dy}{dx}$ का चिह्न बदलता है। उच्चिष्ठ बिन्दु पर यह चिह्न धन से ऋण और निम्निष्ठ बिन्दु पर ऋण से धन में परिवर्तित होता है।

टास्क निम्निष्ठ को परिभाषित करें।

9.5 फलन $y = f(x)$ का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात करने के क्रिया पद (Steps of Finding Maxima and Minima of the Functions $y = f(x)$)

(*i*) $y = f(x)$ का $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात करना।

(*ii*) $\dfrac{dy}{dx} = 0$ रखकर प्राप्त समीकरण से x के भिन्न-भिन्न मान ज्ञात करना।

(*iii*) मान लो कि x के भिन्न-भिन्न मान a_1, a_2, a_3 हैं।

(*iv*) d^2y/dx^2 ज्ञात करके a_1, a_2, a_3 आदि पर $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात करना।

नोट

यदि x के किसी मान के लिए $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान धनात्मक है तो फलन उस x के मान के लिए निम्निष्ठ होगा तथा यदि ऋणात्मक हो तो उच्चिष्ठ होगा।

(v) यदि x के किसी मान के लिए $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ हो तो उस x के मान के लिए $\frac{d^3y}{dx^3}$ ज्ञात करना। यदि उस x के मान के लिए $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ तो फलन का मान उस x के मान पर न तो उच्चिष्ठ और न निम्निष्ठ होगा।

(vi) यदि किसी x के मान के लिए $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ तो उस x के मान के लिए $\frac{d^4y}{dx^4}$ ज्ञात कीजिए यदि उस x के मान के लिए $\frac{d^4y}{dx^4}$ ऋण है तो उस x के मान पर फलन उच्चिष्ठ है और यदि धन है तो निम्निष्ठ होगा। यदि यह भी शून्य है तो इसी प्रकार आगे क्रिया करते जाना है।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. सिद्ध कीजिए कि $\sin x + \cos x$ का उच्चिष्ठ मान $\sqrt{2}$ है।

हल : माना $y = \sin x + \cos x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$$

पुनः x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - \cos x$$

y के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मानों के लिए, $\frac{dy}{dx} = 0.$

$\therefore$ $\cos x - \sin x = 0$

या $\sin x = \cos x$

या $\tan x = 1$

या $x = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान $= -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

नोट

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

= ऋणात्मक राशि

अतः $x = \frac{\pi}{4}$ पर y का मान उच्चिष्ठ है।

y का उच्चिष्ठ मान $= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}.$$

उदाहरण 2. फलन $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ के उच्चतम तथा न्यूनतम मानों के लिए x के मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 \qquad ...(i)$$

फलन के उच्चतम या निम्नतम मान के लिए

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ $4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$

या $4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 0$

या $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

या $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore$ $x = 1, 2, 3$

समी. (i) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 48x + 44$$

$x = 1$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान $= 12(1)^2 - 48(1) + 44$

$= 12 - 48 + 44$

$= 8$ = धनात्मक राशि

अतः $x = 1$ पर फलन का मान न्यूनतम है

$x = 2$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान $= 12(2)^2 - 48(2) + 44$

$= 48 - 96 + 44$

$= -4$ = ऋणात्मक राशि

नोट

अतः $x = 2$ पर फलन का मान उच्चतम है

$$x = 3 \text{ पर } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ का मान} = 12(3)^2 - 48(3) + 44$$

$$= 108 - 144 + 44$$

$$= 8 = \text{धनात्मक राशि}$$

अतः $x = 3$ पर फलन का मान न्यूनतम है।

उदाहरण 3. $x^3 - 2x^2 + x + 6$ का उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $$y = x^3 - 2x^2 + x + 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$$

अब $\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ या } (3x - 1)(x - 1) = 0, \text{ जिससे } x = \frac{1}{3} \text{ या } 1$$

इन्हीं बिन्दुओं पर फलन उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ होगा।

अब $x = \frac{1}{3}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान $= 6.\frac{1}{3} - 4 = -2 < 0$ (ऋणात्मक)

$\therefore$ फलन $x = \frac{1}{3}$ पर उच्चिष्ठ है।

और $x = 1$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान $= 6.1 - 4 = 2 > 0$ (धनात्मक)

अतः फलन $x = 1$ पर निम्निष्ठ है।

$$\text{उच्चिष्ठ मान} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 6 = \frac{166}{27}$$

$$\text{तथा निम्निष्ठ मान} = f(1) = 1^3 - 2.1^2 + 1 + 6 = 6.$$ **उत्तर**

उदाहरण 4. फलन $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$, x के किन मानों पर उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ है? फलन के उन मानों को भी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

अब फलन का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) \quad \ldots(1)$$

फलन के उच्चतम या निम्नतम मान के लिए

नोट

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ $6(x^2 - 3x + 2) = 0$ या $x^2 - 3x + 2 = 0$

या $(x - 1)(x - 2) = 0$ $\therefore$ $x = 1, 2$

अब (1) का अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\,(2x - 3)$$

और $x = 1$ के लिए $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(2.1 - 3) = -6$ जो ऋण है।

अत: $x = 1$ पर फलन उच्चिष्ठ है।

$$\text{यह उच्चिष्ठ मान} = 2.1^3 - 9.1^2 + 12.1 - 3$$

$$= 2 - 9 + 12 - 3 = 2$$ **उत्तर**

अब $x = 2$ के लिए $\frac{d^2y}{dx^2} = 6\,(2.2 - 3) = 6$ धन है।

अत: $x = 2$ पर फलन उच्चिष्ठ है।

और फलन का निम्निष्ठ मान

$$= 2.2^3 - 9.2^2 + 12.2 - 3 = 1.$$ **उत्तर**

उदाहरण 5. x के किन मानों के लिये, फलन $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$, उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ है। सिद्ध कीजिए कि $x = 0$ पर यह फलन न उच्चिष्ठ है और न निम्निष्ठ।

हल : मान लीजिए $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

$$= 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2\,(x - 1)\,(x - 3)$$

फलन के उच्चतम या निम्नतम मान के लिए $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore$ $5x^2\,(x - 1)\,(x - 3) = 0$ $\therefore$ $x = 0, 1, 3$

अब $$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x = 10x(2x^2 - 6x + 3)$$

$x = 1$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10\,(2 - 6 + 3) = -10 \text{ ऋणात्मक}$$

$\therefore$ $x = 1$ पर फलन उच्चिष्ठ है।

$x = 3$ प्रतिस्थापित करने पर

नोट

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10 \times 3\ (2 \times 3^2 - 6 \times 3 + 3) = 30(18 - 18 + 3)$$

$= 90$ धनात्मक

$\therefore$ $x = 3$ पर फलन निम्निष्ठ है।

$x = 0$ प्रतिस्थापित करने पर

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, फलन उच्चिष्ठ है अथवा निम्निष्ठ नहीं कहा जा सकता।

अब $$\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 120x + 30$$

$x = 0$, प्रतिस्थापित करने पर

$\frac{d^3y}{dx^3} = 0 - 0 + 30 = 30$ जो शून्य नहीं है।

अत: $x = 0$ पर फलन न उच्चिष्ठ है और न निम्निष्ठ।

उदाहरण 6. फलन $(x - 1)\ (x - 2)\ (x - 3)$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिये।

हल : मान लीजिए $y = (x - 1)\ (x - 2)\ (x - 3)$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11$$

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान के लिए

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ $$3x^2 - 12x + 11 = 0$$

या $$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 3 \times 11}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$\Rightarrow$ $$x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ या $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

अब $$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

$x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ के लिए

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 12 = 2\sqrt{3}$ धनात्मक

नोट

$$x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$ पर फलन निम्निष्ठ है।

और $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ के लिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 12 = -2\sqrt{3}$$ ऋणात्मक

$\therefore$ $$x = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$ पर फलन उच्चिष्ठ है।

अब दिये फलन में $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\text{उच्चिष्ठ मान} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 2\right)\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 3\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$ **उत्तर**

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिये कि $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ का उच्चिष्ठ मान $(e)^{1/e}$ है।

हल : मान लीजिए $$y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

'e' आधार पर दोनों पक्षों का logarithm लेने पर

$$\log y = \log\left(\frac{1}{x}\right)^x = x \log \frac{1}{x} = x \log x^{-1} = -x \log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\left[x \cdot \frac{1}{x} + 1.\log x\right]$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = -(1 + \log x)\, y$$

y के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान के लिए

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ $-(1 + \log x)\, y = 0$ या $\log x = -1$ $\because$ $y \neq 0$

या $-\log x = 1$

या $\log \frac{1}{x} = \log e \Rightarrow x = \frac{1}{e}.$

अब $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[y \cdot \frac{1}{x} + (1 + \log x)\frac{dy}{dx}\right]$$

$x = \frac{1}{e}$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -[ey + 0], \qquad \because \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -ey$ ऋणात्मक है। $\quad \therefore \quad x = \frac{1}{e}$ के लिए फलन उच्चिष्ठ है।

$\therefore$ निर्दिष्ट फलन में $x = \frac{1}{e}$ प्रतिस्थापित करने पर

उच्चिष्ठ मान $= \left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right)^{1/e} = (e)^{1/e}$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 8. $\frac{\log x}{x}$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात करो, जबकि $0 < x < \infty$.

हल : मान लो $y = \frac{\log x}{x}$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x.(1/x) - (\log x).1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2(-1/x) - (1 - \log x).2x}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x + 2x \log x}{x^4} = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर, $\frac{1 - \log x}{x^2} = 0$ या $1 - \log x = 0$

या $\qquad \log x = 1 = \log e, \therefore x = e$

$x = e$ पर, $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \log e - 3}{e^3} = \frac{2 - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3}$ = ऋणात्मक है।

$\therefore x = +e$ पर फलन उच्चिष्ठ है तथा

इसका उच्चिष्ठ मान $= \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$. **उत्तर**

उदाहरण 9. यदि $y = a \log x + bx^2 + x$ के $x = -1$ और $x = 2$ पर उच्चिष्ठ-निम्निष्ठ मान (extremum values) हैं तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।

हल : $y = f(x) = a \log x + bx^2 + x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a.\frac{1}{x} + 2bx + 1$

उच्चिष्ठ-निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dy}{dx} = 0,$

नोट

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-1} = 0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_{2} = 0$$

$\Rightarrow$ $$-a - 2b + 1 = 0 \qquad \ldots(i)$$

तथा $$\left(\frac{a}{2}\right) + 4b + 1 = 0 \qquad \ldots(ii)$$

(i) और (ii) को हल करने पर

$$a = -2, b = -\frac{1}{2}.$$ **उत्तर**

उदाहरण 10. फलन $x + \sin 2x$, $(0 < x < 2\pi)$ के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $$y = x + \sin 2x$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = 1 + 2\cos 2x$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ प्रतिस्थापित करने पर, $1 + 2\cos 2x = 0$

या $$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

अत: $$2x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \qquad [\because 0 < x < 2\pi] \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

अब $$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin 2x$$

(1) जब $x = \frac{\pi}{3}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin\frac{2\pi}{3} = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$ ऋणात्मक

$\therefore$ $x = \frac{\pi}{3}$ पर फलन उच्चिष्ठ है।

और दिये फलन में $x = \frac{\pi}{3}$ प्रतिस्थापित करने पर, फलन का उच्चिष्ठ मान

$$= \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}.$$ **उत्तर**

(2) जब $x = \frac{2\pi}{3}$ तो $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin\frac{4\pi}{3}$

$= -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$ धनात्मक

नोट

$\therefore$ $x = \frac{2\pi}{3}$ पर फलन निम्निष्ठ है।

और $x = \frac{2\pi}{3}$ प्रतिस्थापित करने पर, फलन का निम्निष्ठ मान

$$= \frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}.$$ **उत्तर**

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

निम्नलिखित कथनों में सत्य अथवा असत्य की पहचान करें

(State whether the following Statements are True or False)

5. उच्चिष्ठ के लिए $x = a$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान धनात्मक होता है।
6. निम्निष्ठ के लिए $x = a$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान धनात्मक होता है।
7. फलन के दो समान मानों के मध्य कम से कम एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान अवश्य होता है।
8. फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ बिंदुओं पर $\frac{dy}{dx}$ का चिह्न नहीं बदलता है।

9.6 सारांश (Summary)

- यदि आपके मकान की ऊँचाई **अगल-बगल** (दाएँ और बाएँ) में स्थित दोनों मकानों की ऊँचाई से अधिक है तो आपके मकान की ऊँचाई उच्चिष्ठ (Maximam) कहलायेगी और यदि आपके मकान की ऊँचाई अगल-बगल (दाएँ और बाएँ) में स्थित दोनों मकानों की ऊँचाई से **कम** है तो आपके मकान की ऊँचाई निम्निष्ठ (Minimam) कहलायेगी।
- फलन स्वतन्त्र चर के किसी निश्चित बिन्दु तक घटता है और उससे अगले मानों के लिए बढ़ता है तो घटती हुई स्थिति से बढ़ने वाली स्थिति के आने में फलन निम्नतम मान प्राप्त करता है।
- उच्चिष्ठ मान के बाद निम्निष्ठ मान और निम्निष्ठ मान के बाद उच्चिष्ठ मान आता है अर्थात् उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान एकान्तर क्रम से आते हैं।
- यदि x के किसी मान के लिए $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान धनात्मक है तो फलन उस x के मान के लिए निम्निष्ठ होगा तथा यदि ऋणात्मक हो तो उच्चिष्ठ होगा।

9.7 शब्दकोश (Keywords)

- उच्चिष्ठ (Maximum) अधिकतम।
- निम्निष्ठ (Minimum) निम्नतम।

नोट

9.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. $x^3 - 2x^2 + x + 6$ का उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

   (**उत्तर** : उच्चिष्ठ $= \dfrac{166}{27}$, निम्निष्ठ $= 6$)

2. फलन $(x-1)(x-2)(x-3)$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए। (**उत्तर** : उच्चिष्ठ $= \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$)

3. साबित करें कि $\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ का उच्चिष्ठ मान $(e)^{1/e}$ है।

4. फलन $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$, x के किन मानों पर उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ है?

   (**उत्तर** : उच्चिष्ठ $= 2$, निम्निष्ठ $= 1$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. फलन	2. निम्निष्ठ	3. उच्चिष्ठ	4. धनात्मक
5. असत्य	6. सत्य	7. सत्य	8. असत्य।

9.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
3. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
9. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*

इकाई–10 : उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ : दो चर एवं लेंगरेंज गुणक सहित उद्विग्न उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Maxima and Minima: Two Variables and Constrained Maxima and Minima with Langrange's Multiplier)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने के प्रतिबंध संबंधी जानकारी प्राप्त होगी।
- लेंगरेंज विधि की जानकारी हेतु।
- स्लटस्की समीकरण को जान सकेंगे।
- स्लटस्की समीकरण लोच रूप में अच्छी तरह समझ सकेंगे।

प्रस्तावना (Introduction)

मान लो कोई, $u = f(xy)$ दिया हुआ फलन है, और (x_0, y_0) दो दिये हुये बिन्दु हैं जिन पर अधिकतम एवं न्यूनतम फलन ज्ञात करना है तथा $e < n$ दो धनात्मक स्थिरांक है तो फलन उच्चिष्ठ (x_0, y_0) पर निम्न प्रकार होगा,

नोट

$f(x_0 - e, y_0 - n) < f(x_0, y_0)$ और $f(x_0, y_0) > f(x_0 + e, y_0 + n)$ और निम्निष्ठ $f(x_0 - e, y_0 - n) > f(x_0, y_0)$ और $f(x_0, y_0) < f(x_0 + e, y_0 + x)$ जहाँ $f(x_0, y_0)$ फलन की उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मूल्य है।

10.1 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने के प्रतिबंध (Conditions to Finding Maxima and Minima)

(A) **अनिवार्य प्रतिबन्ध (Necessary Condition):** यदि $u = f(x,y)$

तो $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$

(B) **पर्याप्त प्रतिबन्ध (Sufficient Condition):**

उच्चिष्ठ के लिये, यदि $u = f(x, y)$ तथा अनिवार्य प्रतिबन्ध $fx = 0$, and $fy = 0$ तो

$$\partial^2 u/\partial x^2 < 0 \text{ and } \partial^2 u/\partial y^2 > 0$$

$$\therefore \qquad \underset{\downarrow A}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \cdot \underset{(B)}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} > \Bigg(\underset{C}{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\Bigg)^2 \quad \text{or} \quad AB > C^2 \quad \text{or} \quad \boxed{f_{xx} \cdot f_{yy} > f_{xy}}$$

निम्निष्ठ के लिये,

$$u = f(x, y),\ fx = 0 \quad \text{और} \quad f_y = 0$$

तो

$$\partial^2 u/\partial x^2 > 0 \quad \text{और} \quad \partial^2 u/\partial yz > 0$$

$$\therefore \qquad \partial^2 u/\partial x^2 . \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 \quad \text{or} \quad \boxed{A.B < C^2}$$

or $\qquad f_{xx} \cdot f_{yy} < fxy$

उदाहरण 1. $u = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$ उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मूल्य निकालिये।

हल :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2x - y = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + 2y = 0 \qquad \ldots(2)$$

(1) व (2) को हल करने पर

$$3x^2 + 2x - y = 0$$
$$-x + 2y = 0$$

यदि $x = 2y$ तो प्रथम समीकरण के रखने पर

$$3(2y)^2 + 2(2y) - y = 0$$
$$y(12y + 3) = 0$$

जब $\qquad y = 0 \quad \text{or} \quad y = -\frac{1}{4}$

जब $y = 0$

नोट

$$x = 2y = 0$$

जब $y = -\frac{1}{4}$

तो $x = 2y = -\frac{1}{2}$

इस प्रकार, अनिवार्य प्रतिबंध को ज्ञात करने के लिये हमारे पास दो बिन्दु (0, 0) और (–1/2, –1/4) है।

अब हम ये ज्ञात करेंगे कि उपरोक्त मान, उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की शर्तों को सन्तुष्ट करते हैं या नहीं

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 2, \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1 \qquad \ldots(3)$$

(0, 0) मानों के लिये;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6(0) + 2 = 2 > 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \cdot 2 = 4 > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

इस प्रकार, (0, 0) मूल्य, निम्निष्ठ शर्तों को सन्तुष्ट करता है।

$u = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4 = 4$ (0, 0) मूलबिन्दु पर निम्निष्ठ मूल्य होगा।

बिन्दु (–1/2, –1/4) के लिये,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = -1, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = (-1)2 - (-1) = -3 < 0$$

बिन्दु (–1/2, 1/4), पल्याण बिन्दु देता है।

परिणामों को संक्षिप्त रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

उच्चिष्ठ (Maximum)	निम्निष्ठ (Minimum)
$f_x = 0, \quad f_y = 0$	$f_x = 0, \quad f_y = 0$
$f_{xx} < 0, \quad f_{yy} < 0$	$f_{xx} > 0, \quad f_{yy} > 0$
$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$	$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$
पल्याण बिन्दु (Saddle Point)	**कोई जानकारी नहीं (No Information)**
$f_x = 0, \quad f_y = 0$	$f_x = 0, \quad f_y = 0$
$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$	$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$

2. **नीचे दिये हुए फलन की सहायता से u का चरम मूल्य ज्ञात कीजिए;**

$$\boldsymbol{y = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 24}$$

नोट

हल : प्रथम श्रेणी की शर्तें

$$f_x = 3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 - 1 = 0$$
$$f_y = 3y^2 - 27 = 0, \quad y^2 - 9 = 0$$

$\therefore$ (1, 3), (1, –3), (–1, 3), (–1, –3)

द्वितीय श्रेणी की शर्तें

$$f_{xx} = 9x$$
$$f_{yy} = 9y$$
$$f_{xy} = 0$$

(1,3) के सन्दर्भ में

$$f_{xx} = 9x = 9 > 0$$
$$f_{yy} = 9y = 27 > 0$$
$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 243 - 0 = 243 > 0$$

इस प्रकार, बिन्दु (1, 3) पर u निम्निष्ठ होगा

(1, –3) के सन्दर्भ में

$$f_{xx} = 9x = 9 > 0$$
$$f_{yy} = 9y = -27 < 0$$
$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 9(-27) - 0 < 0$$

इस प्रकार बिन्दु (1, –3) पर पल्याण बिन्दु (न अधिकतम न न्यूनतम) होगा।

(–1, 3) बिन्दु के सन्दर्भ में

$$f_{xx} = 9x = -9 < 0$$
$$f_{yy} = 9y = 27 > 0$$
$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-9)\,(27) - 0 < 0$$

बिन्दु (–1, 3) पर भी पल्याण हल प्राप्त होगा।

(–1, –3) के सन्दर्भ में

$$f_{xx} = 9x = -9 < 0, \quad f_{yy} = 9y = -27 < 0$$
$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-9)(-27) - 0 > 0$$

बिन्दु (–1, –3) पर u का मूल्य अधिकतम होगा

निर्बाध के साथ उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ: लेंगरेंज गुणांक विधि: माना, उपयोगिता फलन एवं आय निर्बाध निम्न दिया है– $u = f(x,y)\ P_x\, x + P_y\, y = M$

यहाँ $u \rightarrow$ उपयोगिता $x, y \rightarrow$ वस्तुयें, M$\rightarrow$आय px और $py \rightarrow$ वस्तुओं की कीमत

यहाँ पर उपभोक्ता अपनी उपयोगिता अधिकतमीकरण करना चाहता है दिये हुये आय निर्बाध पर तो लेंगरेंज गुणांक का प्रयोग करने पर

$$v = f(x, y) + \lambda(M - P_x \,.\, X - P_y \,.\, y)$$

10.2 लेंगरेंज गुणक सहित उद्विग्न उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Constrained Maxima and Minima with Langrange's Multiplier)

लेंगरेंज विधि की सहायता से भी वही परिणाम प्राप्त होंगे जो उपरोक्त, विधि से प्राप्त हुए हैं। तुष्टिकरण फलन एवं बजट रेखा को लेने पर

नोट

$$V = f(q_1 q_2) + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

यहाँ $V, \lambda q_1$ तथा q_2 का फलन है तथा λ लेंगरेंज गुणक (Multiplier) है। यहाँ हमारा उद्देश्य V को अधिकतम करना है। अतः V को q_1, q_2 तथा λ सन्दर्भ में आंशिक अवकलन (Partial differentiation) करके शून्य के बराबर रखने पर–

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = f_1 - \lambda p_1 = 0 \quad \ldots(4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = f_2 - \lambda p_2 = 0 \quad \ldots(5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y - p_1\, q_1 - p_2\, q_2 = 0 \quad \ldots(6)$$

समीकरण (4) एवं (5) को लेने पर

$$f_1 = \lambda p_1 \text{ तथा } f_2 = \lambda p_2$$

दोनों को विभाजित करने पर

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ अथवा } \frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

यहाँ वही परिणाम प्राप्त हुआ जो प्रथम विधि के समीकरण (A) से प्राप्त होता है।

समीकरण का पूर्ण अवकलन (Total differentiation) करने पर

$$f_{11}dq_1 + f_{12}d\mathrm{q}_2 - p_1\, d\lambda = \lambda dp_1$$

$$f_{21}dq_1 + f_{22}d\mathrm{q}_2 - p_2\, d\lambda' = dp_2$$

$$-p_1 dq_1 - p_2 dq_2 = -dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2$$

द्वितीय क्रम (Second Order) की शर्तों के लिये द्वितीय अवकलज का हेस सारणिक (Bordered Hession Determinant) होना चाहिए। अतः

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad \ldots(7)$$

समीकरण (7) का विस्तार करने पर

$$f_{11}\ (0.f_{22} - p_2{}^2) - f_{12}(0.f_{21} - p_1 p_2) - p_1\{f_{21}(-p_2) - f_{22}\ (-p_1)\} > 0$$

अथवा $$f_{11}p_2{}^2 - f_{12}p_1 p_2 + f_{21}p_1 p_2\ (-f_{22})\ (-p_1{}^2) > 0$$

अथवा $$f_{11}p_2{}^2 - 2f_{12}p_1 p_2 + f_{22}\ p_1{}^2 > 0$$

यहाँ वह समान परिणाम प्राप्त होता है जो प्रथम विधि में समीकरण (2.5) से प्राप्त होता है।

नोट्स हम कह सकते हैं कि उपयोगिता अधिकतमीकरण की दोनों विधियों से समान निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

नोट

उदाहरण : उदासीनता वक्र की सहायता से उपभोक्ता व्यवहार सिद्धान्त की गणितीय व्याख्या कीजिये।

(Discuss Mathematically the theory of consumer's behaviour with the help of Indifference curve Technique.)

हल: एक उपभोक्ता की आय स्थिर रहती है और एक विवेकशील उपभोक्ता उस आय से अधिकतम सन्तुष्टि प्राप्त करना चाहता है। जिस बिन्दु पर उपभोक्ता को अधिकतम सन्तुष्टि प्राप्त होती है, वह उपभोक्ता सन्तुलन कहलाता है।

उपभोक्ता सन्तुलन की स्थिति उस दशा में होती है, जब बजट रेखा या कीमत रेखा उदासीन वक्र को स्पर्श करती है। दूसरे शब्दों में, बजट रेखा का ढाल और उदासीन वक्र का ढाल समान होने पर उपभोक्ता सन्तुलन की स्थिति में होता है। गणितीय रूप में सीमान्त प्रतिस्थापन की दर (उदासीन वक्र का ढाल) तथा दोनों वस्तुओं के कीमत अनुपात (बजट रेखा का ढाल) समान हों तो उपभोक्ता सन्तुलन की स्थिति में होता है।

उदासीन वक्र प्रणाली में उदासीनता वक्र के ढलान को सीमान्त उपयोगिताओं के अनुपात में परिभाषित किया गया है तथा बजट रेखा के ढलान को कीमतों के अनुपात से परिभाषित किया गया है। अर्थात्

उदासीनता वक्र का ढाल = सीमान्त उपयोगिताओं का अनुपात

$$= \frac{MU_1}{MU_2}$$

तथा बजट रेखा का ढाल = कीमत अनुपात

$$= \frac{p_1}{p_2}$$

उदासीनता वक्र विश्लेषण स्पष्ट करता है कि वक्र के प्रत्येक बिन्दु पर उपभोक्ता को समान तुष्टिगुण प्राप्त होती है। अर्थात्

$$u = f(q_1 \cdot q_2)$$

कुल अवकलन करने तथा शून्य के बराबर रखने पर

$$du = f_1 dq_1 + f_2 dq_2 = 0$$

($du = 0$ का अभिप्राय है कि सीमान्त तुष्टिकरण शून्य होता है) अर्थात् उपयोगिता में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

अथवा $$f_1 dq_1 = -f_2 dq_2$$

अथवा $$-\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

$-\frac{dq_2}{dq_1}$ उदासीनता वक्र के ढलान को प्रदर्शित करता है अर्थात् सीमान्त प्रतिस्थापन की दर (MRS) कहलाती है।

सीमान्त प्रतिस्थापन की दर वस्तु Q_2 की वह मात्रा है जिसका उपभोक्ता Q_1 की अतिरिक्त इकाई को प्राप्त करने के लिये त्याग करने के लिये तत्पर रहता है। $-\frac{dq_2}{dq_1}$ का ऋणात्मक संकेत यह दर्शाता है कि उदासीनता वक्र का ढाल गिरता हुआ होता है।

$\therefore$ f_1 तथा f_2 गणन संख्या (Cardinal) के रूप में प्रथम आंशिक अवकलन या सीमान्त तुष्टिगुण है। अर्थात्

$$f_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = MU_1$$

$$f_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = MU_2$$

तथा $$\frac{f_1}{f_2} = \frac{MU_1}{MU_2}$$

अतएव $$MRSq_1q_2 = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{Q_1 \text{ की सीमान्त उपयोगिता}}{Q_2 \text{ की सीमान्त उपयोगिता}}$$

बजट रेखा को निम्न समीकरण द्वारा परिभाषित किया जा सकता है–

$$y = p_1q_1 + q_2q_2$$

यहाँ $y =$ आय, $p_1 = q_1$ –वस्तु की कीमत तथा $p_2 = q_2$–वस्तु की कीमत को प्रदर्शित करते हैं।

उपरोक्त समीकरण का अवकलन करने पर

$$dy = p_1dq_1 + p_2dq_2$$

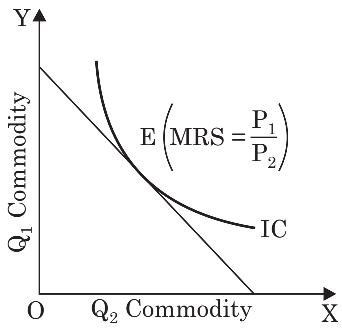
$dy = 0$ होगा क्योंकि उपभोक्ता की आय स्थिर रहती है, उसमें कोई परिवर्तन नहीं होता है, अत:

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 = 0$$

अथवा $$p_1dq_1 = -p_2dq_2$$

अथवा $$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

अथवा $$MRSq_1q_2 = \frac{p_1}{p_2}$$



रेखाचित्र 10.1 उपभोक्ता सन्तुलन

अर्थात् उदासीनता वक्र का ढाल = बजट रेखा का ढाल उपभोक्ता सन्तुलन विश्लेषण को निम्न द्वारा दर्शाया जा सकता है–

रेखाचित्र 10.1 में IC उदासीन वक्र है तथा बजट रेखा दी हुई है जो E बिन्दु पर एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। अर्थात् E बिन्दु पर दोनों का ढाल बराबर है। इस बिन्दु पर $MRSq_1q_2 = \frac{p_1}{p_2}$ प्राप्त होगा जहाँ उपभोक्ता को अधिकतम सन्तुष्टि प्राप्त होगी।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. एक उपभोक्ता की आय ········ रहती है।
2. जिस बिन्दु पर उपभोक्ता को अधिकतम संतुष्टि प्राप्त होती है, वह ········ संतुलन कहलाता है।
3. उपभोक्ता संतुलन की स्थिति उस दशा में होती है जब बजट रेखा या कीमत रेखा ········ वक्र को स्पर्श करती है।
4. उदासीन वक्र प्रणाली में उदासीनता वक्र के ढलान को ········ उपयोगिता के अनुपात में परिभाषित किया गया है।
5. उदासीनता वक्र का ढाल = सीमान्त उपयोगिता का अनुपात ········।

नोट

10.3 स्लटस्की समीकरण (Slutsky Equation)

यदि किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाये तो उपभोक्ता के उपभोग में क्या परिवर्तन होंगे? यह कीमत प्रभाव बताता है। कीमत प्रभाव के कारण निम्न प्रभाव उत्पन्न होते हैं– 1. आय प्रभाव (Income Effect) तथा (2) प्रतिस्थापन प्रभाव (Substitution Effect)।

यदि किसी वस्तु की कीमत में कमी हो जाती है तो उपभोक्ता की वास्तविक आय में वृद्धि हो जाती है। इसके विपरीत वस्तु की कीमत में वृद्धि हो जाने से उपभोक्ता की वास्तविक आय में कमी आ जायेगी। इस प्रकार कीमत में परिवर्तन होने के कारण उपभोक्ता की वास्तविक आय में परिवर्तन हो जाता है और उसके फलस्वरूप उपभोक्ता के उपभोग में भी परिवर्तन हो जायेगा। इस प्रकार की स्थिति को आय प्रभाव (Income Effect) कहते हैं।

यदि किसी वस्तु की सापेक्ष में कीमत वृद्धि हो जाती है तो उपभोक्ता प्रतिस्थापित वस्तु का उपभोग अधिक करने लग जाता है। इसके विपरीत वस्तु की सापेक्ष में कीमत की कमी हो जाती है तो उपभोक्ता प्रतिस्थापित वस्तु का उपयोग कम कर देता है। इस प्रकार यदि कीमतों में परिवर्तन होता है और आय स्थिर रहती है, तब वस्तु की कम या अधिक मात्रा का उपयोग किया जाता है। इस प्रकार के प्रभाव को प्रतिस्थापन प्रभाव (Substitution Effect) कहा जाता है।

इन प्रभावों का अध्ययन करने के लिये स्लटस्की प्रमेय (Slutsky Theorem) का प्रयोग किया जाता है–

उपयोगिता समीकरण

$$U = f(q_1 \cdot \; q_2)$$

तथा बजट निर्बाध (Budget Constraint)

$$y = p_1\, q_1 + p_2\, q_2$$

लेंगरेंज गुणक (Langrang's multiplier) अनिर्धारित समीकरण का प्रयोग करने पर–

$$Y = f(q_1,q_2) + \lambda(y - p_1q_1 - p_2q_2)$$

समीकरण को q_1, q_2 तथा λ के संदर्भ में अवकलन करके शून्य के बराबर रखने पर,

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = f_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = f_2 - \lambda p_2 = 0 \qquad \ldots(8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y - p_1q_1 - p_2\, q_2 = 0$$

अब उपभोक्ता के कीमत, आय एवं प्रतिस्थापन प्रभाव ज्ञात करने के लिये समीकरण का पूर्ण आकलन करने पर

$$f_{11}\, dq_1 + f_{12}\, dq_2 - p_1\, d\lambda = \lambda\; dp_1$$

$$f_{21}\, dq_1 + f_{22}\, dq_2 - p_2\, d\lambda = \lambda\; dp_2$$

$$-p_1\, dp_1 - p_2\, dq_2 = -dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2 \qquad \ldots(9)$$

इस समीकरण को हल करने के लिये हम व्यूह बीजगणित के क्रेमर नियम (Cramer's Rule) का उपयोग करते हैं। इस नियम के अनुसार यदि $AB = C$ जहाँ A,B तथा C व्यूह है तब–

$$B = \mathrm{A}^{-1}C \text{ जहाँ, } A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$$

नोट

समीकरण (9) को व्यूह (Matrix) के रूप में प्रदर्शित करने पर

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dp_1 \\ \lambda dp_2 \\ -dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2 \end{bmatrix} \quad ...(10)$$

क्रेमर नियम का प्रयोग करने पर

$$\begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda dp_1 \\ \lambda dp_2 \\ -dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $$\left[A^{-1} = \frac{[D_{ij}]}{|D|}\right]$$

अतः $$dq_1 = \frac{D_{11}\lambda dp_1 + D_{21}\lambda dp_2 + D_{31}(-dy + q_1 dp_1 + q_1 dp_2)}{|D|} \quad ...(11)$$

$$dq_2 = \frac{D_{12}\lambda dp_1 + D_{22}\lambda dp_2 + D_{32}(-dy + q_1 dp_2 + q_2 dp_2)}{|D|} \quad ...(12)$$

तथा $$d\lambda = \frac{D_{13}\lambda dp_1 + D_{23}\lambda dp_2 + D_{33}(-dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2)}{|D|} \quad ...(13)$$

समीकरण (11) में दोनों तरफ dp_1 का भाग देने पर तथा p_2 तथा y को स्थिर मानने पर $dy = 0$ तथा $dp_2 = 0$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{D_{11}\lambda}{|D|} + q_1 \frac{D_{31}}{|D|} \quad ...(14)$$

(यहाँ, $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ = कीमत प्रभाव है क्योंकि p_2 तथा y के स्थिर रहने पर p_1 परिवर्तन के कारण p_1 में परिवर्तन हुआ है।)

इसी प्रकार $$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{D_2\lambda}{|D|} + p_2 \frac{D_{32}}{|D|} \quad ...(15)$$

(यहाँ, $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ कीमत प्रभाव है क्योंकि यहाँ p_2 तथा y के स्थिर रहने पर p_2 परिवर्तन होने के कारण q_1 में परिवर्तन हुआ है।)

समीकरण (11) में दोनों तरफ dy का भाग देने पर p_1 तथा p_2 स्थिर मानने पर (अर्थात् $dp_1 = 0, dp_2 = 0$)। अतः

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = -\frac{D_{33}}{|D|} \quad ...(16)$$

यहाँ, $\frac{\partial q_1}{\partial \lambda}$ आय प्रभाव को दर्शाता है क्योंकि यहाँ p_1 तथा p_2 स्थिर रहने पर y में परिवर्तन होने से q_1 में परिवर्तन हुआ है।

नोट

जब किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाता है तो उपभोक्ता की संतुष्टि स्तर में भी परिवर्तन आ जाता है, इसलिये उपभोक्ता संतुलन भी दूसरे अन्य उदासीनता वक्र पर स्थापित हो जाता है। मान लीजिये कीमत परिवर्तन की क्षतिपूर्ति आय परिवर्तन से कर ली जाती है और उपभोक्ता उसी उदासीनता वक्र पर बना रहता है अर्थात् उसकी संतुष्टि में कोई परिवर्तन नहीं होता है, अर्थात् $dU = 0$, अतः

$$U = f(q_1, q_2)$$

अर्थात्
$$dU = f_1 dq_1 + f_2\, dq_2 = 0$$

परन्तु हमें ज्ञात है कि $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$, अतः

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 = 0$$

यह मान समीकरण (9) के तृतीय भाग में रखने पर

$$-dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2 = 0$$

अतः समीकरण (11) से

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) U = \text{स्थिर (Constant)} = \frac{D_{11}\lambda}{|D|}$$

अतः समीकरण (14) को पुनः लिखने पर

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial q_1}\right)U = \text{स्थिर}\; q_1\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right) \text{कीमत} = \text{स्थिर} \qquad \ldots(17)$$

कीमत प्रभाव प्रतिस्थापन प्रभाव आय प्रभाव

समीकरण (17) स्लटस्की समीकरण कहलाता है।

टास्क उपयोगिता समीकरण को लिखें।

10.4 स्लटस्की समीकरण लोच रूप में (Slutsky Equation in Elasticity Form)

हम जानते हैं कि माँग की लोच,

$$EP = \frac{p}{q}\cdot\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}$$

स्लटस्की समीकरण

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) U = \text{Const.} \; -q_1\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right) p = \text{Constant}$$

दोनों तरफ p_1/q_1 से गुणा करने पर

$$\frac{p_1}{q_2}\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{p_1}{q_2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) U = \text{Const.} \; -\frac{q_1 p_1}{q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right) p = \text{Constant}$$

नोट

अथवा $$\eta_{1_p} = \eta_1 - \frac{p_1 q_1}{y}\eta_{1y}$$

यहाँ η_{1_p} = कीमत लोच, η_{1s} प्रतिस्थापन लोच तथा η_{1_y} = आय लोच प्रदर्शित करते हैं।

सामान्यीकरण (Generalisation): उपर्युक्त दो वस्तुओं के विश्लेषण को n-वस्तुओं के लिए विस्तृत किया जा सकता है। माना n उपभोक्ता a वस्तुओं का उपभोग करता है। ऐसी दशा में उसकी उपयोगिता फलन होगी–

$$U = f(q_1, q_2 \ldots, q_n)$$

तथा बजट रेखा होगी–

$$y = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n$$

या $$= y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 0$$

जहाँ $$i = 1, 2 \ldots, n$$

लेंगरेंज गुणक का प्रयोग करने पर समग्र उपयोगिता फलन होगी–

$$V = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \left(y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)$$

अधिकतम संतुष्टि के लिए प्रथम आंशिक अवकलज शून्य होना चाहिए अर्थात्

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = f_i - \lambda p_i = 0, \text{ इसी प्रकार } \frac{\partial V}{\partial p_j} = f_i - \lambda p_j = 0$$

or $$f_i = \lambda p_i \text{ तथा } f_j = \lambda p_j$$

इस प्रकार $$\frac{f_i}{f_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

> *क्या आप जानते हैं* i वस्तु के लिए j वस्तु की प्रतिस्थापन की दर उनकी कीमत अनुपात के बराबर होती है।

अधिकतम उपयोगिता के द्वितीय क्रम के अवकलज का बोर्डड हेस सारिणीक धनात्मक होना चाहिए, अर्थात्

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} & -p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ fn_1 & fn_2 & \cdots & fnn & -p_n \\ -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_n & 0 \end{vmatrix} > 0$$

सामान्यीकरण में स्लटस्की समीकरण होगी–

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right) u = \text{const.} - q\left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right) p = \text{const.}$$

लोच के रूप में–स्लटस्की समीकरण के दोनों तरफ p_i/q_i से गुणा करने पर

$$\frac{p_i}{q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right) = \frac{p_i}{q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right)_{u = \text{const.}} - q_i \frac{p_i}{q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)_{p = \text{const.}}$$

नोट

अथवा $$\eta_{ip} = \eta_{is} - \frac{p_i q_i}{y}\eta_{1y}$$

यहाँ η_{ip} = कीमत लोच,

η_{is} = प्रतिस्थापन लोच तथा

η_{iy} = आम लोच को प्रदर्शित करते हैं।

प्रतिस्थापित तथा पूरक वस्तुयें (Substitutes Goods and Complementary Goods)

यदि दो वस्तुयें प्रतिस्थापित हैं तो प्रतिस्थापन प्रभाव धनात्मक (Positive) होता है। इसके विपरीत यदि दो वस्तुयें पूरक हैं तो प्रतिस्थापन प्रभाव ऋणात्मक (Negative) होता है। अर्थात्

$$\left(\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right)U = \text{const.} > 1, \text{ प्रतिस्थापित वस्तुयें}$$

$$\left(\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right)U = \text{const.} < 1, \text{ पूरक वस्तुयें}$$

$$\left(\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right)U = \text{const.} = 0, \text{ स्वतन्त्र वस्तुयें}$$

सामान्य वस्तुयें, हीन वस्तुयें तथा गिफिन वस्तुयें (Normal Goods, Inferior Goods and Giffon Goods)

हम जानते हैं कि

कीमत प्रभाव = प्रतिस्थापन प्रभाव + आय प्रभाव

सामान्य वस्तुओं के लिये आय प्रभाव धनात्मक होता है, अर्थात्

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)_{\text{कीमत} = \text{स्थिर}} < 0$$

कीमत में कमी होने के कारण धनात्मक आय प्रभाव, धनात्मक प्रतिस्थापन प्रभाव को सुदृढ़ करता है। इसके विपरीत कीमत बढ़ने पर उपभोक्ता की वास्तविक आय कम होती है तथा प्रतिस्थापन प्रभाव मात्रा q_1 को कम करने के लिये सुदृढ़ परिवर्तित होती है, अर्थात्

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) < 0, \text{ सामान्य वस्तु के लिये}$$

इसके विपरीत आय प्रभाव ऋणात्मक हो अथवा आय प्रभाव प्रतिस्थापन प्रभाव को सुदृढ़ न करता हो तो वस्तुयें घटिया होंगी।

वह वस्तु जिसका आय प्रभाव, प्रतिस्थापन प्रभाव से अधिक होता है, अर्थात् कीमत कम होने पर वस्तु की माँग भी कम हो जाती है, गिफिन वस्तुयें कहलाती हैं।

गिफिन वस्तुओं तथा घटिया वस्तुओं, दोनों स्थितियों में आय प्रभाव ऋणात्मक होता है, फिर क्या दोनों वस्तुयें समान हैं, उत्तर है नहीं, क्योंकि घटिया वस्तुओं के लिये प्रतिस्थापन प्रभाव ऋणात्मक आय प्रभाव से अधिक होता है। कहने का अभिप्राय है कि घटिया वस्तुयें माँग के नियम का पालन करती हैं, इसके विपरीत गिफिन वस्तुयें माँग के नियम की पूर्ति नहीं करती हैं।

नोट

उदाहरण 1: $u = x^a y^b$ दो वस्तुओं की तुष्टिगुण फलन है जहाँ x तथा y इन दोनों वस्तुओं की क्रमशः मात्रायें हैं। x तथा y वस्तुओं पर खर्च की जाने वाली आय M है तो सिद्ध कीजिये की वस्तुओं की माँग–

$$x = \frac{aM}{(a+b)p_x} \text{ तथा } y = \frac{bM}{(a+b)p_y}$$

जहाँ p_x तथा p_y x तथा y वस्तुओं की कीमते हैं।

हल : दी हुई तुष्टिगुण फलन है–

$$U = x^a y^b$$

'x' तथा 'y' के संदर्भ में पृथक्-पृथक् रूप में आंशिक अवकलन करने पर

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = ax^{a-1}y^{b-1} \quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = bx^a y^{b-1}$$

उपभोक्ता के अधिकतम सन्तुष्टि प्राप्त करने की स्थिति में

$$\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}$$

अथवा $$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y} \qquad \ldots(i)$$

तथा $$x \cdot p_x + y \cdot p_y = M \qquad \ldots(ii)$$

MU_x तथा MU_y का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\frac{ax^{a-1}b}{bx^a y^{b-1}} = \frac{p_x}{p_y} \text{ अथवा } \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

अथवा $$y = \frac{p_x}{p_y}\frac{b}{a} \cdot x$$

y का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$M = x \cdot px + \frac{p_x}{p_y}\frac{b}{a} x \cdot Py \text{ अथवा } aM = (a+b)\, p_x \,.\, x$$

अथवा $$x = \frac{aM}{(a+b)px} \text{ और } y = \frac{bM}{(a+b)\, py}$$

उदाहरण 2: उपयोगिता फलन $u = xy$ तथा बजटनिर्बाध $2x + y = 6$ तो x,y का मूल्य एवं उपयोगिता की गणना कीजिए।

हल : लेंगरेंज गुणांक का प्रयोग करने पर

$$z = xy + \lambda(2x + y - 6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2\lambda = 0$$

नोट

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 2x + y - 6 = 0$$

उपरोक्त सभी को x, y और λ के लिये हल करने पर, $x = 2/3$, $y = 4/3$ और $\lambda = -2/3$

तो, अधिकतम उपयोगिता $u = xy = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{9}$

यह सम सीमान्त उपयोगिता नियम को दर्शाता है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

6. यदि किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाए तो उपभोक्ता के उपभोग में परिवर्तन किसका प्रभाव बताता है?
   (*a*) कीमत (*b*) उपभोग (*c*) उपभोक्ता (*d*) वस्तु।
7. यदि किसी वस्तु की कीमत में कमी हो जाती है तो उपभोक्ता की वास्तविक आय में क्या परिवर्तन होता है?
   (*a*) कमी (*b*) वृद्धि (*c*) समान (*d*) इनमें से कोई नहीं
8. वस्तु की कीमत में वृद्धि हो जाने से उपभोक्ता की वास्तविक आय में क्या परिवर्तन होता है?
   (*a*) समान (*b*) वृद्धि (*c*) कमी (*d*) इनमें से कोई नहीं
9. $E_p = \ldots\ldots.. \frac{\Delta q}{\Delta p}$.
   (*a*) $\frac{q}{p}$ (*b*) $\frac{d}{q}$ (*c*) $\frac{q}{d}$ (*d*) $\frac{p}{q}$
10. कीमत प्रभाव = प्रतिस्थापन प्रभाव + ...
   (*a*) आय प्रभाव (*b*) कीमत प्रभाव (*c*) उपभोक्ता प्रभाव (*d*) सभी

10.5 सारांश (Summary)

- $\underset{\downarrow_A}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \cdot \underset{(B)}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} < \left(\underset{C}{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\right)^2$ or $AB < C^2$ or $f_{xx} \cdot f_{yy} < f_{xy}$

निम्निष्ठ के लिये,

$$u = f(x, y), fx = 0 \quad \text{और} \quad f_y = 0$$

तो

$$\partial^2 u/\partial x^2 > 0 \quad \text{और} \quad \partial^2 u/\partial yz > 0$$

नोट

$$\therefore \quad \partial^2 u/\partial x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 \quad \text{or} \quad A.B < C^2$$

or $$f_{xx} \cdot f_{yy} < fxy$$

- उपभोक्ता सन्तुलन की स्थिति उस दशा में होती है, जब बजट रेखा या कीमत रेखा उदासीन वक्र को स्पर्श करती है। दूसरे शब्दों में, बजट रेखा का ढाल और उदासीन वक्र का ढाल समान होने पर उपभोक्ता सन्तुलन की स्थिति में होता है।
- उदासीन वक्र प्रणाली में उदासीनता वक्र के ढलान को सीमान्त उपयोगिताओं के अनुपात में परिभाषित किया गया है तथा बजट रेखा के ढलान को कीमतों के अनुपात से परिभाषित किया गया है।
- उदासीनता वक्र विश्लेषण स्पष्ट करता है कि वक्र के प्रत्येक बिन्दु पर उपभोक्ता को समान तुष्टिगुण प्राप्त होती है।
- यदि किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाये तो उपभोक्ता के उपभोग में क्या परिवर्तन होंगे? यह कीमत प्रभाव बताता है।
- यदि किसी वस्तु की कीमत में कमी हो जाती है तो उपभोक्ता की वास्तविक आय में वृद्धि हो जाती है। इसके विपरीत वस्तु की कीमत में वृद्धि हो जाने से उपभोक्ता की वास्तविक आय में कमी आ जायेगी।
- यदि किसी वस्तु की सापेक्ष में कीमत वृद्धि हो जाती है तो उपभोक्ता प्रतिस्थापित वस्तु का उपभोग अधिक करने लग जाता है।
- जब किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाता है तो उपभोक्ता की संतुष्टि स्तर में भी परिवर्तन आ जाता है, इसलिये उपभोक्ता संतुलन भी दूसरे अन्य उदासीनता वक्र पर स्थापित हो जाता है।
- यदि दो वस्तुएं प्रतिस्थापित हैं तो प्रतिस्थापन प्रभाव धनात्मक (Positive) होता है।
- कीमत में कमी होने के कारण धनात्मक आय प्रभाव, धनात्मक प्रतिस्थापन प्रभाव को सुदृढ़ करता है। इसके विपरीत कीमत बढ़ने पर उपभोक्ता की वास्तविक आय कम होती है।
- यह वस्तु जिसका आय प्रभाव, प्रतिस्थापन प्रभाव से अधिक होता है, अर्थात् कीमत कम होने पर वस्तु की माँग भी कम हो जाती है, गिफिन वस्तुएं कहलाती हैं।
- गिफिन वस्तुओं तथा घटिया वस्तुओं, दोनों स्थितियों में आय प्रभाव ऋणात्मक होता है।

10.6 शब्दकोश (Keywords)

- पूरक (Complementary): अनुपूरक।
- आय (Income): आमदनी।

10.7 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. क्रेमर नियम को लिखें।
2. स्लटस्की समीकरण की व्याख्या करें।
3. लेंगरेंज विधि क्या है?

नोट

4. निम्निष्ठ के लिए सिद्ध करें कि

   $f_{xx} \cdot f_{yy} < f_{xy}$.

5. $u = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मूल्य निकालिये।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. स्थिर	2. उपभोक्ता	3. उदासीन	4. सीमांत	5. $\frac{MU_1}{MU_2}$
6. (*a*)	7. (*b*)	8. (*c*)	9. (*d*)	10. (*a*).

10.8 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
5. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
9. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*

नोट

इकाई—11 : उद्विग्न उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Constrained Maxima and Minima)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- लाभ अधिकतमीकरण को समझने में।
- क्षतिपूरक माँग फलन की जानकारी प्राप्त करने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

मान लीजिए एक फर्म दो उत्पाद Q_1 तथा Q_2 की मात्रा q_1 तथा q_2 का क्रय क्रमशः p_1 तथा p_2 की कीमत पर क्रय करती है तो ऐसी दशा में कुल आगम होगा—

$$R = p_1q_1 = p_2q_3 \qquad \ldots(1)$$

मान लीजिए फर्म एक निर्गत (Input) से दो उत्पादों (Output) θ_1 तथा θ_2 का उत्पाद करती है। ऐसी दशा में X के सन्दर्भ में फर्म के दो उत्पाद की लागत (x), q_1 तथा q_2 का फलन होगा। अर्थात्

$$x = h\ (q_1, q_2) \qquad \ldots(2)$$

ऐसी दशा में एक फर्म की आगम को अधिकतम करने के लिए कुल आगम एवं फलन को लेने पर

$$V = p_1q_1 = p_2q_2 + \mu\ [x - h\ (q_1q_2)\ \sigma] \qquad \ldots(3)$$

यहाँ μ लेंगरेंज गुणक है। समीकरण (1) का आंशिक अवकलन करके शून्य के बराबर रखने पर

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1 - \mu h_1 = 0$$

नोट

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2 - \mu h_2 = 0 \qquad \ldots(4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = x - h\,(q_1, q_2) = 0$$

समीकरण (1) तथा (2) को लेने पर

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_1}{h_2} = RPT$$

(यहाँ, $RPT = -\dfrac{dq_2}{dq_1}$ उत्पादन रूपान्तरण की दर)

अतः

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial q_2 / \partial x}{\partial q_1 / \partial x} = RPT \qquad \ldots(5)$$

समीकरण (5) यह दर्शाता है कि उत्पादन रूपान्तरण की दर कीमत अनुपात के बराबर होती है जो यह बताती है कि आगम रेखा उत्पाद रूपांतरण वक्र को स्पर्श करती है।

प्रथम क्रम शर्तों को निम्न प्रकार दर्शा सकते हैं–

$$\mu = \frac{p_1}{h_2} = \frac{p_2}{h_2}$$

या

$$\mu = p\,\frac{\partial q_1}{\partial\, x} = p\,\frac{\partial q_2}{\partial\, x}$$

चूँकि RPT को सीमान्त उत्पाद में निम्न प्रकार भी दर्शाया जा सकता है

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1}, \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{1}{h_2}$$

नोट्स RPT क्रम (Second Order) की शर्तों के लिए द्वितीय अवकलज का बॉर्डड हेस सारणिक (Bordered Hession Determinant) अधिकतम लाभ के लिए धनात्मक होना चाहिए।

अतः

$$\begin{vmatrix} -\mu\, h_{11} & -\mu\, h_{12} & -h_1 \\ -\mu\, h_{21} & -\mu\, h_{22} & -h_2 \\ -h_1 & -h_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad \ldots(6)$$

समीकरण (6) का विस्तार करने पर

$$\mu\,(h_{11}\,h_2^2 - 2h_{12}\,h_1\,h_2 + h_{22}h_1^2) > 0 \qquad \ldots(7)$$

या

$$h_{11}\,h_2^2 - 2h_{12}\,h_1 h_2 + h_{22}h_1^2) > 0 \qquad \ldots(8)\ (\text{चूँकि } \mu > 0)$$

इस प्रकार फर्म समीकरण (5) एवं (7) को सन्तुष्ट करती है तो फर्म निश्चित रूप से अपने आगम को अधिकतम करने में सफल होगी।

11.1 लाभ अधिकतमीकरण (Profit Maximization)

नोट

लाभ θ_1 तथा θ_2 उत्पाद की मात्रा q_1 तथा q_2 का फलन होता है–

$$\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - rh\,(q_1q_2) \qquad ...(8)$$

समीकरण (8) आंशिक अवकलज करने पर तथा उनके बराबर शून्य रखने पर

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - rh_1 = 0 \qquad ...(i)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - rh_2 = 0 \qquad ...(ii)$$

समीकरण (1) व (2) को लेने पर हम प्राप्त करते हैं–

$$r = \frac{p_1}{h_1} = \frac{p_2}{h_2}$$

अथवा
$$r = p_1 \frac{\partial\, q_1}{\partial\, x} = p_2 \frac{\partial\, q_2}{\partial\, x} \qquad ...(9)$$

द्वितीय क्रम शर्तों (Second-order Conditions) के अनुसार

$$\begin{vmatrix} -rh_{11} & -rh_{12} \\ -rh_{21} & -rh_{22} \end{vmatrix} \qquad (\text{यहाँ, } -rh_{11} < 0)$$

सारणिक को विस्तार करने पर

$$r^2\,(h_{11}h_{12} - h_{12}^{\;2}) > 0$$

चूँकि $r > 0$, द्वितीय क्रम शर्तों को निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है–

$$h_{11} > 0\; h_{11}\, h_{22} - h_{12}^{\;2} > 0 \qquad ...(10)$$

दोनों साथ में दर्शाती हैं कि $h_{22} > 0$ होना चाहिए। ऐसी दशा में प्रत्येक उत्पाद की सीमान्त लागत बढ़ती हुई होती है। समीकरण (10) की शर्तें यह बताती हैं कि उत्पादन सम्भावना वक्र उस बिन्दु पर मूल बिन्दु की ओर उन्नतोदर होती है जहाँ समीकरण (9) की प्रथम-क्रम शर्तें संतुष्ट होती हैं। फर्म अधिकतम लाभ की दशा में होगी।

टास्क यदि लाभ θ_1 तथा θ_2 है साथ ही उत्पाद की मात्रा q_1 तथा q_2 है तो इसका फलन क्या है?

11.2 क्षतिपूरक माँग फलन (Compensated Demand Function)

क्षति पूरक माँग वस्तु की वह मात्रा दर्शाता है जो एक उपभोक्ता निश्चित शर्तों (जैसे कर, आर्थिक सहायता) आदि के अन्तर्गत क्रय करता है।

यदि $U = q_1\, q_2$ तब व्यंजक

$$Z = p_1\, q_1 + p_2q_2 + \lambda\,(\bar{u}) - q_1\, q_2$$

को आंशिक अवकलन करके शून्य के बराबर रखने पर,

नोट

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = p_1 - \lambda\, q_2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_2} = p_2 - \lambda\, q_1 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \overline{U} - q_1\, q_2 = 0$$

q_1 तथा q_2 के लिये हल करने पर अभीष्ट क्षतिपूरक माँग होगी–

$$q_1 = \sqrt{\left(\frac{\overline{U}.p_2}{p_1}\right)}, q_2 = \sqrt{\left(\frac{\overline{U}.p_1}{p_2}\right)}$$

उदाहरण 1: माँग और पूर्तिफलन निम्न प्रकार है–

$$\boldsymbol{q = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}p \text{ तथा } q = 2p - 3}$$

संतुलन कीमत तथा मात्रा बताइये।

हल : संतुलन की स्थिति में वस्तु की माँग तथा पूर्ति दोनों समान होंगी, अर्थात्

$$\frac{5}{2} - \frac{1}{2}p = 2p - 3 \text{ अथवा } \frac{5}{2} + 3 = 2p + \frac{1}{2}p$$

अथवा $$\frac{5}{2} + 3 = \frac{5}{2}p \text{ अथवा } \frac{5}{2} + p = \frac{11}{2}$$

अथवा $$p = \frac{11}{2} = 2.2$$

पुनः $$q = 2p - 3$$

p का मान रखने पर

$$q = \frac{22}{5} - 3 = \frac{22-15}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

उदाहरण 2: यदि दो वस्तुओं के लिये उपयोगिता फलन $U = 3x^2\, y^2$ है तथा बजट परिसीमा $2x + 3y = 18$ हो तो X व Y वस्तुओं की माँगी जाने वाली मात्राओं को ज्ञात कीजिये।

हल (Solution): दी हुई उपयोगिता फलन है–

$$U = 3x^2y^2$$

तथा बजट परिसीमा (budget constraint) है–

$$2x + 3y = 18$$

या $$2x + 3y - 18 = 0$$

लेंगरेंज गुणक का प्रयोग करने पर माँग फलन होगी–

$$V = 3x^2\, y^2 + \lambda\,(2x + 3y - 18) \qquad \ldots(i)$$

माँग फलन का 'x' 'y' तथा 'λ' के संदर्भ में पृथक्-पृथक् अवकलन आंशिक किया जायेगा। तत्पश्चात् उपयोगिता को अधिकतम करने के लिये प्रथम अवकलज (first derivative) को शून्य के बराबर पर रखने पर–

नोट

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 6x\,y^2 + 2\lambda = 0 \qquad ...(ii)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 6x^2\,y + 3\lambda = 0 \qquad ...(iii)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x + 3y - 18 = 0 \qquad ...(iv)$$

समीकरण (2) तथा (3) को लेने पर

$$\frac{-2\lambda}{-3\lambda} = \frac{6xy^2}{6x^2y} \text{ अथवा } \frac{2}{3} = \frac{y}{x} \text{ अथवा } 2x = 3y$$

अथवा $x = (3/2)\,y$

x का मान समीकरण (iv) में रखने पर

$$2 \times (3/2)\,y + 3y - 18 = 0$$

अथवा $6\,y = 18$ अथवा $y = 18/6 = 3$

y का मान पुन: समीकरण (iv) में रखने पर

$$2x + (3 \times 3) - 18 = 0$$

अथवा $2x = 9$ अथवा $x = 9/2 = 4.5$

अत: x तथा y वस्तु की माँगी जाने वाली मात्रा क्रमश: 4.5 तथा 3 प्राप्त होगी।

उदाहरण 3: फर्म का विस्तार पथ उसके कारकों के कुल व्यय रूप में निकालिये यदि उत्पादन फलन दी हुई है–$P = 12 \log L + 30 \log K$

तथा इसके अदाओं की कीमतें $P_L = 2$ तथा $P_2 = 5$ है।

(Find the firm's expansion paths expressed in terms of its total expenditure on its inputs in the given production function is $P = 12 \log L + 30 \log K$ and the input prices are $P_L = 2$ and $P_K = 5$)

हल : यहाँ उत्पादक का मुख्य उद्देश्य अपने उत्पादन (P) को अधिकतम करना है जबकि उसका प्रतिबन्ध (कुल लागत) निम्न है–

$$TC = 2\,L + 5\,K \qquad ...(12.1)$$

लेंगरेंज गुणक λ का प्रयोग करने पर

$$Z = 12 \log L + 30 \log K + \gamma\,(TC - 2\,L - 5\,K) \qquad ...(12.2)$$

Z को K तथा λ के सन्दर्भ में पृथक्-पृथक् रूप में आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = \frac{12}{L} - 2\lambda = 0 \qquad ...(i)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = \frac{30}{K} - 5\lambda = 0 \qquad ...(ii)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = TC - 2\,L - 5\,K = 0 \qquad ...(iii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) को लेने पर

नोट

$$\frac{12}{L} = 2\lambda \text{ तथा } \frac{30}{K} = 5\lambda$$

दोनों को विभाजित करने पर

$$\frac{12/L}{30/K} = \frac{2}{5}$$

अथवा $$\frac{2/L}{5/K} = \frac{2}{5}$$

अथवा $$\frac{2}{L} = \frac{2}{K}$$

अथवा $$L = K$$

समीकरण (12.1) में L का मान रखने पर

$$TC = 2K + 5K = 7K$$

अथवा $$K = \frac{TC}{7}, \text{ इसी प्रकार से } L = \frac{TC}{7}$$

तथा $$\lambda = \frac{12}{2L} = \frac{6}{TC/7} = \frac{42}{TC}$$

(2) इस फलन का पैरामीटर v (समरूपता कोटि) पैमाने की प्रक्रिया (Scale of Operation) तथा तकनीकी परिवर्तनों से प्रभावित होता है। ये दोनों शक्तियाँ पैमाने के प्रतिफल की कोटि को प्रभावित कर सकते हैं, किन्तु इनका अलग से भेद नहीं किया गया है।

(3) इसमें यह मान्यता लेकर चलते हैं कि प्रतिस्थापन की लोच केवल तकनीकी के परिवर्तन से प्रभावित होती है तथा साधनों के अनुपात इसको प्रभावित नहीं करते हैं, किन्तु व्यवहारिक अध्ययन से पता चलता है कि प्रतिस्थापन लोच साधनों के अनुपातों से भी प्रभावित होती है। इस प्रकार यह फलन एक बहुत महत्त्वपूर्ण तथ्य को छोड़ देता है।

(4) अन्तिम, इस फलन का पैरामीटर δ मापा नहीं जा सकता। इसके अतिरिक्त इस फलन में आँकड़ों को जाँचने में भी बड़ी कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है।

उदाहरण 4: एक उत्पादन $P = AL^{\alpha} C^{\beta}$ जहाँ A, α तथा β स्थिर हैं। दर्शाइये कि यदि L तथा C कारकों को समान अनुपात में बढ़ाया जाये तथा $\alpha + \beta$ इकाई से समान होने पर उत्पादन अधिक, कम या समान अनुपात में बढ़ेगा।

(The production function is $P = AL^{\alpha} C^{\beta}$ where A, α and β are constant. Show that if the factors L, C are increased in the same proportion, the product increases in greater, equal or less proportion, according as $\alpha + \beta$ is greater than, equal to, or less than unity).

हल: उत्पादन फलन है–

$$P = AL^{\alpha} C^{\beta}$$

माना साधन L तथा C में गुणा ψ गुणा वृद्धि कर दी जाये तो

$$P' = A(\psi L)^{\alpha} (\psi C)^{\beta} \qquad (\text{यहाँ } \psi > 0 \text{ है})$$

$$= \psi^{\alpha+\beta} AL^{\alpha} C^{\beta}$$

नोट

$$= \psi^{\alpha + \beta} P \qquad (\therefore P = AL^{\alpha} C^{\beta})$$

यदि $\alpha + \beta = 1$ हो तो

$$P' = \psi P$$

अत: उत्पादन ठीक उसी अनुपात में बढ़ जायेगा जिस अनुपात में साधनों में वृद्धि की गयी है। इस स्थिति में उत्पादन पैमाने के स्थिर प्रतिफल के नियम के अन्तर्गत होगा–

यदि $\alpha + \beta < 12\text{-}3$ *i.e.* माना $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ तब

$$P' = \psi^{1/2} P$$

इस स्थिति के उत्पादन साधनों में वृद्धि करने से अनुपात से कम बढ़ेगा। यह स्थिति पैमाने के घटते हुये प्रतिफल के नियम की होगी।

यदि $\alpha + \beta > 1$ *i.e.* मान $\alpha + \beta = 2$ तब

$$P' = \psi^2 P$$

क्या आप जानते हैं उत्पादन साधनों में वृद्धि के अनुपात से अधिक होगा तथा उत्पादन पैमाने के बढ़ते हुये प्रतिफल के नियम के अन्तर्गत क्रियाशील होगा।

$$L = \frac{TC}{7}, K = \frac{TC}{7} \text{ तथा } \lambda = \frac{42}{TC}$$

ये सभी मूल्य वांछित विस्तार पथ का सृजन करेंगे।

उदाहरण 5: यदि लाभ दर (पूँजी की कीमत) स्थिर रहे तथा पूँजी श्रम अनुपात 10:10 से बदल कर 12:11 हो जाये तथा मजदूरी में 25% की वृद्धि हो जाये तो प्रतिस्थापन की लोच निर्धारित कीजिये।

(If the profit rate (price of capital remains unaltered, the ratio of amount of capital employed per unit of labour shifts from 10 : 10 to 12 : 11, given that rise in wages is 25%. Determine the elasticity of substitution).

हल (Solution): हम जानते हैं कि

$$\text{प्रतिस्थापन की लोच} = \sigma = \frac{\partial\left(\frac{L}{K}\right)/L/K}{\frac{\partial\,(p_K/P_L)}{P_K/P_L}}$$

यहाँ L तथा K क्रमश: श्रम तथा पूँजी को प्रदर्शित करते हैं तथा P_L/P_K साधन L तथा K कीमतों का अनुपात है।

दिया हुआ है–

प्रारम्भ में, $\frac{L}{K} = \frac{10}{10}$ तथा अन्तिम रूप में $\frac{L}{K} = \frac{12}{11}$

$$\frac{L}{K} \text{ में परिवर्तन} = \partial\left(\frac{L}{K}\right) = \frac{12}{11} - \frac{10}{10} = \frac{12-11}{11} = \frac{1}{11}$$

नोट

$$\therefore \qquad \frac{\partial\left(\frac{L}{K}\right)}{L/K} = \frac{\frac{1}{\frac{11}{10}}}{10} = \frac{1}{11}$$

प्रारम्भ में $\frac{P_K}{P_L} = 1:1$, अब मजदूरी 25% बढ़ जाती है तो अनुपात 1.25:1 = 5/4 हो जाता है।

$$\frac{P_K}{P_L} \text{ में परिवर्तन} = \partial\left(\frac{P_K}{P_L}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{1} = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{P_K}{P_L}\right)}{\frac{P_K}{P_L}} = \frac{+\frac{1}{4}}{\frac{1}{1}} = +\frac{1}{4}$$

$$\sigma = \frac{1/11}{1/4} = \frac{4}{11} = 0.36$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. $x = \cdots\cdots\cdots (q_1 q_2)$
2. $V = p_1 q_1 = p_2\, q_2 + \mu\, [x - h\, (\ldots\ldots\ldots)\sigma]$
3. $\pi = \cdots\cdots\cdots + p_2\, q_2 - rh\, (q_1 q_2)$
4. प्रतिस्थापन की लोच $= \sigma = \dfrac{\partial\left(\frac{L}{K}\right)/L/K}{\ldots\ldots\ldots}$

निम्नलिखित प्रश्नों को हल करें (Solve the following numbericals)

1. ज्ञात है–

   उपयोगिता फलन, $U = q_1 q_2$

   प्रथम वस्तु का मूल्य, $P_1 = 4$ रु.

   द्वितीय वस्तु का मूल्य, $p_2 = 10$ रु.

   उपभोक्ता की आय, $Y = 100$ रु.

   वस्तु Q_1 तथा Q_2 का उपभोग का संतुलित स्तर बताओ तथा अधिकतमीकरण की शर्तों की पुष्टि करो।

   उत्तर : $\left[q_1 = \frac{25}{2}, q_2 = 5\right]$

2. यदि उपयोगिता फलन $U = 4q_1\, q_2 + 3q_1$ तथा आय निवाध (Constraints) $60 = 2q_2 + 6q_1$ हो तो अधिकतम उपयोगिता हेतु Q_1, Q_2, की मात्राएं ज्ञात कीजिए।

   (**उत्तर :** $q_1 = 16.125$, $q_2 = -4.625$)

नोट

3. यदि तुष्टिगुण फलन $U = (x_1, x_2) = 2 \log x_2$ हो तो प्रथम वस्तु के लिए माँग वक्र क्या होगा? यदि कुल आय W है और दो वस्तुओं की कीमते p_1 तथा p_2 हैं। **उत्तर** $\left[x_1 = \frac{2W}{p_1}, x_2 = \frac{W}{3p_2}\right]$

11.3 सारांश (Summary)

- मान लीजिए एक फर्म दो उत्पाद Q_1 तथा Q_2 की मात्रा q_1 तथा q_2 का क्रय क्रमशः p_1 तथा p_2 की कीमत पर क्रय करती है तो ऐसी दशा में कुल आगम होगा–

  $R = p_1q_1 = p_2q_3$
- मान लीजिए फर्म एक निर्गत (Input) से दो उत्पादों (Output) θ_1 तथा θ_2 का उत्पाद करती है। ऐसी दशा में X के सन्दर्भ में फर्म के दो उत्पाद की लागत (x), q_1 तथा q_2 का फलन होगा। अर्थात् $x = h\ (q_1, q_2)$
- लाभ θ_1 तथा θ_2 उत्पाद की मात्रा q_1 तथा q_2 का फलन होता है– $\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - rh\ (q_1q_2)$
- क्षति पूरक माँग वस्तु की वह मात्रा दर्शाता है जो एक उपभोक्ता निश्चित शर्तों (जैसे कर, आर्थिक सहायता) आदि के अन्तर्गत क्रय करता है।

11.4 शब्दकोश (Keywords)

- प्रक्रिया (Operation): क्रिया।
- आबंध (Condition): शर्त।

11.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. लाभ अधिकतमीकरण को स्पष्ट करें।
2. क्षतिपूरक माँग फलन क्या है? वर्णन करें।
3. यदि दो वस्तुओं x तथा y की उपयोगिता फलन $U = 3x^2y^2$ तथा बजट परिसीमा $2x + 3y = 18$ हो, तो x व y वस्तुओं की माँगी जाने वाली मात्राओं को ज्ञात कीजिए। (**उत्तर:** $x = 4.5,\ y = 3$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. h 2. q_1q_2 3. p_1q_1 4. $\frac{\partial(P_k/P_L)}{P_K/P_L}$

नोट

11.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Reading)

पुस्तकें

1. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
5. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*

इकाई—12 : समाकलन : समाकलन के आधारभूत नियम (Integration : Basic Rules of Integration)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- व्यापक समाकल को हल करने में।
- मानक समाकल को समझने हेतु।
- x^n का x के सापेक्ष समाकलन, जहाँ $n \neq 1$, से संबंधित समस्याओं को हल करने हेतु।
- किसी अचर और एक फलन के गुणनफल का समाकलन निकालने हेतु।
- फलनों से योगफल अथवा अंतर का समाकलन करने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

फलन का समाकलन (Integration of the Function)—किसी फलन का अवकलन ज्ञात करने की प्रतिलोम (Inverse) संक्रिया को समाकलन (Integration) कहते हैं। अवकल गणित में हम दिये हुए फलन का अवकल

नोट

गुणांक (differential coefficient) ज्ञात करते हैं, परन्तु समाकल-गणित में हमें उन फलनों को ज्ञात करना होता है जिनका अवकल गुणांक दिया हुआ फलन है।

उदाहरणार्थ, $\sin x$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर अवकल गुणांक $\cos x$ होता है तो फलन $\cos x$ का x के सापेक्ष समाकलन करने पर समाकल (integral) $\sin x$ होगा।

मान लो $f(x)$, x का कोई फलन है जिसका अवकल गुणांक $f'(x)$ है, अर्थात्

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x)$$

तो हम कहते हैं कि $f'(x)$ का एक **समाकल** (integral), $f(x)$ है।

प्रतीकों की सहायता से इसे निम्न प्रकार लिखते हैं:

$$\int f'(x)\, dx = f(x).$$

चिह्न "$\int$" समाकलन का प्रतीक है जिसे समाकलन चिह्न (sign of integration) कहते हैं। यह फलन के समाकलन को निरूपित करता है। dx में x से यह प्रकट होता है कि समाकल (integration) चर (variable) x के सापेक्ष किया गया है। यदि समाकलन किसी अन्य चर के सापेक्ष करना हो, तो x के स्थान पर चर को रख देते हैं।

संकेत $\int$ अंग्रेजी अक्षर S का विकृत रूप है। वस्तुत: समाकलन योग की एक विशेष विधि है और अंग्रेजी शब्द sum के प्रथम अक्षर S से ही संकेत $\int$ बना है।

> *नोट्स* किसी फलन का समाकलन (integration) करने की विधि को समाकलन करना (integration) कहते हैं। जिस फलन का समाकलन किया जाता है उसे **समाकल्य** (integrand) कहते हैं तथा समाकलन द्वारा प्राप्त फलन को **समाकल** (integral) कहते हैं।

$\int f'(x)\, dx = f(x)$ में $f'(x)$ समाकल्य और $f(x)$ समाकल है।

उपर्युक्त विवेचन से स्पष्ट है कि

$$\int \cos x\, dx = \sin x, \qquad \because \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x, \qquad \because \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x, \qquad \because \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

और
$$\int \frac{1}{t}dt = \log t, \qquad \because \quad \frac{d}{dt}(\log t) = \frac{1}{t}$$

अत: उपरोक्त फलनों में $\cos x$, $\sin x$, e^x और $\frac{1}{t}$ समाकल्य (integrand) हैं और $\sin x$, $-\cos x$, e^x और $\log t$ समाकल (integrals) हैं।

किसी फलन पर क्रमश: समाकलन तथा अवकलन दोनों संक्रियाएँ की जायें तो फलन यथावत रहता है।

उदाहरणार्थ, $\frac{d}{dx}\left[\int \cos x \, dx\right] = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

अर्थात्, $\frac{d}{dx}\left[\int f'(x)\, dx\right] = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$.

इससे स्पष्ट होता है कि अवकलन और समाकलन प्रतिलोम संक्रियाएँ हैं।

12.1 व्यापक समाकल (Comprehensive Integrals)

अवकलन गणित से, हम जानते हैं कि यदि $f(x)$ का अवकल गुणांक (differential coefficient) $F(x)$ है, तो $f(x) + c$ का अवकल गुणांक भी $F(x)$ ही होगा, जहाँ c कोई स्वेच्छ अचर (arbitrary constant) है।

अर्थात् यदि
$$\frac{d}{dx}f(x) = F(x)$$

तो
$$\frac{d}{dx}\{f(x)+c\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}(c) = \frac{d}{dx}f(x) + 0 = F(x)$$

$$\therefore \quad \int F(x)\, dx = f(x) + c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है जिसके असंख्य मान हो सकते हैं।

अत: किसी फलन का समाकल अद्वितीय (unique) नहीं होता, चूँकि c को भिन्न-भिन्न मान देने पर $F(x)$ के अनेक समाकल (integrals) प्राप्त होते हैं, अत: यदि $f(x)$, $F(x)$ का कोई समाकल (intergal) हो, तो $f(x) + c$ उसका व्यापक समाकल (Comprehensive Integral) होगा।

> *क्या आप जानते हैं* स्वेच्छ अचर c को **समाकलन अचर** (Constant of integration) कहते हैं।

नोट

12.2 मानक समाकल (Standard Integral)

मानक फलनों के अवकल गुणांक के आधार पर हम कुछ मुख्य फलनों के समाकलों को ज्ञात करेंगे, जो निम्न हैं:

समाकलन	अवकलन
1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	$\because \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx}(x^{n+1}) = x^n$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \log \lvert x \rvert + c$	$\because \frac{d}{dx}(\log \lvert x \rvert) = \frac{1}{x}$
3. $\int e^x = e^x + c$	$\because \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$	$\because \frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right) = a^x$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$\because \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
7. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
8. $\int \text{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$	$\because \frac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x$
9. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
10. $\int \text{cosec}\, x \cot x \, dx = -\text{cosec}\, x + c$	$\because \frac{d}{dx}(-\text{cosec}\, x) = \text{cosec}\, x \cot x$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
13. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

नोट

12.3 x^n का x के सापेक्ष समाकलन, जहाँ $n \neq -1$ (Integration of x^n Relative to x, Where $n \neq -1$)

$\because$ $$\frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1)x^n$$

या $$\frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n$$

$\therefore$ $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ जहाँ } n \neq -1.$$

उदाहरण 1. $\int dx = \int 1\, dx = \int x^0 dx = \dfrac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c.$

उदाहरण 2. $\int x^5 dx = \dfrac{x^{5+1}}{5+1} + c = \dfrac{x^6}{6} + c.$

उदाहरण 3. $\int x^{-10}\, dx = \dfrac{x^{-10+1}}{-10+1} + c = \dfrac{x^{-9}}{-9} + c = -\dfrac{1}{9} x^{-9} + c.$

उदाहरण 4. $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \dfrac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \dfrac{2}{3} x^{3/2} + c.$

उदाहरण 5. $\int x^{2/3} dx = \dfrac{x^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \dfrac{3}{5} x^{5/3} + c.$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)−

1. किसी फलन का अवकलन ज्ञात करने की प्रतिलोम संक्रिया को ········· कहते हैं।
2. जिस फलन का समाकलन किया जाता है उसे ········· कहते हैं।
3. $\int a^x \, dx = \cdots\cdots\cdots + c$
4. $\int \ldots\ldots\ldots\, dx \;\cdots\cdots\cdots = -\cos x + c$
5. $\dfrac{d}{dx} x^{n+1} = (\ldots\ldots\ldots)\, x^n$

नोट

प्रश्नावली 12.1

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

निम्नलिखित समाकलों (Integrals) का मान ज्ञात कीजिए–

1. (a) $\int x\,dx$ (b) $\int x^4\,dx$

   (c) $\int x^a\,dx$ (d) $\int t^3\,dt$

2. (a) $\int x^{-7}\,dx$ (b) $\int x^{-1/2}\,dx$

   (c) $\int x^{-3/2}\,dx$ (d) $\int z^{-1/3}\,dz$

3. (a) $\int \frac{dx}{x^2}$ (b) $\int \frac{dt}{t}$

   (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

4. (a) $\int 2^x\,dx$ (b) $\int 3^x\,dx$

   (c) $\int b^x dx$ (d) $\int b^{x+a}dx$

5. (a) $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ (b) $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}$

   (c) $\int \frac{dy}{1+y^2}$ (d) $\int e^x dx$

6. (a) $\int \sec^2 t\,dt$ (b) $\int \text{cosec}^2 z\,dz$

   (c) $\int \sqrt{1-\cos^2 x\,dx}$ (d) $\int (1+\cot^2 x)\,dx$

7. (a) $\int \frac{dx}{\text{cosec}\,x}$ (b) $\int \frac{dx}{\cos x \cot x}$

   (c) $\int \frac{dx}{5^{-x}}$ (d) $\int \frac{dx}{\sec x}$.

8. सिद्ध कीजिए $\int dx = x$, जबकि $x = 0$.

उत्तर

1. (a) $\frac{x^2}{2}+c$ (b) $\frac{x^5}{5}+c$ (c) $\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$ (d) $\frac{t^4}{4}+c$

2. (a) $-\frac{1}{6x^6}+c$ (b) $2x^{1/2}+c$ (c) $x^{-1/2}+c$ (d) $\frac{3}{2}z^{2/3}+c$

3. (*a*) $\frac{-1}{x} + c$ (*b*) $\log 1 + 1 + c$ (*c*) $2x^{\frac{1}{2}} + c$ (*d*) $2x^{1/2} + c$

4. (*a*) $\frac{2^x}{\log e^2} + c$ (*b*) $\frac{3^x}{\log e^3} + c$ (*c*) $\frac{b^x}{\log e^b} + c$ (*d*) $\frac{b^{x+a}}{\log e^b} + c$

5. (*a*) $\sin^{-1} t + c$ (*b*) $\sec^{-1} z + 1\ c$ (*c*) $\tan^{-1} x + c$ (*d*) $e^x + c$

6. (*a*) $\tan t + c$ (*b*) $-\cot z + c$ (*c*) $-\cos x + c$ (*d*) $-\cot x + c$

7. (*a*) $-\cos x + c$ (*b*) $\sec x + c$ (*c*) $\frac{5^x}{\log_e 5} + c$ (*d*) $\sin x + c$

12.4 किसी अचर और एक फलन के गुणनफल का समाकलन (Integration of the Multiplication of a Constant and a Function)

यदि $\int f'(x)\,dx = f(x)$ तो $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$

$$\because \quad \frac{d}{dx}\{a\,.\,f(x)\} = a\frac{d}{dx}f(x)$$

$$= af'(x)$$

$$\because \quad \int af'(x)\,dx = a\,.\,f(x) = a\int f'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int af'(x)\,dx = a\int f'(x)\,dx}$$

अर्थात् किसी अचर और फलन के गुणनफल का समाकल उस अचर और फलन के समाकल के गुणनफल के बराबर होता है।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. फलन $15x^4$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल : $\int 15x^4\,dx = 15\int x^4\,dx$

$$= \frac{15}{5}x^5 + c = 3x^5 + c.$$ उत्तर

उदाहरण 2. $\int 7\frac{dx}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\int 7\frac{dx}{x} = 7\int \frac{dx}{x} = 7\log|x| + c.$ उत्तर

उदाहरण 3. $\int 6\sin x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

नोट

हलः $\int 6 \sin x\, dx = 6\int \sin x\, dx$

$= 6(-\cos x) + c = -6\cos x + c.$ **उत्तर**

उदाहरण 4. $\int 3e^x dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हलः $\int 3e^x dx = 3\int e^x dx = 3e^x + c.$ **उत्तर**

उदाहरण 5. फलन e^{x+a} का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हलः
$$\int e^{x+a}dx = \int e^x . e^a dx$$
$$= e^a \int e^x\, dx = e^a . e^x + c$$
$$= e^{x+a} + c.$$
उत्तर

टास्क फलन $20x^4$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए। (**उत्तरः** $4x^5 + c$)

12.5 फलनों के योगफल अथवा अन्तर का समाकलन (Integratier of the Sum and Subtract of the Functions)

यदि $\int f_1'(x)\, dx = f_1(x)$ तो $\frac{d}{dx}f_1(x) = f_1'(x)$

तथा $\int f_2'(x)\, dx = f_2(x)$ तो $\frac{d}{dx}f_2(x) = f_2'(x)$

फलनों के योग या अन्तर के अवकलन सूत्र से

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{f_1(x) \pm f_2(x)\} = \frac{d}{dx}f_1(x) \pm \frac{d}{dx}f_2(x)}$$
$$= f_1'(x) \pm f_2'(x)$$

$\therefore$
$$\int \{f_1'(x) \pm f_2'(x)\}\, dx = f_1(x) \pm f_2(x) = \int f_1'(x)\, dx \pm \int f_2'(x)\, dx$$

अतः
$$\boxed{\int \{f_1'(x) \pm f_2'(x)\}\, dx = \int f_1'(x)dx \pm \int f_2'(x)\, dx}$$

यह संक्रिया इसी प्रकार दो से अधिक फलनों के लिए सत्य है।

क्या आप जानते हैं किन्हीं फलनों के योगफल अथवा अन्तर का समाकल क्रमशः उन फलनों के समाकल के योगफल अथवा अन्तर के बराबर होता है।

नोट

अत:

$$\int [f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm f_3'(x) \pm ....]\, dx = \int f_1'(x)\, dx \pm \int f_2'(x)\, dx \pm \int f_3'(x)\, dx \pm .....$$

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. फलन $x^6 + \frac{1}{x} - e^x + 1$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल : $$\int \left(x^6 + \frac{1}{x} - e^x + 1\right) dx = \int x^6 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int e^x dx + \int dx$$

$$= \frac{1}{7}x^7 + \log|x| - e^x + x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 2. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \,.\, \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \sec^2 x \; dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$= \tan x - \cot x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\int \left(3e^x - \frac{1}{5x} + \sec x \tan x\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\int \left(3e^x - \frac{1}{5x} + \sec x \tan x\right) dx$$

$$= 3\int e^x dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x} dx + \int \sec x \tan x \, dx$$

$$= 3\, e^x - \frac{1}{5}\log|x| + \sec x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 4. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\int (ax^2 + bx + c)\, dx = a\int x^2\, dx + b\int x\, dx + c\int 1\, dx$$

$$= a\left(\frac{1}{3}x^3\right) + b\left(\frac{1}{2}x^2\right) + cx + d$$

नोट

$$= \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d,$$

जहाँ d समाकलन स्थिरांक है। **उत्तर**

उदाहरण 5. $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \int x^2\,dx - 2\int 1\,dx + \int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x + \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + c = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 6. $\int (5x-4)^3\,dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int (5x-4)^3 dx = \int (125x^3 - 300x^2 + 240x - 64)\,dx$$

$$= 125\int x^3 dx - 300\int x^2 dx + 240\int x\,dx - 64\int 1\,dx$$

$$= 125\left(\frac{1}{4}x^4\right) - 300\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 240\left(\frac{1}{2}x^2\right) 64x + c$$

$$= \frac{125}{4}x^4 - 100x^3 + 120x^2 - 64x + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 7. फलन $\sin^2 \frac{x}{2}$ **का** x **के सापेक्ष समाकलन कीजिए।**

हल : $$\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1-\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + c = \frac{1}{2}(x - \sin x) + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 8: $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx = \int (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$$

$$= \int 1.\cos 2x\,dx$$

$$= \int \cos 2x$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + c.$$ **उत्तर**

नोट

उदाहरण 9. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 10. $\int \tan^2 x\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \tan x - x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 11. $\int \left(\frac{5x+7}{x} + e^x\right)dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\int \left(\frac{5x+7}{x} + e^x\right)dx = \int \left(5 + \frac{7}{x} + e^x\right)dx$$

$$= 5x + 7\log|x| + e^x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 12. $\int \left(\frac{ax^4 + bx^2 + c}{x^4}\right)dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\int \left(\frac{ax^4 + bx^2 + c}{x^4}\right)dx = \int \left(a + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^4}\right)dx$$

$$= \int (a + bx^{-2} + cx^{-4})\, dx$$

$$= \int a\, dx + b\int x^{-2}\, dx + c\int x^{-4}dx$$

$$= ax + b\frac{x^{-1}}{-1} + c\,.\frac{x^{-3}}{-3}. + d = ax - \frac{b}{x} - \frac{c}{3x^3} + d$$

जहाँ d समाकलन स्थिरांक है। उत्तर

उदाहरण 13. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx$$

$$= \int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= x - \tan^{-1}x + c.$$ उत्तर

नोट

उदाहरण 14. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx$, अंश और हर को $1-\cos x$ से गुणा करने पर

$$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \int (\text{cosec}^2 x - \cot x \cdot \text{cosec}\, x)\, dx$$

$$= -\cot x + \text{cosec}\, x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 15. **फलन** $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}$ **का** x **के सापेक्ष समाकल ज्ञात कीजिये।**

हल : $\int \frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} dx = \int \frac{(\sec x + \tan x)(\sec x + \tan x)}{(\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x)} dx$

$$= \int \frac{(\sec x + \tan x)^2}{\sec^2 x - \tan^2 x} dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \tan^2 x + 2\sec x \tan x)\, dx$$

$$= \int (2\sec^2 x - 1 + 2\sec x \tan x)\, dx$$

$$= \int 2\sec^2 x\, dx - \int dx + \int 2\sec x \tan x\, dx$$

$$= 2\int \sec^2 x\, dx - \int dx + 2\int \sec x \tan x\, dx$$

$$= 2 \tan x - x + 2 \sec x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 16. **फलन** $\frac{(x+2)(4x^2-5)}{x}$ **का** x **के सापेक्ष समाकलन कीजिये।**

हल :

$$\int \frac{(x+2)(4x^2-5)}{x} dx = \int \frac{(4x^3 + 8x^2 - 5x - 10)}{x} dx$$

$$= 4\int x^2 dx + 8\int x\, dx - 5\int dx - 10\int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 5x - 10 \log|x| + c$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 10 \log|x| + c.$$ उत्तर

नोट

प्रश्नावली 12.2

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

1. $\int (e^x + 2\sin x - 3\cos x)\, dx$.
2. $\int (x^2 - \cos x + \sec x \tan x)\, dx$.
3. $\int (7x^6 - 8x^3 + 5)\, dx$.
4. $\int (x+2)(2x+6)\, dx$.
5. $\int \frac{ax^3 + bx + c}{x^2}\, dx$.
6. $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}\, dx$.
7. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) dx$.
8. $\int \left(\frac{3x^2 + 4x + 5}{\sqrt{x}}\right) dx$.
9. $\int \frac{x}{a+x}\, dx$.
10. $\int \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) dx$.
11. $\int (1 - x^2)\sqrt{x}\, dx$.
12. $\int \frac{e^{\log x}}{x}\, dx$.
13. $\int \left(\cos x - \frac{5}{x} + e^x\right) dx$.
14. $\int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}\, dx$.

उत्तर

1. $e^x - 2\cos x - 3\sin x + c$
2. $\frac{x^3}{3} - \sin x + \sec x + c$
3. $x^7 - 2x^4 + 5x + c$
4. $\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 + 12x + c$
5. $\frac{a}{2}x^2 + b\log_e |x| \frac{-c}{x} + c_1$
6. $\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{6x^{3/2}}{5} + 2x^{3/2} + 2\sqrt{x} + c$
7. $2x^{1/2} - 2/3\, x^{3/2} + c$
8. $2\sqrt{x}\left[\frac{3}{5}x^5 + \frac{4}{3}x + 5\right] + c$
9. $x\, a \log_e |a + x| + c$
10. $x + \frac{x^2}{\angle 2} + \frac{x^3}{\angle 3} + \ldots.$
11. $\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{7}x^{7/2} + c$
12. $x + c$
13. $\sin x - 5\log |x| + e^x + c$
14. $-\frac{2}{3}\operatorname{cosec} x + \sec x + c$.

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

निम्नलिखित कथनों में सत्य अथवा असत्य की पहचान करें (State whether the following statements are True or False)

6. किन्हीं फलनों के योगफल अथवा अंतर का समाकल क्रमश: उन फलनों के समाकल के योगफल अथवा अंतर के बराबर होता है।
7. किसी अचर और फलन के गुणनफल का समाकल उस अचर और फलन के समाकल के योगफल के बराबर होता है।
8. $\int af'(x)\,dx = a\int f'(x)\,dx$
9. $\frac{d}{dx}\{f_1(x) \pm f_2(x)\} = \frac{d}{dx}f_1(x) \pm \frac{d}{dx}f_2(x)$

12.6 सारांश (Summary)

- किसी फलन का अवकलन ज्ञात करने की प्रतिलोम (Inverse) संक्रिया को समाकलन (Integration) कहते हैं। अवकल गणित में हम दिये हुए फलन का अवकल गुणांक (differential coefficient) ज्ञात करते हैं, परन्तु समाकल-गणित में हमें उन फलनों को ज्ञात करना होता है जिनका अवकल गुणांक दिया हुआ फलन है।
- चिह्न "$\int$" समाकलन का प्रतीक है जिसे समाकलन चिह्न (sign of integration) कहते हैं। यह फलन के समाकलन को निरूपित करता है। dx में x से यह प्रकट होता है कि समाकल (integration) चर (variable) x के सापेक्ष किया गया है।
- किसी फलन पर क्रमश: समाकलन तथा अवकलन दोनों संक्रियाएँ की जायें तो फलन यथावत् रहता है।
- किसी फलन का समाकल अद्वितीय (unique) नहीं होता, चूँकि c को भिन्न-भिन्न मान देने पर $F(x)$ के अनेक समाकल (integrals) प्राप्त होते हैं, अत: यदि $f(x)$, $F(x)$ का कोई समाकल (intregal) हो, तो $f(x) + c$ उसका व्यापक समाकल (Comprehensive Integral) होगा।

12.7 शब्दकोश (Keywords)

- प्रतिलोम (Inverse): उल्टा।
- प्रतीक (Symbol) चिह्न।

12.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. $\int x^5\,dx$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात करें, जहाँ $n \neq -1$ (**उत्तर** : $\frac{x^6}{6} + c$),
2. समाकलन $\int e^x\,dx$ का मान ज्ञात करें। (**उत्तर** : $e^x + c$)

3. $\int 6 \sin x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। (**उत्तर** : $-6 \cos x + c$)

4. $\int x - \frac{1}{x} dx$ का मान निकालें। (**उत्तर** : $\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c$)

5. $\int \tan^2 x \, dx$ का मान परिकलित कीजिए। (**उत्तर** : $\tan x - x + c$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. समाकलन	2. समाकल्य	3. $\frac{a^x}{\log_e a}$	4. sin$x$ (v) $n + 1$.
6. सत्य	7. असत्य	8. सत्य	9. सत्य।

12.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
4. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
6. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*

नोट

इकाई–13 : समाकलन की विधियाँ (Methods of Integration)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- प्रतिस्थापन को समझने हेतु।
- प्रतिस्थापन से प्राप्त कुछ परिणामों को जानने हेतु।
- x^n के फलन का समाकलन निकालने हेतु।
- समाकल्प से अवगत होंगे।
- प्रतिस्थापन द्वारा कुछ मानक फलनों के समाकल निकालने में।

VED1
E\L-LOVELY-H\math13-1 IInd 21-10-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12

प्रस्तावना (Introduction)

किसी फलन का समाकलन ज्ञात करने की निम्नलिखित दो मुख्य विधियाँ हैं–

1. **प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन** (Integration by Substitution)
2. **खण्डशः समाकलन** (Integration by Parts)

13.1 प्रतिस्थापन (Substitution)

इस संक्रिया में दिये हुए समाकल्य (Integrand) को मानक सूत्रों (Standard formula) में परिवर्तित करके समाकल किया जाता है। इसके लिए समाकल्य की चर राशि के किसी फलन को अन्य चर राशि के बराबर रखते हैं और समाकल्य में प्रतिस्थापित कर समाकल्य को नई चर राशि के फलन के रूप में इस प्रकार परिवर्तित कर लेते हैं कि सूत्रों का प्रयोग सरलता से किया जा सके।

13.2 प्रतिस्थापन से प्राप्त कुछ परिणाम (Some Results Gain from Substitution)

(*i*) फलन $\sin(ax + b)$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $\qquad ax + b = t$

$$\frac{d}{dx}(ax + b) = dt \quad \therefore \quad a\,dx = dt$$

या
$$dx = \frac{1}{a}\,dt$$

$\therefore$
$$\int \sin(ax+b)\,dx = \int (\sin t)\frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int \sin t\,dt$$

$$= -\frac{1}{a}\cos t + c = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$$

नोट्स

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$$

उपर्युक्त उदाहरण से निम्नलिखित फलनों के x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कर सकते हैं–

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$$

$$\int \sec^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} + c$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

नोट

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \log |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sec(ax+b) \tan(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \sec(ax+b) + c$$

$$\int \text{cosec}\,(ax+b) \tan(ax+b) = -\frac{1}{a} \text{cosec}\,(ax+b) + c$$

$$\boxed{\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} f(ax+b) + c}$$

(*ii*) फलन $\frac{1}{a^2+x^2}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल : मान लीजिए $x = at \quad \therefore \quad dx = a\,dt$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \int \frac{1}{a^2+a^2t^2} . a\, dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{a} \tan^{-1} t + c$$

$$= \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

अत: $$\boxed{\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c}$$

इसी प्रकार

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + c}$$

उपर्युक्त परिणामों को समाकलन में बिना किसी प्रतिस्थापन के प्रयुक्त कर सकते हैं।

नोट

हल सहित उदाहरण

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

उदाहरण 1. $\int (\sqrt{1-5x} + 9e^{3x})\ dx.$

हल : $\int (\sqrt{1-5x} + 9e^{3x})\ dx = \int (1-5x)^{1/2}\ dx + 9\int e^{3x}\ dx$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)\frac{(1-5x)^{3/2}}{3/2} + 9\,\frac{e^{3x}}{3} + c$$

$$= \frac{-2}{15}\ (1-5x)^{3/2} + 3e^{3x} + c.$$ उत्तर

उदाहरण 2. मान ज्ञात कीजिए–

$$\int \sin\ 4x \cos 6x\ dx.$$

हल : $\int \sin 4x \cos 6x\ dx = \frac{1}{2}\int (2 \sin 4x \cos 6x)\ dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 10x - \sin 2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 10x\ dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{\cos 10x}{10} + \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{2} + c$$

$$= -\frac{1}{20}\ \cos 10x + \frac{1}{4}\ \cos 2x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\int \sin^3 \theta\ d\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\int \sin^3\ \theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int (3 \sin\theta - \sin 3\theta)\, d\theta$

$$= \frac{3}{4}\int \sin\theta\, d\theta - \frac{1}{4}\int \sin 3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\ (-\cos\theta) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3\theta + c$$

$$= -\frac{3}{4}\ \cos\theta + \frac{1}{12}\ \cos 3\theta + c.$$ उत्तर

उदाहरण 4. $\int \sqrt{1 - \sin x}\ \ dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $\sqrt{1-\sin x} = \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}x + \cos^2\frac{1}{2}x - 2 \sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x}$

नोट

$$= \sqrt{\left(\sin \frac{1}{2} x - \cos \frac{1}{2} x\right)^2} = \pm \left(\sin \frac{1}{2} x - \cos \frac{1}{2} x\right)$$

$$\therefore \qquad \int \sqrt{1 - \sin x}\; dx = \pm \int \left(\sin \frac{1}{2} x - \cos \frac{1}{2} x\right) dx$$

$$= \pm \left[-2 \cos \frac{1}{2} x - 2 \sin \frac{1}{2} x\right] + c$$

$$= \pm 2 \left(\cos \frac{1}{2} x + \sin \frac{1}{2} x\right) + c.$$ उत्तर

उदाहरण 5. $\int \left(7e^{2x} + \frac{5}{2x+7} + \sec^2 3x - 2\sqrt{1-5x}\right) dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int \left(7e^{2x} + \frac{5}{2x+7} + \sec^2 3x - 2\sqrt{1-5x}\right) dx$

$$= 7 \int e^{2x}\, dx + 5 \int \frac{1}{2x+7}\, dx + \int \sec^2 3x\, dx - 2\int (1-5x)^{1/2}\, dx$$

$$= \frac{7}{2} e^{2x} + \frac{5}{2} \log (2x+7) + \frac{1}{3} \tan 3x - 2 \frac{(1-5x)^{3/2}}{(-5)\left(\frac{3}{2}\right)} + c$$

$$= \frac{7}{2} e^{2x} + \frac{5}{2} \log (2x+7) + \frac{1}{3} \tan 3x + \frac{4}{15} (1-5x)^{3/2} + c.$$ उत्तर

प्रश्नावली 13.1

निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए-

1. (*a*) $(x+2)^3$ (*b*) $(7x-2)^3$
   (*c*) $(ax+b)^4$ (*d*) $(3+4x)^5$
2. (*a*) $\sqrt{4-5x}$ (*b*) $\sqrt{4x+3}$
   (*c*) $\sqrt{ax+b}$ (*d*) $\sqrt{2x+\frac{5}{3}}$
3. (*a*) $\frac{1}{(5x+4)^2}$ (*b*) $\frac{1}{(a+bx)^4}$ (*c*) $\frac{1}{\left(\frac{c}{2}+bx\right)^3}$
4. (*a*) $\frac{1}{3x+1}$ (*b*) $\frac{1}{a-bx}$

नोट

5. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{1-(3x-2)^2}}$

6. (a) $\dfrac{1}{5+(2-3x)^2}$ (b) $\dfrac{1}{1+9x^2}$

7. (a) $\sin 3x$ (b) $\cos(4x+5)$

8. $\sqrt{1+\sin\frac{1}{2}x}$ 9. (a) e^{3x+4} (b) $e^{x/2}$

10. $\cos\left(\frac{2}{5}x-2\right)+a^{3x+2}$.

उत्तर

1. (a) $\dfrac{1}{4}(x+2)^4+c$ (b) $\dfrac{1}{28}(7x-2)^4+c$ (c) $\dfrac{1}{5a}(ax+b)^5+c$

(d) $\dfrac{1}{24}(3+4x)^6+c$

2. (a) $-\dfrac{2}{15}(4-5x)^{3/2}+c$ (b) $\dfrac{1}{6}(4x+3)^{3/2}+c$ (c) $\dfrac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}+c$

(d) $\dfrac{1}{3}\left(2x+\dfrac{5}{3}\right)^{3/2}+c$

3. (a) $-\dfrac{1}{5(5x+4)}+c$ (b) $-\dfrac{1}{3b(a+bx)^3}+c$ (c) $-\dfrac{1}{2b(c/2+bx)^2}+c$

4. (a) $\dfrac{1}{3}\log 3x+1+c$ (b) $-\dfrac{1}{b}\log|9-bx|+c$

5. (a) $\sin^{-1}\dfrac{x}{5}+c$ (b) $\dfrac{1}{3}\sin^{-1}(3x-2)+c$

6. $-\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\dfrac{(2-3x)}{\sqrt{5}}+c$ (b) $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}3x+c$

7. $-\dfrac{1}{3}\cos 3x+c$ (b) $\dfrac{1}{4}\sin(4x+5)+c$

8. $(\sin\frac{1}{4}x-\cos\frac{1}{4}x)+c$ 9. (a) $\dfrac{1}{3}e^{3x+4}+c$ (b) $2e^{x/2}+c$

10. $\dfrac{5}{2}\sin\left(\dfrac{2}{5}x-2\right)+\dfrac{1}{3}\dfrac{a^{3x+2}}{\log_e a}+c$

नोट

13.3 x^n के फलन का समाकलन (Integration of x^n Function)

यदि x^n के फलन में x^{n-1} का गुणनफल दिया रहता है तो उस फलन का समाकलन $x^n = t$ मानकर किया जा सकता है।

हम जानते हैं कि

$$\int f\{\phi(x)\}\,\phi'(x)\,dx = \int f(t)dt, \text{ जहाँ } \phi(x) = t$$

अब यदि इस सूत्र में

$$\phi(x) = x^n$$

$\therefore$ $\quad \phi'(x) = nx^{n-1}$ रखें तो n से भाग देने पर

$$\int f(x^n)\,x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int f(t)\,dt$$

क्या आप जानते हैं यदि समाकल्य का रूप $\int f(x^n)\,x^{n-1}\,dx$ है, तो $x^n = t$ मान रखने से समाकलन सरल हो जाता है।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1: फलन $\cos^2 x \sin x$ का x के सापेक्ष समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : $\int \cos^2 x \sin x\, dx$ माना $\cos x = t$

$$\sin x\, dx = -\,dt = \int -t^2\, dt$$

$$= -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c. \qquad \textbf{उत्तर}$$

उदाहरण 2. $\int \dfrac{x^8\, dx}{(1-x^3)^{1/3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\quad 1 - x^3 = t$

$\therefore \quad -3x^2\, dx = dt$

$$x^2\, dx = -\frac{dt}{3}$$

$$\int \frac{x^8\, dx}{(1-x^3)^{1/3}} = \int \frac{(x^3)^2\, x^2\, dx}{(1-x^3)^{1/3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{(1-t)^2\, dt}{t^{1/3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{(t^2 - 2t + 1)\, dt}{t^{1/3}}$$

नोट

$$= -\frac{1}{3}\int (t^{5/3} - 2t^{2/3} + t^{-1/3})\ dt$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{t^{8/3}}{\frac{8}{3}} - \frac{2t^{5/3}}{\frac{5}{3}} + \frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}}\right] + c$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{3}{8}(1-x^3)^{8/3} - \frac{6}{5}(1-x^3)^{5/3} + \frac{3}{2}(1-x^2)^{2/3}\right] + c$$

$$= -\frac{1}{8}\ (1-x^3)^{8/3} + \frac{2}{5}\ (1-x^3)^{5/3} - \frac{1}{2}\ (1-x^2)^{2/3} + c.$$

उत्तर

उदाहरण 3. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : माना $\sqrt{x} + 1 = t$

$\therefore$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = dt$

$\therefore$ $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\ dt$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\ (\sqrt{x}+1)}$$

$$= \int \frac{2\ dt}{t} = 2\log t + c$$

$$= 2\log |\ \sqrt{x} + 1\ | + c.$$

उत्तर

उदाहरण 4. $\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx$ **का मान ज्ञात कीजिए**

हल : $\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \int \cos 2x\ dx$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + c.$$

उत्तर

उदाहरण 5. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{9-\cos^2 x}}\ dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : माना $\cos x = t$

$\therefore$ $-\sin x\ dx = dt$

$\therefore$ $\sin x\ dx = -\ dt$

नोट

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$$= \int \frac{-dt}{\sqrt{3^2-t^2}}, \text{ सूत्र } \int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$= -\sin^{-1}\frac{t}{3} + c$$

$$= -\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{3}\right) + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 6. मान ज्ञात कीजिए–

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx.$$

हल : $\int \frac{\log x}{x}\, dx$

माना $\log x = t$

$\frac{1}{x}\, dx = dt$ (x के सापेक्ष अवकलन से)

$$= \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\log x)^2 + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 7. $\int \frac{x^7}{1+x^{16}}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लीजिए $x^8 = t$ तो $8x^7\, dx = dt$

$$\int \frac{x^7}{1+x^{16}}\, dx = \int \frac{x^7}{1+(x^8)^2}\, dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

सूत्र $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$ के प्रयोग से

$$= \frac{1}{8}\tan^{-1} t + c = \frac{1}{8}\tan^{-1} x^8 + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 8. $\int x \sin^3 x^2 \cos x^2\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लीजिए $\sin x^2 = t \Rightarrow (\cos x^2)\, 2x\, dx = dt$

या $x \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\, dt$

$$\int x \sin^3 x^2 \cos x^2\, dx = \int (\sin x^2)^3 . x \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\int t^3\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + c = \frac{1}{8}\ (\sin x^2)^4 + c = \frac{1}{8}\ \sin^4 x^2 + c.$$ उत्तर

उदाहरण 9. $\int \frac{\boldsymbol{ax^2}}{\boldsymbol{1-2x^3}}\ \boldsymbol{dx}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int \frac{ax^2}{1-2x^3}\ dx$ माना $1 - 2x^3 = t$

$$-6x^2\ dx = dt$$

$$x^2\ dx = -\frac{1}{6}\ dt = a \int \frac{-\frac{1}{6}dt}{t}$$

$$= -\frac{a}{6}\ \log t + c = -\frac{a}{6}\ \log (1 - 2x^3) + c.$$ उत्तर

उदाहरण 10. $\int \frac{\boldsymbol{(1 + \log x)^2}}{\boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{dx}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लीजिए $1 + \log x = t$ तो $\frac{1}{x}\ dx = dt$

$$\therefore \qquad \int \frac{(1+\log x)^2}{x}\ dx = \int t^2\ dt = \frac{t^{2+1}}{2+1} + c \ \Rightarrow\ \frac{t^3}{3} + c$$

$$= \frac{(1+\log x)^3}{3} + c.$$ उत्तर

टास्क $\int \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x\,(1 + \log x)^n}}\ \boldsymbol{dx}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

[**उत्तर :** $\frac{1}{1-n}\ (1 + \log x)^{-(n-1)} + c.$]

प्रश्नावली 13.2

निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए—

1. $\int x^3 \cos x^4\ dx.$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\ dx.$

3. $\int \frac{3x^2}{9^2 + x^3}\ dx.$

4. $\int n x^{n-1} \cos x^n\ dx.$

5. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\ dx.$

6. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx.$

नोट

7. $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx.$

8. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

9. $\int \frac{x^{n-1}}{a+bx^n}\, dx.$

10. $\int \frac{x\, dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$

11. $\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^m}}\, dx.$

12. $\int \frac{2x^3}{4+x^8}\, dx.$

13. $\int \frac{x^3\, dx}{(4-x^4)^2}.$

14. $\int x^{-1/2} \operatorname{cosec}^2 \sqrt{x}\, dx.$

15. $\int \operatorname{cosec}^2 x \sqrt{\cot x}\, dx.$

16. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} \cos e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = dx.$

17. $\int \frac{x^2}{16+25x^6}\, dx.$

18. $\int e^x (1+x) \operatorname{cosec}^2 (xe^x)\, dx.$

19. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx.$

20. $\int x \cos^3 x^2 \sin x^2\, dx.$

उत्तर

1. $\frac{1}{4} \sin x^4 + c$

2. $\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + c$

3. $\log |9^2 + x^3| + c$

4. $\sin x^n + c$

5. $\frac{1}{3} \tan^{-1} x^2 + c$

6. $\frac{1}{2} \sin^{-1} x^2 + c$

7. $\frac{1}{2} \tan^{-1} x^2 + c$

8. $\sqrt{1+x^2} + c$

9. $\frac{1}{nb} \log |a + bx^n| + c$

10. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c$

11. $-\frac{2}{m}\sqrt{1-x^m} + c$

12. $\frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{1}{2} x^4 + c$

13. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4-x^4} + c$

14. $-2 \cot \sqrt{x} + c$

15. $-\frac{2}{3} (\cot x)^{3/2} + c$

16. $2 \sin e^{\sqrt{x}} + c$

17. $\frac{1}{60} \tan^{-1} \frac{5x^3}{4} + c$

18. $-\cot (xe^x) + c$

19. $\tan^{-1} x + \frac{1}{3} \tan^{-1} x^3 + c$

20. $-\frac{1}{8} \cos^4 x^2 + c.$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

नोट

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. प्रतिस्थापन संक्रिया में दिए गए समाकल्य को मानक सूत्रों में परिवर्तित करके .... किया जाता है।
2. $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(.........) + c$
3. $\int \sec^2 ax + dx = \frac{.........}{a} + c$
4. यदि x^n के फलन में .... का गुणनफल दिया रहता है तो उस फलन का समाकलन $x^n = t$ मानकर किया जा सकता है।

13.4 समाकल्य (Integrand)

यदि समाकल्य (Integrand) $\phi\,[f(x)]\,f'(x)$ के रूप का हो अर्थात् यह किसी राशि $f(x)$ के फलन तथा इसी राशि $f(x)$ के अवकल गुणांक $f'(x)$ का गुणनफल हो या इस रूप में लिखा जा सकता हो तो हम इस राशि $f(x)$ को t के बराबर मानकर समाकलन करते हैं।

नोट्स   यदि $f(x) = t$ तो $f'(x)\,dx = dt$

$\therefore$ $\int \phi\,[f(x)]\,f'(x)\,dx = \int \phi(t)\,dt = \psi(t)$ (मान लो)

$= \psi\,[\phi(x)]$, [t का मान रखने पर]

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $\int \sin^4 x \cos x\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो $\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt.$

अत:
$$\int \sin^4 x.\cos x\, dx = \int t^4\, dt$$
$$= \frac{t^5}{5} + c = \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$$
उत्तर

उदाहरण 2. $\int \cot^3 \theta.\operatorname{cosec}^2 \theta\, d\theta$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो $\int \cot^3 \theta\,.\operatorname{cosec}^2 \theta\, d\theta$ मान लो $\cot \theta = x$ तो $-\operatorname{cosec}^2 \theta\, d\theta = dx$

$\Rightarrow$ $\operatorname{cosec}^2 \theta\, d\theta = -dx$

$\therefore$
$$\int \cot^3 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta\, d\theta = -\int x^3\, dx = -\frac{x^4}{4} + c$$
$$= -\frac{\cot^4 \theta}{4} + c.$$
उत्तर

नोट

उदाहरण 3. $\int \frac{4\sin^{-1}x}{(1-x^2)}\,dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो $\sin^{-1}x = t$, तो $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{4\sin^{-1}x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int 4t\,dt = 4\times\frac{1}{2}t^2 + c = 2\ (\sin^{-1}x)^2 + c.$$ उत्तर

उदाहरण 4. $\int \frac{\cos^2(\log x)}{x}\,dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो $\log x = t \Rightarrow \frac{1}{x}\,dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{\cos^2(\log x)}{x}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log x + \frac{\sin 2(\log x)}{2}\right] + c.$$ उत्तर

प्रश्नावली 13.3

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

1. (*a*) $\int \sin x\cos x\,dx$ (*b*) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

(*c*) $\int \cos^2 x\sin x\,dx$ (*d*) $\int \cot^2 x\,\text{cosec}^2 x\,dx$

(*e*) $\int \sec^p x\tan x\,dx$

2. (*a*) $\int \frac{(\log_e x)^2}{x}\,dx$ (*b*) $\int \frac{\cos(\log_e x)}{x}\,dx$

(*c*) $\int \frac{1+\log_e x}{x}\,dx$ (*d*) $\int \frac{1}{x\cos^2(\log_e x)}\,dx$

3. (*a*) $\int e^x\cos e^x\,dx$ (*b*) $\int e^x(a+be^x)^n\,dx$

(*c*) $\int \frac{e^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (*d*) $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

4. (*a*) $\int \frac{\tan^{-1}x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$ (*b*) $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

(*c*) $\int \frac{(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

नोट

5. $\int x\sqrt{x^2-1}\;dx$

6. $\int \frac{x\tan^{-1}x^2}{1+x^4}dx$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,[\sqrt{x}+1]}\;dx.$

उत्तर

1. (a) $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$ (b) $\frac{1}{3}\sin^3 x + c$

(c) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + c$ (d) $-\frac{1}{3}\cot^3 x + c$

(e) $\frac{1}{p}\sec^p x + c$

2. (a) $\frac{1}{3}(\log_e x)^3 + c$ (b) $\sin(\log_e x) + c$

(c) $\frac{1}{2}(1+\log_e x)^2 + c$ (d) $\tan(\log_e x) + c$

3. (a) $\sin e^x + c$ (b) $\frac{1}{b(n+1)}(a+be^x)^{n+1} + c$

(c) $\frac{1}{m}e^{m\sin^{-1}x} + c$ (d) $e^{\tan x} + c$

4. (a) $\frac{1+x\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}} + c$ (b) $\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2 + c$

(c) $\frac{1}{3}(\sin^{-1}x)^3 + c$

5. $\frac{(x^2-1)^{3/2}}{3} + c$ 6. $\frac{1}{4}\left(\tan^{-1}x^2\right)^2 + c$

7. $2\log|1+\sqrt{x}| + c$

13.5 ऐसी भिन्न का समाकल जिसका अंश (numerator), हर (denominator) का अवकल-गुणांक हो (Integration of the Fraction whose Numerator is Integral Coefficient of the Denominator)

मान लो हमें $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ का मान ज्ञात करना है जहाँ $f'(x)$, $f(x)$ का अवकल-गुणांक है।

$$f(x) = t \text{ रखने पर, } f'(x)\,dx = dt$$

VED1
E\L-LOVELY-H\math13-1 IInd 6-8-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12

नोट

$\therefore$ $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log [f(x)]$$

अत: $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log f(x) + c$$

क्या आप जानते हैं यदि किसी भिन्न का अंश (N^r), हर (D^r) का अवकल गुणांक हो तो उस भिन्न का समाकल हर के **लघुगणक** (log) के बराबर होगा।

$\therefore$ $$\boldsymbol{\int \frac{d \text{ हर}}{\text{हर}}\, dx = \log (\text{हर})}$$

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लीजिए $1 + e^x = t$ तो $e^x\, dx = dt$

$\therefore$ $$\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \log |t| + c$$

$$= \log |1 + e^x| + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 2. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^5+4}\, dx$ **का मान ज्ञात करो।**

हल : मान लीजिए $x^5 + 4 = t$

$\therefore$ $5x^4\, dx = dt$

या $x^4\, dx = \frac{1}{5}\, dt$

$\therefore$ $$\int \frac{x^4}{x^5+4}\, dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{5} \log |t| + c$$

$$= \frac{1}{5} \log |x^5 + 4| + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 3. $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो $e^x + e^{-x} = t \;\Rightarrow\; (e^x - e^{-x})\, dx = dt$

अत: $$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c = \log |e^x + e^{-x}| + c.$$ **उत्तर**

नोट

उदाहरण 4. $\int \frac{dx}{e^x - 1}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int \frac{1}{e^x - 1}\, dx = \int \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\, dx$ [e^{-x} से अंश और हर में गुणा करने पर]

$$= \int \frac{1}{t}\, dt, \text{ माना } 1 - e^{-x} = t \Rightarrow e^{-x}\, dx = dt$$

$$= \log |t| + c = \log |1 - e^{-x}| + c.$$ **उत्तर**

> टास्क $\int \frac{a}{b + ce^x}\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**
>
> (**उत्तर:** $-\frac{a}{b} \log |be^{-x} + c| + c'$.)

13.6 प्रतिस्थापन द्वारा कुछ मानक फलनों के समाकल (Integration of Some Standard Function by Substitution)

(*i*) tan *x* तथा cot *x* के समाकल

(1) $$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

मान लो $\cos x = t$, अवकलन करने पर $-\sin x\, dx = dt$

$\therefore$ $$\int \tan x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log |t| + c$$

$$= -\log |\cos x| + c = \log |\sec x| + c$$

$\therefore$ $$\boxed{\int \tan x\, dx = -\log |\cos x| + c \text{ अथवा } \log |\sec x| + c}$$

(2) $$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

मान लो $\sin x = t$, अवकलन करने पर $\cos x\, dx = dt$

$\therefore$ $$\int \cot x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c = \log |\sin x| + c$$

$\therefore$ $$\boxed{\int \cot x\, dx = \log |\sin x| + c.}$$

नोट

प्रश्नावली 13.4

लघु उत्तरीय प्रश्न

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

1. (*a*) $\int \frac{ax^{n-1}}{x^n + b} dx$ (*b*) $\int \frac{3x^2}{(x^3+4)^5} dx$

(*c*) $\int \frac{x^2}{1-2x^3} dx$ (*d*) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

उत्तर

1. (*a*) $\frac{a}{n} \log|x^n + b| + c$ (*b*) $-\frac{1}{4}(x^3+4)^{-4} + c$

(*c*) $-\frac{1}{6} \log_e |1-2x^3| + c$ (*d*) $2e^{\sqrt{x}} + c$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)–

5. $\int \sin x \cos x \, dx$ का मान है–

(*a*) $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$ (*b*) $\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

(*c*) $\frac{1}{2}\text{cosec}^2 x + c$ (*d*) इनमें से कोई नहीं।

6. $\int \cot^3 \theta \,.\, \text{cosec}^2 \theta \, d\theta$ का मान होगा–

(*a*) $\frac{\cot^4 \theta}{4} + c$ (*b*) $-\frac{\cot^4 \theta}{4} + c$

(*c*) $\frac{\text{cosec}^4 \theta}{4} + c$ (*d*) कोई नहीं।

7. $\sin(\log_e x) + c$ किसका हल हो सकता है?

(*a*) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ (*b*) $\int \cot^2 x \, \text{cosec}^2 x \, dx$

(*c*) $\int \frac{\cos(\log_e x)}{x} dx$ (*d*) इनमें से कोई नहीं।

8. $\log|1+e^x| + c$ किसका हल है?

(*a*) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ (*b*) $\int \frac{1+e^x}{e^x} dx$

(*c*) $\int e^x \, dx$ (*d*) $\int \frac{-e^x}{1+e^x} dx$.

नोट

13.7 सारांश (Summary)

- किसी फलन का समाकलन ज्ञात करने की निम्नलिखित दो मुख्य विधियाँ हैं–

(*i*) प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

(*ii*) खण्डश: समाकलन (Integration by Parts)

- इस संक्रिया में दिये हुए समाकल्य (Integrand) को मानक सूत्रों (Standard formulae) में परिवर्तित करके समाकल किया जाता है।
- यदि समाकल्य (Integrand) $\phi\,[f(x)]\,f'(x)$ के रूप का हो अर्थात् यह किसी राशि $f(x)$ के फलन तथा इसी राशि $f(x)$ के अवकल गुणांक $f'(x)$ का गुणनफल हो या इस रूप में लिखा जा सकता हो तो हम इस राशि $f(x)$ को t के बराबर मानकर समाकलन करते हैं।

13.8 शब्दकोश (Keywords)

1. प्रतिस्थापन (Substitution): विस्थापन।
2. विधि (Methods): तरीका।

13.9 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. $\int \sec^2 3x\, dx$ का मान निकालें। (उत्तर: $\dfrac{\tan 3x}{3} + c$)
2. $\int \sin^3\theta\, d\theta$ का मान परिकलित कीजिए। (उत्तर: $-\dfrac{3}{4}\cos\theta + \dfrac{1}{12}\cos 3\theta + c$)
3. फलन $\cos^2 x \sin x$ का x के सापेक्ष समाकल ज्ञात करें। (उत्तर: $-\dfrac{\cos^3 x}{3} + c$)
4. $\int \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)dx$ का मान ज्ञात करें (उत्तर: $\dfrac{\sin 2x}{2} + c$)
5. $\int \dfrac{4\sin^{-1} x}{(1-x^2)}\,dx$ का मान निकलें (उत्तर: $2\,(\sin^{-1} x)^2 + c$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer : Self Assessment)

1. समाकल	2. $ax + b$	3. $\tan ax$	4. x^{n-1}
5. (*a*)	6. (*b*)	7. (*c*)	8. (*a*)

VED1
E\L-LOVELY-H\math13-1 IInd 6-8-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12

नोट

13.10 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
2. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
5. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरैन्स ब्लूम।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*

नोट

इकाई–14 : योग (जोड़) के रूप में समाकलन (Integration as a Summation)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- दो फलनों के गुणन का समाकल ज्ञात करने हेतु।
- आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन ज्ञात करने में।
- दो मानक समाकल की जानकारी प्राप्त करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

समाकलन नियम का प्रयोग करने से पहले हमें यह देख लेना चाहिए कि संक्रिया को एक अथवा दो बार करने पर समाकल्य या तो किसी प्रमाणिक समाकल्य का रूप ले ले या ऐसे रूप में आ जाए जिसका समाकल किया जा सके। यदि दो फलनों में से एक फलन ऐसा हो जिसका समाकल हमें ज्ञात न हो, तो उस फलन को सदा पहला फलन मानना चाहिए। यदि दाहिने पक्ष में समाकल ऋण चिह्न के साथ अपने पूर्ववत् रूप में आ जाता है तो समीकरण हल करने के नियमों का प्रयोग कर प्रश्न हल करना चाहिए।

VED1
E\L-LOVELY-H\math14-1 IInd 6-8-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 VIth 10-9-12

नोट

14.1 दो फलनों के गुणन का समाकल (खण्डशः समाकलन) ज्ञात करना [Finding Integral of Multiplication of two Functions (Divided Integral)]

यदि फलन $f(x)$ और फलन $\phi(x)$ का गुणन $f(x).\ \phi(x)$ हो तो उसका अवकलन

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\ .\ \phi(x)\} = f(x)\,\phi'(x) + f'(x)\,\phi(x)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$f(x).\ \phi(x) = \int f(x)\,\phi'(x)\,dx + \int f'(x)\,\phi(x)\,dx$$

या

$$\int f(x)\,\phi'(x)\,dx = f(x).\ \phi(x) - \int f'(x)\,\phi(x)\,dx$$

$$= f(x)\int \phi'(x)\,dx - \int\{f'(x)\int \phi'(x)\,dx\}\,dx$$

$\because$ $\phi(x)$ परिभाषा से $\phi'(x)$ का x के सापेक्ष समाकल है अतः $\phi(x)$ के स्थान पर $\int \phi'(x)\,dx$ रखा गया है। उक्त निष्कर्ष को सरल रूप में निरूपित करने के लिए $f(x)$ के स्थान पर $f_1(x)$ तथा $\phi'(x)$ के स्थान पर $f_2(x)$ रखने पर

$$\boxed{\int f_1(x).\ f_2(x)\,dx = f_1(x)\int f_2(x)\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}f_1(x).\int f_2(x)\,dx\right\}dx}$$

क्या आप जानते हैं दो फलनों के गुणन का समाकल
= प्रथम फलन × द्वितीय फलन का समाकल
–[प्रथम फलन का अवकल गुणांक × द्वितीय फलन का समाकल का समाकल]

उपर्युक्त नियम का प्रयोग करने से पहले यह देख लेना चाहिए कि उपर्युक्त संक्रिया को एक अथवा दो बार करने पर समाकल्य या तो किसी प्रामाणिक समाकल्य का रूप ले ले या ऐसे रूप में आ जाए जिसका समाकल ज्ञात किया जा सके। इस विधि की सफलता बहुत कुछ समाकल्य के प्रथम तथा द्वितीय फलन के अध्ययन पर निर्भर करती है। प्रथम फलन का चयन इस प्रकार किया जाता है कि दाहिने पक्ष के दूसरे पद का समाकलन सरलतापूर्वक किया जा सके। अतः प्रथम फलन के चयन में सावधानी बरतनी चाहिए।

इस विधि के प्रयोग में **कुछ महत्त्वपूर्ण बातें इस प्रकार हैं–**

(1) यदि दो फलनों में से एक फलन ऐसा हो जिसका समाकल (integral) हमें ज्ञात न हो, तो उस फलन को सदा पहला फलन मानना चाहिए।

$\int x.(\log x)\,dx$, में $\log x$ का समाकल हम नहीं जानते। अतः $\log x$ को पहला फलन मानना चाहिए।

(2) यदि दोनों फलन ऐसे हों कि दोनों का ही समाकल (integral) हमें ज्ञात हो तो उनमें से यदि x^n के रूप का कोई एक फलन हो, तो उसे सदा पहला फलन मानो।

उदाहरणार्थ, $\int x^2.\cos x\,dx$ में x^2 को पहला फलन मानना चाहिए।

नोट

(3) $\int \log x\, dx, \int \tan^{-1} x\, dx$ इत्यादि का समाकल ज्ञात करने के लिए '1' को सदा दूसरा फलन मानकर समाकलन करते हैं।

जैसे $\int \log x\, dx = \int (\log x).1\, dx$ इत्यादि।

(4) आवश्यकतानुसार खण्डशः समाकलन के सूत्र का प्रयोग एक से अधिक बार करना चाहिए।

(5) यदि दाहिने पक्ष में समाकल ऋण चिह्न के साथ अपने पूर्ववत् रूप में आ जाता है तो समीकरण हल करने के नियमों का प्रयोग कर प्रश्न हल करने चाहिए।

नोट्स हम, शब्द 'ILATE' में, पहले आने वाले फलन को प्रथम फलन व बाद में आने वाले फलन को द्वितीय फलन चुनकर खण्डशः समाकलन कर सकते हैं।

जहाँ I—(Inverse trigonometrical functions) प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों ($\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ इत्यादि) के लिए है।

L—(Logarithmic functions) लघुगणकीय फलनों ($\log x$, $\log (x^2 \pm a^2)$ इत्यादि) के लिए है।

A—(Algebraic functions) बीजीय फलनों ($x, x+1, 2x, \sqrt{x}$ इत्यादि) के लिए है।

T—(Trigonometrical functions) त्रिकोणमितीय फलनों ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ इत्यादि) के लिए है।

E—(Exponential functions) चरघातांकीय फलनों (a^x, e^x, 2^x, 10^x, 3^{-x} इत्यादि) के लिए है।

वैसे तो खण्डशः समाकलन करने के दौरान फलनों के चुनाव की कोई प्रमाणित विधि नहीं है, फिर भी विद्यार्थी उपरोक्त टिप्पणी में वर्णित 'ILATE' द्वारा फलनों का चुनाव कर खण्डशः समाकलन कर सकते हैं।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $\int \log_e x\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो यहाँ इकाई द्वितीय फलन है क्योंकि यदि $\log_e x$ को दूसरा फलन लिया जाए तो इसका समाकल नहीं ज्ञात हो सकता।

$$\int \log_e x\, dx = \int \log_e x\,.\,1\, dx$$

$$= \log_e x\,.\int 1\, dx - \int \left[\frac{1}{x}\int 1\, dx\right] \quad \text{(खण्डशः समाकलन करने पर)}$$

$$= \log_e x\; x - \int \frac{1}{x}\, x\, dx = x \log_e x - \int 1\, dx$$

$$= x \log_e x - x + c.$$

उत्तर

चाहें तो हम $x \log_e x - x$ को $x \log \dfrac{x}{e}$ भी लिख सकते हैं, क्योंकि $\log_e e = 1$.

नोट

उदाहरण 2. $\int x \sin x \, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : यहाँ समाकल्य के दो गुणनखंड हैं, x तथा $\sin x$ दोनों का समाकल्य ज्ञात है परन्तु इनमें से फलन x, x^n के प्रकार का है। इसलिए इसको पहला फलन मानना चाहिए।

अत:
$$\int x \sin x \, dx = x\left[\int \sin x \, dx\right] - \int \left[\left(\frac{d}{dx}x\right)\int \sin x \, dx\right]dx$$
$$= x(-\cos x) - \int 1.(-\cos x)\, dx$$
$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$
$$= -x \cos x + \sin x + c.$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\int x^2 \log x \, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :
$$\int x^2 \log x \, dx = \int (\log x)\; x^2 \, dx$$
$$= \log x \, . \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^3}{3} dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\right) + c$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + c.$$ उत्तर

उदाहरण 4. $\int x^n \log x$ **का समाकलन कीजिए।**

हल :
$$\int x^n \log x \, dx = \int \log x \; x^n \, dx$$

[$\log x$, जिसका समाकलन ज्ञात नहीं है अत: इसको प्रथम फलन मान लो]

$$= \log x \, . \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^{n+1}}{n+1} dx$$ (खण्डश: समाकलन करने पर)
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \frac{1}{n+1}\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\log x - \frac{1}{n+1}\right] + c.$$ उत्तर

उदाहरण 5. $\int x^2 \cos x \, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो x^2 प्रथम फलन है।

$$\therefore \quad \int x^2 . \cos x \, dx = x^2 . \sin x - \int 2x . \sin x \, dx.$$

दूसरे समाकल में x को प्रथम फलन मान लो फिर खण्डों द्वारा समाकलन करो।

$$\therefore \quad \int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2[x(-\cos x) - \int 1.(-\cos x)\, dx]$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int \cos x\, dx$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

$$= (x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + c. \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 6. $\int e^x \sin x\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो e^x प्रथम फलन है।

$$\therefore \quad \int e^x \sin x\, dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx.$$

पुनः खण्डों द्वारा समाकलन से,

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + [e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx]$$

अन्तिम पद को बायीं ओर ले जाओ। फिर 2 से भाग देने पर

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c. \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 7. $\int \frac{1}{x^2} \log x\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\int \frac{1}{x^2} \log x\, dx = \int \log x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \log x\left(\frac{-1}{x}\right) - \int \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{-\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{-\log x}{x} - \frac{1}{x} + c = \frac{-(1 + \log x)}{x} + c. \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 8. फलन $x^2 a^x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल : माना $I = \int x^2 a^x\, dx$

यहाँ पर समाकल्य दो फलनों x^2 तथा a^x गुणनफल है। जहाँ x^2 एक बीजीय फलन है तथा a^x चरघातांकीय फलन है तथा ILATE में प्रथम A अक्षर आता है। अतः x^2 प्रथम फलन तथा a^x को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करेंगे।

$$I = x\int a^x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x) . \int a^x\, dx\right\} dx$$

$$= x\left(\frac{a^x}{\log a}\right) - \int 1.\left(\frac{a^x}{\log a}\right) dx$$

नोट

$$= x\,\frac{a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int a^x\, dx$$

$$\therefore \qquad I = x.\frac{a^x}{\log a} - \frac{a^x}{(\log a)^2} + c.$$ उत्तर

उदाहरण 9. $\int \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, dx$

$$= \int \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}.1\, dx$$

$$= \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, x - \int \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})}.\left\{1 + \frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2 + a^2}}\right\} x\, dx$$

$$= \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, x - \int \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})}\left\{\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right\} x\, dx$$

$$= \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$= \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$= \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, x - \frac{1}{2}\{2\sqrt{x^2 + a^2}\} + c$$

$$= \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, x - \sqrt{x^2 + a^2} + c$$

$$= x\log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\} - \sqrt{x^2 + a^2} + c.$$ उत्तर

उदाहरण 10. $\int \tan^{-1} x\, dx$ **का मान निकालिए।**

हल : $\int \tan^{-1} x\, dx = \int (\tan^{-1} x).1\, dx$

$$= (\tan^{-1} x)\, x - \int \frac{1}{1 + x^2}.x\, dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t},$$

($1 + x^2 = t$ तथा $2x\, dx = dt$ रखने पर)

नोट

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log |t| + c$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log |1 + x^2| + c.$$ (t का मान रखने पर) **उत्तर**

टास्क $\int x^2 \cos x \, dx$ का मान ज्ञात करें। (**उत्तर:** $(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + c$)

उदाहरण 11. $\int \boldsymbol{x \tan^{-1} x \, dx}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\int x \tan^{-1} x \, dx = \int (\tan^{-1} x).x \, dx$$

$$= (\tan^{-1} x).\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2}(x - \tan^{-1} x) + c$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 1) \tan^{-1} x - \frac{x}{2} + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 12. $\int \boldsymbol{\frac{x}{1+\cos x} dx}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\int \frac{x}{1+\cos x} dx = \int \frac{x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} dx$$

$$= \int \frac{x - x \cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{x}{\sin^2 x} dx - \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int x \operatorname{cosec}^2 x \, dx - \int x \cot x \operatorname{cosec} x \, dx$$

$$= x(-\cot x) - \int 1.(-\cot x) \, dx$$

$$- [x(-\operatorname{cosec} x) - \int 1.(-\operatorname{cosec} x) \, dx] + c)$$

नोट

$$= -x \cot x + \log|\sin x| + x \operatorname{cosec} x - \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

उत्तर

उदाहरण 13. $\int \cos^{-1}\frac{1}{x}\,dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : माना

$$I = \int \cos^{-1}\frac{1}{x}\,dx, \qquad \left[\because \cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1} x\right]$$

$$= \int \sec^{-1} x\,dx$$

$$= \int (\sec^{-1} x).1\,dx$$

$\sec^{-1} x$ को प्रथम तथा 1 को द्वितीय फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$= \sec^{-1} x \int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x).\int dx\right\} dx$$

$$= x \sec^{-1} x - \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.x\,dx$$

$$= x \sec^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= x \sec^{-1} x - \log|x + \sqrt{x^2-1}| + c.$$

उत्तर

प्रश्नावली 14.1

लघु उत्तरीय प्रश्न

निम्नलिखित समाकल का मान ज्ञात कीजिए–

1. (*a*) $\int x \log x\,dx$ (*b*) $\int (\log x)^2\,dx$

(*c*) $\int x^3 \log x\,dx$ (*d*) $\int \log(1+x^2)\,dx$

(*e*) $\int \sec x \log(\sec x + \tan x)\,dx$

2. (*a*) $\int x e^{ax}\,dx$ (*b*) $\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

3. (*a*) $\int x \operatorname{cosec}^2 ax\,dx$ (*b*) $\int x \sec^2 x\,dx$

(*c*) $\int x \sec^2 2x\,dx$ (*d*) $\int x^2 \sin x\,dx$

(*e*) $\int \sec^3 x\,dx$ (*f*) $\int x^2 \sin 2x\,dx$

4. (*a*) $\int x \sin nx\,dx$ (*b*) $\int \sin^2 x\,dx$

नोट

(c) $\int x \tan^2 x \, dx$ (d) $\int \sin \sqrt{x} \, dx$

5. (a) $\int \sin^{-1} x \, dx$ (b) $\int \cot^{-1} x \, dx$

6. (a) $\int x^3 \tan^{-1} x \, dx$ (b) $\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$

7. $\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$ **8.** $\int \sqrt{x} (\log x)^2 \, dx$

9. (a) $\int x \log (1+x) \, dx$ (b) $\int \log_{10} x \, dx$

10. $\int \cot^{-1} (1 + x^2 - x) \, dx$ **11.** $\int x^3 e^{x^2} dx$

12. $\int \sin x \log (\sec x + \tan x) \, dx$.

उत्तर

1. (a) $\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{x^2}{4} + c$ (b) $x (\log (x))^2 - 2x \log x + 2x + c$

(c) $\frac{1}{4} x^4 \log x - \frac{x^2}{16} + c$ (d) $x \log (1 + x^2) - 2 (x - \tan^{-1} x) + c$

2. (a) $\frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + c$ (b) $e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + c$

3. (a) $\frac{1}{a^2} [\log \sin ax - ax \cot x] + c$ (b) $x \tan x + \log |\cos x| + c$

(c) $\frac{1}{2} x \tan 2x - \frac{1}{4} \log |\sec 2x| + c$ (d) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$

(e) $\frac{1}{2} \sec x \, . \tan x + \frac{1}{4} \log |\sec x + \tan x| + c$

(f) $-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$

4. (a) $\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx + c$ (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + c$

(c) $x \tan x + \log \cos x - \frac{x^2}{2} + c$ (d) $2 [- \sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}] + c$

5. (a) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + c$ (b) $x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \log |1 + x^2| + c$

नोट

6. (*a*) $\frac{1}{4}x^4 \tan^{-1} x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x\right) + c$ (*b*) $\frac{-\log x}{1+x} + \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + c$

7. $\frac{-x}{\cos x\,(x \sin x + \cos x)} + \tan x + c$ 8. $\frac{2}{3}x^{3/2}[(\log x)^2 - \frac{4}{3}\log x + \frac{8}{9}] + c$

9. (*a*) $\frac{x^2-1}{2}\log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + c$ (*b*) $x(\log_e x - 1)\log_{10} e + c$

10. $2[x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)] + c$ **11.** $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + c$

12. $x - \cos x \log(\sec x + \tan x) + c$

14.2 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

हम सिद्ध कर चुके हैं कि कई एक फलनों के योग या अन्तर का समाकल उन फलनों के समाकलों के योग या अन्तर के बराबर होता है। अतः समाकलन की एक महत्त्वपूर्ण विधि दिये हुए फलनों को योग या अन्तर के रूप में परिवर्तित कर (तोड़कर) उपर्युक्त सिद्धांत का प्रयोग करने की है। इसके लिए आंशिक भिन्नों की विधियों का आवश्यकतानुसार उपयोग किया जाता है।

आंशिक भिन्नों में भंग करने की विधियों को आप अपनी बीजगणित की पुस्तक में पढ़ चुके हैं।

बीजगणित से आप जानते हैं कि प्रत्येक बहुपद के एकघात और द्विघात गुणनखण्ड किये जा सकते हैं–हो सकता है कि कुछ गुणनखण्ड कई बार आयें। फलतः परिमेय भिन्न के आंशिक भिन्न इस प्रकार के होंगे–

(*i*) हर के अनुरावृत्त (non-repeated) एक घात गुणनखण्ड $x - a$ के संगत आंशिक भिन्न $\frac{A}{x-a}$ के रूप का होता है, जहाँ पर $A \neq a$.

(*ii*) प्रत्येक बारम्बार (repeated) गुणनखण्ड $(x - b)$ के संगत r आंशिक भिन्न निम्नलिखित रूप के होते हैं–

$$\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots\ldots + \frac{B_r}{(x-b)^r}$$

यहाँ पर $B \neq 0$.

(*iii*) $x^2 + px + q$ के खण्ड जो एक से अधिक बार न आयें संगत आंशिक भिन्न $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$ के रूप की होगी। यहाँ पर C और D दोनों शून्य नहीं हो सकते।

(*iv*) $x^2 + px + q$ के खण्ड जो r बार आये हों अथवा यदि खण्ड $(x^2 + px + q)^r$ है तो उनके संगत आंशिक भिन्न $\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots\ldots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+px+q)^r}$ के रूप की होगी।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

नोट

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. यदि दोनों फलन ऐसे हों कि दोनों का ही ········ ज्ञात हो, तो उनमें से यदि x^n के रूप का कोई एक फलन हो, तो उसे सदा पहला फलन मानते हैं।
2. आवश्यकतानुसार ········ समाकलन के सूत्र का प्रयोग एक से अधिक बार करना चाहिए।
3. खंडश: समाकलन करने के दौरान फलनों के चुनाव की कोई ········ विधि नहीं है।
4. एक फलनों के योग या अंतर का समाकल उन फलनों के समाकलों के योग या अंतर के ········ होता है।
5. प्रत्येक बहुपद एकघात और ········ गुणनखंड किये जा सकते हैं।

14.3 दो मानक समाकल (Two Standard Integral)

1. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$ का मान ज्ञात करना, जबकि $x > a$.

हल : $\because$
$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)}$$

मान लीजिए
$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-a} = \frac{A(x-a) + B(x+a)}{(x+a)(x-a)}$$

$\therefore \quad A(x-a) + B(x+a) = 1$

$\Rightarrow \quad (A + B)x + (B - A)a = 1$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर

$$A + B = 0 \text{ तथा } (B - A)a = 1$$

$$\therefore \quad B = \frac{1}{2a} \text{ और } A = -\frac{1}{2a}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{2a(x+a)} + \frac{1}{2a(x-a)} = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right\}$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \left\{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x-a} dx - \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x+a} dx$$

$$= \frac{1}{2a} \log|x-a| - \frac{1}{2a} \log|x+a| + c$$

$$= \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, \text{ जब } x > a}$$

नोट

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ **का मान ज्ञात करना, जबकि** $x < a$.

हल :
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{dx}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a}\int \left\{\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right\} dx$$
$$= \frac{1}{2a}[\log|a+x| - \log|a-x|] + c = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$\therefore$
$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c}$$

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2x^2 - b^2}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :
$$\int \frac{dx}{a^2x^2 - b^2}\, dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{x^2 - (b/a)^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2(b/a)}\log\left|\frac{x - (b/a)}{x + (b/a)}\right| + c = \frac{1}{2ab}\log\left|\frac{ax - b}{ax + b}\right| + c.$$

उत्तर

उदाहरण 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{24 - 6x^2}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :
$$\int \frac{1}{24 - 6x^2}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{4 - x^2}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{2^2 - x^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{2.2}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c = \frac{1}{24}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c.$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\displaystyle\int \frac{1}{5 - 2x - x^2}\, dx$ **का मान बताइए।**

हल :
$$\int \frac{dx}{5 - 2x - x^2} = \int \frac{dx}{5 + 1 - 1 - 2x - x^2} = \int \frac{dx}{6 - (1 + 2x + x^2)}$$
$$= \int \frac{dx}{6 - (x+1)^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{6})^2 - (x+1)^2}$$

$\because$ सूत्र से,
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$\therefore$
$$\int \frac{dx}{5 - 2x - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\log\left|\frac{\sqrt{6} + (x+1)}{\sqrt{6} - (x+1)}\right| + c.$$ उत्तर

उदाहरण 4. $\int \frac{3x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\frac{3x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)} - 6.\frac{1}{(x-2)} + \frac{9}{2}.\frac{1}{(x-3)}$ आंशिक भिन्नों में खण्डित करने पर $\int \frac{3x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

$$= \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1} - 6\int\frac{dx}{x-2} + \frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{3}{2}\log|(x-1)| - 6\log|(x-2)| + \frac{9}{2}\log|(x-3)| + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 5. $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\because \frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{(x+1)(2x-1)}$

अतः मान लीजिए

$$\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1)+B(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

$\therefore \quad A(2x-1) + B(x+1) = 1$

या $\quad (2A + B)x + (B - A) = 1$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर

$$2A + B = 0 \text{ तथा } B - A = 1 \therefore A = -\frac{1}{3} \text{ और } B = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

$$\therefore \quad \int\frac{1}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{2}{3}\int\frac{1}{2x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\log|(2x-1)| - \frac{1}{3}\log|(x+1)| + C$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| + C.$$ **उत्तर**

उदाहरण 6. $\int \frac{dx}{x-x^3}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x(1-x)(1+x)}$$

नोट

मान लो $$\frac{1}{x(1-x)(1+x)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{1+x}$$

$$\therefore \quad 1 = A\,(1-x^2)+Bx\,(1+x)+Cx(2-x) \quad \ldots(1)$$

समीकरण (1) में क्रमशः $x = 0$, 1 और -1 रखने पर

$$A = 1, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \int\frac{dx}{x-x^3} = \int\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}\right]dx$$

$$= \log|x|-\frac{1}{2}\log|1-x|-\frac{1}{2}\log|1+x|+c.$$ उत्तर

उदाहरण 7. $\int\frac{dx}{4-x^2}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int\frac{dx}{4-x^2} = \int\frac{dx}{(2)^2-x^2}$$

$$= \frac{1}{2.2}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c, \qquad \left[\because \int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c.$$ उत्तर

उदाहरण 8. मान ज्ञात कीजिए: $\int\frac{1}{(x+b)(x^2+a^2)}dx.$

हल : समाकल्य को आंशिक भिन्न में जोड़ने पर

$$\frac{1}{(x+b)(x^2+a^2)} = \frac{A}{x+b}+\frac{Bx+C}{x^2+a^2}$$

हल करने पर $$\frac{1}{(x+b)(x^2+a^2)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{x+b}+\frac{b-x}{(a^2+b^2)(x^2+a^2)}\right)$$

$$\therefore \quad I = \int\frac{1}{(x+b)(x^2+a^2)}dx$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{dx}{x+a}+\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{b-x}{x^2+a^2}dx$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\log|x+b|+\frac{b}{a^2+b^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}-\frac{1}{2(a^2+b^2)}\int\frac{2x}{x^2+a^2}dx$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[\log|x+b|+\frac{b}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\log|x^2+a^2|\right]+c$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[\log\left|\frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}\right|+\frac{b}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]+c.$$ उत्तर

नोट

उदाहरण 9: $\int \frac{dx}{1+x^3}$ **का मान ज्ञात कीजिए**

हल : $$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2};$$

हल करने पर

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{2-x}{3(1-x+x^2)}$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{3}\int \frac{(2-x)\,dx}{1-x+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int \frac{(4-2x)\,dx}{1-x+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{6}\int \frac{3-(2x-1)}{1-x+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x+x^2} - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{1-x+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}} - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{1-x+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(\sqrt{3}/2)^2} - \frac{1}{6}\log|1+x+x^2|+c$$

$$= \frac{1}{6}\log|1+x| + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} - \frac{1}{6}\log|1-x+x^2|+c$$

$$= \frac{1}{6}\log\left|\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$$ **उत्तर**

उदाहरण 10. $\int \frac{2x-3}{x^2+3x-18}dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\frac{2x-3}{x^2+3x-18} = \frac{2x-3}{(x-3)(x+6)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+6}$$

या $\quad 2x-3 = A(x+6) + B(x-3)$

जब $\quad x-3=0 \quad$ या $\quad x=3$

$\quad 3 = 9A \quad$ या $\quad A = \frac{1}{3}$

जब $\quad x+6=0 \quad$ या $\quad x=-6$

$\quad -15 = B(-9) \quad$ या $\quad B = \frac{5}{3}$

नोट

तब $$\int \frac{2x-3}{x^2+3x-18}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+6}$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-3| + \frac{5}{3}\log|x+6| + c.$$ उत्तर

उदाहरण 11. $\int \frac{dx}{e^x-1}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int \frac{dx}{e^x-1} = \int \frac{e^x\,dx}{e^x(e^x-1)} = \int \frac{dt}{t(t-1)}$$ (जबकि $e^x = t, e^x\,dx = dt$)

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt = \log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c$$

$$= \log\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| + c = \log|1-e^{-x}| + c.$$ उत्तर

उदाहरण 12. $\int \frac{x}{(x-2)(x-1)^2}dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : माना $$\frac{x}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x = A(x-1)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-2)$$

समान घातों के गुणांकों को बराबर रखने पर

$$A + B = 0, -2A - 3B + C = 1, A + 2B - 2C = 0$$

$\therefore$ $$A = 2, B = -2, C = -1.$$

$\therefore$ $$\int \frac{x\,dx}{(x-2)(x-1)^2} = 2\int \frac{dx}{x-2} - 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 2\log|x-2| - 2\log|x-1| - \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= 2\{\log|x-2| - \log|x-1|\} + \frac{1}{x-1} + c$$

$$= 2\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + \frac{1}{x-1} + c.$$ उत्तर

प्रश्नावली 14.2

लघु उत्तरीय प्रश्न

निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए–

1. (*a*) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ (*b*) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-4^2}$

नोट

(c) $\int \frac{dx}{x^2 - 5}$ (d) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 - 4}$

(e) $\int \frac{x^2}{x^6 - a^6} dx$

2. (a) $\int \frac{3x\, dx}{(x-2)(x+1)}$ (b) $\int \frac{(x+5)}{(x-1)(x-4)} dx$

(c) $\int \frac{(2x+3)\, dx}{(x+2)(x-2)}$ (d) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-4)}$

उत्तर

1. (a) $\frac{1}{4} \log \left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ (b) $x + 2 \log \left|\frac{x-4}{x+4}\right| + c$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + c$ (d) $\frac{1}{4} \log \left|\frac{x-1}{x+3}\right| + c$

(e) $\frac{1}{6a^3} \log \left|\frac{x^3 - a^3}{x^3 + a^3}\right| + c$

2. (a) $\log 1 |(x-2)^2 (x+1)| + c$ (b) $-2 \log |x-1| + 3 \log |x-4| + c$

(c) $\frac{1}{4} \log |x+2| + \frac{7}{4} \log |x-2| + c$

(d) $-\frac{1}{3} \log |x-1| + \frac{1}{4} \log |x-2| + \frac{1}{12} \log |x+2|$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)—

6. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ का मान क्या होगा, जबकि $x < a$:

(a) $\frac{1}{2a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$ (b) $\frac{1}{a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

(c) $\frac{1}{2a} \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$ (d) $\frac{1}{2a} \log \left|\frac{a-x}{a+x}\right| + c$

7. $\int \frac{dx}{4 - x^2}$ का मान क्या होगा?

(a) $\frac{1}{4} \log \left|\frac{2-x}{2+x}\right| + c$ (b) $\frac{1}{4} \log \left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c$

नोट

(*c*) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{4-x}{4+x}\right|+c$ (*d*) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+c$

8. $\int\frac{dx}{x^2-4}$ का मान क्या होगा?

(*a*) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+c$ (*b*) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

(*c*) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$ (*d*) इनमें से कोई नहीं।

14.4 सारांश (Summary)

- यदि फलन $f(x)$ और फलन $\phi(x)$ का गुणन $f(x).\,\phi(x)$ हो तो उसका अवकलन

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,.\,\phi(x)\} = f(x)\,\phi'(x)+f'(x)\,\phi(x)$$

- प्रथम फलन का चयन इस प्रकार किया जाता है कि दाहिने पक्ष के दूसरे पद का समाकलन सरलतापूर्वक किया जा सके। अत: प्रथम फलन के चयन में सावधानी बरतनी चाहिए।
- यदि दो फलनों में से एक फलन ऐसा हो जिसका समाकल (integral) हमें ज्ञात न हो, तो उस फलन को सदा पहला फलन मानना चाहिए।
- यदि दोनों फलन ऐसे हों कि दोनों का ही समाकल (integral) हमें ज्ञात हो तो उनमें से यदि x^n के रूप का कोई एक फलन हो, तो उसे सदा पहला फलन मानो।
- खण्डश: समाकलन करने के दौरान फलनों के चुनाव की कोई प्रमाणित विधि नहीं है। फिर भी विद्यार्थी उपरोक्त टिप्पणी में वर्णित 'ILATE' द्वारा फलनों का चुनाव कर खण्डश: समाकलन कर सकते हैं।
- समाकलन की एक महत्त्वपूर्ण विधि दिये हुए फलनों को योग या अन्तर के रूप में परिवर्तित कर (तोड़कर) उपर्युक्त सिद्धांत का प्रयोग करने की है। इसके लिए आंशिक भिन्नों की विधियों का आवश्यकतानुसार उपयोग किया जाता है।

14.5 शब्दकोश (Keywords)

- योग (Summation): जोड़।
- समाकल (Integral): संपूर्ण।

14.6 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. $\int x \sin x\, dx$ का मान निकालें। (**उत्तर:** $-x\cos x+\sin x+c$)
2. $\int x^2 \cos x\, dx$ का मान परिकलित करें। (**उत्तर:** $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+c$)

3. $\int x \tan^{-1} x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। (**उत्तर:** $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1} x - \frac{x}{2} + c$)

4. $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 1}$ का मान बताएँ। (**उत्तर:** $\frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| + c$)

5. $\int \frac{dx}{x - x^3}$ का मान निकालें। (**उत्तर:** $\log|x| - \frac{1}{2}\log|1-x| - \frac{1}{2}\log|1+x| + c$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. समाकल	2. खंडशः	3. प्रमाणित	4. बराबर
5. द्विघात	6. (*a*)	7. (*b*)	8. (*c*).

14.7 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
5. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*

नोट

इकाई–15 : निश्चित समाकलन (Definite Integration)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे:

- निश्चित समाकल के अर्थ, सीमाओं एवं ज्ञात करने की विधि को जानेंगे।
- निश्चित समाकलों में प्रतिस्थापन को समझ सकेंगे।
- निश्चित समाकल के सामान्य प्रगुण को जान सकेंगे।
- अनन्त सीमा वाले समाकल की जानकारी मिलेगी।

प्रस्तावना (Introductions)

मान लो x के सापेक्ष फलन $f(x)$ का समाकल (integral), $F(x)$ है।

यदि स्वतन्त्र चर x के दो निर्दिष्ट मानों (values), मान लो, a और b के लिए फलन $f(x)$ के समाकल $F(x)$ के मानों में अन्तर $F(b) - F(a)$ है, तो इस अन्तर को अन्तराल $[a, b]$ के लिए $f(x)$ का **निश्चित समाकल** (Definite Integral) कहते हैं तथा इसे अग्रलिखित द्वारा प्रकट करेंगे–

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx}$$

नोट

निश्चित समाकल का अर्थ–जब किसी फलन का समाकल, किन्हीं दो निश्चित सीमाओं के लिए ज्ञात किया जाता है तो उसे निश्चित समाकल (definite integral) **कहते हैं।**

यदि $\int f(x)\,dx = F(x)$

तो $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

किसी निश्चित समाकल (definite integral) का मान पूर्णतया अद्वितीय (unique) होता है, चूँकि,

यदि $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, तो

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + c]_a^b = \{F(b) + c\} - \{F(a) + c\}$$

$$= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a).$$

नोट्स निश्चित समाकल के मान पर **समाकलन अचर** का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

15.1 समाकलन की सीमाएँ (Limitations of Integration)

संख्या a को, जो समाकलन चिह्न के नीचे लिखी जाती है, समाकलन की निम्न सीमा (lower limit) तथा संख्या b को, जो समाकलन चिह्न के ऊपर लिखी जाती है, समाकलन की उच्च सीमा (upper limit) कहते हैं।

15.2 निश्चित समाकल ज्ञात करने की विधि (Method of Finding Definite Integration)

दिये हुए फलन का समाकल (Integral) ज्ञात करके उसे बड़े कोष्ठक (bracket) में रखो तथा कोष्ठक के दाहिनी ओर समाकलन की सीमाएँ लिखो। अब समाकल में चर राशि के स्थान पर उच्च सीमा रखकर प्राप्त फल में से, उसी समाकल में निम्न सीमा रखकर प्राप्त फल को घटा दो। हल करने पर अभीष्ट समाकल ज्ञात हो जायेगा।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $\int_a^b \frac{\log x}{x}\,dx$ **का मान निकालिए।**

हल : $\int_a^b \frac{\log x}{x}\,dx$ मान लो $\log x = t$

$$\frac{1}{x}\,dx = dt$$

$$= \int t\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\left[(\log x)^2\right]_a^b$$

नोट

$$= \frac{1}{2}[(\log b)^2 - (\log a)^2]$$

$$= \frac{1}{2}\ [\log b + \log a]\ [\log b - \log a]$$

$$= \frac{1}{2}\ \log ab \times \log\ \frac{b}{a}.$$ उत्तर

उदाहरण 2. $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec x\ \ dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int_0^{\pi/4} \tan x\ \sec x\ \ dx = \quad [\sec x]_0^{\pi/4} = \left[\sec\frac{\pi}{4} - \sec 0\right]$

$$= \sqrt{2}\ - 1.$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int_1^3 \frac{dx}{x} = [\log x]_1^3 = \log 3 - \log 1 = \log 3.$ उत्तर

उदाहरण 4. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ \ dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ \ dx = \int_0^{\pi/2} \left\{\frac{1 + \cos 2x}{2}\right\}\ dx$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} - 0 - \frac{\sin 2 \times 0}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$ उत्तर

उदाहरण 5. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\ dx\ = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x\ - 1)\ \ dx$

$$= [\tan x\ - x]_0^{\pi/4} = \left[\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\tan 0 - 0)\right]$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}.$$ उत्तर

उदाहरण 6. $\int_0^a y^2\ \ dx$ **का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ** $x^2 + y^2 = a^2$**.**

हल : $\because \qquad x^2 + y^2 = a^2 \quad \therefore \quad y^2 = a^2 - x^2$

$\therefore \qquad \int_0^a y^2\ \ dx = \int_0^a (a^2 - x^2)\ \ dx$

$$= \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} - 0 = \frac{2}{3}\ a^3.$$ उत्तर

उदाहरण 7. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{0}{a}\right)$$

$$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$ उत्तर

उदाहरण 8. $\int_0^{\pi/2} x \cos x\ dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : खण्डशः समाकलन द्वारा

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x\ dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\right] - [-\cos x]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right] = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$ उत्तर

उदाहरण 9. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \sin 2x}\ dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \sin 2x}\ dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x}\ dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\ dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\ dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0° - \cos 0°)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 - 1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = (\sqrt{2} + 1).$$ उत्तर

नोट

उदाहरण 10. $\int_1^2 x \log x \; dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : खण्डशः समाकलन द्वारा

$$\int_1^2 x \log x \; dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\; dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= 2\log 2 - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^2$$

$$= 2\log 2 - \frac{1}{4}\;[4-1]$$

$$= 2\log 2 - \frac{3}{4}.$$ **उत्तर**

उदाहरण 11. $\int_0^{\pi/4} \tan x \; dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int_0^{\pi/4} \tan x \; dx = [\log \sec x]_0^{\pi/4}$$

$$= \log \sec \frac{\pi}{4} \;\log \sec 0$$

$$= \log \sqrt{2} - \log 1, \qquad [\because \; \log 1 = 0]$$

$$= \log \sqrt{2}.$$ **उत्तर**

उदाहरण 12. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 - \sin 2x} \; dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin 2x}\; dx = \int_0^{\pi/6}\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x}\; dx$$

$$= \int_0^{\pi/6}\sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\; dx$$

$$= \int_0^{\pi/6}(\cos x - \sin x)\, dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/6}$$

$$= \left[\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right] - [\sin 0 + \cos 0]$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0+1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}-2}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$ **उत्तर**

नोट

प्रश्नावली 15 .1

निम्न समाकलों का मान ज्ञात कीजिए–

1. $\int_1^2 x^4 \, dx.$ **2.** $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$ **3.** $\int_0^3 e^{x/3} \, dx.$

4. $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx.$ **5.** $\int_1^2 \frac{dx}{x}.$ **6.** $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx.$

7. $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$ **8.** $\int_0^{\pi} \sin 3x \, dx.$ **9.** $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \, dx.$

10. $\int_4^9 \sqrt{x} \, dx.$ **11.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$ **12.** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

13. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2 x \, dx.$

उत्तर

1. $\frac{31}{5}$ **2.** 2 **3.** $3(e-1)$

4. 1 **5.** log 2 **6.** 1

7. 1 **8.** $\frac{2}{3}$ **9.** $\frac{1}{2}$

10. $\frac{38}{3}$ **11.** $\frac{\pi}{4}$ **12.** $\frac{\pi}{2}$

13. -2

15.3 निश्चित समाकलों में प्रतिस्थापन (Substitution in Definite Integration)

अनिश्चित समाकल की भाँति कभी-कभी निश्चित समाकल में भी चर को बदलना आवश्यक हो जाता है। क्रिया-विधि सरल बनी रहे अत: प्रतिस्थापन के साथ-साथ सीमाओं को भी बदल दिया जाता है।

उदाहरणार्थ, मान लो कि हम $\psi(x) = t$ रखें तो

$$\int f[\psi(x)\,\psi'(x)]\ dx = \int (t)\ dt.$$

क्या आप जानते हैं यदि चर x के लिए समाकलन सीमाएँ a से b तक हों, तो t के लिए सीमाएँ सम्बन्ध $t = \psi(x)$ द्वारा की जाती है।

$\therefore$ जब $x = a$, तब $t = \psi(a)$ तथा जब $x = b$, तब $t = \psi(b)$.

$$\therefore \quad \int_a^b f[\phi(x)]\,\phi'(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(t)\,dt.$$

नोट

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $\int_1^3 \frac{\cos(\log x)}{x} dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\int_1^3 \frac{\cos(\log x)}{x}$ मान लो $\log x = t$ तो $(1/x)\, dx = dt$

जब $x = 1, t = \log(1) = 0$

और जब $x = 3, t = \log 3$

$$\therefore \quad \int_1^3 \frac{\cos(\log x)}{x} dx = \int_0^{\log 3} \cos t \; dt = [\sin t]_0^{\log 3}$$

$$= \sin(\log 3) - \sin(0) = \sin(\log 3).$$ उत्तर

उदाहरण 2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो $x = \tan\theta$; $\therefore$ $dx = \sec^2\theta\, d\theta$

जब $x = 0$, तो $\tan\theta = 0$ अर्थात् $\theta = 0$

तथा जब $x = 1$, तो $\tan\theta = 1$ अर्थात् $\theta = \frac{1}{4}\pi$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} . \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan\theta}{\sec\theta} . \sec^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta \; d\theta$$

$$= [\sec\theta]_0^{\pi/4} = \sec\frac{\pi}{4} - \sec 0 = \sqrt{2} - 1.$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो $a^2 - x^2 = t$, तो $-2x\, dx = dt$ या $x\, dx = -\frac{1}{2} dt$

और जब $x = 0$, $t = a^2$ और जब $x = a$, $t = a^2 - a^2 = 0$

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int_{a^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int_{a^2}^0 t^{-1/2} \; dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[2t^{1/2}\right]_{a^2}^0$$

$$= -[0 - (a^2)^{1/2}] = (a^2)^{1/2} = a.$$ उत्तर

नोट

उदाहरण 4. $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3 + 4 \sin x}\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो $3 + 4 \sin x = t$, तो $4 \cos x\, dx = dt$

और जब $x = 0,\ t = 3 + 4 \sin (0) = 3 + 4\,(0) = 3,\ \because \sin (0) = 0$

तथा जब $x = \frac{1}{3}\pi,\ t = 3 + 4 \sin \left(\frac{1}{3}\pi\right) = 3 + 4\,(\sqrt{3}/2) = 3 + 2\sqrt{3}$

$$\therefore \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3 + 4 \sin x}\, dx = \frac{1}{4} \int_3^{(3+2\sqrt{3})} \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{4} [\log t]_3^{3+2\sqrt{3}} = \frac{1}{4} [\log (3 + 2\sqrt{3}) - \log 3]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\log\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)\right].$$ उत्तर

उदाहरण 5. $\int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int x \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int x\,(2 \sin^2 x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x\,(1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x\, dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x,$$ (खण्डश: समाकलन करने पर)

$$\therefore \int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx = \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4} [\pi^2] - \frac{1}{4} [\pi \sin 2\pi] - \frac{1}{8} [\cos 2\pi] - \left[0 - 0 - \frac{1}{8} \cos 0\right]$$

$$= \frac{1}{4} \pi^2 - \frac{1}{4} [0] - \frac{1}{8} [1] + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{4} \pi^2.$$ उत्तर

उदाहरण 6. $\int_1^2 \frac{\log_e x}{x^2}\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल: $$\int \frac{\log_e x}{x^2}\, dx = \int (\log_e x)\,(x^{-2})\, dx$$

$$= (\log_e x)\,(-x^{-1}) - \int (1/x)\,(-x^{-1})\, dx,$$

खण्डश: समाकलन करने पर

नोट

$$= -(\log_e x)(x^{-1}) + \int x^{-2}\, dx$$

$$= -\frac{\log_e x}{x} - \frac{1}{x} = -\left[\frac{\log_e x + 1}{x}\right]$$

$$\therefore \quad \int_1^2 \frac{\log_e x}{x^2}\, dx = -\left[\frac{\log_e x + 1}{x}\right]_1^2$$

$$= -\left[\left(\frac{\log_e 2 + 1}{2}\right) - \left(\frac{\log_e 1 + 1}{1}\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{1}{2} - 1\right] \qquad [\because \log_e 1 = 0]$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\log_e 2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\,[1 - \log_e 2].$$ **उत्तर**

उदाहरण 7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $\sin x = t$ रखकर आंशिक भिन्न द्वारा हल करने पर

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)} = \left[\log\left(\frac{1+\sin x}{2+\sin x}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \log\left(\frac{1+\sin\frac{1}{2}\pi}{2+\sin\frac{1}{2}\pi}\right) - \log\left(\frac{1+\sin 0}{2+\sin 0}\right)$$

$$= \log\left(\frac{2}{3}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}\right) = \log\frac{4}{3}.$$ **उत्तर**

उदाहरण 8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $$\int_0^{\pi/2} x\sin x\, dx = [x(-\cos x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1.(-\cos x)\, dx$$

$$= [-x\cos x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_0^{\pi/2}$$

$$= -[x\cos x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_0^{\pi/2}$$

$$= -\left[\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\right] + \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= -0 + 1$$

$$= 1.$$ **उत्तर**

नोट

प्रश्नावली 15.2

लघु उत्तरीय प्रश्न

निम्न समाकलों का मान ज्ञात कीजिए–

1. $\int_1^3 \frac{\log x}{x}\, dx$

2. $\int_1^2 \frac{\cos(\log x)}{x}\, dx$

3. $\int_0^1 x \log\left(1+\frac{x}{2}\right) dx$

4. $\int_1^e \frac{e^x}{x}(1 + x\log x)\, dx$

5. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

6. $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2}\, dx$

7. $\int_0^1 \frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

8. $\int_0^\infty \frac{\sin\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$

9. $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\,;\ \beta > \alpha$

10. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

11. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

12. $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\, dx$

13. $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{1+x^6}$

14. $\int_0^1 x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\, dx$

15. $\int_0^1 \frac{dx}{3+2x+x^2}$

16. $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4}\, dx$

17. $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\, dx.$

उत्तर

1. $\frac{(\log 3)^2}{2}$ **2.** $\sin(\log 2)$ **3.** $\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}$

4. e^e **5.** $\frac{1}{8}\pi^2$ **6.** $\frac{\pi^3}{192}$

7. 1 **8.** 1 **9.** π

10. 1 **11.** $\frac{\pi a^2}{4}$ **12.** $\frac{\pi-2}{4}$

13. $\frac{\pi}{12}$ **14.** $\frac{a^2(\pi-2)}{4}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

16. $\frac{\pi}{4}$ **17.** $\pi+2$

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. जब किसी फलन का समाकल किन्हीं दो निश्चित सीमाओं के लिए ज्ञात किया जाता है तो उसे .... कहते हैं।
2. किसी निश्चित समाकल का मान पूर्णतया .... होता है।
3. अनिश्चित समाकल की भाँति कभी-कभी निश्चित समाकल में भी चर को बदलना .... हो जाता है।
4. निश्चित समाकल के मान पर समाकलन .... का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।
5. संख्या a जो समाकलन चिह्न के नीचे लिखी जाती है। वह समाकलन की .... कहलाती है।

15.4 निश्चित समाकल के सामान्य प्रगुण (General Properties of Definite Integrals)

प्रगुण 1. $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$

प्रमाण (Proof): मान लीजिए $\int f(x)\ dx = F(x)$

$$\therefore \qquad \text{बायाँ पक्ष} = \int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = -\int_b^a f(x)\ dx = -\left[F(x)\right]_b^a$$

$$= -[F(a) - F(b)] = F(b) - F(a)$$

$$\therefore \qquad \int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$$

प्रगुण 2. $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt.$

प्रमाण (Proof): बायाँ पक्ष $= \int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \int_a^b f(t)\ dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\therefore \qquad \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt.$$

प्रगुण 3. $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$, **जबकि** $a < c < b$.

प्रमाण (Proof): मान लो $\int f(x)\ dx = F(x)$

तब, बायाँ पक्ष $= \int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

तथा दायाँ पक्ष $= \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

$$= \left[F(x)\right]_a^c + \left[F(x)\right]_c^b$$

$$[F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a)$$

इसे व्यापक रूप देने पर

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots.. + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

जबकि $a < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots..\ c_n < b.$

प्रगुण 4. $\boldsymbol{\int_0^a f(x)\ dx = \int_0^a f(a-x)\ dx.}$

प्रमाण (Proof): मान लीजिए $a - x = t$ $\quad\therefore\quad$ $-dx = dt$ या $dx = -dt$

और जब $x = 0$, तब $t = a$ और जब $x = a$, तब $t = 0$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $= \int_0^a f(a-x)\ dx = \int_a^0 f(t)\ (-dt) = -\int_a^0 f(t)\ dt$

$$= \int_0^a f(t)\ dt \qquad \text{(प्रगुण 1 से)}$$

$$= \int_0^a f(x)\ dx \qquad \text{(प्रगुण 2 से)}$$

= बायाँ पक्ष।

प्रगुण 5. $\boldsymbol{\int_{-a}^a f(x)\ dx = 0}$**, यदि** $\boldsymbol{f(x)}$**,** $\boldsymbol{x}$ **का विषम फलन (odd function) है।**

अर्थात् $f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$$

यदि $\boldsymbol{f(x), x}$ **का सम फलन (even function) है अर्थात्** $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$**.**

प्रमाण (Proof): $\int_{-a}^a f(x)\ dx = \int_{-a}^0 f(x)\ dx + \int_0^a f(x)\ dx$ $\qquad \ldots(i)$

$\because -a < 0 < a$

नोट

अब $$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = \int_{a}^{0} f(-t)\ (-dt), \qquad [x = -t \Rightarrow dx = -dt \text{ रखने पर}]$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\ dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\ dt \qquad \text{(प्रगुण 1)}$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\ dx \qquad \text{(प्रगुण 2)}$$

स्थिति I: यदि $f(x)$, x का विषम फलन (odd function) है।

तब $$f(-x) = -f(x) \qquad \text{(परिभाषा से)}$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = -\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

अतः समीकरण (i) से,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = -\int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 0.$$

स्थिति II: यदि $f(x)$, x का सम फलन (even function) है।

तब $$f(-x) = f(x) \qquad \text{(परिभाषा से)}$$

$$\therefore \quad \int_{-a}^{0} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

अतः समीकरण (i) से,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1: सिद्ध कीजिए कि

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\ dx = \int_{0}^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx.$$

हल: बायाँ पक्ष $$= \int_{0}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi - \sin 0}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \qquad \ldots(1)$$

दायाँ पक्ष $$= \int_{0}^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

नोट

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{\sin \pi - \sin 0}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \qquad \ldots(2)$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष।

उदाहरण 2: सिद्ध कीजिए कि

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \boldsymbol{x \sin x}\; dx = 2\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{x \sin x}\; dx$$

तथा $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \boldsymbol{x \cos x}\; dx = \mathbf{0.}$$

हल: यहाँ पर फलन $f(x) = x \sin x$

$\therefore$ $f(-x) = (-x) \sin (-x) = x \sin x = f(x)$

अत: फलन सम है

$$\therefore \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x\; dx = 2\int_0^{\pi/2} x \sin x\; dx$$

यदि $f(x) = x \cos x$

$\therefore$ $f(-x) = (-x) \cos (-x) = -x \cos x = -f(x)$

अत: फलन विषम है।

$$\therefore \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x\; dx = 0.$$

उदाहरण 3: सिद्ध कीजिए–

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{\sin 2}\boldsymbol{x}\; \mathbf{log\ tan}\ \boldsymbol{x\, dx} = \mathbf{0.}$$

हल : माना $$I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\; \log \tan x\, dx \qquad \ldots(i)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \log \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx,$$ प्रगुण (4) से

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\; (\pi - 2x) \log \cot x\, dx$$

नोट

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \cot x \, dx \qquad \ldots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\sin 2x \log \tan x + \sin 2x \log \cot x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, (\log \tan x + \log \cot x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x . \log (\tan x . \cot x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x . \log 1 \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x . 0 \, dx = 0$$

$\therefore \qquad I = 0.$

उदाहरण 4: सिद्ध कीजिए–

$$\int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x} \, dx = \frac{\pi}{8}.$$

हल : माना $I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x} \qquad \ldots(1)$

$x = \frac{\pi}{2} - t$ रखने पर क्योंकि $a + b = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_{3\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cot^2 t}{\cot^2 t + \tan^2 t} (-dt)$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\cot^2 t}{\cot^2 t + \tan^2 t} \, dt$$

या $$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\cot^2 t}{\cot^2 x + \tan^2 x} \, dx \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} dx = [x]_{\pi/8}^{3\pi/8}$$

$$2I = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

या $$I = \frac{\pi}{8}.$$ **उत्तर**

प्रश्नावली 15.3

विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

1. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \log (\tan x)\, dx = 0.$

2. सिद्ध कीजिए कि $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} = \frac{3}{2}.$

3. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}.$

4. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{4}.$

15.5 अनन्त सीमा वाले समाकल (Integral of Infinite Limit)

यदि किसी निश्चित समाकल की उच्च सीमा ∞ हो तो

$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ का अर्थ है कि $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$

प्रतिबन्ध यह है कि सीमा कोई परिमित (finite) राशि हो।

यदि किसी निश्चित समाकल की निम्न सीमा $-\infty$ हो तो

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ का अर्थ है कि $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$

प्रतिबन्ध यह है कि सीमा कोई परिमित संख्या हो।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$ उत्तर

उदाहरण 2: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{2}\pi.$$ उत्तर

नोट

उदाहरण 3: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : पहले हम $I = \int_0^{b} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ का मान ज्ञात करेंगे।

मानलो $x = \tan\theta \quad \therefore \quad dx = \sec^2\theta\, d\theta$

अब θ की सीमाएँ $0, \tan^{-1} b$ हैं।

$$I = \int_0^{\tan^{-1} b} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta} = \int_0^{\tan^{-1} b} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\tan^{-1} b} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\tan^{-1} b} = \frac{\tan^{-1} b}{2} + \frac{2b}{4(1+b^2)}.$$

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट समाकल} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\tan^{-1} b}{2} + \frac{\frac{1}{2b}}{1+\frac{1}{b^2}}\right] = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.$$

उत्तर

प्रश्नावली 15.4

लघु उत्तरीय प्रश्न

निम्न समाकलों का मान ज्ञात कीजिए–

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$.

2. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

3. $\int_0^{\infty} e^{-x/2}\, dx$.

4. $\int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx$.

5. $\int_0^{\infty} \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}$.

6. $\int_1^{\infty} \frac{(x^2+3)\, dx}{x^6(x^2+1)}$.

उत्तर

1. $\frac{\pi}{2a}$

2. $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{a^2}\right)$

3. 2

4. 1

5. $\frac{\pi}{4}$

6. $\frac{1}{30}(58-15\pi)$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)–

6. $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ का अर्थ है–

(*a*) $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\, dx$ (*b*) $\lim_{b\to\infty}\int_b^a f(x)\, dx$

(c) $\lim_{b \to 0} \int_a^b f(x)\,dx$ (d) $\lim_{a \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$

7. यदि किसी निश्चित समाकल की निम्न सीमा $-\infty$ हो, तो $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ का अर्थ है–

(a) $\lim_{a \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$ (b) $\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

(c) $\lim_{a \to -\infty} \int_b^a f(x)\,dx$ (d) $\lim_{a \to 0} \int_a^b f(x)\,dx$

8. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ का मान होगा–

(a) 0 (b) ∞

(c) 1 (d) –1

15.6 सारांश (Summary)

- यदि स्वतन्त्र चर x के दो निर्दिष्ट मानों (values), मान लो, a और b के लिए फलन $f(x)$ के समाकल $F(x)$ के मानों में अन्तर $F(b) - F(a)$ है, तो इस अन्तर को अन्तराल $[a, b]$ के लिए $f(x)$ का **निश्चित समाकल** (Definite Integral) कहते हैं।
- किसी निश्चित समाकल (definite integral) का मान पूर्णतया अद्वितीय (unique) होता है।
- दिये हुए फलन का समाकल (Integral) ज्ञात करके उसे बड़े कोष्ठक (bracket) में रखो तथा कोष्ठक के दाहिनी ओर समाकलन की सीमाएँ लिखो। अब समाकल में चर राशि के स्थान पर उच्च सीमा रखकर प्राप्त फल में से, उसी समाकल में निम्न सीमा रखकर प्राप्त फल को घटा दो। हल करने पर अभीष्ट समाकल ज्ञात हो जायेगा।
- अनिश्चित समाकल की भाँति कभी-कभी निश्चित समाकल में भी चर को बदलना आवश्यक हो जाता है। क्रिया-विधि सरल बनी रहे अत: प्रतिस्थापन के साथ-साथ सीमाओं को भी बदल दिया जाता है।

15.7 शब्दकोश (Keywords)

- फलन (Function): प्रकार्य।
- निम्न सीमा (lower limit): निम्नतम सीमा।
- उच्च सीमा (Upper limit): अधिकतम सीमा।

15.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$ का मान निकालें। (**उत्तर:** $1 - \frac{\pi}{4}$)

2. $\int_0^a y^2\,dx$ का मान निकालें, जहाँ $x^2 + y^2 = a^2$ (**उत्तर:** $\frac{2}{3}a^2$)

नोट

3. $\int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx$ का मान परिकलित कीजिए। (**उत्तर:** $\frac{1}{4}\pi^2$)

4. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

5. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \tan x \, dx = 0$

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. निश्चित समाकलन	2. अद्वितीय	3. आवश्यक	4. अचर
5. निम्न सीमा	6. (*a*)	7. (*b*)	8. (*c*).

15.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
5. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
9. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*

VED1
E\L-LOVELY-H\math16-1 IInd 21-10-11 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

नोट

इकाई–16 : समाकलन के आर्थिक प्रयोग (Economic Applications of Integration)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- समतलीय वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल निकालने में।
- अर्थशास्त्र में समाकलन के उपयोग को जानने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

आजकल समाकलन का प्रयोग अर्थशास्त्र में तेजी से बढ़ा है। निश्चित समाकल एक योग की सीमा है। अर्थशास्त्र में प्रयोग को हम निम्न तथ्यों से स्पष्ट कर सकते हैं–

1. सीमांत लागत, औसत लागत तथा कुल लागत चूँकि सीमांत लागत $= \dfrac{d(c)}{dq}$ होते हैं अतः कुल लागत $\int \dfrac{d(c)}{dq}.dq$
2. उपभोक्ता बचत : उपभोक्ता बचत को भी समाकलन विधि से ज्ञात किया जा सकता है।

16.1 समतलीय वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल (Area Under Plane Curves)

मान लो कि $CPQD$ वक्र $y = f(x)$ को प्रदर्शित करता है, जहाँ $f(x)$, प्रान्त $[a, b]$ में x का कोई संतत फलन है तथा मान लो कि जैसे x का मान a से b तक बढ़ता है y भी बढ़ता ही जाता है। मान लो कि CA तथा DB क्रमशः $x = a$ तथा $x = b$ पर कोटियाँ हैं।

नोट

वक्र पर स्थित कोई बिन्दु $P(x, y)$ लो तथा मान लो कि PM उसकी कोटि है। वक्र पर P के समीप एक अन्य बिन्दु $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ लो तथा मान लो कि QN इसकी कोटि है।

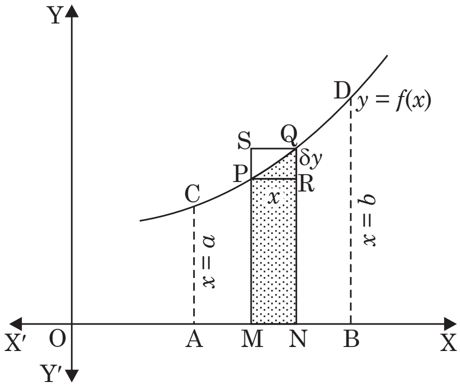
QN और MP पर क्रमशः PR, QS लम्ब खींचो तो

$$OM = x,\ ON = x + \delta x;$$

$$\therefore \quad MN = \delta x$$

तथा $\quad PM = y,$

$$QN = y + \delta y; \quad \therefore \quad QR = \delta y.$$



यदि $AMPC$ तथा $ANQC$ क्षेत्रफलों को क्रमानुसार $S + \delta S$ से प्रकट किया जाए तो

$\delta S =$ क्षेत्रफल $ANQC -$ क्षेत्रफल $AMPC =$ क्षेत्रफल $MNQP$

अब $MNQP$ क्षेत्रफल परिमाण में $MNRP$ तथा $MNQS$ आयतों के बीच में स्थित है, अर्थात्

$$y\delta x < \delta S < (y + \delta y)\,\delta x$$

या $$y < \frac{\delta S}{\delta x} < y + \delta y \text{ , } (\delta x \text{ से भाग देकर}) \qquad \ldots(1)$$

या $$\frac{dS}{dx} = y = f(x), \qquad [\text{जबकि } \delta x \to 0 \text{ तथा } dy \to 0]$$

अतः $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{dS}{dx}.\,dx = \int_a^b dS = [S]_a^b$$

$$= (S \text{ का मान जब } x = b) - (S \text{ का मान जब } x = a)$$

$$= \text{क्षेत्रफल } ABDC.$$

निश्चित समाकल एक योग की सीमा (Limit) है मान लीजिए कोई फलन $f(x)$ किसी अन्तराल $[a, b]$ में संतत (Continued) है जिसका आलेख एक वक्र है जिसमें C और D कोई दो बिन्दु हैं। x-अक्ष पर CA और DB लंब हैं। 'a' तथा 'b' क्रमशः बिन्दुओं C और D के भुज हैं। अन्तराल $[a, b]$ अर्थात् AB को, जिसका मान $(b - a)$ है, n बराबर अत्यन्त छोटे भागों में बाँटा गया है। मान लीजिए बिन्दु P व Q जो वक्र पर हैं, के भुज क्रमशः $(a + rh)$ तथा $(a + \overline{r+1}h)$ हैं। PM व QN उनकी कोटियाँ हैं। इस प्रकार सीमान्त स्थिति में जब $h \to 0$, $PRNM$ एक बहुत ही छोटा आयत है। इस आयत का क्षेत्रफल $f(a + rh) \times h$ होगा। इस प्रकार योग के शब्दों में हम निश्चित समाकल

$$\lim_{n \to \infty} h \cdot [f(a + h) + f(a + 2h) + \ldots.. + f(a + nh)]$$

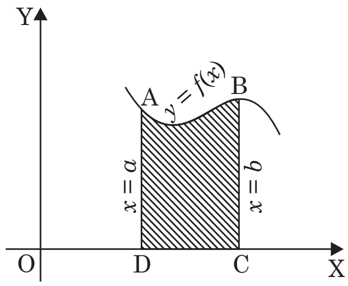
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} h\,.\,f(a + rh), \text{ जहाँ } b - a = nh$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \text{ से निरूपित करते हैं।}$$

नोट्स $\int_a^b f(x)\,dx$ वह सम्पूर्ण क्षेत्रफल है जो वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष और $x = a$ से $x = b$ सीमाओं के अन्दर बनता है।

वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = a$ और $x = b$ से घिरे क्षेत्र $ABCD$ का क्षेत्रफल निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है:

$$\boxed{A = \int_{x=a}^{x=b} y\,dx}$$



बायीं ओर के सिरे D पर x का मान $(x = a)$ समाकलन की निम्न सीमा तथा दायीं ओर के सिरे C पर x का मान $(x = b)$ समाकलन की **उच्च सीमा** मानी जाती है।

इसी प्रकार वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = a$ तथा $y = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है–

$$\boxed{A = \int_{y=a}^{y=b} x\,dy}$$

इस दशा में समाकलन की सीमाएँ **नीचे से ऊपर** को ली जाती हैं।

हल सहित उदाहरण

उदाहरण 1. $y = mx$, x-अक्ष एवं कोटि $x = 2$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिये हुए वक्र का समीकरण

$$y = mx \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) में $y = 0$ रखने पर $x = 0$ $\qquad (\because \;\; x\text{-अक्ष पर } y = 0)$

$$\therefore \qquad \text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^2 y dx = \int_0^2 mx\,dx = m\int_0^2 x\,dx$$

$$= m\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{m}{2}(4 - 0) = 2m \text{ वर्ग इकाई।}$$ **उत्तर**

उदाहरण 2. परवलय $y^2 = 4x$ तथा सरल रेखा $x = 4$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण

$$y^2 = 4x$$

रेखा $x = 4$ परवलय से A तथा B पर मिलती है।

अभीष्ट क्षेत्रफल $OBAO$ है।

नोट

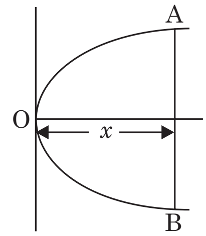
अत: $$\text{क्षेत्रफल} = 2\int_0^4 y\,dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{4x}\,dx = 4\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 4 \times \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 0\right]$$

$$= \frac{8}{3}(8-0) = \frac{64}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$



उत्तर

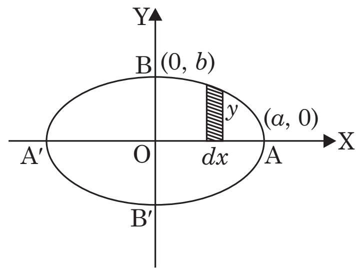
उदाहरण 3. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त $ABA'B'$ का क्षेत्रफल ज्ञात करना है। हम पहले क्षेत्र OAB का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे और चौगुना करने पर अभीष्ट क्षेत्रफल ज्ञात हो जायेगा।

$$\because \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$



बिन्दु B के लिए $x = 0$ और A के लिए $y = 0$ रखने पर, बिन्दु B व A के निर्देशांक क्रमश: (a, b) व $(a, 0)$ होंगे।

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = 4\int_0^a y\,dx$$

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= 4\frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = \pi ab \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

उदाहरण 4. परवलय $y^2 = 4ax$ और इसकी नाभिलम्ब जीवा से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण

$$y^2 = 4ax$$

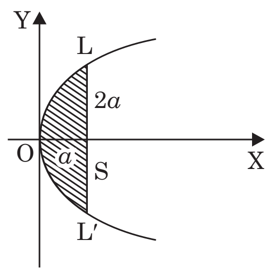
तथा नाभिलम्ब जीवा का समीकरण $x = a$.

नाभिलम्ब जीवा परवलय से L और L' बिन्दुओं पर मिलती है।

नोट

अभीष्ट क्षेत्रफल $OL'SLO$ है।

यदि A क्षेत्रफल हो, तो



$$A = 2\int_0^a y\,dx$$

$$= 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 2\int_0^a 2a^{1/2}x^{1/2}\,dx = 2\times 2a^{1/2}\int_0^a x^{1/2}\,dx$$

$$= 4a^{1/2}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^a = \frac{2.4}{3}a^{1/2}\left[x^{3/2}\right]_0^a$$

$$= \frac{8}{3}a^2 \text{ वर्ग इकाई।}$$ **उत्तर**

टास्क परवलय $y^2 = 4x$ तथा सरल रेखा $x = 4$ के बीच का क्षेत्रफल निकालें। (**उत्तर:** $\frac{8}{3}a^2$ वर्ग इकाई)

प्रश्नावली 16.1

लघु उत्तरीय प्रश्न

निम्नलिखित वक्रों, x-अक्ष और दी हुई कोटियों द्वारा घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए:

1. $y = e^x$, $x = 0$ से $x = 2$ तक।
2. $y = x\sin x$, $x = 0$ से 2π तक।

   [**संकेत:** अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = \left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{2\pi}$ खण्डश: समाकलन करने पर।]
3. $y = \left(1 + \frac{8}{x^2}\right), x = 2$ से $x = 10$ तक।
4. $y = 5 + \frac{1}{10}x^2, x = 2$ से $x = 10$ तक।
5. $xy = b^2$, $x = a$ से $x = b$ तक।
6. $y = xe^{x^2}$, $x = 0$ से $x = b$ तक।
7. सरल रेखा $y = mx$, x-अक्ष तथा कोटि $x = 3$ के अन्तर्गत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

नोट

8. सरल रेखा $x = \frac{1}{2}a$ द्वारा विभाजित वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के भागों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

[**संकेतः** अभीष्ट भागों के क्षेत्रफलों का अनुपात मान लीजिए $x = a \sin\theta$].

$$= \int_{a/2}^{a} y\, dx : \int_{-a}^{a/2} y\, dx$$

$$= \int_{a/2}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx : \int_{-a}^{a/2} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

उत्तर

1. $e^2 - 1$
2. 2π वर्ग इकाई
3. $\frac{56}{5}$ वर्ग इकाई
4. $73\frac{1}{15}$ वर्ग इकाई
5. $b^2\left[\log\frac{b}{a}\right]$
6. $\frac{1}{2}\left[e^{b^2} - 1\right]$
7. $\frac{9}{2}m$ वर्ग इकाई
8. $(4\pi - 3\sqrt{3}) : (8\pi + 3\sqrt{3})$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. आजकल समाकलन का प्रयोग अर्थशास्त्र में ········· से बढ़ा है।
2. निश्चित समाकलन एक ········· सीमा है।
3. उपभोक्ता बचत ········· विधि से ज्ञात किया जा सकता है।

16.2 अर्थशास्त्र में समाकलन का उपयोग (Use of Integration in Economics)

आजकल समाकलन का प्रयोग अर्थशास्त्र में तेजी से बढ़ा है। इसे हम निम्नलिखित तथ्यों से स्पष्ट कर सकते हैं–

1. सीमान्त लागत, औसत लागत तथा कुल लागत

$$\text{चूँकि सीमान्त लागत} = \frac{d(c)}{dq} \text{ होता है, अतः}$$

$$\text{कुल लागत} = \int \frac{d(c)}{dq} \cdot dq$$

यहाँ, $\frac{d(c)}{dq}$ = सीमान्त लागत, c = कुल लागत, dq = उत्पादन में परिवर्तन।

नोट

उदाहरण 1. किसी फर्म की सीमान्त लागत = $3 + 150q - 9q^2$ दी हुई है तो कुल लागत निकालो जबकि तीन इकाई उत्पादन करने पर कुल लागत 300 रु. होती है।

हल : हम जानते हैं कि कुल लागत,

$$TC = \int (3 + 150q - 9q^2)\, dq$$

$$= 3q + 150\frac{q^2}{2} - \frac{q^3}{3} + c$$

$$= 3q + 75q^2 - 3q^3 + c$$

तथा औसत लागत, $AC = \dfrac{TC}{Q} = 3 + 75q - 3q^2 + \dfrac{c}{Q}$

चूँकि $q = 3$ तथा $TC = 300$ दिया हुआ है, अतः

$$300 = (3 \times 3) + 75\,(3)^2 - 3 \times 3 \times 3 + c$$

$$= 9 + (75 \times 9) - 27 + c$$

$$= 9 + 675 - 27 + c$$

या $c = -675 + 300 = -357$

$$TC = 3q + 75q^2 - 3q^3 - 357$$

तथा $AC = 3 + 75q - 3q^2 - \dfrac{357}{q}$.

उदाहरण 2. यदि स्थिर लागत 100 रु. है और सीमान्त फलन $(6x + 3)$ के रूप में है, तो कुल लागत फलन ज्ञात कीजिये।

हल : हम जानते हैं कि कुल लागत = $\int$ सीमान्त लागत

अतः $TC = \int (6x + 3)\, dx$

$$= \frac{6x^2}{2} + 3x + c$$

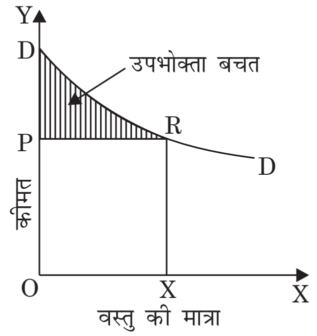
यहाँ स्थिर लागत = 100 रु. है तो ऐसी दशा में उत्पादन शून्य (अर्थात् $x = 0$) होने पर भी स्थिर लागत 100 रु. ही यथावत् बनी रहेगी तथा कुल लागत भी 100 रु. ही होगी। ऐसी दशा में

$$TC = (6 \times 0) + (3 \times 0) + c = 100$$

अतः कुल लागत फलन $3x^2 + 3x + 100$ होगा।

2. उपभोक्ता बचत

उपभोक्ता बचत को भी समाकलन विधि से ज्ञात किया जा सकता है। इसे हम निम्न द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं। इस रेखाचित्र में DD माँग है। उपभोक्ता किसी वस्तु की OP कीमत देता है तथा माना वह OX क्रय करता है। रेखाचित्र में क्षेत्र $OXRD$ के बराबर उपभोक्ता वस्तु की OX मात्रा की कुल कीमत देने को तैयार है किन्तु वह वास्तव में $OXRP$ कीमत देने को तैयार है। उपभोक्ता बचत दोनों का अन्तर है।



नोट

क्या आप जानते हैं उपभोक्ता बचत = क्षेत्रफल $OXRD$ – क्षेत्रफल $OXRP$

$$= \int_0^x \text{ (माँग वक्र) } dx - p \cdot x$$

उदाहरण 3. माना कोई माँग वक्र $p = 100 - 5x + 3x^2$ हो और $x = 5$ इकाई हो तो उपभोक्ता बचत निकालिये।

हल : यहाँ माँग वक्र, $p = 100 - 5x + 3x^2$ है तथा माँग की मात्रा $x = 5$ है तो यहाँ $p = 100 - (5 \times 3) + (3 \times 5 \times 5) = 100 - 90 = 10$

$$\text{उपभोक्ता बचत} = \int_0^x \text{ (माँग वक्र) } dx - p.x$$

$$= \int_0^3 (100 - 5x + 3x^2)\, dx - (p \times 3)$$

$$= \left[100x - \frac{5x^2}{2} + \frac{3x^3}{3}\right]_0^3 - 30$$

$$= 100 \times 3 - \frac{5}{2}\ (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) - 30$$

$$= 300 - 22.5 + 27 - 30 = 274.5.$$

उदाहरण 4. माँग फलन: $p = 50 - 5x - x^2$ है, यदि $p = 0$ हो तो उपभोक्ता बचत क्या होगी?

हल : माँग फलन; $p = 50 - 5x - x^2$

यदि $p = 0$ हो तो

$$0 = 50 - 5x - x^2$$

अथवा $x^2 + 5x - 50 = 0$

$$x^2 + 10x - 5x - 50 = 0$$

या $x(x - 10) - 5(x + 10) = 0$

या $(x - 5)\ (x + 10) = 0$

$x - 5 = 0$ या $x = 5$; इसी प्रकार $x + 10 = 0$ या $x = -10$

यदि हम $x = -10$ को छोड़ दें क्यों $x < 0$, अत:

$$\text{उपभोक्ता बचत} = \int_2^5 (50 - 5x + x^2)\, dx - p \times x$$

$$= \int_0^5 (50 - 5x + x^2)\, dx - 0 \times 5$$

$$= \left[50x - \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^5$$

$$= \left[50 \times 5 - 5 \times 5 \times 5\ \frac{5 \times 5 \times 5}{3}\right]$$

नोट

$$= 250 - 125 - \frac{125}{3} = 125 - \frac{125}{3}$$

$$= \frac{375 - 125}{3} = \frac{250}{3} = 83.33 .$$ उत्तर

प्रश्नावली 16.2

स्वयं हल कीजिए

1. ज्ञात कीजिए : $\int x^2 \cos x \, dx$.

2. समाकलन ज्ञात कीजिए : $\int (8 + 7x)^7 \, dx$.

3. ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 x \, dx$.

4. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin(x - \alpha)} dx$.

5. ज्ञात कीजिए :

   (i) $\int 4x^2 \sqrt{x^3 + 3}$ (ii) $\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$

   (iii) $\int \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2} dx$ (iv) $\int x^3 e^x \, dx$

6. समाकलन कीजिए :

   (i) $\frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}$ (ii) $\frac{3x}{(3x + 1)(x - 3)}$

   (iii) $x^3 \log x$, (iv) $\sin (ax + b)$.

7. कुल लागत फलन $f(x)$ ज्ञात कीजिए यदि x = कुल उत्पादन

   (i) $3x^3 - 4x + 5$, $x = 0$ पर 100 रु. कुल लागत

   (ii) $\frac{100}{\sqrt{x}}, x = 0$ पर 100 रु. कुल लागत

   (iii) $6.75 - 0.0006\,x$, $x = 0$ पर 10,485 रु. कुल लागत।

8. ज्ञात कीजिए:

   (i) $\int_1^5 x^3 x \, dx$ (ii) $\int_1^{14} \sqrt{x} \, dx$

   (iii) $\int_1^3 (1 + 5x + x^3) \, dx$ (iv) $\int_1^3 (e^{2x} + e^x) \, dx$

नोट

9. यदि माँग फलन वक्र $p = 33 - 3x - 2x^2$ हो और $x = 3$ इकाई हो तो उपभोक्ता बचत ज्ञात कीजिए।
10. माँग फलन $p = 100 - 2x^3$ हो तो $p = 5$ रु. पर उपभोक्ता बचत कितनी होगी? यदि $p = 0$ हो तो बचत कितनी होगी?

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)–

4. कुल लागत = ...?

   (*a*) $\int$ सीमान्त लागत (*b*) $\int$ संपूर्ण लागत (*c*) $\int$ कुल लाभ (*d*) $\int$ हानि

5. उपभोक्ता बचत को किस विधि से ज्ञात किया जा सकता है?

   (*a*) अवकलन (*b*) अवकल
   (*c*) समाकलन (*d*) क्रेमर

6. सीमांत लागत = ... होता है

   (*a*) $\dfrac{d}{dq}$ (*b*) $\dfrac{dq}{d(c)}$

   (*c*) $\dfrac{d(c)}{dq}$ (*d*) इनमें से कोई नहीं।

16.3 सारांश (Summary)

- मान लो कि $CPQD$ वक्र $y = f(x)$ को प्रदर्शित करता है, जहाँ $f(x)$, प्रान्त $[a, b]$ में x का कोई संतत फलन है तथा मान लो कि जैसे x का मान a से b तक बढ़ता है y भी बढ़ता ही जाता है। मान लो कि CA तथा DB क्रमशः $x = a$ तथा $x = b$ पर कोटियाँ हैं।
- वक्र पर स्थित कोई बिन्दु $P(x, y)$ लो तथा मान लो कि PM उसकी कोटि है। वक्र पर P के समीप एक अन्य बिन्दु $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ लो तथा मान लो कि QN इसकी कोटि है।
- आजकल समाकलन का प्रयोग अर्थशास्त्र में तेजी से बढ़ा है। इसे हम निम्नलिखित तथ्यों से स्पष्ट कर सकते हैं–

1. सीमान्त लागत, औसत लागत तथा कुल लागत

चूँकि सीमान्त लागत = $\dfrac{d(c)}{dq}$ होता है, अतः

कुल लागत = $\displaystyle\int \frac{d(c)}{dq} \cdot dq$

- यहाँ, $\dfrac{d(c)}{dq}$ = सीमान्त लागत, c = कुल लागत, dq = उत्पादन में परिवर्तन।
- उपभोक्ता बचत को भी समाकलन विधि से ज्ञात किया जा सकता है।

16.4 शब्दकोश (Keywords)

- प्रयोग (Applications): अनुप्रयोग।
- कोटि (Ordinate): भुज।

16.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का क्षेत्रफल निकालें। (**उत्तर:** πabवर्ग इकाई)
2. यदि स्थिर लागत 100 रु. है और सीमांत फलन $(6x + 3)$ के रूप में है, तो कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए। (**उत्तर:** $3x^2 + 3x + 100$)
3. सरल रेखा $y = mx$, x-अक्ष तथा कोटि $x = 3$ के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   (**उत्तर:** $\frac{9}{2}m$ वर्ग इकाई)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. तेजी	2. योग	3. समाकलन
4. (*a*)	5. (*c*)	6. (*c*)

16.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
2. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
8. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजकेशन।*

नोट

इकाई–17 : अवकलन समीकरणों का परिचय और हल : चलराशियों की पृथक्करणीय दशा एवं समरूप समीकरण (Introduction to Differential Equations and Solution: Variable Separable Case and Homogenous Equation)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- प्रथम क्रम तथा प्रथम कोटि के अवकलन समीकरण से अवगत होंगे।
- सही अवकलन समीकरण से अवगत कराना।

प्रस्तावना (Introduction)

अवकलन समीकरण वह समीकरण होती है जिसमें आश्रित एवं स्वतंत्र चलराशियाँ होती हैं तथा आश्रित चलराशियों के एक या एक से अधिक स्वतंत्र चलराशियों के सापेक्ष में विभिन्न गुणांक (derivatives) होते हैं। एक अवकलन समीकरण का क्रम (order) उस समीकरण में सम्मिलित विभिन्न गुणांकों का उच्चतम क्रम (highest order) होता है। कोई भी समीकरण रेखीय कहलायेगा जबकि आश्रित चलराशियों के गुणांक प्रथम कोटि के हों, अन्यथा वह गैर-रेखीय कहलायेगा।

फलन $f(x)$ विभिन्न समीकरणों का हल कहलायेगा जबकि इसे किसी समीकरण में प्रतिस्थापित करें तो यह समीकरण को एक इकाई (identy) तक कम कर देता है तथा सभी हलों के निकालने की प्रक्रिया को अवकलन समीकरण का हल कहलायेगा।

सामान्य हल: एक अवकलन समीकरण का हल जिसमें स्वतंत्र काल्पनिक स्थिरांक अवकलन समीकरण के क्रम के बराबर हो तो उसे उसका सामान्य हल कहा जाता है।

विशेष हल (Particular Solution)**:** सामान्य हल में स्थिरांकों को यदि कोई विशेष मूल्य दिया जाता है तो वह उस समीकरण का विशेष हल कहा जाता है।

उदाहरणार्थ : $y = Ae^x + B/e^x$ वक्र को A तथा B के विभिन्न मूल्यों के लिए अवकलन समीकरण ज्ञात कीजिए।

दिया हुआ मूल्य $y = Ae^x + B/e^x$ ...(1)

उपर्युक्त समीकरण के A तथा B मूल्यों के लिए अवकलन समीकरण ज्ञात करने के लिए समीकरण (1) को दो बार अवकलन करेंगे। समीकरण (1) को अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dy} = A^{ex} - Be^{-x} \qquad ...(2)$$

समीकरण (2) को पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^x + Be^{-x}$$

समीकरण (2) एवं (3) में से A तथा B को हटाने पर हम पाते हैं–

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y$$

यही हमारा अवकलन समीकरण होगा।

17.1 प्रथम क्रम तथा प्रथम कोटि का अवकलन समीकरण (Differential Equation of First Order and First Degree)

प्रथम क्रम तथा प्रथम कोटि के अवकलन समीकरण को निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित करते हैं–

$$M + N\,(dy/dx) = 0 \quad \text{या} \quad M\,dx + N\,dy = 0$$

यहाँ M तथा N स्थिर हैं और x तथा y के कुछ फलन हैं। यद्यपि प्रथम क्रम के सभी अवकलन समीकरण सदैव हल नहीं किये जा सकते हैं, फिर भी यदि वे निम्नलिखित स्वरूप में उपलब्ध होते हैं तो कुछ उपयुक्त विधियों द्वारा उनका हल निकाला जा सकता है–

17.1.1 चलराशियों की पृथक्करणीय दशा (Variable Separable Case)

यदि अवकलन समीकरण निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित हो–

$$f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$$

यहाँ $f_1(x)$ तथा $f_2(y)$ क्रमशः x तथा y के फलन हैं।

ऐसी दशा में समीकरण के दोनों तरफ समाकलन कर लेते हैं तथा तत्पश्चात् समीकरण के एक तरफ कोई काल्पनिक स्थिरांक जोड़ लेते हैं। अतः

$$\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + c$$

नोट

नोट्स यहाँ, c एक काल्पनिक स्थिरांक है।

उदाहरण 1. $\left[x/\sqrt{1+x^2}\right]dx = -\left[y/\sqrt{1+y^2}\right]dy$ का हल निकालिये।

हल : दोनों तरफ समाकलन करने पर

$$\int (1+x^2)^{-1/2} . \, x \, dx = -\int (1+y^2)^{-1/2} . \, y \, dy + c$$

या $$\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-1/2} . (2x) \, dx = -\frac{1}{2}\int (1+y^2)^{-1/2} . (2y) \, dy + c$$

या $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c,$ यही हमारा दिये हुए समीकरण का हल है।

उदाहरण 2. $(1 + e^x)\, y\, dy = (1 + y)\, e^x\, dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल : इस समीकरण को हम निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं–

$$\left(\frac{y}{1+y}\right) dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

दोनों तरफ अवकलन करने पर

$$\int \frac{y}{1+y} dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx + \text{constant}$$

या $$y - \log (1 + y) = \log (1 + e^x) + \log c$$

या $$y = \log [c\, (1 + y)\, (1 + e^x)]$$

या $c(1 + y)\, (1 + e^x) = e^y$ यही उपर्युक्त समीकरण का हल होगा।

17.1.2 समरूप समीकरण (Homogeneous Equations)

यदि एक अवकलन समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f_1\,(x, y)}{f_2\,(x, y)}$ के रूप में प्रदर्शित किया जाये तो वह समरूप समीकरण कहलाती है। यहाँ $f_1\,(x, y)$ तथा $f_2\,(x, y)$; x तथा y के समान कोटि के फलन हैं। इस प्रकार के समीकरण को हल करने के लिए हम

$y = vx$ रख देते हैं, जहाँ $\dfrac{dy}{dx} = v + x\, \dfrac{dv}{dx}$

ऐसी स्थिति में दिया हुआ समीकरण अग्रलिखित रूप में प्रदर्शित किया जाता है–

$$v + x\, \frac{dv}{dx} = f(v)$$

अर्थात् $$x\, \frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

नोट

यहाँ चलराशियों को पृथक् किया जा सकता है तथा तत्पश्चात् दोनों तरफ उनका समाकलन कर लेते हैं–

$$\int \frac{dv}{f(v)-v} = \log x + c$$

यहाँ, c एक काल्पनिक स्थिर मूल्य है।

> *क्या आप जानते हैं* समीकरण का समाकलन करने के पश्चात् v के मूल्य के स्थान पर y/x रख देते हैं और वही उस समीकरण का हल होगा।

उदाहरण 3. $(x^3 - 3xy^2)\, dx = (y^3 - 3x^3\, y)\, dy$ का हल ज्ञात कीजिए।

दिये हुए समीकरण को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है–

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^3 - 3x^2\, y} \qquad \ldots(1)$$

$y = vx$ तथा $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ समीकरण (1) में रखने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^3 - 3xv^2\, x^2}{v^3\, x^3 - 3x^2\, vx} = \frac{x^3\,(1-3v^2)}{x^3\,(v^3 - 3v)} = \frac{1-3v^2}{v^3 - 3v}$$

या
$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-3v^2}{v^3-3v} - v = \frac{1-3v^2-3v^4+3v^2}{v^3-3v} = \frac{1-v^4}{v^3-3v}$$

या
$$\frac{dx}{x} = \frac{v^3-3v}{1-v^4}\,dv = \left[\frac{1}{2(v+1)} + \frac{1}{2(v-1)} - \frac{2v}{v^2+1}\right]$$

(आंशिक फलन द्वारा)

दोनों तरफ समाकलन करने पर

$$\log x + \log c = \frac{1}{2}\log(v+1) + \frac{1}{2}\log(v-1) - \log(v^2+1)$$

या
$$\log(cx) = \frac{1}{2}\log[(v+1)^{1/2}\,(v-1)^{1/2}/v^2+1]$$

या
$$cx = \frac{(v^2-1)^{1/2}}{v^2+1} \text{ या } c^2\,x^2 = \frac{v^2-1}{(v^2+1)} \text{ या } c^2x^2\,(v^2+1)^2 = (v^2-1)$$

या
$$c^2\,x^2\,[y^2/x^2+1]^2 = [y^2/x^2-1] \qquad [v = y/x \text{ रखने पर}]$$

$c^2\,(y^2+x^2) = (y^2-x^2)$ यही उपर्युक्त समीकरण का हल है।

17.1.3 समीकरण जो समरूप समीकरण में बदला जा सके (Equations Changable to Homogeneous Form)

यदि अवकलन निम्नलिखित रूप में है–

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1\,x+b_1\,y+c_1}, \text{ जहाँ } \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$$

नोट

तो हम उसे पहले $x = x + h$ तथा $y = y + k$ रखकर समरूप समीकरण में बदल लेते हैं। (यहाँ h तथा k स्थिरांक हैं) इसके अलावा $dy = dY$ तथा $dx = dX$ रख लेते हैं–

$$\frac{DY}{DX} = \frac{a(x+h)+b(y+k)+c}{a_1(x+h)+b_1(y+k)+c_1}$$

$$= \frac{ax+by+(ah+bk+c)}{a_1x+b_1y+(a_1\ h+b_1k+c_1)}$$

उपर्युक्त समीकरण समरूप होगी यदि $ah + bk + c = 0$ तथा $a_1h + b_1\ k + c_1 = 0$ हों,

$$\frac{DY}{DX} = \frac{ax+by}{a_1x+b_1y}$$

अब हम समीकरण को पिछले उदाहरण (ब) के अनुसार $Y = vX$ रखकर हल करेंगे। अन्त में $X = x - h$ तथा $y = y - k$ रखकर दिये हुए समीकरण का हल ढूँढ़ लिया जायेगा।

यदि $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = m$ हो तो उपर्युक्त दिया हुआ समीकरण निम्नवत् होगा–

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

इस प्रकार के अवकलन समीकरण को हल करने के लिए $v = a_1x + b_1y$ मान लेते हैं।

उदाहरण 4: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$ का हल ज्ञात कीजिए।

यहाँ $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ की स्थिति है, अतः $x = X + h$ तथा $y = Y + k$ रखने पर

$$\frac{DY}{DX} = \frac{(Y+k)-(X+h)+1}{(Y+k)-(X+h)+5} = \frac{Y-X+(k-h+1)}{Y-X\ (k-h+5)} \quad \ldots(1)$$

$k - h + 1 = 0$ तथा $k + h + 5 = 0$ रखने पर हम पाते हैं $k = -3,\ h = -2k$ तथा h का मान रखने पर समीकरण (1) निम्न प्रकार होगा–

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y-X}{Y+X}$$

$Y = vX$ रखने पर हम पाते हैं

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{v-1}{v+1} \text{ या } X\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v = \frac{-1-v^2}{v+1}$$

या
$$\frac{v+1}{v^2+1}dv = -\frac{dx}{X} \text{ या } \frac{v}{v^2+1}dv + \frac{dv}{v^2+1} = -\frac{X}{dx}$$

दोनों तरफ 2 से गुणा करने पर

या
$$\frac{2v}{v^2+1}dv + \frac{2v}{v^2+1}dv = \frac{-2X}{dx}$$

नोट

दोनों तरफ समाकलन करने पर

$$\log (v^2 + 1) = 2 \tan^{-1} v = -2 \log X + c$$

या $\log (v^2 + 1) + 2 \log X = -2 \tan^{-1} v + c$

या $\log [(v^2 + 1) X^2] = -2 \tan^{-1} v + c$

v का मान रखने पर

$$\log(Y^2 + X^2) = -2 \tan^{-1} (Y/X) = c$$

Y तथा X का मान रखने पर

$$\log [(y + 3)^2 + (x + 2)^2] + 2 \tan^{-1} \{(y + 3)/ (x + 2)\} = c$$

यही दिये हुए अवकलन समीकरण का हल है।

17.1.4 रेखीय अवकलन समीकरण (Linear Differential Equation)

रेखीय अवकलन समीकरण को निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित किया जाता है—

$$\frac{dy}{dx} + PY = Q$$

यहाँ P तथा Q केवल x के फलन होते हैं तथा y एक आश्रित चलराशि है। इस समीकरण का हल करने के लिए दोनों तरफ $e^{\int p\,dx}$ से गुणा करने पर

$$e^{\int p\,dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^{\int p\,dx} Py = e^{\int p\,dx}.Q$$

या $$\frac{d}{dx}\left\{ye^{\int p\,dx}\right\} = Qe^{\int p\,dx}$$

दोनों तरफ 'x' के संदर्भ में समाकलन करने पर

$$ye^{\int p\,dx} = \int Q\, e^{\int p\,dx}\, dx + c$$

यही हमारे दिये हुए समीकरण का हल होगा।

उदाहरणार्थ : $\dfrac{dy}{dx} + 2xy - e^{-x^2}$ का हल निकालिए।

उपर्युक्त समीकरण की $\dfrac{dy}{dx} + PY = Q$ से तुलना करने पर हम पाते हैं

$$P = 2x,\ Q = e^{-x^2}$$

दोनों का पृथक्-पृथक् 'x' के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$\int P\, dx = 2\int x\, dx, \int Q\, dx = \int e^{-x^2}$$

$$\int P\, dx = 2\int \frac{x^2}{2} = x^2$$

नोट

अतः $\int_e p\, dx = e^{x^2}$

दिये हुए अवकलन समीकरण का हल होगा–

$$y(\text{I.F.}) = \int Q\ (\textbf{I.F.})\, dx + c \quad [\text{यहाँ I.F. = Intergrating Factor}]$$

$$y\, e^{x^2} = \int e^{-x^2}\, e^{x^2}\, dx + c$$

या $$y\, e^{x^2} = x + c$$

यही उपर्युक्त समीकरण का हल है।

17.1.5 रेखीय रूप में बदलना (Change in Linear Form)

यदि कोई अवकलन समीकरण रेखीय रूप में बदली जा सकती है तो उसका हल दो विधियों द्वारा किया जा सकता है–

(I) बर्नोली समीकरणः यदि कोई समीकरण निम्नलिखित रूप में दिया हुआ हो–

$$\frac{dy}{dx} + PY = Q\, y^n$$

तो ऐसी दशा में हम दोनों तरफ y^{-n} से गुणा कर देते हैं।

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + PY^{-n+1} = Q \qquad \ldots(1)$$

हम $y^{-n+1} = v$ रख देते हैं तो $\frac{dv}{dx}(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ होगा।

अब समीकरण (1) का रूप निम्न प्रकार होगा–

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + pv = Q$$

या $$\frac{dv}{dx} + (1-n)\, pv = (1-n)\, Q \qquad \ldots(2)$$

यह समीकरण एक रेखीय समीकरण है, जहाँ v एक आश्रित चलराशि है। इस अवकलन समीकरण का हल 17.1.4 के अनुसार होगा।

(II) यदि कोई समीकरण निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित हो–

$$\frac{dv}{dx} + P\phi(y) = Q\, f(y)$$

जहाँ, P तथा Q केवल x के फलन हैं।

तो उपर्युक्त समीकरण को रेखीय समीकरण में बदलने के लिए समीकरण के दोनों तरफ $f(y)$ का भाग देने पर

$$\frac{1}{f(y)}\frac{dv}{dx} + P\frac{\phi(y)}{f(y)} = Q$$

समीकरण में $\frac{\phi(y)}{f(y)} = v$ रखें तो $\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\phi(y)}{f(y)}\right\}$

नोट

$$= k.\frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx}, \text{ जहाँ } k \text{ एक स्थिरांक है।}$$

अत: समीकरण (2) को अब हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं–

$$\frac{1}{k}\frac{dv}{dx} + Pv = Q$$

या $$\frac{dv}{dx} = k\,Pv = kQ \text{ जो कि एक रेखीय समीकरण है।}$$

उदाहरण 5 : $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = x^2y^6$ का हल निकालिए।

दिये हुए समीकरण को y^6 से भाग देने पर

$$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}.\frac{1}{y^5} = x^2 \qquad \ldots(1)$$

माना $\dfrac{1}{y^5} = v$ हो तो $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{5}{y^6}\dfrac{dy}{dx}$

या $$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5}\frac{dy}{dx}$$

समीकरण (1) में रखने पर

$$-\frac{1}{5}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x^2 \text{ या } \frac{dv}{dx} - \frac{1}{5}v = -5x^2$$

यह एक रेखीय समीकरण है जिसमें v एक आश्रित चलराशि है।

यहाँ $P = -5/x$ तथा $Q = -5\,x^2$

अत: $$\int Pdx = \int\left(-\frac{5}{x}\right)dx = -5\log x = \log x^5 = \log\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

∴ $$\int_e P\,dx = e\log^{(1/5)} = \frac{1}{x^5}$$

$$v\,(\text{I.F}) = \int Q\,(\text{I.F.})\,dx + c$$

या $$v(1/x^5) = \int -5x^2\,(1/x^5)\,dx + c = -5\int x^{-3}dx + c$$

$$\left(\frac{1}{y^5}\right)\left(\frac{1}{x^5}\right) = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) + c \qquad [\because v = 1/y^5]$$

या $$\frac{1}{x^5y^5} + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) + c$$

यही अवकलन समीकरण का हल है।

नोट

17.2 सही अवकलन समीकरण (Exact Differential Equations)

अवकलन समीकरण $M\,dx + N\,dy = 0$ सही (exact) होगी यदि $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ हों। यदि दिया हुआ समीकरण सही है तो हम इसके बाद निम्नलिखित कदम उठायेंगे–

(*i*) M को x के संदर्भ में समाकलन करेंगे जबकि y स्थिर हों।

(*ii*) N को केवल y के संदर्भ में समाकलन करेंगे तथा हम केवल उन पदों का ही समाकलन करेंगे जिसमें x न हों।

(*iii*) उपर्युक्त दोनों समाकलनों का योग कर लेंगे।

इस प्रकार यदि अवकलन समीकरण $M\,dx + N\,dy = 0$ सही (exact) है तो इसका हल निम्नलिखित होगा–

$\int M\,dx$ (y को स्थिर मानते हुए) + $\int M\,dy$ (केवल उन दो का जिसमें x न हो) $= c$

उदाहरणार्थ: $(x^2 - ay)\,dx - (ax - y^2)\,dy = 0$ का हल ज्ञात कीजिए।

यहाँ, $M = x^2 - ay$ तथा $N = (ax - y^2)$ हैं।

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -a \text{ तथा } \frac{\partial N}{\partial x} = -a$$

अत: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ है, अत: दी हुई समीकरण सही (exact) है।

अब $\int M\,dx$ (y को स्थिर मानते हुए) $= \int (x^2 - ay)\,dx = \dfrac{1}{3}x^3 - ay\,x$ ...(1)

तथा $\int N\,dy$ (केवल वे पद जिसमें x न हों) $= \int y^2\,dy = \dfrac{1}{3}y^3$

$\therefore$ हमें उपलब्ध होगा–

(*i*) + (*ii*) $= c$ (काल्पनिक स्थिरांक)

या $\dfrac{1}{3}x^3 - ayx + \dfrac{1}{3}y^3 = c$

या $x^3 - 3\,ayx + y^3 = 3c.$

टास्क $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = x^2\,y^6$ का हल निकालें।(उत्तर : $\dfrac{1}{x^5y^5} + \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + c$)

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. **रिक्त स्थानों की पूर्ति करें** (Fill in the blanks)–

   1. अवकलन समीकरण वह समीकरण होती है जिसमें ········ एवं स्वतंत्र चलराशियाँ होती हैं।
   2. कोई भी समीकरण रेखीय कहलाएगा जबकि आश्रित चलराशियों के ········ प्रथम कोटि के हों।

3. एक अवकलन समीकरण का हल जिसमें स्वतंत्र काल्पनिक स्थिरांक अवकलन समीकरण के क्रम के बराबर हो तो उसे उसका ········ हल कहा जाता है।
4. सामान्य हल में स्थिरांकों को यदि कोई विशेष मूल्य दिया जाता है तो वह उस समीकरण का .... हल कहा जाता है।
5. यदि एक अवकलन समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ के रूप में प्रदर्शित किया जाए तो वह ········ समीकरण कहलाती है।

17.3 सारांश (Summary)

- अवकलन समीकरण वह समीकरण होती है जिसमें आश्रित एवं स्वतंत्र चलराशियाँ होती हैं तथा आश्रित चलराशियों के एक या एक से अधिक स्वतंत्र चलराशियों के सापेक्ष में विभिन्न गुणांक (derivatives) होते हैं। एक अवकलन समीकरण का क्रम (order) उस समीकरण में सम्मिलित विभिन्न गुणांकों का उच्चतम क्रम (highest order) होता है। कोई भी समीकरण रेखीय कहलायेगा जबकि आश्रित चलराशियों के गुणांक प्रथम कोटि के हों, अन्यथा वह गैर-रेखीय कहलायेगा।
- **सामान्य हल :** एक अवकलन समीकरण का हल जिसमें स्वतंत्र काल्पनिक स्थिरांक अवकलन समीकरण के क्रम के बराबर हो तो उसे उसका सामान्य हल कहा जाता है।
- **विशेष हल** (Particular Solution): सामान्य हल में स्थिरांकों को यदि कोई विशेष मूल्य दिया जाता है तो वह उस समीकरण का विशेष हल कहा जाता है।
- यदि अवकलन समीकरण निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित हो—

  $$f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$$

  यहाँ $f_1(x)$ तथा $f_2(y)$ क्रमशः x तथा y के फलन हैं।
- ऐसी दशा में समीकरण के दोनों तरफ समाकलन कर लेते हैं तथा तत्पश्चात् समीकरण के एक तरफ कोई काल्पनिक स्थिरांक जोड़ लेते हैं।

17.4 शब्दकोश (Keywords)

- समरूप (Homogeneous): समांगी।
- पृथक्करणीय (Separable): पार्थक्य।

17.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. $y = A\,e^x + B/e^x$ वक्र को A और B के विभिन्न मूल्यों के लिए अवकलन समीकरण ज्ञात करें।

   (**उत्तर :** $\frac{d^2y}{dx^2} = y$)

2. $\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]dx = -1\left[\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right]dy$ का हल निकालें। (**उत्तर :** $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$)

नोट

3. $\frac{dy}{dx} + 2xy - e^{-x2}$ का हल निकालें। (**उत्तर :** $ye^{x2} = x + c$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. आश्रित 2. गुणांक 3. सामान्य
4. विशेष 5. समरूप।

17.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
4. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
7. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*

इकाई—18 : आव्यूह : अर्थ एवं प्रकार
(Matrices : Meaning and Types)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- आव्यूह के क्रम एवं संकेतन को सीखने हेतु।
- आव्यूह के प्रकारों की जानकारी प्राप्त होगी।
- आव्यूह के मुख्य गुणों को समझने हेतु।
- आव्यूहों का योग एवं अंतर को जानने हेतु।
- आव्यूह गुणन संबंधी प्रश्नों को हल करने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

एक आयताकार अंकायत (Rectangular Arromy), जिसे पंक्तियों (Rows) तथा स्तम्भों में व्यवस्थित किया गया हो, आव्यूह कहलाता है।

m पंक्तियों (Rows) और n स्तम्भों (Columns) में mn संख्याओं के विन्यास (Permutation) को $m \times n$ क्रम का आव्यूह (Matrix) कहते हैं।

नोट

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ : & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

> *नोट्स* संख्यायें $a_{11}, a_{12}, \dots\dots$ आव्यूह के घटक या अवयव (Elements or Constituents) कहलाती हैं।

क्षैतिज (Horizontal) अवयवों से पंक्ति (Row) और ऊर्ध्वाधर (Vertical) अवयवों से स्तम्भ (Column) बनते हैं। जैसे–

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ एक आयताकार विन्यास है जिसमें 2 पंक्तियाँ और 3 स्तम्भ हैं और $2 \times 3 = 6$ अवयवों की संख्यायें हैं।

इसी प्रकार $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ एक आयताकार विन्यास है जिसमें 3 पंक्तियाँ और 1 स्तम्भ है और प्रविष्टियाँ (Entries) की संख्यायें $3 \times 1 = 3$ हैं।

18.1 आव्यूह का क्रम या विमायें (Order of Matrix)

जैसे आयत (Rectangle) की दो विमायें लम्बाई और चौड़ाई होती हैं उसी प्रकार आव्यूह की विमायें पंक्तियों की संख्या × स्तम्भों की संख्या होती है। परिभाषा में दिये हुए आव्यूह को A, B, C आदि से संकेत करते हैं। जैसे $A_{m \times n}$. $B_{2 \times 3}$. $C_{1 \times 3}$ इत्यादि।

18.2 आव्यूह का संकेतन (Notation of a Matrix)

यदि किसी भी आव्यूह में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्याएँ m और n हों, तो आयताकार विन्यास में कुल $m \times n$ अवयवों की संख्या होगी। आव्यूह की i^{th} पंक्ति और j^{th} स्तम्भ में अवयवों की स्थिति a_{ij} हो, तो आव्यूह को निम्न प्रकार लिखा जाता है–

$$A_{m \times n} = A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

जहाँ, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ तथा $j = 1, 2, 3, \dots, n$ है।

> *क्या आप जानते हैं* यहाँ यह उल्लेखनीय है कि आव्यूह संख्याओं का आयताकार विन्यास (विशेष सुगठित एवं संक्षिप्त रूप में लिखे हुए) मात्र हैं। इनका कोई संख्यात्मक मान नहीं है।

18.3 आव्यूह के प्रकार (Kinds of Matrix)

[I] वर्ग आव्यूह (Square Matrix)

यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या बराबर है तब उसे वर्ग आव्यूह कहते हैं। अर्थात् यदि $m = n$ हो तो अंकायत को n क्रम का वर्ग व्यूह कहते हैं। अन्य व्यूह जहाँ हों वे आयताकार व्यूह कहलाते हैं। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

उपरोक्त दोनों व्यूह वर्ग आव्यूह हैं जिनके क्रम (2×2) तथा (3×3) हैं।

[II] पंक्ति आव्यूह (Row Matrix)

यदि $m = 1$, तब आव्यूह में केवल एक पंक्ति रहेगी, इसे पंक्ति आव्यूह कहेंगे। उदाहरणार्थ–

$$A = [2\ 3]_{1 \times 2}$$
$$B = [-5\ 2\ 0]_{1 \times 3}$$
$$C = [1\ 3\ 0\ -7]_{1 \times 4}$$

[III] स्तम्भ आव्यूह (Column Matrix)

यदि $n = 1$, तब आव्यूह में केवल एक स्तम्भ रहेगा और पंक्तियों की संख्यायें अनेक, इसे स्तम्भ आव्यूह कहेंगे। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times 1}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

[IV] शून्य आव्यूह (Null Matrix or Zero Matrix)

यदि किसी आव्यूह के सभी अवयव शून्य हों, तो वह शून्य आव्यूह कहलाता है। उदाहरणार्थ,

$$A = [0\ 0], B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

उपर्युक्त सभी शून्य आव्यूह हैं। शून्य आव्यूह को O बड़े (Capital) अक्षर से लिखा जाता है। O शून्य नहीं है, यह केवल आव्यूह का संकेत है।

[V] तत्समक या इकाई आव्यूह (Identity or Unit Matrix)

यह एक वर्ग आव्यूह है जिसके सभी विकर्ण अवयव (Diagonal Elements) इकाई हैं और अन्य अवयव शून्य हैं। इसे तत्समक या इकाई आव्यूह कहते हैं। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[VI] विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)

यदि किसी वर्ग आव्यूह के प्रमुख विकर्ण पर स्थित अवयवों को छोड़कर शेष सब शून्य हैं, तब उसे विकर्ण आव्यूह कहते हैं। उदाहरणार्थ,

नोट

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

संक्षेप में इसे विकर्ण $[d_1, d_2, d_3, d_4]$ से दर्शाते हैं।

[VII] स्केलर आव्यूह (Scalar Matrix)

वह विकर्ण आव्यूह, जिसके सभी विकर्ण अवयव समान हों, स्केलर आव्यूह कहलाता है। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A = [a_{ij}]$ स्केलर होगा यदि $a_{ij} = 0$, जब $i \neq j$; $a_{ij} = 2$ जब $i = j$

$$B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$B = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, जहाँ $a_{ij} = 0$ जब $i \neq j$; $a_{ij} = k$, जब $i = j$ तब B स्केलर आव्यूह है।

[VIII] अधोत्रिकोणी आव्यूह (Lower Triangular Matrix)

वह वर्ग आव्यूह, जिसके मुख्य विकर्ण के ऊपर के अवयव शून्य हों, अधोत्रिकोणी आव्यूह (Lower Triangular Matrix) कहते हैं। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ यहाँ } a_{ij} = 0; \text{ जब } i < j$$

टास्क तत्समक आव्यूह का एक उदाहरण लिखें।

[IX] उपरित्रिकोणी आव्यूह (Upper Triangular Matrix)

वह वर्ग आव्यूह जिसके प्रधान विकर्ण के सब अवयव शून्य हों, आव्यूह का उपरित्रिकोणी (Upper Triangular) कहलाता है। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}.... & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{23}.... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}.... & a_{3n} \\ .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{bmatrix}$$

वर्ग आव्यूह A (क्रम $n \times n$); जहाँ अवयव $a_{ij} = 0$ जब $i < j$

[X] आव्यूह विकर्ण योग (Trace of a Matrix)

वर्ग आव्यूह के प्रधान विकर्ण के सभी अवयवों का जोड़, आव्यूह का विकर्ण योग कहलाता है। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$

उपर्युक्त व्यूह को आव्यूह विकर्ण योग $= a + b + c$ है। वर्ग आव्यूह A क्रम, $n \times n$ में आव्यूह विकर्ण योग = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ है। जहाँ, $j = i$ कहते हैं और उसे Tr लिखते हैं।

[XI] सममित आव्यूह (Symmetric Matrix)

वह वर्ग आव्यूह A (क्रम $n \times n$), जिसके प्रत्येक $(i-j)^{\text{th}}$ घटक (अवयव) के लिये $a_{ij} = a_{ji}$ हो, सममित आव्यूह कहलाता है, उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$

उपर्युक्त आव्यूह एक सममित आव्यूह है क्योंकि $a_{ij} = a_{ji}$ *i.e.* $a_{21} = h = a_{12}; a_{32} = f = a_{23}; a_{22} = b = a_{22}$

[XII] विषम-सममित आव्यूह (Skew-Smmetric Matrix)

वह वर्ग आव्यूह A (क्रम $n \times n$), जिसके प्रत्येक $(i-j)^{\text{th}}$ जिनके प्रत्येक रचक के लिये $a_{ji} = a_{ij}$ हो, विषम-सममित आव्यूह कहलाता है। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -h & f \\ -g & 0 \end{bmatrix}$$

विकर्ण अवयवों $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots, a_{ij}$ इस प्रकार है और प्रतिबन्ध $a_{ij} = -a_{ji}$ के सभी मानों के लिये।

$\therefore \quad 2a_{ij} = 0 \text{ or } -a_{ij} = 0$

इसलिये विषम-सममित आव्यूह के सभी विकर्ण अवयव शून्य होते हैं।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)—

1. एक आयताकार अंकायत, जिसे पंक्तियों तथा स्तंभों में व्यवस्थित किया गया हो .... कहलाता है।
2. यदि किसी भी आव्यूह में पंक्तियों और स्तंभों की संख्या m और n हों, तो आयताकार अभ्यास में कुल .... अवयवों की संख्या होगी।
3. यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों एवं स्तंभों की संख्या बराबर है तो उसे .... आव्यूह कहते हैं।
4. यदि किसी आव्यूह के सभी अवयव शून्य हों, तो वह .... आव्यूह कहलाता है।
5. यदि किसी को आव्यूह के प्रमुख विकर्ण पर स्थित अवयवों को छोड़कर शेष सब शून्य हैं, तब उसे .... आव्यूह कहते हैं।

नोट

18.4 आव्यूह के मुख्य गुण (Important Properties of Matrices)

1. आव्यूहों की समानता (Equality of Matrix)

दो आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ तुल्य होंगे यदि दोनों के क्रम (Order) बराबर होंगे अर्थात् $m = p$; $n = q$ और $a_{ij} = b_{ij}$ होते हैं।

2. आव्यूहों के समतुल्य सम्बन्ध (Equivalence Relations of Matrices)

यदि A, B, C आव्यूह अनुकूलनीय (Conformable) हैं अर्थात् समान क्रम (Order) है; तो

(*i*) $A = A$; स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation)

(*ii*) $A = B \Leftrightarrow B = A$ सममित सम्बन्ध (Symmetric Relation)

(*iii*) $A = B$ और $B = C \Rightarrow A = C$; संक्रामक सम्बन्ध (Transitive Relation)

जहाँ, संकेत (Notation) $\Rightarrow$ यदि .... तो (If.... then) और $\Leftrightarrow$ यदि और केवल यदि (iff = if and only if)

(अ) $A = A$ का अर्थ है $a_{ij} = a_{ij}$ जहाँ $i = 1, 2, 3, ...m$ और $j = 1, 2, 3, ..., n$. यह स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है।

(ब) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ और $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ हैं तो $A = B$ का अर्थ है $a_{ij} = b_{ij}$ या $b_{ij} = a_{ij}$. अतः $B = A$.

$\therefore$ $A = B \Rightarrow B = A$. इसे सममित सम्बन्ध कहते हैं।

(स) यदि $A = B$, इसे $B = C$ सममित सम्बन्ध कहते हैं–

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ और } b_{ij} = c_{ij}$$

अतः $$a_{ij} = c_{ij} \quad \therefore \quad A = C$$

आव्यूहों A, B, C में वह सम्बन्ध, जो स्वतुल्य, सममित और संक्रामक हो, तुल्यता सम्बन्ध कहलाता है। उदाहरणार्थ–

तुल्य आव्यूह की परिभाषा द्वारा x, y और z का मान $\begin{bmatrix} x+3 & 2y+x \\ z-1 & 4a-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 3 & 2a \end{bmatrix}$

अतः दो तुल्य आव्यूहों के संगत अवयव तुल्य होते हैं।

$\therefore$ $x + 3 = 0$; $2y + x = -7$; $z - 1 = 3$ और $4a - 6 = 2a$

इन समीकरणों से $x = -3$; $y = -2$; $z = 4$ और $a = 3$.

18.5 आव्यूहों का योग एवं अन्तर (Addition and Subtraction of Matrices)

यदि $A = [a_{ij}]$ एवं $B = [b_{ij}]$ दो $m \times n$ क्रम के आव्यूह हैं, तब उनका योगफल $A + B$ हम क्रम $m \times n$ आव्यूह $C = [c_{ij}]$ से दर्शाते हैं।

जहाँ $c_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2,....,m; j = 1, 2,....,n$ सभी मानों के लिये।

यहाँ यह उल्लेखनीय है कि **यदि आव्यूह समान क्रम के नहीं हैं तो उनका योगफल सम्भव नहीं है।**

उदाहरण 1. मान निकालिए (Evaluate)–

(*i*) [1 2 3] + [4 5 6];

(*ii*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ **और** $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$**; तो $A + B$ निकालिए।**

हल : (*i*) यहाँ $A = [1\ 2\ 3]; B = [4\ 5\ 6]$

$\therefore \quad A + B = [1 + 4\ 2 + 5\ 3 + 6] = [5\ 7\ 9]$

(*ii*) यहाँ $A + B = C$; जहाँ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\therefore \quad C = \begin{bmatrix} 1+7 & 2+3 & 4+2 \\ 0+5 & 5+1 & 3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

आव्यूह योग के क्षेत्रीय गुण (Field properties of Matrix Addition)

(*i*) दो आव्यूह एक ही क्रम के (Order) या अनुकूलनीय (Conformable) हैं तो इनके जोड़ने पर प्राप्त आव्यूह भी इसी क्रम का होता है।

यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}; B = [b_{ij}]_{m \times n}$ हो तो

$A + B = C \;\Rightarrow\; [a_{ij}\, b_{ij}]_{m \times n}$; योग का संचरण गुण (Closure Law)

(*ii*) यदि दो आव्यूह अनुकूलनीय (समान-क्रम के) हैं, तो

$A + B = B + A$ योग का क्रम-विनिमेयता गुण (Commutative Law for Addition)

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = B + A$ हो तो अनुकूलनीय आव्यूह का योग, क्रम विनिमेय गुण का पालन करते हैं।

(*iii*) यदि तीन आव्यूह A, B, C अनुकूलनीय हैं, तो

$(A + B) + C = A + (B + C)$ योग का साहचर्य गुण (Associative Low for Addition)

यहाँ $A = [a_{ij}]_{m \times n}; B = [b_{ij}]_{m \times n}; C = [c_{ij}]_{m \times n}$ हैं तो

$\therefore (A + B) + C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n}$

और $(A + B) + C = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij} + c_{ij}\,]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n}$

$\therefore (A + B) + C = A + (B + C)$

(*iv*) यदि A एक आव्यूह $m \times n$ क्रम का है और 0 (शून्य) आव्यूह भी उसी क्रम का है तो $A + 0 = A$ जहाँ; 0 (शून्य) आव्यूह का योग तत्समक अवयव (Identity Element) है।

(*v*) यदि A एक आव्यूह $m \times n$ क्रम का है और $A + (-A) = 0$ हो, तो $-A$ आव्यूह A आव्यूह का योग व्युत्क्रम (Additive Inverse) होता है।

दो आव्यूहों का अन्तर (Subtraction of Two Matrices)

$A = [a_{ij}]_{m \times n}; B = [b_{ij}]_{m \times n}$ तो दो आव्यूहों का अन्तर $A - B$, वह आव्यूह C है जिसमें यदि $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ यदि $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$

अर्थात् $c_{ij} = a_{ij} + (-\,b_{ij})$

नोट

दो आव्यूहों का अन्तर; A में B के योजनात्मक प्रतिलोम (Additive Inverse) अर्थात् $A - B$ जोड़ने पर मिलता है।

उदाहरण 2. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$; तो $A - B$ निकालो।

हल: $A - B = \begin{bmatrix} 1-7 & 2-3 & 4-2 \\ 0-5 & 5-1 & 3-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

18.6 आव्यूह गुणन (Matrix Multiplication)

यदि $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ क्रम का आव्यूह है तथा $B = [b_{ik}]$, $n \times p$ क्रम का आव्यूह है, तब A एवं B आव्यूहों का गुणन $AB = C$; जहाँ, $C = [c_{ik}]$, $m \times n$ क्रम का आव्यूह A है। अर्थात् यदि दो आव्यूह A और B अनुकूलनीय हों जिनमें A स्तम्भों की संख्या B की पंक्तियों के बराबर हो, तो दोनों आव्यूहों को गुणा कर सकते हैं और गुणन को AB से प्रदर्शित करते हैं।

इस प्रकार आव्यूह गुणन AB के व्यापक पद c_{ik} को प्राप्त करने की विधि यह है–

A की iवीं पंक्ति एवं B के kवें स्तम्भ के संगत रचकों (अवयवों) की गुणा करना व इनका योगफल लेना। इसे पंक्ति गुणित स्तम्भ विधि कहते हैं।

माना $A = [a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{in}]$ तथा $B = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$ हो तो AB का गुणनफल होगा–

$$[a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ c_{ik} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

जहाँ $c_{ik} = a_{i1}\ b_{1k} + a_{i2}b_{2k} \ldots + a_{ij}b_{ik} + \ldots + a_{in}b_{nk}$

यह ध्यान में रखने योग्य है कि **गुणन AB केवल तभी परिभाषित है जबकि आव्यूह A के स्तम्भों की संख्या B पंक्तियों की संख्या के बराबर है। इस स्थिति में आव्यूह A एवं B गुणन के लिये अनुकूलनीय हैं। अतः एक पंक्ति आव्यूह एवं स्तम्भ आव्यूह की गुणा कर सकते हैं यदि दोनों में रचकों की संख्या बराबर है।**

यदि आव्यूह A, $1 \times n$ क्रम का है एवं B, $n \times 1$ क्रम का है तब आव्यूह गुणन $A . B$, 1×1 क्रम का होगा किन्तु B तथा A व्यूह का गुणनफल $n \times n$ क्रम का होगा।

$$A . B = [a_1, a_2 \ldots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n]$$

नोट

$$B\,.\,A = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ : \\ b_n \end{bmatrix}_{1\times n} [a_1 a_2 \ldots a_n]_{1\times n} = \begin{vmatrix} b_1a_1 & b_1a_2\ldots.. & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2\ldots.. & b_2a_n \\ \ldots.. & \ldots\ldots\ldots.. & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots\ldots\ldots.. & \ldots.. \\ b_na_1 & b_na_2\ldots.. & b_na_n \end{vmatrix}.$$

उदाहरण 3. यदि $A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ **एवं** $B = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{vmatrix}_{3\times 3}$ **हो तो** AB

का मान ज्ञात कीजिये—

हल : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2.4 + 1.3 + 3.2 & 2.1 + (-1) + 3.3 & 2.2 + 1.5 + 3.1 \\ (-1)4 + 3.3 + 1.2 & (-1)\,.\,1 + 3(-1) + 1.3 & (-1)2 + 3.5 + 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 10 & 22 \\ 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

महत्त्वपूर्ण नोट—यदि आव्यूह A एवं B दोनों एक ही क्रम के वर्ग आव्यूह हैं तब AB एवं BA दोनों परिभाषित रहेंगे तथा दोनों उसी क्रम के वर्ग आव्यूह होंगे, फिर भी सामान्यत: (in general) $AB \neq BA$, अर्थात् आव्यूह गुणन क्रम विनिमेय (Commutative) नहीं है।

उदाहरण 4. यदि $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ **और** $B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

हो, तो AB का मान निकालिये।

हल : $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

इससे यह सिद्ध होता है कि आव्यूह गुणन एक शून्य आव्यूह है लेकिन $A \neq 0$ और $B \neq 0$.

आव्यूह गुणन का साहचर्य नियम

(*i*) आव्यूह गुणन का साहचर्य नियम (Associative Law of Matrix Multiplication)

यदि $A = [a_{ij}]_{,\, m\times n}$ क्रम का है, $B = [b_{ik}]$, $n \times p$ क्रम का है तथा $C = [c_{ik}]$, $p \times q$ क्रम का है, तब $A\,.\,(B\,.\,C) = (A\,.\,B)\,.\,C$, दोनों पक्ष $m \times q$ क्रम के आव्यूह हैं, अर्थात् आव्यूह गुणन सहचारी है।

यह सुगमता से सिद्ध कर सकते हैं।

मान लीजिये जहाँ $B.C = [d_{ji}]$, जहाँ

$$d_{ji} = b_{ji}\,c_{i1} + b_{j2}c_{2i} + \ldots. + b_{ip}C\pi = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{ki}$$

नोट

अतः $A \,.\, (B \,.\, C) = [c_{ij}]$, जहाँ $c_{ji} = a_{i1}d_{1i} + \ldots.\ a_{in}d_{ni}$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}d_{ji} = \sum_{j=1}^{n} n_{ij} \sum_{k=1}^{P} B_{jk}c_{ki}$$

चूँकि पदों की संख्या परिमित है, इसलिये योग का क्रम परिवर्तन करने पर

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum a_{ji}b_{jk}\right)c_{ki} = (A.B)\,.\,C$$

(*ii*) आव्यूह गुणन का वितरण नियम (Distributive Law of Matrix Multiplication)

यदि $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ क्रम का है, तथा $B = [b_{ik}]$, $C = [c_{jk}]$, $n \times p$ क्रम के हैं,

तब

$$A\,(B + C) = AB + AC$$

चूँकि $$B + C = [b_{ij}] + [c_{jk}] = [b_{jk}] + [c_{jk}]$$

अतः $$A(B + C) = [d_{ik}],$$

जहाँ $$d_{ik} = a_{i1}\,(b_{1k} + c_{1k}) + \ldots. + a_{in}\,(b_{nk} + c_{nk})$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}b_{jk} + a_{jj}c_{jk}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$$

अतः $$[d_{ik}] = AB + AC$$

अतः $A(B + C) = AB + AC$

इसी तरह यदि $B = [b_{ik}]$, $C = [c_{jk}]$, $n \times p$ क्रम के हैं एवं $A = [a_{ij}]$, $p \times n$ क्रम का है, तब $(B + C)A = BA + CA$.

उदाहरण 5. यदि $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **तथा** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **तो सिद्ध कीजिये:** $\mathbf{AB \neq BA}$.

हलः $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times0+2\times2+3\times-1 & 0\times0+1\times2+1\times-1 & 1\times0+-1\times2+0\times-1 \\ 1\times1+2\times1+3\times0 & 0\times1+1\times1+1\times0 & 1\times1+-1\times1+0\times0 \\ 1\times2+2\times-1+3\times1 & 0\times2+1\times-1+1\times1 & 1\times2+-1\times-1+0\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

नोट

अब, $$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\times1+1\times0+2\times1 & 2\times1+1\times0+-1-1\times1 & -1\times1+0\times0+1\times1 \\ 0\times2+1\times1+2\times-1 & 2\times2+1\times1+-1\times-1 & -1\times2+0\times1+1\times-1 \\ 0\times3+1\times1+2\times0 & 2\times3+1\times1+-1\times0 & -1\times3+0\times1+1\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -3 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

अत: $AB \neq BA.$

उदाहरण 6. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **तथा** $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **तो** AB **ज्ञात कीजिए।**

हल : $$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0\times0+1\times2 & 1\times0+0\times2 & 0\times0+1\times2 \\ 0\times1+1\times1 & 1\times1+0\times1 & 0\times1+1\times1 \\ 0\times2+1\times0 & 1\times2+0\times0 & 0\times2+1\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

निम्नलिखित कथनों में सत्य अथवा असत्य की पहचान करें

(State whether the following statements are True or False)

6. $A = A$; स्वतुल्य संबंध है जब A आव्यूह अनुकूलनीय है।
7. $A = B \Leftrightarrow B = A$ सममित संबंध है, जब A, B अनुकूलनीय हैं।
8. जब A, B, C आव्यूह अनुकूलनीय हैं तो $A = B$ और $B = C \Rightarrow A = C$ स्वतुल्य संबंध दिखाता है।
9. यदि तीन आव्यूह A, B, C अनुकूलनीय हैं तो $(A + B) + C = A + (B + C)$ योग का साहचर्य गुण दर्शाता है।
10. दो आव्यूहों का अंतर; A में B के योजनात्मक प्रतिलोम अर्थात् $A + B$ जोड़ने पर मिलता है।

18.7 सारांश (Summary)

- एक आयताकार अंकायत (Rectangular Arromy), जिसे पंक्तियों (Rows) तथा स्तम्भों में व्यवस्थित किया गया हो, आव्यूह कहलाता है।

नोट

- m पंक्तियों (Rows) और n स्तम्भों (Columns) में mn संख्याओं के विन्यास (Permutation) को $m \times n$ क्रम का आव्यूह (Matrix) कहते हैं।
- जैसे आयत (Rectangle) की दो विमायें लम्बाई और चौड़ाई हैं उसी प्रकार आव्यूह की विमायें पंक्तियों की संख्या × स्तम्भों की संख्या होती है। परिभाषा में दिये हुए आव्यूह को A, B, C आदि से संकेत करते हैं। जैसे $A_{m \times n}, B_{2 \times 3}, C_{1 \times 3}$ इत्यादि।
- यदि किसी भी आव्यूह में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्याएँ m और n हों, तो आयताकार अभ्यास में कुल $m \times n$ अवयवों की संख्या होगी।
- यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या बराबर है तब उसे वर्ग आव्यूह कहते हैं।
- यदि $n = 1$, तब आव्यूह में केवल एक स्तम्भ रहेगा और पंक्तियों की संख्यायें अनेक, इसे स्तम्भ आव्यूह कहेंगे।
- यदि किसी आव्यूह के सभी अवयव शून्य हों, तो वह शून्य आव्यूह कहलाता है।
- यह एक वर्ग आव्यूह है जिसके सभी विकर्ण अवयव (Diagonal Elements) इकाई हैं और अन्य अवयव शून्य हैं। इसे तत्समक या इकाई आव्यूह कहते हैं।
- यदि किसी वर्ग आव्यूह के प्रमुख विकर्ण पर स्थित अवयवों को छोड़कर शेष सब शून्य हैं, तब उसे विकर्ण आव्यूह कहते हैं।
- वह विकर्ण आव्यूह, जिसके सभी विकर्ण अवयव समान हों, स्केलर आव्यूह कहलाता है।
- वह वर्ग आव्यूह, जिसके मुख्य विकर्ण के ऊपर के अवयव शून्य हों, अधोत्रिकोणी आव्यूह (Lower Triangular Matrix) कहते हैं।
- वह वर्ग आव्यूह जिसके प्रधान विकर्ण के सब अवयव शून्य हों, आव्यूह का उपरित्रिकोणी (Upper Triangular) कहलाता है।
- वर्ग आव्यूह के प्रधान विकर्ण के सभी अवयवों का जोड़, आव्यूह का विकर्ण योग कहलाता है।
- वह वर्ग आव्यूह A (क्रम $n \times n$), जिसके प्रत्येक $(i-j)^{\text{th}}$ घटक (अवयव) के लिये $a_{ij} = a_{ji}$ हो, सममित आव्यूह कहलाता है।
- वह वर्ग आव्यूह A (क्रम $n \times n$), जिसके प्रत्येक $(i-j)^{\text{th}}$ जिनके प्रत्येक रचक के लिये $a_{ji} = a_{ij}$ हो, विषम-सममित आव्यूह कहलाता है।

18.8 शब्दकोश (Keywords)

- आव्यूह (Matrix): आयताकार अंकायत।
- अवयव (Elements): तत्व।

18.9 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$;तो $A + B$ निकालिए। (**उत्तर:** $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}$)

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; तो $A + B$ का मान निकालिए। (**उत्तर:** $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 5 & 9 & 13 \end{bmatrix}$)

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; तो $A - B$ निकालें। (**उत्तर:** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$)

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ हो, तो AB निकालें।

(**उत्तर:** $\begin{bmatrix} 17 & 10 & 22 \\ 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}_{2\times 3}$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. व्यूह	2. $m \times n$	3. वर्ग	4. शून्य	5. विकर्ण
6. सत्य	7. सत्य	8. असत्य	9. सत्य	10. असत्य

18.10 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रेन्टिस हॉल इन्डिया।*
6. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रेन्टिस हॉल पब्लि.*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*

नोट

इकाई–19 : परिवर्त और प्रतिलोम आव्यूह (Transpose and Inverse of Matrix)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- आव्यूह के परिवर्त को जानने हेतु।
- दो आव्यूह के गुणन के परिवर्त की जानकारी प्राप्त करने में।
- नियमित आव्यूह को समझने में।
- आव्यूह के व्युत्क्रम या प्रतिलोम संबंधी प्रश्नों को हल करने में मदद मिलेगी।
- लांबिक आव्यूह संबंधी बातों को जानने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

प्रस्तुत पाठ में आव्यूह के परिवर्त और प्रतिलोम आदि की चर्चा है। इसके अंतर्गत यदि A एक $m \times n$ क्रम का आव्यूह है, तब इसकी पंक्तियों एवं स्तंभों को आपस में बदलने से जो $n \times m$ आव्यूह प्राप्त होगा, उसे A का परिवर्त कहेंगे।

यदि आव्यूह A एवं B गुणन के लिए अनुकूलनीय हैं, तो AB का परिवर्त उत्क्रम में परिवर्तों के गुणनफल के बराबर होगा।

19.1 आव्यूह का परिवर्त (Transpose of a Matrix)

यदि A एक $m \times n$ क्रम का आव्यूह है, तब इसकी पंक्तियों एवं स्तम्भों को आपस में बदलने से जो $n \times m$ आव्यूह प्राप्त होगा, उसे A का परिवर्त कहेंगे तथा A' या A^t या A^T से दर्शायेंगे।

उदाहरणार्थ, यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ तब } A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

स्पष्ट है कि अवयव A_{ij}, जो आव्यूह A की iवीं पंक्ति एवं jवें स्तम्भ में था, परिवर्त आव्यूह A' की jवीं पंक्ति एवं iवें स्तम्भ पर रहेगा। अत: यदि

$$A = [a_{ij}] \text{ एवं } A' = [a_{ij}] \quad \Rightarrow \quad a_{ij}' = a_{ij}$$

नोट–यदि हम A' का परिवर्त लेंगे, तो फिर से A प्राप्त हो जायेगा।

$\therefore$ $$(A')' = (A^T)^T = [A^t]^t = A$$

इसी प्रकार $[KA]' = KA'$; यहाँ K एक अदिश राशि (Scalar) है।

प्रमेय 1– यदि A एवं B दोनों $m \times n$ क्रम के आव्यूह हैं, तब

$$(A + B)' = A' + B'$$

उपपत्ति–हमें ज्ञात है कि A एवं B योग के अनुकूलनीय होंगे यदि दोनों एक ही क्रम $m \times n$ के हों। अत: मान लीजिए।

$A = [a_{ij}]$ एवं $B = [b_{ij}]$ तब, $C = A + B = [c_{ij}]$, जहाँ, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$

अब $A' = [a_{ji}]$, $B' = [b_{ji}]$, जहाँ $a_{ji} = a_{ij}$ और $b_{ji} = b_{ij}$

$$(A + B)' = C' = [c_{ji}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = A' + B'.$$

19.2 दो आव्यूह के गुणन के परिवर्त (Transpose of Product of Two Matrices)

प्रमेय 2–यदि आव्यूह A एवं B गुणन के लिये अनुकूलनीय हैं, तो AB का परिवर्त उत्क्रम में परिवर्तों के गुणनफल के बराबर होगा अर्थात् यदि A एवं B क्रमश: $m \times n$ एवं $n \times p$ क्रम के हैं, तब $(AB)' = B'A'$

उपपत्ति–AB का क्रम $m \times p$ है, तो $(AB)'$ क्रम $p \times m$ का होगा, B' का क्रम $p \times n$ एवं A' का क्रम $n \times m$ का है, अत: $B'A'$, $p \times m$ क्रम का होगा। अर्थात् दोनों $(AB)'$ एवं $B'.A'$ बराबर क्रम के हैं।

मान लो तब $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$, तब

$(AB)'$ का $(k - i)$वाँ अवयव $= (AB)$ का $(i - k)$वाँ अवयव

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$(B)' = (b_{kj})$, $A' = (a_{ji})$, जहाँ; $b_{jk}' = b_{jk}'$, $a_{ji}' = a_{ij}'$

अत: $B'A'$ का $(k - i)$वाँ अवयव $= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} b_{ij}$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

अर्थात् $B'A$ का $(k-i)$वाँ अवयव $= (AB)'$ का $(k-i)$वाँ अवयव

$$\therefore \qquad (AB)' = B' \,.\, A'$$

इस परिणाम को अनुकूलनीय क्रम के किसी भी संख्या के आव्यूहों तक व्यापक किया जा सकता है, अर्थात् $(ABC........L.M)' = M' \; L'........C' \; B' \; A'$

नोट्स यदि $A = B$ तब $(A^2)' = A' \,.\, A' = (A')^2$ इसी प्रकार A की कोई भी धनात्मक पूर्णांक (Positive Integer) घात लेने पर $(A^k)' = (A')^k$.

19.3 नियमित आव्यूह (Regular Matrix)

वर्ग-आव्यूह A को नियमित कहेंगे यदि B ऐसे आव्यूह अस्तित्व में हैं जब $BA = I$, जहाँ I उसी क्रम का तत्समकारी आव्यूह है।

क्या आप जानते हैं जो वर्ग-आव्यूह नियमित नहीं है, उसे विचित्र (Singular) आव्यूह कहते हैं।

हम यह सिद्ध करना चाहेंगे कि यदि $BA = I$ है, $AB = I$ भी होगा। आव्यूह-गुणन के रूप में सिद्ध करना होगा कि यदि

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \delta_{up}; \; i, j = 1, 2, ..., n$$

तब

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ij} = \delta_{ij}; \; i, j = 1, 2, ..., n$$

जो कि न केवल सत्य है वरन् स्पष्ट है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)−

1. यदि आव्यूह A एवं B गुणन के लिए अनुकूलनीय हैं, तो AB का परिवर्त उत्क्रम परिवर्तों के ········· के बराबर होता है।
2. वर्ग-आव्यूह A को नियमित कहेंगे यदि B ऐसे आव्यूह अस्तित्व में हैं जब $BA = \mathrm{I}$, जहाँ I उसी क्रम का ········· आव्यूह है।
3. किसी व्युत्क्रमणीय आव्यूह का प्रतिलोम ········· होता है।
4. यदि A ········· वर्ग आव्यूह है, तब $AB = 0 \Rightarrow B = 0$
5. यदि $AA' = \mathrm{I}$ तो A को ········· आव्यूह कहते हैं।

19.4 आव्यूह के व्युत्क्रम या प्रतिलोम (Inverse or Opposite of Matrix)

नोट

यदि वर्ग-आव्यूह A नियमित है तब ऐसे वर्ग आव्यूह B का अस्तित्व है कि $BA = AB = I$

अत: हम नियमित आव्यूह A को व्युत्क्रमणीय (Invertible) कहेंगे तथा B को A का प्रतिलोम कहेंगे एवं उसे A^{-1} दर्शायेंगे। इस स्थिति में व्यूह का व्युत्क्रम निम्न प्रकार निकाला जाता है–

(*i*) व्यूह A के अवयवों a_{ij} के सह-खण्डों (co-factors) c_{ji} से प्रतिस्थापित करके व्यूह का परिवर्त (Transpose) बना लेते हैं। इस प्रकार बने परिवर्तित व्यूह को A का सहखंडज (Adjoint) कहते हैं ताकि

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21}\ldots\ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22}\ldots\ldots & c_{n2} \\ \vdots & & \\ c_{1n} & c_{2n}\ldots\ldots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

(*ii*) Adj. (*A*) को A के सारणिक $|A|$ से भाग देते हैं। (यदि $|A| \neq 0$)

$$\frac{\text{Adj}\,(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}}{|A|} & \frac{c_{21}}{|A|}\cdots & \frac{c_{n1}}{|A|} \\ \frac{c_{12}}{|A|} & \frac{c_{22}}{|A|}\cdots & \frac{c_{n2}}{|A|} \\ \vdots & & \\ \frac{c_{1n}}{|A|} & \frac{c_{2n}}{|A|}\cdots & \frac{c_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

$\text{Adj.}\left|\frac{(A)}{|A|}\right|$ ही अभिष्ट A^{-1} होता है।

उदाहरण 1: यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ हों तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल : हमें ज्ञात है कि $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj.}A}{|A|}$

दिये हुए आव्यूह का परिवर्त (Transpose of Matrix) बनाने पर

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

सहखण्डज (Adjoint) ज्ञात करने के लिए आव्यूह $A\,(a_{ij})$ के सहखंडज निम्न प्रकार निकालेंगे–

$$\text{सहखण्ड } 1 = +\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} = 36 - 25 = 11$$

$$\text{सहखण्ड } 2 = -\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = (24 - 15) = -9$$

नोट

$$\text{सहखण्ड } 3 = +\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 10 - 9 = 1$$

$$\text{सहखण्ड } 2 = -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} = 24 - 15 = -9$$

$$\text{सहखण्ड } 3 = +\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = 12 - 9 = 3$$

$$\text{सहखण्ड } 5 = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -(5-6) = -(-1) = +1$$

$$\text{सहखण्ड } 3 = +\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = (10 - 9) = 1$$

$$\text{सहखण्ड } 5 = -\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = -(5-6) = +1$$

$$\text{सहखण्ड } 12 = +\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (3 - 4) = -1$$

$$Adj.\ A = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 1\,(36 - 25) - 2\,(24 - 15) + 3\,(10 - 9)$$

$$= (1 \times 11) - (2 \times 9) + (3 \times 1) = 11 - 18 + 3 = -4$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ A}{|A|} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

व्युत्क्रम आव्यूह के गुणधर्म (Properties of Inverse Matrices)

किसी व्युत्क्रमणीय आव्यूह का प्रतिलोम (Inverse) अद्वितीय होता है। अद्वितीय का अर्थ है–यदि A का प्रतिलोम B है, तो B के अलावा कोई दूसरा आव्यूह A का प्रतिलोम नहीं है।

उपपत्ति–यदि सम्भव है, तो मान लो B एवं C दोनों आव्यूह A के प्रतिलोम हैं। तब

$$A\,B = BA = I$$

तथा

$$AC = CA = I$$

$$AB = AC = \ \Rightarrow\ B(AB) = B(AC)$$

$$\Rightarrow \qquad (BA)B = (BA)C$$

नोट

$\Rightarrow \qquad IB = IC$

$\Rightarrow \qquad B = C$

(ii) यदि A एवं B व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तथा उनका क्रम n है, तब उनका गुणन AB भी व्युत्क्रमणीय है तथा $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

उपपत्ति– चूँकि A एवं B व्युत्क्रमणीय हैं, अत: A^{-1} एवं B^{-1} का अस्तित्व है; परिणामत:

$(B^{-1} A^{-1}) (AB) = B^{-1} (A^{-1} A)B$ ∴ गुणन सहचारी है।

$$= B^{-1} (IB) A^{-1} A = 1$$

$$= B^{-1} B = I$$

पुन: $\qquad (AB) (B^{-1} A^{-1}) = A (BB^{-1}) A^{-1}$

$$= A(IA^{-1})$$

$$= AA^{-1} = I$$

अत: AC व्युत्क्रमणीय है एवं $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

टिप्पणी–(i) यदि $A, B, C, \ldots, AM$ समान क्रम के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं, तब $(A.B.C.....M)$ $= M^{-1} \ldots C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

(ii) यदि A नियमित वर्ग-आव्यूह है, तब $AB = 0 \Rightarrow B = 0$;

यदि B नियमित वर्ग-आव्यूह है, तब $AB = 0 \Rightarrow A = 0$

(iii) आव्यूह में परिवर्त एवं व्युत्क्रमणीय संक्रिया क्रम-विनिमेय (Commutative) है।

$$(A')^{-1} = (A^{-1})^1.$$

19.5 लाम्बिक आव्यूह (Orthogonal Matrix)

यदि $AA' = I$ तो A को लाम्बिक आव्यूह कहते हैं।

अस्वैच्छिक Involuntary आव्यूह

यदि A वर्ग आव्यूह है और $A^2 = I$ (तत्समक या इकाई), तो A को अस्वैच्छिक (Involuntary) आव्यूह कहते हैं।

उदाहरण: दर्शाइए कि निम्नलिखित रूप के 2×2 आव्यूहों के लिये गुणन क्रम-विनिमेय हैं–

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ -\boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

हल : यहाँ
$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax - by & ay + bx \\ -bx - ay & -by + ax \end{bmatrix}$$

तथा
$$BA = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa - yb & xb + ya \\ -ya - xb & -yb + xa \end{bmatrix}.$$

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

निम्नलिखित कथनों में सत्य अथवा असत्य की पहचान करें

(State whether the following statements are True or False)–

6. व्यूह A के अवयवों a_{ij} के सह-खंडों C_{ji} से प्रतिस्थापित करके व्यूह का परिवर्त बना लेते हैं। इस प्रकार बने परिवर्तित व्यूह को A का सहखंडज कहते हैं।
7. किसी व्युत्क्रमणीय आव्यूह का प्रतिलोम अद्वितीय नहीं होता है।
8. यदि B नियमित वर्ग आव्यूह है, तब $AB = 0 \Rightarrow A = 0$.
9. यदि $AA' = \text{I}$ तो A को शून्य आव्यूह कहते हैं।
10. यदि वर्ग आव्यूह A है और $A^2 = \text{I}$, तो A को अस्वैच्छिक आव्यूह कहते हैं।

19.6 सारांश (Summary)

- यदि A एक $m \times n$ क्रम का आव्यूह है, तब इसकी पंक्तियों एवं स्तम्भों को आपस में बदलने से जो $n \times m$ आव्यूह प्राप्त होगा, उसे A का परिवर्त कहेंगे तथा A' या A^t या A^T से दर्शायेंगे।
- आव्यूह A एवं B गुणन के लिये अनुकूलनीय हैं, तो AB का परिवर्त उत्क्रम में परिवर्तों के गुणनफल के बराबर होगा अर्थात् यदि A एवं B क्रमशः $m \times n$ एवं $n \times p$ क्रम के हैं, तब $(AB)' = B' .A'$.
- वर्ग-आव्यूह A को नियमित कहेंगे यदि B ऐसे आव्यूह अस्तित्व में हैं जब $BA = I$, जहाँ I उसी क्रम का तत्समकारी आव्यूह है।
- हम नियमित आव्यूह A को व्युत्क्रमणीय (Invertible) कहेंगे तथा B को A का प्रतिलोम कहेंगे एवं उसे A^{-1} दर्शायेंगे।
- किसी व्युत्क्रमणीय आव्यूह का प्रतिलोम (Inverse) अद्वितीय होता है। अद्वितीय का अर्थ है–यदि A का प्रतिलोम B है, तो B के अलावा कोई दूसरा आव्यूह A का प्रतिलोम नहीं है।
- यदि A एवं B व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तथा उनका क्रम n है, तब उनका गुणन AB भी व्युत्क्रमणीय है तथा $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- यदि $A, B, C, \ldots, AM$ समान क्रम के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं, तब $(A.B.C....M) = M^{-1} \ldots C^{-1} B^{-1} A^{-1}$ यदि A नियमित वर्ग-आव्यूह है, तब $AB = 0 \Rightarrow B = 0$;
- यदि B नियमित वर्ग-आव्यूह है, तब $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ आव्यूह में परिवर्त एवं व्युत्क्रमणीय संक्रिया क्रम-विनिमेय (Commutative) है।
- यदि $AA' = I$ तो A को लाम्बिक आव्यूह कहते हैं।
- यदि A वर्ग आव्यूह है और $A^2 = I$ (तत्समक या इकाई), तो A को अस्वैच्छिक (Involuntary) आव्यूह कहते हैं।

19.7 शब्दकोश (Keywords)

- अदिश (Scalar): जिसका परिमाण हो, परन्तु दिशा नहीं।
- व्युत्क्रम (Inverse): प्रतिलोम।

VED1
E\L-LOVELY-H\math19-1 IInd 21-10-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 VIth 10-9-12 VIIth 11-5-13

19.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

नोट

1. सिद्ध करें कि $(A + B)' = A' + B.'$
2. साबित करें कि $(AB)' = B'. A.'$
3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ हों, तो A^{-1} निकालें। (**उत्तर:** $\begin{bmatrix} \frac{-11}{4} & \frac{9}{4} & \frac{-10}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. गुणन	2. तत्समकारी	3. अद्वितीय	4. नियमित	5. लाम्बिक
6. सत्य	7. असत्य	8. सत्य	9. असत्य	10. सत्य

19.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
3. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*

नोट

इकाई–20 : क्रेमर के नियम (Cramer's Rule)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- युगपत समीकरणों को हल करने की विधि को सीख पाएँगे।
- क्रेमर के नियम से अवगत होंगे।

प्रस्तावना (Introduction)

क्रेमर ने युगपत समीकरणों को हल करने की सरल विधि की खोज की जिसे सारणिक विधि की संज्ञा देते हैं। इस विधि से समीकरणों को आसानी से हल किया जा सकता है।

20.1 युगपत समीकरणों का हल (क्रेमर के नियम) [Solution to Simultaneous Equations (Cramer's Rule)]

युगपत समीकरणों का हल सारणिक द्वारा आसानी से निम्न प्रकार निकाला जा सकता है–

पहले हम दो चरों के युगपत समीकरणों को हल करेंगे–

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad \ldots(i)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad \ldots(ii)$$

नोट

चरों (x और y) के गुणांकों का सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ हैं, x का मान निकालने के लिए गुणांकों के सारणिक के गुणांकों के स्तम्भ के स्थान पर अचरों का स्तम्भ लिख देते हैं, अतएव सारणिक $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ हो जायेगा। इसी प्रकार y का मान निकालने के लिए y के गुणांकों के स्तम्भ के स्थान पर अचरों का स्तम्भ लिख देते हैं। इसे हम निम्न प्रकार लिख देते हैं–

$$\frac{x}{\text{(सारणिक जिसमें } x \text{ के गुणांकों के स्तम्भ के स्थान पर अचरों का स्तम्भ है)}} = \frac{y}{\text{(सारणिक जिसमें } y \text{ के गुणांकों के स्तम्भ के स्थान पर अचरों का स्तम्भ है)}} = \frac{1}{(x, y \text{ के गुणांकों का सारणिक})}$$

यहाँ पर उल्लेखनीय है कि प्रत्येक समीकरण में समस्त अचर राशियाँ (=) चिह्न के दाईं ओर लिख लेते हैं। इसे क्रेमर के नियम के अनुसार निम्न प्रकार हल किया जा सकता है–

$$x = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$$ उपरोक्त को हम इस रूप में भी लिख सकते हैं–

$$\frac{x}{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{y}{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$$

इस प्रकार दो से अधिक चरों के समीकरणों को भी हल किया जा सकता है।

उदाहरण 1. सारणिक का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

$$\mathbf{3x + 4y = 5}$$
$$\mathbf{3x - 4y = 2}$$

हल : गुणांकों का सारणिक $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ है तथा अचरों का स्तम्भ $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ है, अतः

$$\frac{x}{\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}} = \frac{y}{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}}$$

अथवा $$\frac{x}{(-20-8)} = \frac{y}{(6-15)} = \frac{1}{(-12-12)}$$

या $$\frac{x}{-28} = \frac{y}{-9} = \frac{1}{-24}$$

नोट

अत:
$$x = \frac{-28}{-24} = \frac{7}{6}$$
$$y = \frac{-9}{-24} = \frac{3}{8}.$$

टास्क दो चरों वाला एक युगपत समीकरण लिखें।

आइये, अब निम्नलिखित युगपत समीकरणों के समुच्चय पर विचार करें–

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

उपर्युक्त समीकरणों को क्रेमर के नियम (Cramer's Rule) के अनुसार आव्यूह के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है–

$$AX = z \qquad \ldots(i)$$

यहाँ, A = गुणांक a_{ij} का व्यूह है

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

X = चरों का स्तम्भ सदिश

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ और C = अचरों का स्तम्भ सदिश

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) को A^{-1} से पूर्व गुणन करने पर

$$A^{-1} AX = A^{-1} Z$$

अथवा
$$X = A^{-1} Z \qquad [\because AA^{-1} = I]$$

अथवा
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

यहाँ $C_{ij} a_{ij}$ के संगत सहखण्ड हैं।

अतएव
$$X = \frac{z_1c_{11} + z_2c_{21} + z_3c_{31}}{|A|}$$

इसी प्रकार, x_2 तथा x_3 का मान निकाला जा सकता है।

उदाहरण 2. आव्यूह के प्रयोग द्वारा हल कीजिये– **नोट**

$$4x + 2y = 2 \quad \ldots(i)$$

$$3x + 5y = 21 \quad \ldots(ii)$$

हल : उपर्युक्त समीकरणों को आव्यूह के रूप में लिखने पर

$$AX = Z$$

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 21 \end{bmatrix}$

क्रेमर के नियम का प्रयोग करने पर

$$X = A^{-1}Z$$

$$= \frac{\text{Adjoint}A}{|A|} . Z$$

A^{-1} ज्ञात करने के लिये पहले हमें दिये हुए आव्यूह का परिवर्त (Transpose) करना होगा–

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjoint } A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

सहखण्ड $4 = +5$

सहखण्ड $3 = -2$

सहखण्ड $2 = -3$

सहखण्ड $5 = +4$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{-2}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$$

अब $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{-2}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 21 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{14} \times 2\right) + \left(\frac{-2}{14} \times 21\right) \\ \left(\frac{-3}{14} \times 2\right) + \left(\frac{4}{14} \times 21\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} - 3 \\ \frac{-3}{7} + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-16}{7} \\ \frac{39}{7} \end{bmatrix}$$

अत: $x = \frac{-16}{7}$ तथा $y = \frac{39}{7}$ होगा।

नोट

उदाहरण 3. आव्यूह प्रणाली से हल कीजिए–

$$x - 2y + 3z = 1 \qquad ...(i)$$

$$3x - y + 4z = 3 \qquad ...(ii)$$

$$2x + y - 2z = -1 \qquad ...(iii)$$

हल : उपर्युक्त समीकरणों को आव्यूह के रूप में लिखने पर

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

क्रेमर नियम का प्रयोग करने पर

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{सहखण्ड } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{सहखण्ड } 1 = + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = +(-2-4) = -6$$

$$\text{सहखण्ड } 3 = - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -(-4-3) = -1$$

$$\text{सहखण्ड } 2 = + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = +(-8+3) = -5$$

$$\text{सहखण्ड } -2 = - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = -(-6-8) = +14$$

$$\text{सहखण्ड } -1 = + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = +(-2-6) = -8$$

$$\text{सहखण्ड } 1 = - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -(4-9) = +5$$

$$\text{सहखण्ड } 3 = + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = +(3+2) = +5$$

$$\text{सहखण्ड } \ 4 = - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -(1+4) = -5$$

$$\text{सहखण्ड } -2 = + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = +(-1+6) = +5$$

नोट

$$\text{Adjoint } A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -5 \\ +14 & -8 & +5 \\ +5 & -5 & +5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \times (2 - 4) + 2\ (-6 - 8) + 3\ (3 + 2)$$

$$= -2b\ - 28 = 15 = -15$$

अत:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj.}A}{|A|} = \frac{1}{-15}\begin{bmatrix} -6 & -1 & -5 \\ 14 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-6}{-15} & \frac{1}{15} & \frac{5}{15} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{5}{15} \\ -\frac{5}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{5}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

अब,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \times 1 + \frac{3}{15} - \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} + \frac{24}{15} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{15} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अत: हल करने पर $x = -\frac{8}{15}$, $y = 1$, $z = 1$ प्राप्त होंगे।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. युगपत समीकरणों का हल ········· द्वारा आसानी से किया जा सकता है।

2. $\dfrac{x}{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \dfrac{y}{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}$ = ·········

3. A^{-1} ज्ञात करने के लिए पहले दिए हुए आव्यूह का ········· करना होता है।

नोट

20.2 सारांश (Summary)

- युगपत समीकरणों का हल सारणिक द्वारा आसानी से निम्न प्रकार निकाला जा सकता है–

  पहले हम दो चरों के युगपत समीकरणों को हल करेंगे–

  $a_1x + b_1y = c_1$
  $a_2x + b_2y = c_2$

  चरों (x और y) के गुणांकों का सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ हैं, x का मान निकालने के लिए गुणांकों के सारणिक के गुणांकों के स्तम्भ के स्थान पर अचरों का स्तम्भ लिख देते हैं।

20.3 शब्दकोश (Keywords)

- युगपत (Simulteneous): साथ-साथ।

20.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल करें–

   (*i*) $4x + 2y = 2;\ 3x - 5y = 21$

   (*ii*) $2x - 3y + 4z = 8$

   $3x - 4y + 5z = -4$

   $4x - 5y + 6z = 12$ (**उत्तर:** (*i*) $x = 2, y = 3$ (*ii*) $x = 1, y = 2, z = 3$)

2. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = a+b+c.$$

3. सारणिक का प्रयोग करके निम्न समीकरण को हल करें–

$$3x + 4y = 5$$

$$3x - 4y = 2$$

(**उत्तर:** $x = \frac{7}{6}, y = \frac{3}{8}$)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. सारणिक 2. $\dfrac{1}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$ 3. परिवर्त

नोट

20.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
2. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
6. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*

नोट

इकाई–21 : सारणिक : प्रकार एवं गुण-धर्म (Determinant : Types and Properties)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- सारणिक की परिभाषा को समझने में।
- सारणिक की पंक्तियाँ तथा स्तंभों की जानकारी प्राप्त करने हेतु।
- सारणिक का रूप तथा उसके अवयव संबंधी जानकारी प्राप्त करने में।
- सारणिक का विस्तार से संबंधित प्रश्नों को हल करने हेतु।
- सह-खंड संबंधी प्रश्नों को हल करने की जानकारी हेतु।
- सारणिकों के गुण-धर्म से अवगत होंगे।
- सारणिकों का गुणनफल ज्ञात करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

नोट

युगपत समीकरणों को हल करना बहुत कठिन होता है क्योंकि इन समीकरणों में जितने चरों की संख्या होती है उतने ही समीकरण होते हैं। इन समीकरणों के आसान हल के लिए बीजगणित में विशेष विधि का प्रयोग किया जाता है, जिसे सारणिक (Determinant) कहते हैं।

21.1 सारणिक की परिभाषा (Definition of Determinant)

निम्नलिखित दो एकघातीय समीकरणों पर विचार कीजिये–

$$a_1x + b_1y = 0 \qquad ...(i)$$

$$a_2x + b_2y = 0 \qquad ...(ii)$$

उपर्युक्त समीकरणों से x और y का विलीयन (Elimination) करने के लिए समीकरण (i) को a_2 से और समीकरण (ii) को a_1 करके घटाने पर

$$(b_1a_2 - b_2a_1)\ y = 0$$

या $$b_1a_2 - b_2a_1 = 0$$

या $$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

व्यंजक $(a_1b_2 - a_2b_1)$ को निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित किया गया है–

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

जिसे **सारणिक** (Determinant) कहते हैं।

$$\therefore \qquad a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

व्यंजक $(a_1b_2 - a_2b_1)$ को इस सारणिक का **प्रसार** (Expansion) अथवा **मान** (Value) कहते हैं।

उपर्युक्त सारणिक में दो **पंक्तियाँ** (Rows) तथा दो **स्तम्भ** (Columns) हैं। अत: उपर्युक्त सारणिक, **द्वितीय कोटि** अथवा **द्वितीय क्रम** (Second Order) का सारणिक कहलाता है। **व्यंजक** $(a_1b_2 - a_2b_1)$ को इस **सारणिक का विस्तार** (Expansion) कहते हैं। a_1, a_2, b_1, b_2 सारणिक के **अवयव** (Constituents) कहलाते हैं तथा a_1, b_2 और a_2, b_1 इसके अंग (Elements) कहलाते हैं।

अब निम्नलिखित तीन एकघातीय समीकरणों पर विचार कीजिए–

$$a_1 + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2 + b_2y + c_2z = 0$$

$$a_3 + b_3y + c_3z = 0$$

इन तीनों समीकरणों से x, y, z का विलोपन करने पर निम्नलिखित फल प्राप्त होता है–

$$a_1\ (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1\ (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1\ (a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

अथवा

$$a_1\ (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2\ (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3\ (b_1c_2 - b_2c_1) = 0$$

नोट

प्राप्त फल में प्राप्त बाईं ओर के व्यंजक को निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित किया गया है–

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

जिसे **तृतीय कोटि** (Third Order) का सारणिक कहते हैं। तृतीय कोटि के सारणिक में **तीन पंक्तियाँ** (Rows) तथा **तीन स्तम्भ** (Columns) होते हैं।

> *नोट्स* बाईं ओर के व्यंजक को उपर्युक्त सारणिक का **प्रसार** (Expansion) अथवा **मान** (Value) कहते हैं।

21.2 सारणिक की पंक्तियाँ तथा स्तम्भ (Rows and Columns of a Determinant)

किसी सारणिक में, ऊपर से नीचे की ओर **क्षैतिज रेखायें** उसकी क्रमशः पहली, दूसरी, तीसरी **पंक्तियाँ** (Rows) कहलाती हैं जिन्हें क्रमशः $R_1, R_2, R_3,$....द्वारा व्यक्त करते हैं तथा बाईं ओर से दाईं ओर **ऊर्ध्वाधर** रेखायें उसके क्रमशः पहले, दूसरे तीसरे....**स्तम्भ** (Columns) कहलाते हैं जिन्हें क्रमशः C_1, C_2, C_3....द्वारा व्यक्त करते हैं।

21.3 सारणिक का रूप और उसके अवयव (Shape and Constituents of a Determinant)

प्रत्येक सारणिक का रूप वर्गाकार होता है। अतः कोई सारणिक जितने कोटि (Order) का होगा उसमें उतनी ही पंक्तियाँ और उतने ही स्तम्भ होंगे।

उदाहरणार्थ–तृतीय कोटि (Third Order) की सारणिक में 3 पंक्तियाँ तथा 3 स्तम्भ होते हैं और कुल अवयवों की संख्या 3^2 अर्थात् 9 है। अतः n कोटि के सारणिक में n पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होंगे तथा कुल अवयवों की संख्या n^2 होगी।

> *क्या आप जानते हैं* सारणिक में अवयवों की संख्या = (सारणिक की कोटि)^2

21.4 सारणिक का विस्तार (Expansion of a Determinant)

द्वितीय कोटि की सारणिक का विस्तार निम्न प्रकार करते हैं–

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \\ & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & b_1 \\ a_2 & \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

नोट

उदाहरणार्थ– $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & \\ & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & 2 \\ -3 & \end{vmatrix}$

$$= (4 \times 5) - (-2 \times -3) = 20 - 6 = 14$$

तृतीय कोटि (Third Order) के सारणिक का विस्तार

मान लो तृतीय कोटि का सारणिक है–

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

सारणिक का विस्तार साधारणतया पहली पंक्ति (Row) के अवयवों के सापेक्ष अथवा पहले स्तम्भ (Column) के अवयवों के सापेक्ष किया जाता है।

(*i*) पहली पंक्ति के अवयवों (a_1 b_1 c_1) के सापेक्ष विस्तार (Expansion in Terms of First Row)–

कल्पना करो कि $\Delta = a_1A - b_1B + c_1C$ ...(1)

जहाँ A, B, C क्रमशः सारणिकों को प्रकट करते हैं।

नोट– विस्तार में पदों के चिह्न क्रमशः +, –, +, –, ... क्रम में लेते हैं।

A, B, C को निम्नलिखित विधि द्वारा ज्ञात करते हैं–

$A = a_1$ जिस पंक्ति तथा स्तम्भ में आता है उन्हें छोड़ने पर प्राप्त सारणिक

$B = b_1$ जिस पंक्ति तथा स्तम्भ में आता है उन्हें छोड़ने पर प्राप्त सारणिक

$C = c_1$ जिस पंक्ति तथा स्तम्भ में आता है उन्हें छोड़ने पर प्राप्त सारणिक

यहाँ, a_1 पहली पंक्ति तथा पहले स्तम्भ में आता है; अतः इन्हें छोड़ने पर प्राप्त सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार, b_1 पहली पंक्ति तथा दूसरे स्तम्भ में आता है, अतः इन्हें छोड़ने पर प्राप्त सारणिक

$$|B| = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

तथा c_1 पहली पंक्ति तथा तीसरे स्तम्भ में आता है, अतः इन्हें छोड़ने पर प्राप्त सारणिक

$$|C| = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

समीकरण (1) से, दिये हुए सारणिक का विस्तार करने पर पाते हैं–

$$a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1 (b_2c_3 - c_2b_3) - b_1 (a_1c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_1c_3 - b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3$$

नोट

टास्क तृतीय कोटि की सारणिक में पंक्तियों तथा स्तंभों की संख्या कितनी होती है?

(*ii*) पहले स्तम्भ के अवयवों ($a_1 a_2 a_3$) के सापेक्ष विस्तार (Expansion in Terms of First Column)–

कल्पना कीजिए कि $\Delta = a_1 P - a_2\, Q + a_3 R$ ...(2)

जहाँ P, Q, R क्रमश: सारणिकों को प्रकट करते हैं।

a_1, a_2 तथा a_3 जिन पंक्तियों तथा स्तम्भों में आते हैं, उन्हें छोड़कर, ऊपर की भाँति लिखने पर–

$$P = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Q = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, R = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ समीकरण (2) से

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\,(b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2(b_1 c_3 - c_1 b_3) + a_3(b_1 c_2 - c_1 b_2)$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 c_1 b_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 c_1 b_2$$

स्पष्ट है कि उपर्युक्त दोनों विधियों से अलग-अलग विस्तार करने पर एक ही फल प्राप्त होता है। यहाँ उल्लेखनीय है कि **प्रत्येक सारणिक का एक निश्चित मान होता है जो उसका प्रसार करने पर प्राप्त होता है।**

किसी अवयव का उपसारणिक ज्ञात करने की विधि

माना हमें उपरोक्त तृतीय कोटि के सारणिक के अवयव c_2 का उपसारणिक ज्ञात करना है, तो c_2 जिस पंक्ति (Row) तथा स्तम्भ (Column) में आता है उसे छोड़ने पर जो सारणिक शेष बचेगा वही अवयव c_2 का उपसारणिक होगा।

अत: अवयव c_2 का उपसारणिक निम्नवत् है–

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार अन्य सभी अवयवों के उपसारणिक ज्ञात किये जा सकते हैं। ध्यान रखिये कि उपसारणिक निकालते समय **चिह्न** पर विचार नहीं किया जाता है। अत: प्रत्येक उपसारणिक धनात्मक (+) चिह्न का होता है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. ········ कोटि के सारणिक में तीन पंक्तियाँ तथा तीन स्तंभ होते हैं।
2. किसी सारणिक में ऊपर से नीचे की ओर ········ रेखाएँ उसकी क्रमश: पहली, दूसरी, तीसरी पंक्तियाँ कहलाती हैं।
3. बाईं ओर से दाईं ओर ········ रेखाएँ उसके क्रमश: पहले, दूसरे, तीसरे स्तंभ कहलाते हैं।
4. प्रत्येक सारणिक का रूप ········ होता है।
5. प्रत्येक सारणिक का एक ········ मान होता है जो उसका प्रसार करने पर प्राप्त होता है।

नोट

21.5 सह-खण्ड (Cofactors)

जैसा ऊपर बताया गया है कि किसी अवयव का उपसारणिक ज्ञात करते समय चिह्न पर विचार नहीं किया जाता है। अब यदि अवयवों के उपसारणिकों के चिह्नों पर भी विचार किया जाये तो वे उन अवयवों के **सह-खण्ड** (Cofactors) बन जाते हैं जिन्हें बड़े अक्षरों $C_1, C_2, C_3, \ldots$ से प्रदर्शित किया जाता है।

स्पष्ट है कि **उपसारणिक और सह-खण्ड में केवल चिह्न का अन्तर होता है जबकि दोनों के मान बराबर होते हैं।**

सह-खण्ड की निम्नलिखित परिभाषा दी गई है–

अवयव a_{ij} का सह-खण्ड = $(-1)^{+} \times A_{ij}$

जहाँ a_{ij} सारणिक की i वीं पंक्ति तथा j वें स्तम्भ का अवयव है तथा A_{ij}, अवयव a_{ij} का उपसारणिक है।

$$a_1 \text{ का Cofactor} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = C_1$$

$$a_2 \text{ का Cofactor} = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = C_2$$

$$a_3 \text{ का Cofactor} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = C_3$$

अत: समीकरण (i) से, दिया हुआ सारणिक = $a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3$

21.6 सारणिकों के गुण-धर्म (Properties of Determinants)

सारणिक के गुण-धर्म नीचे दिये गये हैं। इन गुणों की सहायता से सारणिक प्रश्नों को सरलतापूर्वक हल किया जा सकता है। सारणिक के गुण निम्न प्रकार हैं–

1. यदि किसी सारणिक की सभी पंक्तियों (Rows) तथा सभी स्तम्भों (Columns) को आपस में बदल दिया जाये, तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।
2. यदि सारणिक में दो लगातार या आसन्न (Adjacent) पंक्तियों अथवा स्तम्भों को परस्पर बदल दिये जाये, तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है, परन्तु चिह्न बदल जाता है।
3. यदि किसी सारणिक की कोई दो पंक्तियों (Rows) अथवा स्तम्भ (Columns) के सभी अवयव (Elements) किसी एक ही राशि के गुणन (Multiple) हों तो मूल सारणिक की उस राशि से गुणा हो जाती है।
4. इस गुण सम्बन्धित निम्नलिखित दो नियम विशेष ध्यान देने योग्य हैं–

   (i) यदि सारणिक की किसी एक ही पंक्ति अथवा स्तम्भ में कोई राशि उभयनिष्ठ (Common) हो, तो उसे एक गुणनखण्ड (Factor) के रूप में सारणिक से बाहर ले लेते हैं।

उदाहरणार्थ–

$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

नोट

(i) यदि सारणिक की किसी एक ही पंक्ति अथवा स्तम्भ को किसी राशि से गुणा करते हैं तो पूरे सारणिक को उस राशि से भाग कर देना चाहिए।

उदाहरणार्थ–

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. यदि सारणिक में किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ का प्रत्येक अवयव दो राशियों का योगफल हो तो उस सारणिक को उसी कोटि के दो सारणिकों के योगफल के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ–

$$\begin{vmatrix} a_1+p & b_1 & c_1 \\ a_2+q & b_2 & c_2 \\ a_3+r & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. यदि सारणिक की किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ को सभी अवयवों को किसी निश्चित राशि से गुणा करके किसी अन्य पंक्ति अथवा स्तम्भ के संगत अवयवों में जोड़ अथवा घटा दिया जाये तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

उदाहरणार्थ–$\Delta' = \Delta$, **जबकि**

$$\begin{vmatrix} a_1+mb_1-nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2-nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3-nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ तथा } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

सारणिक के प्रश्नों को हल करने में इस गुण का विशेष महत्त्व है। इस गुण के अनुसार सारणिक में, किसी पंक्ति के अवयवों में किसी अन्य पंक्ति अथवा पंक्तियों के संगत अवयवों का कितने ही गुना जोड़ा अथवा घटाया जा सकता है। यही क्रिया स्तम्भों में भी की जा सकती है।

21.7 दो सारणिकों का गुणनफल (Multiplication of Two Determinants)

दो सारणिकों का गुणनफल केवल उसी दशा में ज्ञात किया जा सकता है जब वे दोनों **समान कोटि** (Same Order) के हों, अन्यथा नहीं।

$$\text{माना } A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ तथा } B = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

तृतीय कोटि (Third Order) के दो सारणिक हैं। इनका गुणनफल, जो AB से व्यक्त किया जाता है, एक तृतीय कोटि का ही सारणिक होगा जिसे निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं–

पहले सारणिक A की पहली पंक्ति $(a_1 b_1 c_1)$ को स्थिर रखकर इसके अवयवों की, दूसरे सारणिक B की पहली, दूसरी तथा तीसरी पंक्ति के संगत अवयवों से अलग-अलग गुणा करो और उनके अलग-अलग योगफल ज्ञात करो जैसा नीचे दिखाया गया है–

नोट

$$\begin{array}{llll} & (a_1\, b_1 c_1) & (a_1\, b_1 c_1) & (a_1\, b_1 c_1) \\ & \times & \times & \times \\ & (x_1\, y_1 z_1) & (x_2\, y_2 z_2) & (x_3\, y_3 z_3) \\ \text{योग} = & a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 & a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 & a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 \end{array}$$

उपर्युक्त तीनों योगफल सारणिक AB की पहली पंक्ति के क्रमशः पहले, दूसरे, तीसरे अवयव होंगे।

इसी प्रकार, सारणिक A की दूसरी पंक्ति $(a_2 b_2 c_2)$ को स्थिर रखकर, दूसरे सारणिक B की तीनों पंक्तियों के संगत अवयवों से गुणा करके अलग-अलग योगफल ज्ञात करो जो सारणिक AB की दूसरी पंक्ति के अवयव होंगे।

यही क्रिया A की तीसरी पंक्ति $(a_3 b_3 c_3)$ तथा B की सभी पंक्तियों के साथ की जाती है।

अतः A और B का गुणनफल = AB

$$= \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 & a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 & a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 & a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 & a_2x_3 + b_2y_3 + c_2z_3 \\ a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 & a_3x_2 + b_3y_2 + c_3z_2 & a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 \end{vmatrix}$$

हल करने की विधि (Working Rule)

ऊपर दिये गये गुणों की सहायता से किसी भी पंक्ति अथवा एक स्तम्भ में यथासम्भव **'शून्य'** बनाओ और सारणिक का विस्तार उसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के अवयवों के सापेक्ष करो।

प्रश्नों के हल में पहली, दूसरी, तीसरी, ... इत्यादि पंक्तियों (Rows) को क्रमशः $R_1, R_2, R_3, ...$ इत्यादि से तथा पहले, दूसरे, तीसरे, ..., इत्यादि स्तम्भों (Columns) को क्रमशः $C_1, C_2, C_3, ...$ इत्यादि से निरूपित करते हैं तथा सारणिक की पंक्तियों तथा स्तम्भों के बीच जो भी क्रिया करते हैं। उसे सारणिक के दाईं ओर लिख देते हैं।

उदाहरण 1. निम्नलिखित सारणिक का मान ज्ञात कीजिये–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{16} & \mathbf{19} \\ \mathbf{14} & \mathbf{17} & \mathbf{20} \\ \mathbf{14} & \mathbf{18} & \mathbf{21} \end{vmatrix} = \mathbf{0.}$$

हल : माना सारणिक $= \Delta$

$$\therefore \quad \Delta \begin{vmatrix} 13 & 16 & 3 \\ 14 & 17 & 3 \\ 14 & 18 & 3 \end{vmatrix} (C_3 - C_2) \text{ से} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \end{vmatrix} (C_2 - C_1) \text{ से} = 0 \qquad (\because \quad C_2 = C_3)$$

उदाहरण 2. सिद्ध कीजिये कि–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{23} & \mathbf{12} & \mathbf{11} \\ \mathbf{36} & \mathbf{10} & \mathbf{26} \\ \mathbf{63} & \mathbf{26} & \mathbf{37} \end{vmatrix} = \mathbf{0.}$$

हल : दिया हुआ सारणिक

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 26 & 10 & 26 \\ 37 & 26 & 37 \end{vmatrix} (C_1 \text{ में से } C_2 \text{ को घटाने पर})$$

$$= 0, \quad \therefore \quad C_1 \text{ और } C_3 \text{ बराबर हैं।}$$

नोट

उदाहरण 3. मान ज्ञात कीजिये–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{18} & \mathbf{23} \\ \mathbf{14} & \mathbf{19} & \mathbf{24} \\ \mathbf{14} & \mathbf{20} & \mathbf{25} \end{vmatrix}.$$

हल : दिया हुआ सारणिक

$$= \begin{vmatrix} 13 & 18 & 5 \\ 14 & 19 & 5 \\ 14 & 20 & 5 \end{vmatrix} (C_3 - C_2) \text{ से}$$

$$= \begin{vmatrix} 13 & 5 & 5 \\ 14 & 5 & 5 \\ 14 & 5 & 5 \end{vmatrix} (C_3 - C_2) \text{ से} = 0 \quad \therefore \qquad C_2 \text{ और } C_3 \text{ समान हैं।}$$

उदाहरण 4. मान ज्ञात कीजिये–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{29} & \mathbf{26} & \mathbf{22} \\ \mathbf{25} & \mathbf{31} & \mathbf{27} \\ \mathbf{65} & \mathbf{54} & \mathbf{46} \end{vmatrix}.$$

हल : दिया हुआ सारणिक

$$= \begin{vmatrix} 3 & 26 & 22 \\ -6 & 31 & 27 \\ 9 & 54 & 46 \end{vmatrix} (C_1 - C_2) \text{ से} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 22 \\ -6 & 4 & 27 \\ 9 & 8 & 46 \end{vmatrix} (C_2 - C_3) \text{ से}$$

$$= 3 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 22 \\ -2 & 1 & 27 \\ 3 & 2 & 46 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad C_1 \text{ से } 3 \text{ तथा } C_2 \text{ से } 4 \text{ उभयनिष्ठ है।}$$

$$= 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 22 \\ 0 & 3 & 71 \\ 0 & -1 & -20 \end{vmatrix}$$

R_2 में $2R_1$ जोड़ने पर तथा R_3 में से $3R_1$ घटाने पर

$= 12\ [3(-20) - 71\ (-1)] = 12[-60 + 71]$

$= 12 \times 11 = 132.$

उदाहरण 5. मान ज्ञात कीजिये–

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+y)}} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x^2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \boldsymbol{y^2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}.$$

हल : दिया हुआ सारणिक

$$\frac{1}{(x+y)} \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ y^2 & 1 \end{vmatrix}$$

नोट

पहली पंक्ति के सापेक्ष विस्तार करने पर

$$\frac{1}{(x+y)}\cdot(x^2-y^2) = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)} = x-y$$

उदाहरण 6. सिद्ध कीजिये कि—

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y+z} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z+x} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x+y} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

हल : सारणिक $= \begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & x+y+z \\ 1 & z & x+y+z \end{vmatrix}$

C_2 को C_3 में जोड़ने पर

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)\times 0$$

$$= 0. \qquad [\because\ C_1 = C_3 \quad \therefore\ \Delta = 0]$$

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिये कि—

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{c^2} \end{vmatrix} = \mathbf{(a-b)\,(b-c)\,(c-a).}$$

हल : दिया हुआ सारणिक

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix},\ C_2 - C_1 \text{ तथा } C_3 - C_1 \text{ से}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix},\ (R_1 \text{ के सापेक्ष विस्तार करने पर})$$

$$= (b-a)\,(c^2-a^2) - (c-a)\,(b^2-a^2)$$

$$= (b-a)\,(c-a)\,[(c+a)-(b+a)]$$

$$= (b-a)\,(c-a)\,(c-b)$$

$$= (a-b)\,(b-c)\,(c-a)$$

(R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर)

उदाहरण 8. सिद्ध कीजिये कि—

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a^2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b^2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c^2} \end{vmatrix} = \mathbf{(b-c)\,(c-a)\,(a-b).}$$

नोट

संकेत–उदाहरण 6 की भाँति संक्रियायें $R_2 - R_1$ तथा $R_3 - R_1$ लगाइये।

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिये कि–

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ c^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-c)(c-a)(a-b).$$

हल : C_1 में a, C_2 में b तथा C_3 में c उभयनिष्ठ है,

$$\therefore \qquad \text{सारणिक} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

आगे उदाहरण 7 का हल देखिए

उदाहरण 10. सिद्ध कीजिये कि–

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

हल : दिया हुआ सारणिक

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-a^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix}, \ (C_1 - C_2) \text{ व } (C_2 - C_3) \text{ से}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 \end{vmatrix}, (R_1 \text{ के सापेक्ष विस्तार करने पर})$$

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\,[(b^2+bc+c^2) - (a^2+ab+b^2)]$$

$$= (a-b)(b-c)\,[bc + c^2 - a^2 - ab]$$

$$= (a-b)(b-c)\,[b(c-a) + (c-a)(c+a)]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

उदाहरण 11. सिद्ध कीजिये कि–

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0 \text{ अथवा } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix} = 0.$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 0 & b-a & b^2-a^2-ca+bc \\ 0 & c-a & c^2-a^2-ab+bc \end{vmatrix}, (R_2 - R_1 \text{ तथा } R_3 - R_1 \text{ से})$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(a+b+c) \\ c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}, \text{(}C_1 \text{ के सापेक्ष विस्तार करने पर)}$$

$$= (b-a)(c-a)(a+b+c) - (b-a)(c-a)(a+b+c)$$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

उदाहरण 12. सिद्ध कीजिये कि—

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a+b+2c} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b+c+2a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c+a+2b} \end{vmatrix} = \boldsymbol{2(a+b+c)^3}.$$

हल : दिया हुआ सारणिक

$$= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix}, \text{(}C_1 \text{ में } C_2 \text{ व } C_3 \text{ को जोड़ने पर}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

C_1 में से $2(a+b+c)$ को common लेने पर

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix} \text{(}R_2 - R_1 \text{ तथा } R_3 - R_1 \text{ से)}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} b+c+a & 0 \\ 0 & c+a+b \end{vmatrix} \; C_1 \text{ के सापेक्ष विस्तार करने पर}$$

$$= 2(a+b+c)\,[(b+c+a)(c+a+b) - 0] = 2(a+b+c)^3.$$

उदाहरण 13. सिद्ध कीजिये कि—

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{y+z} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z+x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x+y} \end{vmatrix} = \boldsymbol{4xyz}.$$

हल : $R_1 - (R_2 + R_3)$ से, दिया हुआ सारणिक

$$= \begin{vmatrix} (y+z)-(y+z) & x-(x+2z) & x-(x+2y) \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2z & -2y \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = 2z\begin{vmatrix} y & y \\ z & x+y \end{vmatrix} - 2y\begin{vmatrix} y & z+x \\ z & z \end{vmatrix},$$

R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर

नोट

$$= 2z\,[y(x + y) - yz] - 2y\,[yz - z(z + x)]$$
$$= 2yz\,[(x + y - z)] - 2yz\,(y - z - x)$$
$$= 2yz\,(x + y - z - y + z - x) = 4xyz.$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

निम्नलिखित कथनों में सत्य अथवा असत्य की पहचान करें

(State whether the following statements are True or False):

6. उपसारणिक और सह-खंड में केवल चिह्न का अंतर होता है जबकि दोनों के मान बराबर होते हैं।
7. यदि किसी सारणिक की सभी पंक्तियों तथा सभी स्तंभों को आपस में बदल दिया जाए, तो सारणिक के मान में परिवर्तन हो जाता है।
8. यदि सारणिक में दो लगातार या आसन्न पंक्तियों अथवा स्तंभों को परस्पर बदल दिए जाएँ, तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है, परन्तु चिह्न बदल जाता है।
9. यदि सारणिक की किसी एक ही पंक्ति अथवा स्तंभ को किसी राशि से गुणा करते हैं तो पूरे सारणिक को उस राशि से गुणा करना चाहिए।
10. दो सारणिकों का गुणनफल केवल उसी दशा में ज्ञात किया जा सकता है जब वे दोनों समान कोटि के हों, अन्यथा नहीं।

21.8 सारांश (Summary)

- युगपत समीकरणों को हल करना बहुत कठिन होता है क्योंकि इन समीकरणों में जितने चरों की संख्या होती है उतने ही समीकरण होते हैं। इन समीकरणों के आसान हल के लिए बीजगणित में विशेष विधि का प्रयोग किया जाता है, जिसे सारणिक (Determinant) कहते हैं।
- व्यंजक $(a_1b_2 - a_2b_1)$ को इस सारणिक का **प्रसार** (Expansion) अथवा **मान** (Value) कहते हैं।
- किसी सारणिक में, ऊपर से नीचे की ओर **क्षैतिज रेखायें** उसकी क्रमशः पहली, दूसरी, तीसरी **पंक्तियाँ** (Rows) कहलाती हैं जिन्हें क्रमशः R_1, R_2, R_3,....द्वारा व्यक्त करते हैं तथा बाईं ओर से दाईं ओर **ऊर्ध्वाधर** रेखायें उसके क्रमशः पहले, दूसरे तीसरे....**स्तम्भ** (Columns) कहलाते हैं जिन्हें क्रमशः C_1, C_2, C_3....द्वारा व्यक्त करते हैं।
- सारणिक का विस्तार साधारणतया पहली पंक्ति (Row) के अवयवों के सापेक्ष अथवा पहले स्तम्भ (Column) के अवयवों के सापेक्ष किया जाता है।
- प्रत्येक सारणिक का एक निश्चित मान होता है जो उसका प्रसार करने पर प्राप्त होता है।
- उपसारणिक और सह-खण्ड में केवल चिह्न का अन्तर होता है जबकि दोनों के मान बराबर होते हैं।
- यदि किसी सारणिक की सभी पंक्तियों (Rows) तथा सभी स्तम्भों (Columns) को आपस में बदल दिया जाये, तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।
- यदि सारणिक में दो लगातार या आसन्न (Adjacent) पंक्तियों अथवा स्तम्भों को परस्पर बदल दिये जायें, तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है, परन्तु चिह्न बदल जाता है।
- यदि किसी सारणिक की कोई दो पंक्तियों (Rows) अथवा स्तम्भ (Columns) के सभी अवयव (Elements) किसी एक ही राशि के गुणन (Multiple) हों तो मूल सारणिक की उस राशि से गुणा हो जाती है।

नोट

- दो सारणिकों का गुणनफल केवल उसी दशा में ज्ञात किया जा सकता है जब वे दोनों **समान कोटि** (Same Order) के हों, अन्यथा नहीं।

21.9 शब्दकोश (Keywords)

- विस्तार (Expansion): विस्तृत।
- मान (value): मूल्य।

21.10 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. सारणिक की सोदाहरण परिभाषा दें।
2. सारणिकों के गुण-धर्म को लिखें।
3. निम्नलिखित सारणिक का मान ज्ञात करें–

(a) $\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 65 & 54 & 46 \end{vmatrix}$ (**उत्तर** : 132)

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ (**उत्तर** : $(a-b)(b-c)(c-a)$)

4. सिद्ध करें कि

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b).$$

5. सिद्ध करें कि

$$\begin{vmatrix} 23 & 12 & 11 \\ 36 & 10 & 26 \\ 63 & 26 & 37 \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. तृतीय	2. क्षैतिज	3. ऊर्ध्वाधर	4. वर्गाकार	5. निश्चित
6. सत्य	7. असत्य	8. सत्य	9. असत्य	10. सत्य

21.11 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*

नोट

3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
4. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
5. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*

नोट

इकाई—22: आव्यूह का पद
(Rank of Matrix)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- पद के गुणों से अवगत होंगे।
- पद के गुणों को सोदाहरण समझेंगे।

प्रस्तावना (Introduction)

आव्यूह के साथ संबंध रखने वाली एक महत्त्वपूर्ण संख्या को पद कहते हैं। एक $m \times n$ आव्यूह A में n स्तम्भ वैक्टर एवं m घटक है, तो रैखिक स्वतंत्र सेट के अधिकतम स्तम्भ वैक्टर को उस आव्यूह का पद कहते हैं इसे $r(A)$ से प्रदर्शित करते हैं।

दूसरे शब्दों में यह भी कह सकते हैं कि स्वतंत्र स्तम्भों की अधिकतम संख्या को आव्यूह का पद कहते हैं एक $An \times n$ आव्यूह गैर एकवचनीय (non-singuler) तब होता है जब उसका पद n के बराबर होगा।

22.1 पद के गुण (Characteristics of Rank)

- केवल शून्य आव्यूह का ही शून्य पद होता है।
- rank $(A) \le \min\ (m, n)$ { पद $(A) \le$ न्यूनतम (m, n)}
- यदि A वर्ग आव्यूह है $(m = n)$ तो A तभी परिवत्तीय होगा जब A का पद n होगा।
- पद $(AB) \le$ न्यूनतम (पद A, पद B)

नोट

- पद (A) + पद $(B) - n \leq$ पद (AB)
- पद (CA) = पद (A) {C स्थिरांक हैं}

क्या आप जानते हैं स्वतंत्र पंक्तियों की अधिकतम संख्या को आव्यूह का पद कहते हैं।

उदाहरण 1: नीचे दिए आव्यूह का पद निकालिये

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

हल: दिया है, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

पंक्ति ऑपरेशन का प्रयोग करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \xrightarrow[R_{21}(1-2), R_{31}(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2(-1), R_3(1)]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{12}(-2)]{R_3(1/2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{2-3}(-1), R_{13}(1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ यहाँ आव्यूह A तीन गैर-शून्य पंक्तिया रखता है।

अर्थात् पद $(A) = 3$ होगा।

उदाहरण 2: यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तो आव्यूह का पद निकालिए।

हल: दिया है $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to -R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \end{matrix}$$

यहाँ पर non-zero पंक्तियाँ 2 हैं अर्थात् पद $(A) = 2$ होगा।

नोट

उदाहरण 3: यदि $A = \begin{bmatrix} 5-x & 2 & 1 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{bmatrix}$ तो x की प्रत्येक मूल्य के लिए पद का निर्धारण कीजिए।

हल: दिया है $A = \begin{bmatrix} 5-x & 2 & 1 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{bmatrix}$

उपरोक्त सारणिक का तृतीय कॉलम के आधार पर विस्तार करने पर

$$= x(x-1)(x-6)\ |A| = 1\{0 - 1(1-x)\} - 0\{0-2\} + (1-x)\{(5-x)(1-x) - 4\}$$

अर्थात्, यदि $x \neq 0$, 1 और 6 आव्यूह A का पद 3 होगा

और यदि $x = 0, 1, 6$ तो $\begin{bmatrix} 5-x & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$, पद 2 होगा।

रेखीय निर्भरता एवं आव्यूह का पद (Linear Dependance and Rank of Matrix): एक आव्यूह की पंक्तियों (कॉलम) में तभी रेखीय निर्भरता पायी जाती जब उन पंक्तियों (कॉलम) का रेखीय संयोजन शून्य वेक्टर (vector) के बराबर होती है। अर्थात्;

यदि $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ तो

$$K_1 a_{11} + K_2 a_{12} + K_3 a_{13} = 0$$
$$K_1 a_{12} + K_2 a_{22} + K_3 a_{32} = 0$$
$$K_1 a_{13} + K_2 a_{23} + K_3 a_{33} = 0$$

यहाँ K_1, K_2 और K_3 में कम से कम एक का मूल शून्य होना चाहिए।

उदाहरण 1: नीचे दिये हुए आव्यूह की रेखीय स्वतंत्रता की जाँच कीजिए एवं पद निकालिये;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

हल: गुणा करने पर Row 1 (R_1)और 2(R_2) में –1 तथा जोड़ने पर 3(R_3)] तो

$$-1R_1 - 1R_2 + R_3 = 0 \qquad (1)$$
$$-2R_1 + R_2 = 0 \qquad (2)$$
$$-3R_1 + R_3 = 0 \qquad (3)$$

समीकरण (1) में R_1, R_2, और R_3 में रेखीय स्वतंत्रता नहीं है, समीकरण (2) R_1,एवं R_2 तथा समीकरण (3) R_1 एवं R_3 में रेखीय निर्भरता दर्शा रहा है। पद के लिए,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ अर्थात् पद $(A) = 1$ होगा।

उदाहरण 2: यदि $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ -10 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ तो रेखीय निर्भरता का परीक्षण कीजिए एवं आव्यूह (A) का पद निकालिये।

नोट

हलः $C_1R_1 + C_2R_2 + C_3R_3 = 0$

$$6C_1 - 10C_2 + 5C_3 = 0 \quad (1)$$

$$3C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0 \quad (2)$$

$$5C_1 + 8C_2 + 3C_3 = 0 \quad (3)$$

समीकरण (1), (2) और (3) को हल करने पर

$C_1 = -10$, C_2 1 और $C_3 = 14$

है तो रेखीय निर्भरता पायी जायेगी,

अर्थात् R_1 R_2 एवं R_3 रेखीय निर्भरता होगी क्योंकि कोई रेखीय संयोग शून्य नहीं है अर्थात् पद $(A) = 2$ होगा।

22.2 सारांश (Summary)

- केवल शून्य आव्यूह का ही शून्य पद होता है।
- rank $(A) \leq \min (m, n)$ { पद (A) ≤ न्यूनतम (m, n)}
- यदि A वर्ग आव्यूह है $(m = n)$ तो A तभी परिवर्तनीय होगा जब A का पद n होगा।
- पद (AB) ≤ न्यूनतम (पद A, पद B)
- पद (A) + पद $(B) - n \leq$ पद (AB)
- पद (A) = पद (A) {C स्थिरांक हैं}

22.3 शब्दकोश (Keywords)

- आव्यूह पद (Matrix): स्वतंत्र स्तम्भों की अधिकतम संख्या।

22.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. नीचे दिए गए आव्यूह का पद ज्ञात करें।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. रेखीय स्वतंत्रता की जांच कीजिए

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

22.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

नोट

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
3. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
6. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*

नोट

इकाई–23: आव्यूह के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग (Application of Matrices in Economics)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- अर्थशास्त्र में आव्यूह के अनुप्रयोग को समझने में।

प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक समस्याओं के हल के लिए आव्यूह एक अत्यन्त उपयोगी गणितीय तकनीक है। इसके माध्यम से हम अनेक आर्थिक समस्याओं का समाधान करते हैं। जितनी भी व्यापक आर्थिक समस्या, रैखीय होती है उन सभी का हल हम आव्यूह की सहायता से करते हैं। इसके अंतर्गत हम क्रेमर नियम, इनवर्स (A^{-1}) विधि की सहायता से उत्पादन, माँग, पूर्ति, आगत-निर्गत एवं राष्ट्रीय आय का निर्धारण आदि समस्याओं को हल करते हैं।

23.1 अर्थशास्त्र में आव्यूह के अनुप्रयोग (Application of Matrices in Economics)

उदाहरण 1: माना एक त्रि-क्षेत्रीय वृहत आर्थिक मॉडल निम्न समीकरण के द्वारा दिया गया है–

$$Y = C + A_0$$
$$C = a + b\,(Y - T)$$
$$T = d + ty$$

जहाँ $Y \to$ आय, $C \to$ उपभोग

$T \to$ कर राजस्व, $t \to$ कर की दर

A_0, a, b और c स्थिर प्राचल है तो राष्ट्रीय आय, उपयोग एवं कर राजस्व की गणना कीजिए;

नोट

हल: दिया है $Y = C + A_0$

or $y - C = A_0$ (1)

$-by + c + bT = a$ (2)

$-ty + T = d$ (3)

समीकरण (1), (2) एवं (3) का निम्न रूप में लिखने पर;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ a \\ d \end{bmatrix}$$

यहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}$

or $|A| = 1\,(1 + 0) + 1\,(-b + tb) = 1 - b + tb = 1 - b[1 - t]$

क्रेमर नियम का प्रयोग करने पर,

$$Y = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} A_0 & -1 & 0 \\ a & 1 & b \\ d & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{A_0(1) + 1(a - bd)}{1 - b(1 - t)} = \frac{a - bd + A_0}{1 - b\,[1 - t]}$$

$$C = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & A_0 & 0 \\ -b & a & b \\ -t & d & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a - bd - A_0(-b + bt)}{1 - b(1 - t)}$$

$$T = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & A_0 \\ -b & 1 & a \\ -t & 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{d + (a - bd) + A_0\,(t)}{1 - b(1 - t)}$$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

नोट दिये हुए आव्यूह का परिवर्त (Transpose of Matrix) बनाने पर

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

सहखंडज (Adjoint) ज्ञात करने के लिए आव्यूह A (aij) के सहखंडज निम्न प्रकार निकालेंगे–

$$\text{सहखंडज } 1 = + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} = 36 - 25 = 11$$

$$\text{सहखंडज } 2 = - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = (24 - 15) = -9$$

$$\text{सहखंडज } 3 = + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 10 - 9 = 1$$

$$\text{सहखंडज } 2 = - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} = 24 - 15 = -9$$

$$\text{सहखंडज } 3 = + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = 12 - 9 = 3$$

$$\text{सहखंडज } 5 = - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -(5 - 6) = (-1) = +1$$

$$\text{सहखंडज } 3 = + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -(10 - 9) = 1$$

$$\text{सहखंडज } 5 = - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = -(5 - 6) = 1$$

$$\text{सहखंडज } 12 = + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (3 - 4) = -1$$

$$Adj.\ A = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 1\,(36 - 25) - 2\,(24 - 15) + 3\,(10 - 9)$$

$$= (1 \times 11) - (2 \times 9) + (3 \times 1) = 11 - 18 + 3 = -4$$

नोट

$$A^{-1} = \frac{Adj.\,A}{|A|} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 3: आव्यूह प्रणाली की सहायता से x, y और z के अनुकूलतम मूल्य ज्ञात कीजिए।

$$x - 2y + 3z = 1 \qquad \ldots(i)$$

$$3x - y + 4z = 3 \qquad \ldots(ii)$$

$$2x + y - 2z = -1 \qquad \ldots(iii)$$

हल: उपर्युक्त समीकरणों को व्यूह के रूप में लिखने पर

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

क्रेमर नियम का प्रयोग करने पर

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tranapose of } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{सहखंडज } 1 = + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = + (-2 - 4) = -6$$

$$\text{सहखंडज } 3 = - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -(4 - 3) = -1$$

$$\text{सहखंडज } 2 = + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = + (-8 + 3) = -5$$

$$\text{सहखंडज } -2 = - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = + (-6 - 8) = + 14$$

$$\text{सहखंडज } -1 = + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = + (-2 - 6) = -8$$

$$\text{सहखंडज } 1 = - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = - (4 - 9) = + 5$$

$$\text{सहखंडज } 3 = + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = + (3 + 2) = + 5$$

$$\text{सहखंडज } 4 = - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = - (1 + 4) = -5$$

नोट

$$\text{सहखंडज} - 2 = + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = + (-1 - 6) = + 5$$

$$\text{Adjoint } A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -5 \\ +14 & -8 & +5 \\ +5 & -5 & +5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \times (2 - 4) + 2\,(-6 - 8) + 3\,(3 + 2)$$
$$= -2b - 28 = 15 = -15$$

अत:
$$A^{-1} = \frac{Adj.\,A}{|A|} = \frac{1}{-15}\begin{bmatrix} -6 & -1 & -5 \\ 14 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-6}{-15} & \frac{1}{15} & \frac{5}{15} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{5}{15} \\ -\frac{5}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{5}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

अब
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\times 1 & +\frac{3}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & +\frac{24}{15} & +\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & +\frac{3}{3} & +\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{15} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अत: हल करने पर $x = -\frac{8}{15}$, $y = 1$, $z = 1$ प्राप्त होंगे।

23.2 सारांश (Summary)

- जितनी भी व्यापक आर्थिक समस्या रेखीय होती है उन सभी का हल हम आव्यूह की सहायता से करते हैं। इसके अंतर्गत हम क्रेमर नियम, इनवर्स (A^{-1}) विधि की सहायता से उत्पादन, माँग, पूर्ति, आगत निर्गत एवं राष्ट्रीय आय का निर्धारण आदि समस्याओं को हल करते हैं।

23.3 शब्दकोश (Keywords)

- आव्यूह (Matrix): संरचना, ढांचा, बनावट, क्रमबद्धता।

23.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 13 \end{bmatrix}$ हो तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

2. आव्यूह प्रणाली की सहायता से a, b, c का अनुकूलतम मूल्य ज्ञात कीजिए।

$$a + 2b + 6c = 1$$
$$3a - 4b - 2c = 6$$
$$2a - b - 5c = -2$$

23.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
2. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
7. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*

नोट

इकाई–24 : आगत-निर्गत विश्लेषण (Input-Output Analysis)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- आगत-निर्गत विश्लेषण की मान्यताओं को समझने में।
- लियोन्टिफ का आगत-निर्गत बंद निदर्श को जानने हेतु।
- बंद निदर्श के संतुलन समीकरणों के प्रथम समुच्चय की जानकारी हेतु।
- बंद निदर्श के संतुलन समीकरणों के द्वितीय समुच्चय की जानकारी हेतु।

प्रस्तावना (Introductions)

आगत-निर्गत विश्लेषण की व्याख्या करने से पहले यह जानना जरूरी है कि आगत एवं निर्गत का क्या अभिप्राय है? आगत (Input) का तात्पर्य उत्पादक का उत्पादन करने के लिए सामग्री (Material) की माँग करने से है जबकि निर्गत (Output) शब्द का अभिप्राय उत्पादकता प्रयास के परिणाम के फल से है। **प्रो. जे.आर. हिक्स** (J.R. Hicks) के अनुसार लागत का मतलब उस सामग्री से है जो उत्पादक उत्पादन के लिए क्रय करता है। इसके विपरीत निर्गत शब्द का अभिप्राय है कि उत्पादक जिसका विक्रय करता है। कहने का अभिप्राय है कि आगत फर्म के लिए एक तरह से लागत है तथा निर्गत प्राप्ति है।

नोट

आगत-निर्गत विश्लेषण की सहायता से अन्त: उद्योग संबंध तथा सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था को अन्त: निर्भरता प्राप्त होती है क्योंकि एक उद्योग का निर्गत दूसरे उद्योग के लिए आगत हो सकता है। इसी प्रकार से दूसरे उद्योग का निर्गत प्रथम उद्योग के लिए आगत हो सकता है। उदाहरणार्थ, कोयला उद्योग का निर्गत इस्पात उद्योग का आगत हो सकता है।

नोट्स इस्पात उद्योग का निर्गत कोयला उद्योग के लिए आगत होता है।

24.1 आगत-निर्गत विश्लेषण की मान्यताएँ (Assumptions of Input-Output Analysis)

आगत-निर्गत विश्लेषण की निम्न मान्यताएँ होती हैं–

(1) अर्थव्यवस्था पूर्ण संतुलन में होती है।

(2) अर्थव्यवस्था दो भागों में विभाजित होती है–अन्त: उद्योग क्षेत्र तथा अन्तिम माँग क्षेत्र तथा प्रत्येक क्षेत्र का उप-विभाजन किया जा सकता है।

(3) प्रत्येक उद्योग केवल एक ही वस्तु का उत्पादन करता है तथा दो वस्तुओं का संयुक्त उत्पादन नहीं होता है।

(4) किसी एक उद्योग का कुल उत्पादन किसी अन्य उद्योग के आगत के रूप में काम में लाया जाता है।

(5) उत्पादन स्थिर प्रतिफल के नियम के अन्तर्गत होता है।

(6) तकनीकी प्रगति स्थिर रहती है, इसका अभिप्राय यह हुआ कि आगत गुणांक स्थिर रहते हैं।

(7) यहाँ उत्पादन में कोई बाह्य मितव्ययताएँ अथवा अमितव्ययताएँ उत्पन्न नहीं होती हैं।

24.1.1 लियोन्टिफ का स्थैतिक आगत-निदर्श-खुला निदर्श (Leontief's Static Input-Output Model—Open Model)

लियोन्टिफ का स्थैतिक आगत-निर्गत निदर्श उपर्युक्त मान्यताओं पर आधारित है। लियोन्टिफ का स्थैतिक निदर्श को एक उदाहरण द्वारा समझाया जा सकता है। माना अर्थव्यवस्था तीन क्षेत्रों में बंटी हुई है। इनमें कृषि एवं उद्योग अन्त:उद्योग के रूप में तथा घरेलू क्षेत्र अन्तिम माँग क्षेत्र के रूप में लिया गया है।

आगत-निर्गत सारणी की सहायता से इस निदर्श को समझाया जा सकता है। इस सारणी में तीनों क्षेत्रों का निर्गत (Output), पंक्तियों (Rows) (क्षैतिज रूप में) द्वारा दर्शाया गया है जबकि इन क्षेत्रों का आगत (Input), स्तम्भों (Columns) (लम्बवत् रूप में) द्वारा दर्शाया गया है। प्रथम पंक्ति का कुल योग 300 इकाइयाँ हैं जो कृषि का कुल निर्गत प्रदर्शित करती है। जिसमें 50 इकाइयाँ कृषि स्वयं, 200 इकाइयाँ उद्योग तथा शेष 50 इकाइयाँ घरेलू क्षेत्र में आगत रूप में काम में लायी जाती हैं। सारणी की दूसरी पंक्ति उद्योग के कुल उत्पादन को प्रदर्शित करती है। उद्योग में कुल 150 इकाइयों के बराबर उत्पादन होता है जिसमें 55 इकाइयाँ कृषि, 25 इकाइयाँ स्वयं उद्योग तथा 70 इकाइयाँ घरेलू क्षेत्र में काम में लायी जाती हैं।

इसी प्रकार स्तम्भों (Columns) को लें तो ये इन क्षेत्रों की लागत को बताते हैं। प्रथम स्तंभ यह बताता है कि कृषि क्षेत्र में 300 इकाइयों का कुल उत्पादन करने के लिए 125 इकाइयों की लागत आती है जिसमें 50 इकाइयाँ स्वयं कृषि, 55 इकाइयाँ उद्योग तथा 20 इकाइयाँ घरेलू क्षेत्र से आगत के रूप में काम में लायी जाती हैं। द्वितीय स्तम्भ

नोट

यह दर्शाता है कि उद्योग की 150 इकाइयों के उत्पादन के लिए 255 इकाइयों के बराबर लागत लगायी जाती है जिसमें 200 इकाइयाँ कृषि, 25 इकाइयाँ स्वयं उद्योग तथा 30 इकाइयाँ घरेलू क्षेत्र में काम लायी जाती हैं। तृतीय स्तम्भ में शून्य यह प्रकट करता है कि घरेलू क्षेत्र उपभोग क्षेत्र है जो कुछ भी विक्रय नहीं करता है।

सारणी–24.1 आगत-निर्गत सारणी

		क्रय क्षेत्र →			
	क्षेत्र	**कृषि (1)**	**उद्योग (2)**	**अन्तिम माँग (3)**	**कुल उत्पादन या कुल आय**
विक्रय क्षेत्र ↑	(1) कृषि	50	200	50	300
	(2) उद्योग	55	25	70	150
	(3) घरेलू	20	30	0	50
	कुल लागत या कुल आगत	125	255	120	500

उपरोक्त सारणी की सहायता से सामान्य प्रदेय व्यूह (Transaction Matrix) की रचना की जा सकती है।

सारणी–24.2 प्रदेय व्यूह

		क्रय क्षेत्र			
	क्षेत्र	**कृषि** (1)	**उद्योग** (2)	**अन्तिम माँग** (3)	**कुल निर्गत**
विक्रय क्षेत्र ↑	(1) कृषि	x_{11}	x_{12}	D_1	X_1
	(2) उद्योग	x_{21}	x_{22}	D_2	X_2
	(3) घरेलू	x_{31}	x_{32}	D_0	X_3

यदि उपरोक्त सारणी में स्तम्भों को लें तो निम्न उत्पादन फलन प्राप्त होंगे–

$$X_1 = f_1\,(x_{11}, x_{21}, x_{31}) \text{ अथवा } 300 = f_1\,(50, 55, 20)$$

$$X_2 = f_2\,(x_{12}, x_{22}, x_{33}) \text{ अथवा } 150 = f_2\,(200, 25, 30)$$

इसी प्रकार से कुल उत्पादन को विभिन्न क्षेत्रों में निम्न प्रकार से बाँटा जा सकता है। (पंक्ति में सभी क्षेत्रों के भाग को जोड़ने पर)

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + D_1$$
$$X_2 = x_{21} + x_{22} + D_2$$
$$X_3 = x_{31} + x_{32}$$

हम यहाँ मानते हैं कि i उद्योग का कुल उत्पादन n उद्योगों द्वारा आगत के रूप में काम में लाया जाता है तो ऐसी स्थिति में,

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{in} + D_1$$

लियोन्टिफ ने स्थिर गुणांक की धारणा का भी मान है। इस स्थिति में तकनीकी गुणांक (Technological Coefficient) होगा–

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

यहाँ, $x_{11} = i$वाँ उद्योग का उत्पादन जो कि jवें उद्योग द्वारा काम में लाया जाता है।

$X_1 = j$वें उद्योग का कुल उत्पादन

उपरोक्त सारणी –1 में तकनीकी गुणांक निम्न प्राप्त होंगे–

सारणी 24.3 तकनीकी व्यूह

(आगत-निर्गत गुणांक)

		कार्य क्षेत्र			
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अन्तिम माँग (3)	कुल उत्पादन
विक्रय क्षेत्र	कृषि	0.16	1.33	50	600
	उद्योग	0.18	0.16	70	150
	विक्रय क्षेत्र	0.06	0.20	0	50

तकनीकी गुणांक निकालने का तरीका बहुत सरल है। यहाँ हम वांछित क्षेत्र के आगत में उस क्षेत्र के कुल उत्पादन का भाग दे देते हैं। उदाहरणार्थ, कृषि क्षेत्र का कुल उत्पादन 300 इकाइयाँ हैं तथा कृषि का आगत 50, 55 एवं 20 इकाइयाँ हैं, ऐसी स्थिति में तकनीकी गुणांक $\frac{50}{300} = 0.16, \frac{55}{300} = 0.18$ तथा $\frac{20}{300} = 0.06$ होंगे। इसी प्रकार दूसरे क्षेत्रों का निकाला जा सकता है।

लियोन्टिफ आगत-निर्गत निदर्श को व्यूह बीजगणित की सहायता से निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है–

माना हमारा सामान्य निदर्श निम्न है–

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + ... x_{in} + D_1 \qquad ...(24.1)$$

यहाँ $X_1 = i$वें क्षेत्र का कुल उत्पादन, जहाँ $i = 1, 2, ... n$

$x_{ij} = i$वें क्षेत्र के उत्पादन का वह हिस्सा जो jवें क्षेत्र द्वारा आगत के रूप में काम में लाया जाता है।

निदर्श (24.1) को n क्षेत्रों के लिए निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है–

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + D_1$$
$$X_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + D_2$$
$$X_n = x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + D_n$$

हम जानते हैं कि तकनीकी स्थिरांक

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$ यहाँ $x_i = j$वे क्षेत्र का कुल उत्पादन

नोट

Or $$x_{ij} = a_{ij} X_j$$

यदि $x_{11} = a_{11} X_1, X_{12} = a_{12}X_2$ आदि।

अब हमारे युग्मपद समीकरण होंगे–

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n + D_1$$
$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n} X_n + D_2$$
$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n + D_n$$

सामान्य निदर्श निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है–

$$X_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + D_n$$

अथवा $X = AX + D$ ...(24.2)

यहाँ $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$

समीकरण (24.2) से

$$D = X - AX = (I - A) X$$

यहाँ I सत्समकारी व्यूह (Idently Matrix) है। अत:

$$X = (I - A)^{-1}D \qquad ...(24.3)$$

क्या आप जानते हैं यहाँ $(I - A)$ एक प्रतिलोम व्यूह (Inverse Matrix) है।

24.1.2 आगत-निर्गत निदर्श की सीमाएँ (Limitations of Input-Output Model)

यद्यपि लियोन्टिफ आगत-निर्गत विश्लेषण आर्थिक विश्लेषण में एक महत्त्वपूर्ण योगदान है किन्तु इसकी अपनी कुछ सीमाएँ हैं जो निम्नलिखित हैं–

1. पूर्व-धारणों की अव्यावहारिकता (Impracticability of the Assumptions)–लियोन्टिफ निदर्श की मान्यताएँ अव्यावहारिक हैं। इसमें यह माना गया है कि तकनीकी गुणांक (Technological Coefficient) स्थिर रहता है इसका अभिप्राय है कि तकनीकी स्थिरता अथवा उत्पादन में परिवर्तन से लगाये गये साधनों की मात्राओं में भी परिवर्तन होगा। इसी प्रकार निदर्श यह भी माना लिया गया है कि अर्थव्यवस्था के सभी क्षेत्रों की पूँजी संरचना समान होती है किन्तु प्रत्येक क्षेत्र की पूँजी की माँग भिन्न-भिन्न होती है, अत: पूँजी संरचना भी प्रत्येक क्षेत्र के लिए भिन्न-भिन्न होगी।

2. कुछ साधनों की उपेक्षा (Neglecting Certain Factors)–इससे निदर्श की दृढ़ प्रकृति (Rigid Nature) के कारण बढ़ती हुई लागत तथा विभिन्न प्रकार की समस्याओं का निवारण संभव नहीं है।

3. एक पक्षीय सिद्धांत (One Sided Analysis)–यह सिद्धांत एक पक्षीय विश्लेषण माना जाता है, क्योंकि इसमें अर्थव्यवस्था के केवल उत्पादक क्षेत्र (Productive Sector) को ही लिया जाता है। अत: उत्पादक क्षेत्र की बिल्कुल उपेक्षा की गयी है।

4. साधन प्रतिस्थापन की उपेक्षा (Neglecting Factors of Substitution)—तकनीकी गुणांक की स्थिरता की मान्यता साधन प्रतिस्थापना की संभावनाओं की उपेक्षा करती है। किन्तु वास्तविकता में देखा जाए तो ऐसी प्रतिस्थापना की संभावनाएँ अल्पकाल में भी होती हैं। दीर्घकाल में इनकी संभावनाएँ बहुत अधिक बढ़ जाती हैं।

5. रेखीय संबंधों का लोप (Absence of Linear Relations)—इस निदर्श में यह मान लिया गया है कि एक क्षेत्र का आगत दूसरे क्षेत्र का निर्गत है अर्थात् क्षेत्रों में रेखीय संबंध पाया जाता है, जो तथ्यों के विपरीत है, क्योंकि साधनों की अविभाज्यता के कारण निर्गत में वृद्धि सदैव आगत वृद्धि के बराबर नहीं होती है।

6. भौतिक इकाइयों का प्रयोग (Use of Physical Units)—व्यवहार में वस्तुओं तथा सेवाओं को केवल मौद्रिक रूप में ही व्यक्त किया जाता है। अतएव भौतिक इकाइयों के रूप में आगत-निर्गत विश्लेषण के संतुलन समीकरणों द्वारा अर्थव्यवस्था का समुचित रूप में पूर्वानुमान कठिन होता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न वस्तुओं एवं सेवाओं की भौतिक इकाइयों का माप भिन्न-भिन्न होता है। अत: आगत-निर्गत सारणी तथा तकनीकी गुणांकों को निर्मित करने में अत्यन्त कठिनाई का सामना करना पड़ेगा।

7. जटिलता (Complexity)—इस विश्लेषण में अनेक संरचनात्मक समीकरणों एवं गणितीय तकनीकियों का सहारा लेना पड़ता है, जिनके लिए उच्च गणित तथा सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान आवश्यक है। इस कारण से यह तकनीकी अत्यधिक जटिल हो जाती है।

टास्क आगत-निर्गत विश्लेषण की किन्हीं तीन मान्यताओं को लिखें।

24.2 लियोन्टिफ का आगत-निर्गत बन्द निदर्श (Leontief's Input-output Closed Model)

लियोन्टिफ आगत-निर्गत खुले निदर्श में हमने अन्तिम माँग क्षेत्र (घरेलू क्षेत्र) को पृथक् रूप से माना था। यदि इस क्षेत्र को भी आर्थिक व्यवस्था में विलय कर लिया जाए तो कोई भी क्षेत्र ऐसा नहीं रहेगा जिसका संबंध बाह्य क्षेत्र से हो। ऐसी स्थिति में प्रत्येक वस्तु माध्यमिक वस्तुओं (Intermediate Goods) की प्रकृति की होगी क्योंकि इस $(n + 1)$ उद्योग व्यवस्था में उत्पादित निर्गतों को, इन्हीं निर्गतों के उत्पादन हेतु प्रयोग किया जाता है। इस दशा को बन्द निदर्श (Closed Model) कहा जाता है।

इस स्थिति में, सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था पूर्ण प्रतियोगिता की स्थिति पायी जाती है तथा सरकारी हस्तक्षेप नहीं रहता है। यहाँ $(n + 1)$ उद्योगों में से प्रत्येक एक विभिन्न निर्गत x_i $(i = 1, 2.... n + 1)$ मात्रा का उत्पादन करता है। अन्तिम क्षेत्र घरेलू क्षेत्र है जिसका निर्गत X_{n+1} है। माना x_{ij} = iवें उद्योग का निर्गत, जो कि jवें उद्योग को जाता है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)—

1. आगत का तात्पर्य उत्पादक का .... करने के लिए सामग्री की माँग करने से है।
2. .... शब्द का अभिप्राय उत्पादकता प्रयास के परिणाम के फल से है।
3. किसी एक उद्योग का कुल उत्पादन किसी अन्य उद्योग के .... के रूप में काम में लाया जाता है।
4. .... निदर्श की मान्यताएँ अव्यावहारिक हैं।

नोट

5. आगत-निर्गत विश्लेषण की सहायता से अंत:उद्योग संबंध तथा सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था को अंत: ········· प्राप्त होती है।

24.3 बन्द निदर्श के संतुलन समीकरणों का प्रथम समुच्चय (First Set for Equilibrium Equation of Closed Model)

गणितीय रूप में बंद निदर्श के अन्तर्गत

$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} \qquad \ldots(24.4)$$

$$(i = 1, 2, \ldots.\ n + 1)$$

स्थिर तकनीकी गुणांक की दशा में,

$$x_{ij} = a_{ij} X_i \qquad \ldots(24.5)$$

समीकरण (24.5) का मान समीकरण (26.4) में रखने पर

$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_j$$

अथवा
$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_j = 0 \qquad \ldots(24.6)$$

समीकरण (24.6) संतुलन समीकरणों का प्रथम समुच्चय है।

24.4 बन्द निदर्श के संतुलन समीकरणों का द्वितीय समुच्चय (The Second Set of Equilibrium Equation of Closed Model)

यहाँ हम मूल्यों P_i $(i = 1, 2 \ldots.\ n + 1)$ पर ध्यान केन्द्रित करेंगे। यहाँ P_i घरेलू क्षेत्र की श्रम दर है।

यहाँ यह मानकर कि उद्योग में प्राप्तियाँ (Receipts) तथा लागतें (Costs) समान हैं, संतुलन समीकरण को निम्न प्रकार से व्युत्पादित किया जा सकता है।

iवें उद्योग के लिए,

$$\text{प्राप्तियाँ} = X_i P_i$$

$$\text{तथा लागत} = \sum_{j=1}^{n+1} P_i X_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i P_i$$

जहाँ,
$$x_{ij} = a_{ij} X_i$$

संतुलन की दशा में,

$$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i P_i$$

नोट

अथवा $$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i \; P_i$$

अथवा $$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i \; P_i \;\; = 0 \qquad ...(24.7)$$

$$i = 1, 2, ...n$$

समीकरण (24.7) संतुलन समीकरणों का द्वितीय समुच्चय है।

24.4.1 लियोन्टिफ के प्रावैगिक निदर्श पर संक्षिप्त टिप्पणी (Short note on Leontief's Dynamic Model)

स्थैतिक निदर्श में अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के तकनीकी गुणांकों की सहायता से पारस्परिक निर्भरता का अध्ययन करते हैं। किन्तु ये गुणांक अर्थव्यवस्था में स्टॉक (Stock) की वास्तविक आवश्यकता पर प्रकाश नहीं डालते हैं। ये यह भी बताने में असमर्थ रहते हैं कि साधन की वह मात्रा जो कि उद्योग द्वारा खपत की जाती है, के लिए कितनी पूँजी की आवश्यकता होगी। इस पूँजी की माँग स्थिर पूँजी विनियोग जैसे निर्माण, मशीन इत्यादि अथवा उत्पादन के लिए कच्चे माल का स्टॉक बनाये रखने के लिए की जाती है। यदि स्थिरात्मक आगत-निर्गत निदर्श (खुला निदर्श) के अंतर्गत पूँजी का प्रभाव सम्मिलित कर लिया जाए, तब यह व्यवस्था गत्यात्मक हो जाती है। अत: पूँजी निवेश इस गत्यात्मक आगत-निर्गत निदर्श का एक अभिनव लक्षण है।

इस प्रकार आगत-निर्गत स्थैतिक निदर्श (खुला निदर्श) में जिन संरचनात्मक समीकरणों का सहारा लिया जाता है, उसमें प्रत्येक क्षेत्र के लिए आवश्यक पूँजी समय अन्तराल सहित सम्मिलित कर लिया जाता है। अत: यह निदर्श स्थैतिक आगत-निर्गत निदर्श (लियोन्टिफ खुला निदर्श) का विस्तार मात्र है।

मान्यताएँ (Assumptions)

आगत-निर्गत गत्यात्मक निदर्श स्थैतिक निदर्श का सामान्यकृत रूप है। अत: इसकी मान्यताएँ स्थैतिक निदर्श के अनुरूप होंगी। जैसे–(1) प्रत्येक उद्योग केवल एक ही समरूप वस्तु का उत्पादन करता है तथा (2) प्रत्येक वस्तु के उत्पादन के लिए केवल एक ही तकनीकी उपलब्ध है, जहाँ उत्पत्ति के साधनों का संयोग स्थिर है।

माना $C_i(t)$ चालू वर्ष का उपभोग है जो iवें उद्योग द्वारा उत्पादित होता है। $X_i(t)$ iवें उद्योग का t समय अवधि में कुल उत्पादन है जो तीन उद्देश्यों के रूप में काम में आता है–(i) अगली अवधि के उपभोग $\{C_i\,(t+1)\}$, (ii) n उद्योगों में पूँजी वस्तुओं का विशुद्ध स्टॉक $S_i(t+1) - S_i\,(t)$ तथा (iii) अर्थव्यवस्था में औद्योगिक उत्पादन का चालू प्रवाह। इन स्थितियों में संतुलन समीकरण होगा–

$$X_i(t) = C_i\,(t+1) + S_i\,(t+1) - S_i\,(t) + x_{11}\,(t) + x_{12}\,(t)$$

(यहाँ $i = 1, 2$)

अब सवाल यह उठता है कि चालू उत्पादन $X_1\,(t)$ तथा $X_2\,(t)$ कैसे उत्पादन होता है? लियोन्टिफ उत्पादन फलन में कुल उत्पादन दो प्रकार के साधनों का फलन होगा–(i) चालू वर्ष के लिए कच्चा माल तथा (ii) पूँजीगत वस्तुओं का स्टॉक–

$$X_1\,(t) = f[x_{11}\,(t), x_{21}(t), S_{11}(t), S_{21}(t)]$$
$$X_2\,(t) = f[x_{12}\,(t), x_{22}(t), S_{12}(t), S_{22}(t)]$$

अर्थव्यवस्था में कुल पूँजी स्टॉक सभी उद्योगों के पूँजी स्टॉक का योग होगा–

$$S_i\,(t) = S_{i1}\,(t) + S_{i2}\,(t)$$

नोट

तथा पूँजी स्टॉक में परिवर्तन दर प्राप्त होगी–

$$\Delta S_i(t) = S_i\,(t+1) - S_i\,(t)$$

पूँजी स्टॉक गुणांक को निम्न प्रकार व्युत्पन्न किया जा सकता है–

$$b_{ij} = \frac{S_{ij}}{X_j}$$

यहाँ $b_{ij} =$ पूँजी स्टॉक गुणांक, $x_i = j$वें उद्योग का कुल उत्पादन तथा $S_{ij} = j$वें उद्योग के उत्पादन को iवें उद्योग द्वारा किया गया शोधन।

24.4.2 एक आयोजित अर्थव्यवस्था के लिए आगत-निर्गत निदर्शों का महत्त्व (The Importance of Input-output Models for a Planned Economy)

आर्थिक क्षेत्र में आगत-निर्गत विश्लेषण की प्रविधि एक महत्त्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। आर्थिक सिद्धांत पर विचार, राष्ट्रीय-लेखों की रचना, आर्थिक योजनाओं की रचना, उद्योगों का पारस्परिक संबंधों तथा निर्भरता का अध्ययन करना, व्यापार चक्रों का अध्ययन इत्यादि महत्त्वपूर्ण क्षेत्र हैं, जिनका विश्लेषण इस प्रविधि से ही संभव हुआ है। वर्तमान में लगभग अर्थव्यवस्था के प्रत्येक क्षेत्र में इस तकनीकी का प्रयोग किया जाने लगा है, किन्तु वर्तमान में इस तकनीकी का प्रयोग विशेषकर नियोजित अर्थव्यवस्था में अधिक बढ़ता जा रहा है।

वर्तमान में कई समाजवादी तथा अन्य देशों ने अपने आर्थिक विकास में कार्यक्रमों को सम्पन्न करने के लिए आगत-निर्गत तकनीकी की मौलिक धारणाओं को अपनाया है। ज्यादातर समाजवादी एवं साम्यवादी अर्थव्यवस्था का यही संरचनात्मक विचार रहता है कि सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था को एक सुगम समन्वित एकीकृत सिद्धांत के अंतर्गत ढाला जाए। सभी औद्योगिक इकाइयाँ राष्ट्रीय नियोजन संस्था के अंतर्गत नियंत्रण में रहती हैं। अत: इस केन्द्रीय संस्था का यह दायित्व है कि वह अर्थव्यवस्था की आवश्यकताओं का जायजा ले एवं आवश्यकताओं के अनुरूप विभिन्न उत्पादक साधनों को उपलब्ध कराये ताकि अधिकतम सामाजिक कल्याण के उद्देश्य की पूर्ति की जा सके। इसलिए यह आवश्यक है कि विभिन्न औद्योगिक गतिविधियों का योजनाबद्ध ढंग से निर्देश दे।

इस तकनीकी की सहायता से यह मालूम किया जा सकता है कि एक उद्योग के कुल उत्पादन का कितना भाग दूसरे उद्योग में आगत के रूप में काम आता है। आगत-निर्गत व्यूह की सहायता से सांख्यिकीज्ञों (Statisticians) तथा योजना अधिकारियों को सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था को अदा-प्रदा संबंध समझने में मदद मिलती है।

आगत-निर्गत विश्लेषण अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के मध्य संबंध का ज्ञान कराती है। अत: अर्थव्यवस्था की आन्तरिक संरचना को समझने के लिए नियोजकों के लिए यह विश्लेषण सुविधाजनक है। अनियोजित अर्थव्यवस्था 'परीक्षण तथा त्रुटि' की प्रणाली पर आधारित है, किन्तु नियोजित अर्थव्यवस्था में इस प्रकार की त्रुटियों के निवारण का इस विश्लेषण द्वारा प्रयास किया जाता है।

यह ध्यान देने योग्य तथ्य है कि राष्ट्रीय आर्थिक आयोजन में प्रावैगिक आगत-निर्गत की धारणा स्थैतिक आगत-निर्गत की धारणा की अपेक्षा महत्त्वपूर्ण है क्योंकि देश के आर्थिक विकास में तेजी से परिवर्तन होने के कारण अर्थव्यवस्था की संरचना का प्रवाह स्थिर नहीं रह सकता। इस संदर्भ में यह तकनीकी अर्द्धविकसित अर्थव्यवस्था में आर्थिक आयोजन के लिए अधिक उपयोगी सिद्ध होती है। इसका कारण यह है कि रेखीय समरूप आगत-निर्गत निदर्श स्थिर तकनीकी गुणांक के अंतर्गत विश्वसनीय समंकों की अनुपस्थिति में भी लागू किया जा सकता है।

आगत-निर्गत निदर्श का प्रयोग न केवल विभिन्न उत्पादन क्षेत्रों में पारस्परिक संबंधों का अध्ययन करने में होता है, बल्कि विभिन्न उद्देश्यों की पूर्ति हेतु भी इसका प्रयोग किया जाता है। स्वदेश तथा अन्य देशों के प्रशासनिक क्षेत्रों

नोट

के अध्ययन करने के लिए भी इस विश्लेषण का प्रयोग किया जाता है। इस निदर्श में हमें किसी देश के विभिन्न क्षेत्रों एवं विभिन्न देशों के मध्य आगत-निर्गत प्रवाह के सरल अध्ययन हेतु एक योजना (Scheme) प्राप्त होती है[1]।

इस विश्लेषण का प्रयोग रेलवे भाड़ा (Freight) व्यापार के अध्ययन के लिए भी किया जाता है। रेलवे व्यापार सारणियों में उत्पादन क्षेत्रों का सहयोग विभिन्न रेलवे स्टेशनों द्वारा वर्षों से लिया जाता रहा है। 'अन्तर क्षेत्र प्रवाह' को 'टनों में भाग' से स्थापन्न कर दिया जाता है, जो कि एक स्टेशन से दूसरे स्टेशन को भेजा जाता है।

उपरोक्त विवेचना से स्पष्ट है कि आगत-निर्गत व्यूह योजना के आर्थिक साधनों के आकलन हेतु प्रयोग किया जाता है। इस विश्लेषण की सारणियों को विभिन्न प्रकार से इस प्रकार से निर्वाचित किया जाता है जिससे अर्थमिति के विभिन्न क्षेत्रों जैसे उद्योगों में पारस्परिक संबंध एवं निर्भरता, विभिन्न देशों के अन्तर प्रवाह के विश्लेषण का अध्ययन सरलतापूर्वक किया जा सकता है। समाजवादी स्थितियों के अंतर्गत आगत-निर्गत विश्लेषण राष्ट्रीय योजनाओं के आन्तरिक सामंजस्य के अन्वेषण हेतु एक आवश्यक उपकरण है।

उदाहरण 1. दी गई अन्तरण मैट्रिक्स से आगत-निर्गत सह-गुणांक ज्ञात करो।

खरीदारी क्षेत्र→ / उत्पादन क्षेत्र ↓	कृषि	उद्योग	अन्तिम मांग	कुल उत्पादन
कृषि	300	600	100	1000
उद्योग	400	1200	400	2000

यदि प्राप्त मांग बदलती है क्रमशः 200 और 800, तो कुल उत्पादन ज्ञात करो जो नई मांग के समकक्ष हो।

हल (Solution): तकनीकी गुणांक का सूत्र प्रयोग करने पर,

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

यहाँ a_{ij} = तकनीकी गुणांक,

$X_i = j$वें क्षेत्र में कुल उत्पादन,

$x_{ij} = j$वें क्षेत्र का वह उत्पादन जो iवें क्षेत्र द्वारा काम में (अवशोषण) लाया जाता है।

तकनीकी गुणांक निकालने की सारणी

क्षेत्र (Sector)	कृषि (Agriculture)	उद्योग (Industry)	कुल उत्पादन (Total Output)
कृषि (Agriculture)	$\frac{300}{1000} = 0.3$	$\frac{600}{2000} = 0.3$	1000
उद्योग (Industry)	$\frac{400}{1000} = 0.4$	$\frac{1200}{2000} = 0.6$	2000

1. Oskar Lang: Introduction to Economics (1959).

नोट

यदि अन्तिम माँग कृषि तथा उद्योग में क्रमश: 200 तथा 800 हो जाए तब–

क्षेत्र	कृषि	उद्योग	अन्तिम माँग	कुल उत्पादन
कृषि	300	600	200	1100
उद्योग	400	1200	800	2400

अत: कुल उत्पादन (Gross Output) = 1100 + 2400 = 3500.

उदाहरण 2. नीचे दी गई सारणी अर्थव्यवस्था के तीन सैक्टरों S_1, S_2 और S_3 के साथ करोड़ों रुपए के अन्तर-औद्योगिक लेन-देन को दर्शाती है–

	S_1	S_2	S_3	अन्तिम माँग	कुल निर्गत
S_1	50	25	25	100	200
S_2	40	50	10	200	300
S_3	100	50	150	300	600

सहगुणांक मैट्रिक्स की गणना कीजिए

हल (Solution): हम जानते हैं कि

$$\left[\text{तकनीकी गुणांक} = a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}\right]$$

तकनीकी गुणांक निकालने की सारणी

	S_1	S_2	S_3	कुल उत्पादन (Total Output)
S_1	$\frac{50}{200} = 0.25$	$\frac{25}{300} = 0.08$	$\frac{25}{600} = 0.04$	200
S_2	$\frac{40}{200} = 0.20$	$\frac{50}{300} = 0.16$	$\frac{10}{600} = 0.016$	300
S_3	$\frac{100}{200} = 0.50$	$\frac{50}{300} = 0.16$	$\frac{150}{600} = 0.25$	600

उदाहरण 3. आगत-निर्गत निदर्श में तकनीकी मैट्रिक्स नीचे दी गई है–

	क्षेत्र I	क्षेत्र II	अन्तिम मांग
Sector I	0.1	0.3	F_1
Sector II	0	0.2	F_2
Labour	0.9	0.8	–

यदि अन्तिम मांग $F_3 = 0.5y + 100$

$F_2 = 0.3y + 204$

नोट

तो आय का संतुलन और विभिन्न सैक्टरों का निर्गत ज्ञात करें। परिणामों की तुलना करें यदि $F_1 = 100, F_2 = 200$ हो।

हल : संतुलन की स्थिति में,

$$F_1 = F_2$$

$\therefore$ $$0.5y + 100 = 0.3y + 200$$

अथवा $$5y + 1000 = 3y + 2000$$

अथवा $$2y = 1000$$

अथवा $$y = 500$$

पुनः $$F_1 = 0.5y + 100 = (.5 \times 500) + 100 = 350$$

$$F_2 = 0.3y + 200 = (0.3 \times 500) + 200 = 350$$

हम जानते हैं कि—

$$X = AX + D$$

अथवा $$X = (I - A)^{-1} D$$

यहाँ X = क्षेत्र तथा I क्षेत्र II का कुल उत्पादन है

I = इकाई व्यूह

D = अन्तिम माँग

A = व्यूह गुणांक (Coefficient of Matrix)

अब

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{\text{Adjoint}}{\text{Determinant}}$$

$$\text{Det. of } (I - A) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= 0.72$$

पक्षान्तरणित व्यूह $(I - A) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{सहखण्ड of } 0.9 = 0.8 \\ \text{सहखण्ड of } 0.3 = 0 \\ \text{सहखण्ड } 0 \ = 0.3 \\ \text{सहखण्ड } 0.8 = 0.9 \end{array}\right\} \qquad \begin{bmatrix} \therefore (-1)^{i+j} \\ \text{for cofactor sign} \end{bmatrix}$$

नोट

$$\text{Adjoint of } (I - A) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.72}\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{0.8}{0.72} & \dfrac{0.3}{0.72} \\ 0 & \dfrac{0.9}{0.72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.41 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix}$$

अब $$(I - A)^{-1} D = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.41 \\ 0 & 1.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 532.0 \\ 437.5 \end{bmatrix}$$

अत: प्रथम क्षेत्र का कुल उत्पादन $= 532$ इकाइयाँ

तथा द्वितीय क्षेत्र का कुल उत्पादन $= 437.5$ इकाइयाँ

(*iii*) यदि $F_1 = 100$ तथा $F_0 = 200$ हो तो

$$X\,(I - A)^{-1} D = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.41 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 192 \\ 250 \end{bmatrix}$$

इस स्थिति में प्रथम क्षेत्र का उत्पादन $= 192$ इकाइयाँ

तथा द्वितीय क्षेत्र का उत्पादन $= 250$ इकाइयाँ।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

निम्नलिखित कथनों में सत्य अथवा असत्य की पहचान करें

(State whether the following statements are True or False):

6. $X_i = \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij}$
7. $X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\, X_i\, P_i = 0$ समीकरण, संतुलन समीकरणों का द्वितीय समुच्चय है।
8. आर्थिक क्षेत्र में आगत-निर्गत विश्लेषण की प्रविधि एक महत्त्वपूर्ण भूमिका अदा नहीं करती है।
9. आगत-निर्गत विश्लेषण अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के मध्य संबंध का ज्ञान नहीं कराती है।
10. तकनीकी गुणांक $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$.

24.5 सारांश (Summary)

- आगत (Input) का तात्पर्य उत्पादक का उत्पादन करने के लिए सामग्री (Material) की माँग करने से है जबकि निर्गत (Output) शब्द का अभिप्राय उत्पादकता प्रयास के परिणाम के फल से है।
- आगत-निर्गत विश्लेषण की सहायता से अन्त: उद्योग संबंध तथा सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था को अन्त: निर्भरता प्राप्त होती है क्योंकि एक उद्योग का निर्गत दूसरे उद्योग के लिए आगत हो सकता है।
- लियोन्टिफ का स्थैतिक आगत-निर्गत निदर्श उपरोक्त मान्यताओं पर आधारित है। लियोन्टिफ का स्थैतिक निदर्श को एक उदाहरण द्वारा समझाया जा सकता है।
- आगत-निर्गत सारणी की सहायता से इस निदर्श को समझाया जा सकता है। इस सारणी में तीनों क्षेत्रों का निर्गत (Output), पंक्तियों (Rows) (क्षैतिज रूप में) द्वारा दर्शाया गया है जबकि इन क्षेत्रों का आगत (Input), स्तम्भों (Columns) (लम्बवत् रूप में) द्वारा दर्शाया गया है।
- तकनीकी गुणांक निकालने का तरीका बहुत सरल है। यहाँ हम वांछित क्षेत्र के आगत में उस क्षेत्र के कुल उत्पादन का भाग दे देते हैं।
- लियोन्टिफ निदर्श की मान्यताएँ अव्यावहारिक हैं। इसमें यह माना गया है कि तकनीकी गुणांक (Technological Coefficient) स्थिर रहता है। इसका अभिप्राय है कि तकनीकी स्थिरता अथवा उत्पादन में परिवर्तन से लगाये गये साधनों की मात्राओं में भी परिवर्तन होगा।
- व्यवहार में वस्तुओं तथा सेवाओं को केवल मौद्रिक रूप में ही व्यक्त किया जाता है। अतएव भौतिक इकाइयों के रूप में आगत-निर्गत विश्लेषण के संतुलन समीकरणों द्वारा अर्थव्यवस्था का समुचित रूप में पूर्वानुमान कठिन होता है।
- लियोन्टिफ आगत-निर्गत खुले निदर्श में हमने अन्तिम माँग क्षेत्र (घरेलू क्षेत्र) को पृथक् रूप से माना था। यदि इस क्षेत्र को भी आर्थिक व्यवस्था में विलय कर लिया जाए तो कोई भी क्षेत्र ऐसा नहीं रहेगा जिसका संबंध बाह्य क्षेत्र से हो।
- स्थैतिक निदर्श में अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के तकनीकी गुणांकों की सहायता से पारस्परिक निर्भरता का अध्ययन करते हैं।
- आगत-निर्गत गत्यात्मक निदर्श स्थैतिक निदर्श का सामान्यकृत रूप है। अत: इसकी मान्यताएँ स्थैतिक निदर्श के अनुरूप होंगी।
- आर्थिक क्षेत्र में आगत-निर्गत विश्लेषण की प्रविधि एक महत्त्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। आर्थिक सिद्धांत पर विचार, राष्ट्रीय-लेखों की रचना, आर्थिक योजनाओं की रचना, उद्योगों का पारस्परिक संबंधों तथा निर्भरता का अध्ययन करना, व्यापार चक्रों का अध्ययन इत्यादि महत्त्वपूर्ण क्षेत्र हैं, जिनका विश्लेषण इस प्रविधि से ही संभव हुआ है।
- आगत-निर्गत विश्लेषण अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के मध्य संबंध का ज्ञान कराती है। अत: अर्थव्यवस्था की आन्तरिक संरचना को समझने के लिए नियोजकों के लिए यह विश्लेषण सुविधाजनक है।

24.6 शब्दकोश (Keywords)

- आगत (Input): प्राप्त।
- निर्गत (Output): निकलना।

नोट

24.7 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. बंद निदर्श के संतुलन समीकरणों का प्रथम समुच्चय की गणितीय व्याख्या करें।
2. लियोन्टिफ का आगत-निर्गत बंद निदर्श से क्या अभिप्राय है?
3. लियोन्टिफ के प्रावैगिक निदर्श पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखें।
4. एक आयोजित अर्थव्यवस्था के लिए आगत-निर्गत निदर्शों का महत्त्व समझाइए।
5. बंद निदर्श के संतुलन समीकरणों का द्वितीय समुच्चय की गणितीय व्याख्या करें।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1.	उत्पादन	2.	निर्गत	3.	आगत	4.	लियोन्टिफ	5.	निर्भरता।
6.	सत्य	7.	सत्य	8.	असत्य	9.	असत्य	10.	सत्य।

24.8 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
3. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
5. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*

नोट

इकाई–25 : हॉकिन्स-सिमोन की शर्तें (Conditions of Hawkins and Simon)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- हॉकिन्स-सिमोन की शर्तों से अवगत होने में।
- मैट्रिक्स का तकनीकी गुणा निकालने में।

प्रस्तावना (Introduction)

कभी-कभी आगत-निर्गत मैट्रिक्स का हल, ऋणात्मक संख्या आ जाता है। यदि हमारा हल निर्गत, ऋणात्मक निर्गत आता है तो इसका मतलब यह है कि हम निर्गत से अधिक आगत का प्रयोग कर रहे हैं, जो कि एक अवास्तिक स्थिति है। तो हम यह कह सकते हैं कि ऐसा System Viable नहीं है।

25.1 हॉकिन्स एवं सिमोन की शर्तें (Conditions of Hawkins and Simon)

Hawkins-Simon की शर्तें इस स्थिति से निजात दिलाती हैं। हमारा प्राथमिक समीकरण $X = (I - A)^{-1}F$ है, तो $(I - A)$ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$\begin{vmatrix} (1-a_{11}) & -a_{+2} & -a_{+3} & \dots & a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & (1-a_{nn}) \end{vmatrix}$$

नोट

तो H.S. की निम्न दो शर्तें होंगी–

(1) मैट्रिक्स का सारणिक हमेशा धनात्मक होना चाहिए

(2) विकरण तत्व *i.e.* $(1 - a_{11})$, $(1 - a_{22})$, $(1 - a_{33})$ ...... $(1 - a_{nn})$ धनात्मक होने चाहिए अर्थात् $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots a_{nn}$ हमेशा 1 से कम होने चाहिए।

क्या आप जानते हैं उपरोक्त दोनों शर्तों को ही Hawkins-Simon की शर्तें कहते हैं।

उदाहरण: यदि $(A) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$

$$\therefore \qquad (I - A) = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$$

और सारणिक का मान $(I - A)$ हो तो, $0.06 - 0.18 = (-)\ 8.12$ जोकि शून्य से कम है।

यहाँ पर H.S. Condition संतुष्ट नहीं होती है।

तो कोई भी हल संभव नहीं है।

टास्क हॉकिन्स-सिमोन की शर्तों को लिखें।

उदाहरण: वर्ष 1990 में अन्त: उद्योग का लेन-देन निर्धारण निम्न दिया है–

दी गई अन्तर-औद्योगिक लेन-देन सारणी वर्ष 1990 के लिए एक अर्थव्यवस्था के लिए बनाई गई है।

उद्योग	*1*	*2*	*अन्तिम उपभोग*	*कुल*
1	500	1,600	400	2,500
2	1,750	1,600	4,650	8,000
श्रम	250	4,800	–	5,050
कुल	2,500	8,000	5,050	15,550

25.2 मैट्रिक्स का तकनीकी गुणा निकालना (To Find the Technical Multiplication of Matrix)

प्रत्यक्ष आवश्यकता प्रदर्शित करते हुए तकनीकी सहगुणांक मैट्रिक्स बनाइए। क्या इस पद्धति के लिए हल है?

प्रत्येक आगत को सेक्टर के कुल निर्गत से भाग देकर, निर्गत की प्रत्येक इकाई (रुपए) की प्रत्यक्ष आवश्यकता प्रदर्शित करते हुए तकनीकी मैट्रिक्स ज्ञात कर सकते हैं।

जैसे कि, **नोट**

उत्तर—

$$a_{11} = \frac{500}{2{,}500} = 0.20 \left(= \frac{X_{11}}{X_1} \right)$$

$$a_{12} = \frac{1{,}600}{8{,}000} = 0.20 \left(= \frac{X_{12}}{X_2} \right)$$

$$a_{21} = \frac{1{,}750}{2{,}500} = 0.70 \left(= \frac{X_{21}}{X_1} \right)$$

$$a_{22} = \frac{1{,}600}{8{,}000} = 0.20 \left(= \frac{X_{22}}{X_2} \right)$$

अत: दी गई तकनीकी मैट्रिक्स

$\therefore$ $A =$

उद्योग	1	2
1	0.20	0.20
2	0.70	0.20
श्रम	0.10	0.60

and $$(I - \text{A}) = \begin{pmatrix} 1 & -0.20 & -0.20 \\ & -0.70 & 1-0.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.80 & -.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $$(I - A) = \begin{vmatrix} 0.80 & -0.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{vmatrix}$$

$$= 0.80 \times 0.80 - 0.20 \times 0.70 = 0.50$$

चूंकि $|I - A|$ धनात्मक है और $(I - A)$ के मूल विकर्ण के सभी तत्व भी धनात्मक होंगे, अत: हॉकिन्स और सिमोन की शर्तें पूर्ण होती हैं अत: प्रयोगाश्रित पद्धति का एक हल है।

उदाहरण : दिया है;

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

तथा अन्तिम माँग F_1, F_2 and F_3 है output का स्तर निकालिए

और अन्तिम मांग हैं F_1, F_2 और F_3. निदर्श की नियमितता के साथ निर्गत स्तर ज्ञात कीजिए। निर्गत स्तर क्या होगा यदि $F_1 = 20, F_2 = 0$ और $F_3 = 100$ हो?

उत्तर— $$= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

नोट

अब, $$(I-A) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.1 \\ 0 & 0.8 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

सहभाजक इस प्रकार है:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.56$$

$$A_{13} = -\begin{vmatrix} 0 & -0.2 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -0.8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.21$$

$$A_{22} = -\begin{vmatrix} -0.9 & -0.1 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.63$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -0.9 & -0.3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = -\begin{vmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0.8 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.14$$

$$A_{33} = -\begin{vmatrix} -0.9 & -0.1 \\ 0 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.18$$

$$A_{33} = -\begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 \\ 0 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.72$$

अत: सारणिक का मान है, $0.9 \times 0.56 = 0.504$

अत: $$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0.504}\begin{bmatrix} 0.56 & 0.21 & 0.14 \\ 0 & 0.63 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0.72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.11 & 0.42 & 0.28 \\ 0 & 1.25 & 0.36 \\ 0 & 0 & 1.43 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.42 & 0.28 \\ 0 & 1.25 & 0.36 \\ 0 & 0 & 1.43 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.11F_1 & + & 0.42F_2 & + & 0.28F_2 \\ 0 & + & 1.25F_2 & + & 0.36F_3 \\ 0 & + & 0 & + & 1.43F_3 \end{bmatrix}$$

F_1, F_2 और F_3, के दिए गए मान से हमें प्राप्त होता है,

$$X_1 = 1.11F_1 + 0.42F_2 + 0.28F_3$$
$$= 1.11 \times 20 + 0 + 0.28 \times 100$$
$$= 50.2$$
$$X_2 = 1.25F_2 + 0.36F_3$$
$$0 + 0.36 \times 100 = 36$$ और
$$X_3 = 1.43F_3 = 143$$

नोट्स यह नोट करने योग्य है कि यदि तकनीकी मैट्रिक्स उच्च त्रिकोणीय (जो कि), यदि मूल विकर्ण के नीचे के सभी तत्व शून्य हैं या शून्य के नजदीक हैं, तब $(I - A)^{-1}$ मैट्रिक्स त्रिकोणीय होगी। ऐसी स्थिति में X_3 निर्गत पूरी तरह से सेक्टर 3 की अन्तिम मांग पर निर्भर करेगा और X_3 सेक्टर 2 और 3 की अन्तिम मांग पर निर्भर करेगा।

उदाहरणः उपरोक्त उदाहरण में यदि अन्तिम माँग में 10, 10, 10, परिवर्तन होता है तो निर्गत में क्या परिवर्तन होगा।

In the above example, if final demands change by 10, 10, 10, then what will be the change in sector outputs?

We have $$X = (I - A)^{-1} F$$

$\therefore$ $$\Delta X = (I - A)^{-1} \Delta F$$

जहां, ΔX और ΔF निर्गत और अन्तिम मांग में आए निम्न बदलावों के क्रमशः वाहक हैं, अतः

$$\Delta X = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.42 & 0.28 \\ 0 & 1.25 & 0.36 \\ 0 & 0 & 1.43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X_1 = 1.11 \times 10 + 0.42 \times 28 \times 10 = 18.1$$
$$\Delta X_2 = 0 + 1.25 \times 10 + 0.36 \times 10 = 16.1$$
$$\Delta X_3 = 14.3$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. कभी-कभी आगत-निर्गत मैट्रिक्स का हल ········· संख्या आ जाता है।
2. यदि हमारा हल निर्गत ऋणात्मक है तो इसका मतलब यह है कि हम निर्गत से अधिक ········· का प्रयोग कर रहे हैं।
3. मैट्रिक्स का सारणिक हमेशा ········· होना चाहिए।

VED1
E\L-LOVELY-H\math25-1 IInd 6-8-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

नोट

25.3 सारांश (Summary)

- कभी-कभी आगत-निर्गत मैट्रिक्स का हल, ऋणात्मक संख्या आ जाता है। यदि हमारा हल निर्गत, ऋणात्मक निर्गत आता है तो इसका मतलब यह है कि हम निर्गत से अधिक आगत का प्रयोग कर रहे हैं, जो कि एक अवास्तिक स्थिति है।
- हमारी प्राथमिक समीकरण $X = (I - A)^{-1}F$ है तो $(I - A)$ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{+2} & -a_{+3} & a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} & a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) & a_{3n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & (1-a_{nn}) \end{bmatrix}$$

25.4 शब्दकोश (Keywords)

- शर्त (Condition): प्रतिबंध।

25.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. निम्न तकनीकी गुणांक (A) तथा अन्तिम माँग दी हुई है, उत्पादन (output) ज्ञात कीजिए

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}_3 \quad F = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$$

2. निम्न सारणी की सहायता से तकनीकी गुणांक निकालिए–

क्रय क्षेत्र → / ↓ उत्पादक क्षेत्र	कृषि	उद्योग	अन्तिम माँग	कुल उत्पादन
(1) कृषि	500	1000	200	1700
(2) उद्योग	700	1500	600	2800

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. ऋणात्मक 2. आगत 3. धनात्मक

25.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*

4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
5. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
9. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*

नोट

इकाई–26 : बन्द अर्थव्यवस्था : आगत-निर्गत मॉडल (Closed Economy : Input-Output Model)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- आगत-निर्गत विश्लेषण के मुख्य तत्वों को जानने में;
- बन्द आगत-निर्गत मॉडल को समझने में।

प्रस्तावना (Introduction)

आगत शब्द का तात्पर्य उत्पादक का उत्पादन के लिए सामग्री की मांग से है। इसी तरह निर्गत शब्द का अर्थ उत्पादकता के फल से जुड़ा है। लागत का मतलब उस सामग्री से है जो उत्पादक उत्पादन के लिए क्रय करता है जबकि निर्गत शब्द का अर्थ उससे है जिसका उत्पादक विक्रय करता है। अत: आगत किसी फर्म के लिए लागत है जबकि निर्गत प्राप्ति।

आगत-निर्गत विश्लेषण की खोज सन् 1951 में w.w. Leontief की थी। यह विश्लेषण इस बात का अध्ययन करता है कि एक दी हुई तकनीक पर विभिन्न क्षेत्रों का कितना उत्पादन किया जाये जो उपभोग के तौर पर उपभोक्ता एवं उद्योगों के द्वारा पूर्णत: प्रयोग में ले लिया जाये तथा यहाँ पर संतुष्टि का स्तर अधिकतम हो।

26.1 आगत-निर्गत विश्लेषण के मुख्य तत्व (Prime Elements of Input-Output Analysis)

- यह विश्लेषण संतुलित अर्थव्यवस्था पर लागू होता है।
- यह विश्लेषण उत्पादन क्रियाओं एवं तकनीकी से संबंधित समस्याओं का अध्ययन करता है।
- यह विश्लेषण सार्वभौमिक खोजों पर आधारित है।

आगत-निर्गत मॉडल : **नोट**

इसकी तकनीकी को स्पष्ट करने के लिए दो प्रकार के समीकरणों का प्रयोग किया जाता है (A) तुलनात्मक समीकरण: यह समीकरण स्पष्ट करता है कि किसी उद्योग का सम्पूर्ण उत्पादन या तो स्वयं के द्वारा खपत कर लिया जाता है या दूसरे उद्योगों अथवा बाहरी क्षेत्रों द्वारा खपत कर लिया जाता है। माना बाहरी क्षेत्र से अतिरिक्त उद्योगों की संख्या n है तथा उद्योग i है। जिसका कुल उत्पादन x_i है। तो निम्न तुलनात्मक सभी होगी;

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + X_{13} + \ldots + X_{1n} + \mathrm{F}_1$$
$$X_2 = X_{21} + X_{22} + X_{23} + \ldots + X_{2n} + \mathrm{F}_2$$
$$\therefore \quad X_i = X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} + \ldots + X_{in} + \mathrm{F}_i$$

जहाँ $F \Rightarrow$ बाहरी क्षेत्र की माँग

(B) संरचनात्मक समीकरण: इस समीकरण के निर्माण के लिये तकनीकी गुणांक का सहारा लिया जाता है। माना i एवं j दो उद्योग हैं :

उद्योग 'j' में उद्योग 'i' का तकनीकी गुणांक

$$j = \frac{\text{उद्योग } 'j' \text{ में उद्योग } 'i' \text{ के उत्पाद की खपत की गई मात्रा}}{\text{उद्योग } 'i' \text{ का कुल उत्पादन}}$$

अर्थात्
$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

or
$$X_{iy} = a_{ij} \times X_j \qquad \ldots(\mathrm{A})$$

यहाँ a_{ij} तकनीकी गुणांक है।

उपरोक्त (A) समीकरण संरचनात्मक समीकरण कहलाता है। अब; तुलनात्मक समीकरण को संरचनात्मक समीकरण में परिवर्तन करने पर,

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots + a_{in}X_n + F_1$$
$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots\ldots + a_{2n}X_n + F_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + \ldots\ldots + a_{in}X_n + F_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \ldots\ldots + a_{nn}X_n + F_n$$

सारणिक के रूप में लिखने पर

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_i \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ : \\ X_i \\ : \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ : \\ F_i \\ : \\ F_n \end{bmatrix}$$

or
$$X = AX + F \qquad \ldots(\mathrm{I})$$

यह आगत-निर्गत मॉडल का सामान्य समीकरण होती है।

नोट

26.2 बन्द आगत-निर्गत मॉडल (Closed Input-Output Model)

यदि बाहरी क्षेत्र की माँग अर्थात् F, आन्तरिक क्षेत्र की तरह कार्य करे तो वह मॉडल बन्द आदा-प्रदा मॉडल कहलाता है। जिस प्रकार अन्तिम उपभोग क्षेत्र, अन्य उद्योगों को श्रमिकों की आपूर्ति करता है तो वह एक उद्योग की तरह कार्य करता है। इस अवस्था में उद्योगों की संख्या $(n + 1)$ हो जायेगी, अगर बाहरी क्षेत्र को X_0 उद्योग से प्रदर्शित करें तो,

$$X_0 = a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 + \ldots\ldots + a_{0n}X_n$$
$$X_1 = a_{10}X_0 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = a_{n0}X_0 + a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots\ldots + a_{nn}X_n$$

or $\quad X = AX$

or $\quad X - AX = 0$

or $\quad [I - A]X = 0$, यहाँ I $\Rightarrow$ Identity आव्यूह है।

उदाहरणार्थ: उपभोग फलन विश्लेषण (बन्द मॉडल) माना दो उद्योग एवं एक अन्तिम माँग दी हुई है।

–	1	2	Final Demand
1	0.1	0.3	F_1
2	0	0.2	F_2
श्रमिक (L)	0.9	0.5	–

अब माना Final demand भी उद्योग की तरह कार्यरत है तो

$$F_1 = 0.5\,y + \bar{C}_1$$

$$F_2 = 0.3\,y + \bar{C}_2$$

यहाँ 0.5 and 0.3 MPC है तथा $\bar{C}_1$ and $\bar{C}_2$ स्वायक्त उपयोग है।

तो गुणक $\quad k = \dfrac{1}{1-(0.5+0.3)} = \dfrac{1}{0.2} = 5$

तो नया आगत-निर्गत मॉडल;

$$X_1 = 0.1X_1 + 0.3X_2 + 0.5\,y + \bar{C}_1$$

$$X_2 = 0.0X_1 + 0.2X_2 + 0.3\,y + \bar{C}_2$$

तथा मजदूरी दर 0.9 एवं 0.5 दी हुई है तो $.9x_1 + 0.5x_2 = y$

तो

$$X_1(1 - 0.1) - 0.3\,X_2 - 0.5y = \bar{C}_1$$

$$-0.0X_1 + X_2(1 - 0.2) - 0.3\,y = \bar{C}_2$$

$$0.9X_1 + 0.5X_2 + y = 0$$

तो सारणिक के रूप में;

नोट

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{0.144}\begin{bmatrix} 0.65 & 0.55 & 0.49 \\ 0.27 & 0.45 & 0.27 \\ 0.72 & 0.72 & 0.72 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

0r
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.51 & 3.82 & 3.34 \\ 1.87 & 3.12 & 1.87 \\ 5.0 & 5.0 & 5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

तो सन्तुलित आय $y = 5X\bar{C}_1 + 5X\bar{C}_2 = 5(\bar{C}_1 - \bar{C}_2)$ **Ans.**

26.3 सारांश (Summary)

- आगत शब्द का तात्पर्य उत्पादक का उत्पादन के लिए सामग्री की मांग से है। इसी तरह निर्गत शब्द का अर्थ उत्पादकता के फल से जुड़ा है। लागत का मतलब उसी सामग्री से है जो उत्पादक उत्पादन के लिए क्रय करता है जबकि निर्गत शब्द का अर्थ उससे है जिसका उत्पादक विक्रय करता है। अत: आगत किसी फर्म के लिए लागत है जबकि निर्गत प्राप्ति।

26.4 शब्दकोश (Keywords)

1. आगत : किसी फर्म के लिए उत्पादन की सामग्री

26.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. बंद अर्थव्यवस्था में आगत-निर्गत मॉडल को स्पष्ट करें।
2. किसी फर्म की लागत बढ़ने पर उत्पादन पर क्या असर पड़ेगा?

26.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट : यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
5. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
9. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*

नोट

इकाई–27 : रेखीय प्रोग्रामिंग (Linear Programming)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- रेखीय प्रोग्रामिंग के अर्थ, शर्तें एवं सामान्यीकरण से संबंधित जानकारी प्राप्त करने में।
- फर्म के सिद्धांत पर उपयोग की जानकारी प्राप्त करने में।
- रेखीय प्रोग्रामिंग की सीमाओं को जानने में।

प्रस्तावना (Introduction)

रेखीय प्रोग्रामिंग एक गणितीय विधि है जिसका गणितज्ञ जार्ज डैनजिग (George Dantzig) ने, सेनाओं को पूर्ति पहुँचाने की समस्या से सम्बन्धित अमरीका की वायु सेना के विभिन्न कार्य-कलापों की योजना बनाने के लिए, 1947 में विकसित किया था। फर्म के आर्थिक सिद्धांत, प्रबंधात्मक अर्थशास्त्र, अन्त:प्रादेशिक व्यापार, सामान्य संतुलन विश्लेषण, कल्याण अर्थशास्त्र और विकास आयोजन में प्रयोग के लिए भी इसका विकास हुआ है। इस अध्याय में फर्म से संबंधित रेखीय प्रोग्रामिंग की व्याख्या की जा रही है।

27.1 रेखीय प्रोग्रामिंग का अर्थ (Meaning of linear Programming)

अधिकतमीकरण तथा न्यूनतमीकरण की समस्याओं को इष्टतमीकरण (optimisation) की समस्याएँ भी कहते हैं। इन समस्याओं को हल करने के लिए अर्थशास्त्रियों द्वारा जो तकनीकें अपनाई जाती हैं उन्हें रेखीय प्रोग्रामिंग कहते हैं। रेखीय असमानताओं के रूप में कुछ संरोधनों (constraints) के रहते हुए, इष्टतम निर्णयों के विश्लेषण के लिए यह एक गणितीय तकनीक है। गणितीय भाषा में यह उन सब समस्याओं पर लागू होती है जिनमें, कुछ चरों के रूप में व्यक्त रेखीय असमानताओं का व्यवस्था के रहते हुए, अधिकतमीकरण (maximisation) तथा न्यूनतमीकरण (minimisation) के हलों की जरूरत होती है। यदि x और y, दो चर (variables), z के फलन (function) हों, तो z का मूल्य उस समय अधिकतम होगा, जब उस बिन्दु से की गई किसी भी गति से z का मूल्य कम हो जाए। z का मूल्य उस समय न्यूनतम होता है, जबकि किसी भी गति से z का मूल्य अधिक हो जाए। जब निर्गत के आकार के साथ प्रति इकाई लागत और कीमत में परिवर्तन हो, तो समस्या रेखीय नहीं होती और यदि निर्गत के साथ उनमें परिवर्तन नहीं होता, तो समस्या रेखीय होती है। इस प्रकार प्रोग्रामिंग की परिभाषा यों दी जा सकती है कि यह वह विधि है जो दी हुई निर्गत के उत्पादन के लिए साधनों के इष्टतम संयोग या दिए हुए प्लांट और उपकरण से उत्पादन की जाती है। वस्तु के इष्टतम संयोग का निर्णय करती है। एक वस्तु के उत्पादन में तकनीकी विविधता का निर्णय करने के लिए भी इसका प्रयोग होता है।

27.2 शर्तें एवं सामान्यीकरण (Conditions and Generalisation)

रेखीय प्रोग्रामिंग तकनीक का प्रयोग कुछ शर्तों और सामान्यीकरण पर निर्भर करता है।

प्रथम, एक निश्चित उद्देश्य होता है। यह उद्देश्य लाभ या आय को अधिकतम बनाना या लागतों को न्यूनतम करना हो सकता है। इसे **उद्देश्य फलन** (objective function) या **कसौटी फलन** (tenterion function) कहते हैं। यदि एक मात्रा अधिकतम बनती है तो उसकी ऋणात्मक मात्रा न्यूनतम बन जाती है। प्रत्येक अधिकतमीकरण समस्या का द्वैध (dual) न्यूनतमीकरण की समस्या होती है। मूल समस्या प्रमुख (primal) समस्या है, जिसकी हमेशा एक द्वैध होती है। यदि प्रमुख समस्या का संबंध अधिकतमीकरण से हो, तो द्वैध का न्यूनतमीकरण से होगा और विलोमशः भी।

दूसरे, उद्देश्य को पूरा करने के लिए वैकल्पिक उत्पादन प्रक्रियाएँ (processes) होनी चाहिए। प्रक्रिया या सक्रियता (activity) का विचार रेखीय प्रोग्रामिंग में अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है। प्रक्रिया "किसी आर्थिक काम को करने की विशिष्ट विधि है।" यह "किसी प्रकार की भौतिकी क्रिया होती है, जैसे किसी वस्तु का उपभोग करना, किसी का संग्रह करना, किसी का क्रय करना, किस वस्तु को फेंक देना और एक विशेष ढंग से किसी वस्तु का उत्पादन करना।"

नोट्स रेखीय प्रोग्रामिंग तकनीक निर्णय करने वाली एजेन्सी की इस बात में सहायता करती है कि वह उद्देश्य को पूरा करने के लिए सबसे अधिक दक्ष तथा मितव्ययी प्रक्रिया चुन सकें।

तीसरे, समस्या के कुछ संरोधन (constraints) या अवरोधक (restraints) भी जरूर होते हैं। वे समस्या की स्थितियों से संबंधित सीमाएँ या बाधाएँ होती हैं जो यह बताती हैं कि क्या-क्या नहीं किया जा सकता और क्या-क्या करना आवश्यक है। इन्हें असमानताएँ (inequalities) भी कहते हैं। उत्पादन में प्रायः वे भूमि, श्रम और पूँजी की दी हुई मात्राएँ होती हैं, जिनका एक निश्चित उद्देश्य को पूरा करने के लिए दक्षतम प्रक्रिया में प्रयोग होता है।

नोट

चौथे, 'चुनाव चर' (choice variables) भी होते हैं। ये वे संस्थाएँ हैं जिनका चुनाव किया जाता है, ताकि उद्देश्य फलन को अधिकतम या न्यूनतम बनाया जा सके और सब अवरोधों को संतुष्ट किया जा सके।

अन्तिम, संभाव्य (feasible) और इष्टतम (optimal) हल होते हैं। उपभोक्ता की आय और वस्तुओं की कीमतें दी हुई होने पर, वस्तुओं के सब संभव संयोग, जिन्हें यह संभाव्यता से खरीद सकता है, संभाव्य हल होते हैं। उपभोक्ता के लिए, दो वस्तुओं के संभाव्य हल वे सब संयोग होते हैं, जो बजट रेखा पर या उससे बाएँ को स्थित हों जबकि समलागत रेखा (isocost line) पर वे या तो उस पर या उसके दाएँ को स्थित होते हैं।

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि संभाव्य हल वह है, जो सब अवरोधों को संतुष्ट करे। सब संभाव्य हलों में से श्रेष्ठतम हल इष्टतम हल (optimum solution) होता है। यदि एक संभाव्य हल उद्देश्य फलन को अधिकतम या न्यूनतम बनाता है तो वह इष्टतम हल होता है। सब संभव संभाव्य हलों में से इष्टतम हल ढूँढ़ने का श्रेष्ठतम उपलब्ध तरीका सिम्पलैक्स विधि (simplex method) है। सिम्पलैक्स विधि नाम से प्रसिद्ध यह तरीका अत्यन्त गणितीय और तकनीकी है। जो रेखीय प्रोग्रामिंग का प्रमुख लक्ष्य इष्टतम हलों को ढूँढ़ना और उनकी विशेषताओं का अध्ययन करना है।

टास्क रेखीय प्रोग्रामिंग क्या है?

27.3 फर्म के सिद्धांत पर उपयोग (Application to the Theory of the Firm)

फर्म का नवक्लासिकी सिद्धांत तक समय में एक या दो चरों को लेकर निर्णयकरण की समस्या का विश्लेषण करता है। इसका संबंध एक समय में एक उत्पादन प्रक्रिया से होता है। रेखीय प्रोग्रामिंग में उत्पादन फलन आर्थिक सिद्धांत के इन सीमित क्षेत्रों के परे चला जाता है। यह उत्पादन प्रक्रिया में जो विभिन्न क्षमता सीमाएँ और बाधाएँ उत्पन्न होती हैं उन पर विचार करता है। यह लागतों का न्यूनतमीकरण अथवा लाभों का अधिकतमीकरण करने के लिए विभिन्न जटिल उत्पादकीय प्रक्रियाओं के बीच चुनाव करता है।

मान्यताएँ (Assumptions): फर्म का रेखीय प्रोग्रामिंग विश्लेषण निम्नलिखित मान्यताओं पर आधारित है:

(*i*) निर्णय करने वाली संस्था को कुछ संरोधनों (constraints) या साधन बाधाओं (restrictions) का सामना करना पड़ता है। हो सकता है कि वे उधार, कच्चा माल या उसके कार्यकलापों पर स्थान संरोधन (space constraints) हों। संरोधनों का प्रकार वास्तव में समस्या की प्रकृति पर निर्भर करता है। अधिकांश रूप से वे उत्पादन प्रक्रिया के स्थिर साधन होते हैं।

(*ii*) यह वैकल्पिक उत्पादन प्रक्रियाओं की संख्या सीमित मानकर चलता है।

(*iii*) इसकी एक मान्यता यह है कि भिन्न-भिन्न चरों में रेखीय संबंध होते हैं जिसका मतलब है कि एक प्रक्रिया के अंतर्गत आगत-निर्गत के बीच स्थिर **आनुपातिकता** होती है।

(*iv*) आगत-निर्गत कीमतें और गुणांक दिए हुए तथा स्थिर होते हैं। वे निश्चित रूप से ज्ञात होते हैं।

(*v*) योगशीलता (additivity) की धारणा भी रेखीय प्रोग्रामिंग के मूल में स्थिर रहती है जिसका मतलब है कि सब फर्मों द्वारा प्रयोग किए गए कुल साधन प्रत्येक व्यक्तिगत फर्म द्वारा प्रयोग किए गए साधनों के जोड़ के बराबर होते हैं।

(*vi*) रेखीय प्रोग्रामिंग तकनीकें वस्तुओं और साधनों में निरन्तरता और विभाज्यता को भी मानती हैं।

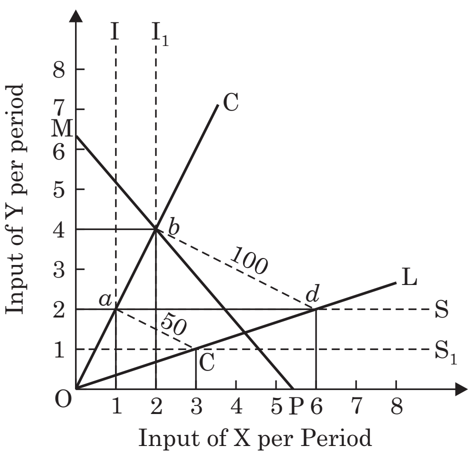
(*vii*) संस्थानिक साधन भी स्थिर मान लिए जाते हैं।

(*viii*) प्रोग्रामिंग के लिए एक निश्चित अवधि मान ली जाती है। सुविधा और अधिक सही परिणामों के लिए अवधि सामान्य रूप से छोटी होती है हालाँकि अपेक्षाकृत लंबी अवधि की संभावना को समाप्त नहीं कर दिया जाता।

ये मान्यताएँ दी होने पर फर्म के सिद्धांत पर रेखीय प्रोग्रामिंग का उपयोग निम्नलिखित तीन समस्याओं के हल के लिए किया जाता है।

(1) उत्पादन का अधिकतमीकरण (Maximisation of Output)

हम मान लेते हैं कि एक फर्म X और Y आगतों के प्रयोग से एक वस्तु Z का उत्पादन करने के लिए बनाई जाती है। इसका उद्देश्य है कि **उत्पादन को अधिकतम** बनाए। इसके पास दो वैकल्पिक उत्पादन प्रक्रियाएँ C (पूँजी-गहन) और L (श्रम-गहन) हैं। अवरोध, लागत-व्यय MP रेखा है। जैसा कि चित्र 27.1 में दिखाया गया है। रेखीय प्रोग्रामिंग तकनीक से संबंधित (ऊपर बताई गई) शेष सभी मान्यताएँ लागू होती हैं। चित्र 27.1 की भाषा में समस्या की व्याख्या की जा रही है।



चित्र 27.1

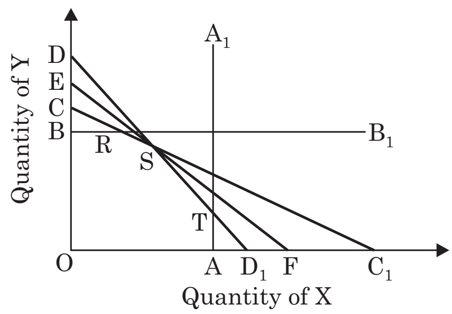
कीमत (साधन) Y की इकाइयाँ प्रति अवधि अनुलंब अक्ष पर मापी गई हैं और आगत X की इकाइयाँ प्रति अवधि समानांतर अक्ष पर दिखाई गई हैं। यदि प्रक्रिया C को X आगत की प्रति इकाई के साथ Y की 2 इकाइयों की जरूरत है तो वह वस्तु Z की 50 इकाइयों का उत्पादन करेगी। और X और Y आयतों को दुगुना करके X की इकाइयाँ और Y की 4 इकाइयाँ कर दी जाए तो निर्गत भी दुगनी होकर Z की 100 इकाइयाँ हो जाएँगी। a और b द्वारा प्रकट किए गए X और Y के ये संयोग **पूँजी-गहन प्रक्रिया** रेखा OC पर उत्पादन पैमाना स्थापित करते हैं। दूसरी ओर, वस्तु Z की मूल्य ही इकाइयाँ (50) प्रक्रिया L द्वारा X और Y की एक इकाई के संयोग से उत्पादन की जा सकती है और Z की 100 इकाइयाँ X और Y को दुगना करके X की 2 और Y की 6 इकाइयों से उत्पादित की जा सकती है। ये उत्पादन पैमाने श्रम-गहन की प्रक्रिया रेखा OL पर स्थापित होते हैं जिन्हें कीमतों के c और d संयोग प्रकट करते हैं। यदि 50 इकाई स्तर पर OC और OL रेखीय किरणों (linear rays) पर a और c बिन्दुओं को मिला दिया जाए तो वे सममात्रा वक्र (isoquant) बनाते हैं (जिसे बिन्दुकित दिखाया गया है।) 100-इकाई उत्पादन स्तर के अनुरूप सममात्रा में t, bdS है। लागत-व्यय अवरोध को समलागत वक्र MP प्रकट करता है और फर्म की उत्पादन क्षमता की एक सीमा निश्चित कर देता है। त्रिभुज Obd द्वारा प्रकट किए क्षेत्र के भीतर फर्म दोनों उपलब्ध C और L तकनीकों में से किसी भी एक के द्वारा उत्पादन कर सकती है। इस "संभाव्य हलों के क्षेत्र" के बाहर फर्म उत्पादन नहीं कर सकेगी। फर्म के उत्पादन को अधिकतम बनाने वाला "इष्टतम हल" उस बिन्दु पर होगा, जहाँ अधिकतम उत्पादन के सममात्रा वक्र को समलागत वक्र स्पर्श करता है। चित्र में समलागत वक्र MP प्रक्रिया किरण (process ray) OC के बिन्दु b पर सममात्रा I_1bdS को स्पर्श करता है। इससे प्रकट होता है कि फर्म आगत Y की 4 इकाइयों और आगत X की 2 इकाइयों का प्रयोग करके पूँजी-गहन तकनीक का प्रयोग करेगी और Z वस्तु की 100 इकाइयों का उत्पादन करेगी।

(2) आगम का अधिकतमीकरण (Maximisation of Revenue)

दूसरी फर्म को लीजिए जिसका उद्देश्य फलन सीमित क्षमताओं के कुछ संरोधनों के रहते हुए, उसके आगम को अधिकतम बनाना है। मान लीजिए परियोजना X तथा Y, दो वस्तुओं का उत्पादन करती है। इसके चार विभाग हैं

नोट

जिनमें प्रत्येक की क्षमता स्थिर है। मान लीजिए कि इन चारों विभागों का संबंध वस्तु के निर्माण, संग्रह, पालिशिंग और पैकिंग से है जिन्हें हम A, B, C, D नाम देते हैं। समस्या को चित्र 27.2 में दिखाया गया है।



चित्र 27.2

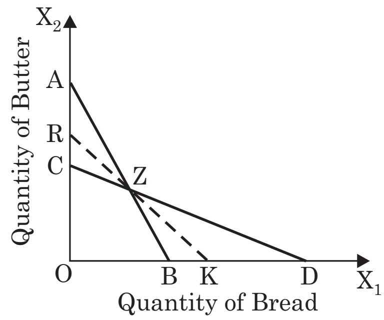
A, B, C, D संरोधनों के रहते हुए X और Y का उत्पादन होता है। संरोधन A वस्तु X के उत्पादन को OA तक सीमित कर देता है। संरोधन B वस्तु Y के उत्पादन को OB तक सीमित करता है। संरोधन C दोनों वस्तुओं, X और Y, के उत्पादन को क्रमशः OC_1 तथा OC तक, जबकि संरोधन D उन दोनों के उत्पादन को OD_1 और OD तक सीमित करता है। $OATSRB$ क्षेत्र X और Y के उन सब संयोगों को व्यक्त करता है जिनका, किसी भी संरोधन का अतिक्रमण (violation) किए बिना, उत्पादन किया जा सकता है। यह संभाव्य उत्पादन (feasible production) का क्षेत्र है जिसके अन्दर X और Y का उत्पादन हो सकता है परन्तु इस क्षेत्र के बाहर किसी भी बिन्दु पर किसी संयोग के उत्पादन की कोई संभावना नहीं है।

संभाव्यता क्षेत्र के अंदर समलाभ रेखा (isoprofit line) लेकर इष्टतम हल (optimum solution) ढूँढ़ा जा सकता है। समलाभ रेखा X और Y के उन सब संयोगों को प्रकट करती है, जो फर्म के समान लाभ प्रदान करते हैं। इष्टतम हल बहुभुज $OATSRB$ के अन्दर उच्चतम समलाभ रेखा EF के बिन्दु S पर स्थित है। S के अतिरिक्त कोई भी अन्य बिन्दु संभाव्य उत्पादन के क्षेत्र से बाहर स्थित होगा।

(3) लागत का न्यूनतमीकरण (Minimisation of Cost)

आहार समस्या पहली आर्थिक समस्या थी जिसका रेखीय प्रोग्रामिंग द्वारा हल लागत के न्यूनतमीकरण द्वारा किया गया था। मान लीजिए कि एक उपभोक्ता मार्किट कीमतों पर ब्रैड तथा मक्खन खरीदता है। समस्या यह है कि दोनों खाद्यों की विभिन्न मात्राओं से कुल पोषक द्रव्य (nutrients) की प्राप्ति की लागत को न्यूनतम बनाया जाए।

आहार समस्या का बिन्दुरेखीय हल चित्र 27.3 में दिया गया है। ब्रैड (x_2) और मक्खन (x_2) क्रमशः दोनों अक्षों पर मापे गए हैं। AB रेखा कम ब्रैड तथा अधिक मक्खन के संयोग को, और CD रेखा अधिक ब्रैड तथा कम मक्खन के संयोग को प्रकट करती है। संभाव्य हल (feasible solution) गहरी रेखा AZD पर, या उससे ऊपर स्थित है। इष्टतम हल Z बिन्दु पर है, जहाँ समलागत (बिन्दुकित) रेखा RK है, जो AB और CD के आपस में काटने के बिन्दु Z में से गुजरती है। यदि ब्रैड महँगी हो, तो संभाव्य हल A पर हो सकता है और यदि मक्खन अपेक्षाकृत महँगा हो, तो D पर हो सकता है। परन्तु इस समस्या में यह हल Z पर होगा क्योंकि यहीं लागत का न्यूनतमीकरण होता है।



चित्र 27.3

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. रेखीय प्रोग्रामिंग का विकास .... में हुआ।
2. रेखीय प्रोग्रामिंग के जनक .... था।

नोट

3. अधिकतमीकरण तथा न्यूनतमीकरण की समस्याओं को ········ की समस्याएँ भी कहते हैं।
4. संभाव्यता क्षेत्र के अंदर ········ रेखा लेकर इष्टतम हल ढूँढ़ा जा सकता है।
5. आहार समस्या पहली आर्थिक समस्या थी जिसका ········ प्रोग्रामिंग द्वारा हल लागत के न्यूनतमीकरण द्वारा किया गया था।

27.4 रेखीय प्रोग्रामिंग की सीमाएँ (Limitations of Linear Programming)

रेखीय प्रोग्रामिंग अर्थशास्त्र में बहुत ही लाभदायक साधन सिद्ध हुआ है। परन्तु इसकी अपनी सीमाएँ हैं। वास्तव में, अनेक संरोधनों के कारण वास्तविक समस्याएँ रेखीय प्रोग्रामिंग तकनीक द्वारा हल नहीं की जा सकतीं। **प्रथम,** एक विशिष्ट उद्देश्य फलन को परिभाषित करना सरल नहीं है। **दूसरे,** यदि एक विशेष उद्देश्य फलन निर्धारित कर भी दिया जाए तो दिए हुए उद्देश्य की दृष्टि के मार्ग में प्रचलित विभिन्न सामाजिक, संस्थानिक वित्तीय और अन्य संरोधनों को जानना कोई आसान काम नहीं है। **तीसरे,** एक विशिष्ट उद्देश्य और संरोधनों का सैट दिए होने पर, यह आवश्यक है कि संरोधन रेखीय असमानताओं के रूप में प्रत्यक्षत: व्यक्त न किए जा सकें। **चौथे,** यदि वर्णित समस्याएँ पार करने योग्य भी हों तो एक मुख्य समस्या विभिन्न स्थिर गुणांकों के संबद्ध में आगणन की है जो एक रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या जैसे कीमतें आदि में प्रवेश करती है। इस तकनीक की मुख्य कमी यह है कि यह आगतों और निर्गतों में रेखीय संबंध की स्थापना पर आधारित है जिसका अभिप्राय यह है कि विभिन्न आगतों और निर्गतों में योग, गुणन और विभाज्यता के संबंध पाए जाते हैं। परन्तु ये संबंध प्रत्येक रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या पर नहीं होते क्योंकि बहुत-सी समस्याओं में अरेखीय (non-linear) संबंध पाए जाते हैं। छठे, तकनीक वस्तु तथा साधन बाजारों में पूर्ण प्रतियोगिता की मान्यता पर आधारित है। परन्तु में पूर्ण प्रतियोगिता की अवस्था नहीं पाई जाती। **सातवें,** रेखीय प्रोग्रामिंग अर्थव्यवस्था में प्रतिफलों की मान्यता लेकर चलती है, पर वास्तव में या तो प्रतिफल घटते हुए या बढ़ते हुए होते हैं। अन्तिम, यह एक अत्यन्त गणितीय और जटिल तकनीक है। रेखीय प्रोग्रामिंग के साथ समस्या का हल एक स्पष्ट निर्दिष्ट चर के अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण की अपेक्षा करता है। एक रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या का हल सिम्पलेक्स विधि (simplex method) जैसे जटिल तरीकों से भी प्राप्त किया जाता है, जिनमें बहुत से गणितीय परिगणन करने पड़ते हैं। इसके लिए विशेष संगणन-तकनीक (computational technique) जैसे विद्युत संगणक (electric computer) या डेस्क गणक (desk calculator) की जरूरत होती है। ऐसे संगणक केवल महँगे ही नहीं होते बल्कि उन्हें चलाने के लिए विशेषज्ञों की भी आवश्यकता पड़ती है।

क्या आप जानते हैं रेखीय प्रोग्रामिंग मॉडल अधिकतर 'परीक्षण और चूक' हल (trial and error solutions) प्रस्तुत करते हैं। विभिन्न आर्थिक समस्याओं का वास्तव में इष्टतम हल ढूँढ़ना कठिन होता है।

27.5 सारांश (Summary)

- रेखीय प्रोग्रामिंग एक गणितीय विधि है जिसका गणितज्ञ जार्ज डैनजिग (George Dantzig) ने, सेनाओं को पूर्ति पहुँचाने की समस्या से सम्बन्धित अमरीका की वायु सेना के विभिन्न कार्य-कलापों की योजना बनाने के लिए, 1947 में विकसित किया था। फर्म के आर्थिक सिद्धांत, प्रबंधात्मक अर्थशास्त्र, अन्त:प्रादेशिक व्यापार, सामान्य संतुलन विश्लेषण, कल्याण अर्थशास्त्र और विकास आयोजन में प्रयोग के लिए भी इसका विकास हुआ है।
- अधिकतमीकरण तथा न्यूनतमीकरण की समस्याओं को इष्टतमीकरण (optimisation) की समस्याएँ भी कहते हैं इन समस्याओं को हल करने के लिए अर्थशास्त्रियों द्वारा जो तकनीकें अपनाई जाती हैं उन्हें रेखीय प्रोग्रामिंग कहते हैं।

नोट

27.6 शब्दकोश (Keywords)

- इष्ट (Optimise): वाञ्छित।
- प्रमुख (Primal): मुख्य।

27.7 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. रेखीय प्रोग्रामिंग क्या है? इसके शर्तों का वर्णन करें।
2. फर्म का रेखीय प्रोग्रामिंग विश्लेषण किन मान्यताओं पर आधारित है?
3. उत्पादन का अधिकतमीकरण की व्याख्या करें।

उत्तर: स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1947 2. जार्ज डैनजिग 3. इष्टतमीकरण 4. समलाभ
5. रेखीय

27.8 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
5. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
6. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*

नोट

इकाई–28: रेखीय प्रोग्रामिंग की रचना (Formulation of Linear Programming)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- रेखीय प्रोग्रामिंग की रचना को जानने में।

प्रस्तावना (Introduction)

अधिकतमीकरण और न्यूनतमीकरण की समस्याओं को हल करने के लिए अर्थशास्त्री जो तकनीक अपनाते हैं उसे रेखीय प्रोग्रामिंग कहते हैं। यह एक गणितीय विधि है। इसका विकास एक गणितज्ञ जॉर्ज डेनजिंग ने 1947 में किया है।

निर्बाध दिये होने पर, किसी समस्या का अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्य ज्ञात करने की तकनीक को रेखीय प्रोग्रामिंग कहते हैं। यहाँ पर एक उद्देश्य फलत होता है जबकि दूसरा निर्बाध (Condition) दी हुई होती है।

28.1 रेखीय प्रोग्रामिंग रचना (Linear Programming Formulation)

रेखीय प्रोग्रामिंग (Formulation) के चरणों को उदाहरण के द्वारा समझा जा सकता है।

जैसा कि हम जानते हैं कि LPP (Linear Programming Problem) के तीन पार्ट होते हैं।

- उद्देश्य फलन (Objective function) : जिसे हम अधिकतम या न्यूनतम करते हैं।
- संरचनात्मक निर्बाध (Structural constrants)
- गैर-ऋणात्मक निर्बाध (Non-Negativity constraints)

उदाहरणार्थ माना दो वस्तु X and Y है जिनकी कीमत ₹ 2 और ₹ 5 है तो, उद्देश्य फलन

नोट

$$\text{Max} : f = 2x + 5y \text{ (A)}$$

तथा संरचनात्मक निर्बाध :

$$X + 4y \le 24$$
$$3X + y \le 21 \qquad \text{(B)}$$
$$X + y \le 9$$

एवं गैर-ऋणात्मक निर्बाध :

$$X \ge 0 \text{ (C)}$$

और $y \ge 0$

उपरोक्त समस्या में समीकरण A उद्देश्य फलन को प्रदर्शित करती है जिसका उद्देश्य समस्या को अधिकतम एवं न्यूनतम करने का होता है। जबकि समीकरण B यह प्रदर्शित करती है कि उत्पादन के विभिन्न साधनों के संयोगों से X एवं y का कितना उत्पादन सम्भव हो सकता है। अर्थात् ये उत्पादन के साधनों के निर्बाध को प्रदर्शित करते हैं तथा समीकरण C गैर-ऋणात्मक निर्बाध को प्रदर्शित करता है। उपरोक्त प्रक्रिया Formulation of Linear programming कहलाती है।

उदाहरण : नीचे की तालिका को रेखीय-प्रोग्रामिंग की रूप में परिवर्तन कीजिए।

विटामिन (प्रकार)	*प्रति kg खाद्य पदार्थ में विटामिन*		*न्यूनतम दैनिक विटामिन आवश्यकता*
	I	*II*	
A_1	10	4	20
A_2	5	5	20
A_3	2	6	12
खाद्य पदार्थ की प्रति kg कीमत	₹ 0.60	₹ 1.00	

हल :

$$\text{Min } f = 0.6\, x_1 + 1$$
$$x_2 = 0.6\, x_1 + x_2$$

निर्बाध

$$10x_1 + 4x_2 \ge 20$$
$$5x_1 + 5x_2 \ge 20$$
$$2x_1 + 6x_2 \ge 12$$

तथा

$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

गैर-ऋणात्मक निर्बाध

28.2 सारांश (Summary)

- अधिकतमीकरण और न्यूनतमीकरण की समस्याओं को हल करने के लिए अर्थशास्त्री जो तकनीक अपनाते हैं उसे रेखीय प्रोग्रामिंग कहते हैं। यह एक गणितीय विधि है। इसका विकास एक गणितज्ञ जॉर्ज डेनजिंग ने 1947 में किया है।

नोट

28.3 शब्दकोश (Keywords)

1. रेखीय प्रोग्रामिंग— अधिकतम और न्यूनतम से जुड़ी समस्या हल करने की अर्थशास्त्रीय विधि।

28.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

नीचे दी गई तालिका को रेखीय-प्रोग्रामिंग में बदलिए।

कैल्शियम (प्रकार)	*प्रति kg खाद्य पदार्थ में कैल्शियम*		*दैनिक कैल्शियम आवश्यकता (न्यूनतम)*
	I	***II***	
Z_1	20	8	40
Z_2	10	5	40
Z_3	4	6	24
कीमत प्रति kg	₹ 1.20	₹ 2.00	

28.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
3. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
5. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*

नोट

इकाई–29 : रेखाचित्र विधि (Graphic Method)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- अर्थशास्त्रीय समस्या के रेखाचित्र हल को जानेंगे;
- आगम के न्यूनतमीकरण को समझेंगे।

प्रस्तावना (Introduction)

एक फर्म लीजिए जो दी हुई कीमतों 12 ₹ तथा 15₹ पर क्रमशः दो वस्तुओं X एवं Y को प्रति इकाई उत्पादित करती है। वस्तु X उत्पादित करने के लिए, फर्म को A आगत की 12 इकाइयाँ, B आगत की 6 इकाइयाँ तथा C आगत की 14 इकाइयाँ चाहिए। वस्तु Y के लिए A आगत की 4 इकाइयाँ, B आगत की 12 इकाइयाँ तथा C आगत की 12 इकाइयाँ चाहिए। कुल उपलब्ध A की 48 इकाइयाँ हैं, R की 72 इकाइयाँ तथा C की 84 इकाइयाँ हैं। इस रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या के आगत-निर्गत आंकड़ों को आगे तालिका 29.1 में दिखाया गया है।

नोट

तालिका 29.1 : आगत-निर्गत आंकड़े

आगत	वस्तु की इकाई उत्पादित करने के लिए आगतों की संख्या		कुल प्राप्य लागतों की इकाइयाँ
	X वस्तु	Y वस्तु	
A	12	4	48
B	6	12	72
C	14	12	84
कीमत प्रति इकाई	रु. 12	रु. 15	–

प्रत्येक रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या के तीन भाग होते हैं। ऊपर लिखी समस्या के वे इस प्रकार हैं।

(*i*) **उद्देश्य फलन** (Objective Function): उद्देश्य फलन यह बताता है कि यदि दो वस्तुएँ X और Y प्रति इकाई रु. 12 तथा रु. 15 आगम लाती हैं तो इन वस्तुओं की कितनी मात्राएँ उत्पादित की जाएँ कि फर्म अधिकतम आगम या आय अर्जित कर सके। इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$$\text{Maximise } R = 12\,X + 15Y$$

(*ii*) **संरोधन** (The Constraints): ऊपर की तालिका को अब समीकरणों के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है जो संरोधनों को व्यक्त करते हैं जिनके अंतर्गत फर्म कार्य करती है। ये संरचनात्मक संरोधन (structural constraints) कहलाते हैं।

पहले हम आगत A को लेते हैं। आगत A की अधिकतम उपलब्ध मात्रा 48 इकाई है। परन्तु दोनों वस्तुओं X एवं Y की मात्राएँ 48 इकाइयों से अधिक नहीं हो सकती हैं। गणितीय रूप में, क्योंकि $12X + 4Y$ इकाई 48 से अधिक नहीं हो सकती, इसलिए आगत A का संरोधन होगा : $12\,X + 4Y \leq 48$। इसी प्रकार के तर्क द्वारा B एवं C आगतों के संरोधनों की असमानताओं को लिखा जा सकता है। अत: हमारी समस्या के तीन संरचनात्मक संरोधन हैं–

$$12X + 4Y \leq 48 \quad \ldots(1)$$
$$6X + 12Y \leq 72 \quad \ldots(2)$$
$$14X + 12Y \leq 84 \quad \ldots(3)$$

(*iii*) **अऋणात्मक संरोधन** (Non-negative Constraints): रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या में अऋणात्मक संरोधन भी होते हैं जो इस मान्यता पर निर्भर हैं कि समस्या के हल में कोई चरों के ऋणात्मक मूल्य नहीं हो सकते हैं। इसका अभिप्राय है कि X और Y वस्तुओं का उत्पादन शून्य या धनात्मक हो सकता है परन्तु यह ऋणात्मक नहीं हो सकता। अत: हमारी समस्या के अऋणात्मक संरोधन हैं: $X \geq 0$ तथा $Y \geq 0$.

29.1 समस्या का रेखाचित्र हल (The Graphic Solution of the Problem)

रेखाचित्र हल के लिए हम ऊपर वर्णित समस्या को पुन: लिखते हैं:

Maximise $\quad R = 12X + 15Y$

Subject to (*i*)

$$12X + 4Y \leq 48 \quad \ldots(1)$$
$$6X + 12Y \leq 72 \quad \ldots(2)$$
$$14X + 12Y \leq 84 \quad \ldots(3)$$

नोट

(*ii*) $X \geq 0,\ Y \geq 0$

प्रत्येक असमानता को रेखाचित्र द्वारा व्यक्त करने के लिए, हम तीनों समीकरणों के असमानता चिह्न (≤) को छोड़कर बराबर (=) के चिह्न लेते हैं। अत: समीकरण (1) को यूँ लिखते हैं:

$$12X + 4Y = 48.$$

यह मानकर कि वस्तु X केवल आगत A की सभी 48 इकाइयों द्वारा उत्पादित की जाती है तथा वस्तु Y बिल्कुल नहीं तो:

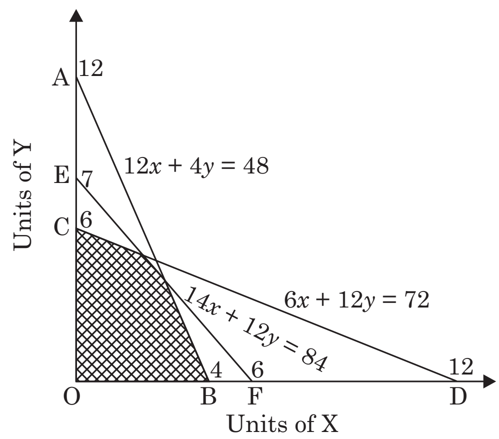
$$12X + 0 = 48 \text{ (at the maximum)}$$

या $X = 4$ (जब $Y = 0$)

इसी प्रकार यह मान कर कि सभी 48 इकाइयों से केवल Y वस्तु ही उत्पादित की जाती है तो:

$$0 + 4Y = 48$$

या $Y = 12$ (जब $X = 0$)



चित्र 29.1

समीकरण $12X + 4Y = 48$ को चित्र 29.1 में AB रेखा द्वारा व्यक्त किया गया है जहाँ $OA = Y$ तथा $OB = 4X$. रेखा AB पर कोई भी बिन्दु जैसे T समीकरण $12X + 4Y = 48$ को संतुष्ट करता है क्योंकि इस रेखा AB के नीचे तथा बाईं ओर का क्षेत्र असमानता $12X + 4Y \leq 48$ को संतुष्ट करता है।

इसी प्रकार समीकरण $6X + 12Y = 72$ को हल करने पर: $X = 12$ तथा $Y = 6$ प्राप्त होते हैं जिन्हें चित्र 27.4 में CD रेखा द्वारा अंकित किया गया जहाँ $OC = 6Y$ तथा $OD = 12X$ और समीकरण $14X + 12Y = 84$ को हल करने पर हमें प्राप्त होता है, $X = 6$ तथा $Y = 7$ जिन्हें चित्र 27.4 में EF रेखा द्वारा दिखाया गया है जहाँ $OE = 7Y$ तथा $OF = 6X$.

संभाव्य क्षेत्र (Feasible Region)– चित्र 29.1 यह दिखाता है कि छायांकित (shaded) क्षेत्र में सभी बिन्दु जो एक-दूसरे को काटती हुईं तीनों रेखाओं द्वारा घिरे हुए हैं प्रत्येक तीनों असमानताओं को संतुष्ट करेंगे। बिन्दु S पर EF रेखा CD रेखा को काटती है तथा बिन्दु T पर CD रेखा AB को काटती है। इस प्रकार $OBTSC$ क्षेत्र जो तीनों रेखाओं के एक-दूसरे को काटने वाले S एवं T बिन्दुओं के बाईं ओर नीचे स्थित है, तीनों समीकरणों की असमानताओं को संतुष्ट करता है। यह छायांकित (shaded) क्षेत्र उत्पादन का संभाव्य क्षेत्र कहलाता है तथा प्रत्येक बिन्दु जो इस क्षेत्र के अन्दर या इसकी सीमा पर होता है समस्या का संभाव्य हल व्यक्त करता है।

इष्टतम हल (Optimum Solution)– विभिन्न बिन्दु B, T, S, C जो संभाव्य हल को व्यक्त करते हैं, इनमें से कौन-सा इष्टतम बिन्दु है जो फर्म के आगम को अधिकतम करेगा? इस बिन्दु को बीज गणित द्वारा कैसे जाना जा सकता है?

हम समीकरणों (1) एवं (2) से बिन्दु B तथा C के अक्षांकों (coordinates) को जानते हैं जिनके अनुसार $OB = 4X$ तथा $OC = 6Y$. बिन्दु T के अक्षांकों को निर्धारित करने के लिए हम समीकरणों (1) एवं (2) को युगपत समीकरणों के रूप में लेते हैं। (क्योंकि रेखाएँ AB तथा EF बिन्दु T पर काटती हैं) और इनको हल करते हैं:

$$12X + 4Y = 48 \quad \ldots(1)$$
$$14X + 12Y = 84 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) को 3 से गुणा करके तथा समीकरण (3) को उसमें से घटाकर:

$$36X + 12Y = 144$$
$$14X + 12Y = 84$$

नोट

$$22X = 60$$
$$X = 2.73$$

समीकरण (1) में $X = 2.73$ के मूल्य को लगाकर,

$$12 \times 2.73 + 4Y = 48$$
$$32.76 + 4Y = 48$$
$$4Y = 48 - 32.76$$

या
$$4Y = 15.24$$
$$Y = 3.81$$

अत: बिन्दु T के अक्षांक $X = 2.73$, तथा $Y = 3.81$ हैं। इसी प्रकार बिन्दु S के अक्षांकों को समीकरणों (3) एवं (2)* द्वारा हल करने पर $X = 1.5$ तथा $Y = 5.25$

X तथा Y के इष्टतम संयोग ढूँढ़ने के लिए X और Y की कीमतों (क्रमश: 12 ₹ एवं 15 ₹) को इन अक्षांकों के बिन्दु के मूल्यों को जो ऊपर निकाले गए हैं स्थानापन्न करते हैं। बिन्दु B पर $X = 4$ तथा $Y = 0$. इनको उद्देश्य फलन (₹) $f = 12X + 15Y$ में स्थानापन्न करने से:

(₹ 12) (4) + (₹ 15) (0) = ₹ 48 ...(4)

बिन्दु T पर $X = 2.73$ तथा $Y = 3.81$ होने पर, इसी प्रकार प्राप्त करते हैं

(₹ 12) (2.73) + (₹ 15) (3.81) = ₹ 89.91 ...(5)

बिन्दु S पर $X = 1.5$ तथा $Y = 5.25$ होने पर हमें प्राप्त होता है

(₹ 12) (1.5) + (₹ 15) (5.25) = 96.75 ...(6)

बिन्दु C पर $X = 0$ तथा $Y = 6$ होने पर

(₹ 12) (0) + (₹ 15) (6) = ₹ 90 ...(7)

$$14X + 12Y = 84$$
$$6X + 12Y = 72$$

	प्रमुख समस्या (Primal Problem)		*द्वैध समस्या* (Dual Problem)
Maximise Revenue	$R = 12X + 15Y$	Minimise Cost	$C = 48A + 72B + 84C$
Object to	$12X + 4Y \le 48$	Subject to	$12A + 6B + 14C \ge 12$
	$6X + 12Y \le 72$		$4A + 12B + 12C \ge 15$
	$14X + 12Y \le 84$		$A \ge 0, B \ge 0, C \ge 0$
	$X \ge 0,\ Y \ge 0.$		

विद्यार्थी इस द्वैध समस्या का हल आहार समस्या के किए गए हल की तरह स्वयं करें।

29.2 आगत का न्यूनतमीकरण-आहार समस्या का हल (Minimisation of Cost–Solution of the Food Problem)

आहार समस्या पहली आर्थिक समस्या थी जिसका रेखीय प्रोग्रामिंग द्वारा हल लागत के समीकरण द्वारा किया गया। मान लीजिए कि एक उपभोक्ता मार्किट कीमतों पर ब्रैड और मक्खन खरीदता है। समस्या यह है कि दोनों वस्तुओं की विभिन्न मात्राओं से उनके कुल पदार्थों की प्राप्ति की लागत को न्यूनतम बनाया जाए।

नोट

तालिका 29.2: आहार समस्या के आँकड़े

पोषाहार-तत्व	पोषक-द्रव्य प्रति इकाई ब्रैड x_1	पोषक-द्रव्य प्रति इकाई मक्खन x_2	न्यूनतम आदर्श
कैलोरी (1,000)	1	2	3
प्रोटीन (25 ग्राम)	2	8	8
कीमत (रु. प्रति इकाई)	2	6	(?)

मान लीजिए कि x_1 और x_2 क्रमशः ब्रैड और मक्खन को प्रकट करते हैं जिनमें से प्रत्येक में कैलोरी (calories) की मात्राएँ और प्रोटीन के ग्राम तालिका 29.2 में दिए हैं। ब्रैड के पोषक द्रव्य प्रति आधा किलोग्राम 1000 कैलोरी और प्रोटीन की 50 ग्राम मात्रा है; और मक्खन के 2000 कैलोरी और 200 ग्राम प्रोटीन प्रति आधा किलोग्राम है। आदर्श आहार में प्रतिदिन 3000 कैलोरी और 200 ग्राम प्रोटीन चाहिए। 500 ग्राम ब्रैड की मार्किट कीमत रु. 2 और मक्खन की प्रति 500 ग्राम कीमत रु. 6 है।

समस्या यह है कि ऊपर तालिका के अन्तिम कालम में दिए गए न्यूनतम पोषाहार-आदर्श के अनुसार सबसे श्रेष्ठ आहार और प्रश्नचिह्न (?) द्वारा प्रकट की गई न्यूनतम लागत क्या होंगे।

आहार की कुल लागत

Minimise

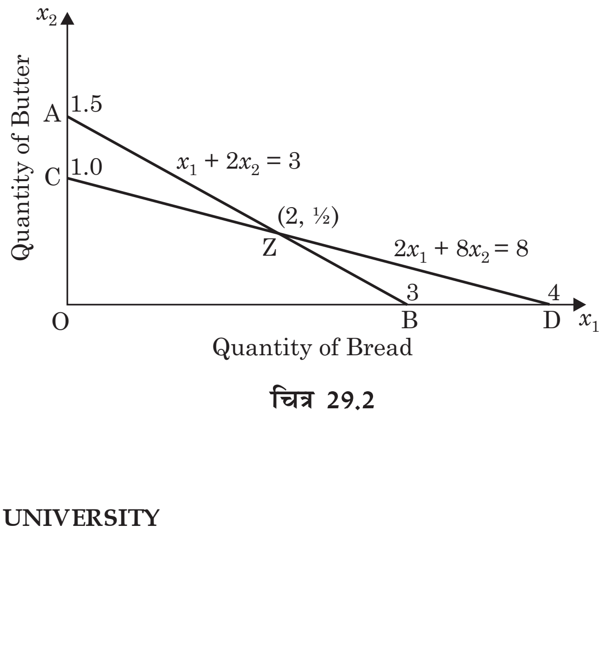
$$\text{Subject to} \quad \left.\begin{aligned} C &= 2x_1 = 6x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ 2x_1 + 8x_2 &\geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

और

न्यूनतम की जाने वाली लागत C है, जो दोनों x_1 और x_2 चरों का रेखीय फलन (linear function) है। पार्श्व संबंध 3 और 8 असमानताएँ हैं जो दिए हुए आहार के प्राप्त किए जाने वाले न्यूनतम पोषाहार आदर्श को प्रकट करती है। समस्या रेखीय है क्योंकि रेखीय असमानताओं के रहते हुए अऋणात्मक चर (non-negative variables) न्यूनतम बनाने हैं। तीनों में से किन्हीं दो स्थितियों से हल प्राप्त हो सकता है। उदाहरण के लिए, एक पार्श्व संबंध (side relation) के रहते हुए लागत C को न्यूनतम बनाया जा सकता है: $x_1 + 2x_2 = 3$ इसको हल करने पर: $x_1 = 3$ तथा $x_2 = 3/2 = 1.5$ चित्र 29.2 में इसे AB रेखा द्वारा व्यक्त किया गया है जहाँ $OA = 1.5x_2$ तथा $OB = 3x_1$.

दूसरा पार्श्व संबंध है: $2x_1 + 8x_2 = 8$ और इसे हल करने पर, $x_1 = 4$ तथा $x_2 = 1$ प्राप्त होते हैं। इसे चित्र 29.2 में CD रेखा द्वारा खींचा गया है जो इस समीकरण को संतुष्ट करता है जहाँ $OC = 1x_2$ तथा $OD = 4x_1$.

अतः चित्र में x_1 (ब्रैड) समानान्तर अक्ष पर तथा x_2 (मक्खन) अनुलम्ब अक्ष पर मापे गए हैं। AB रेखा समीकरण $x_1 + 2x_2 = 3$ तथा CD रेखा समीकरण $2x_1 + 8x_2 = 8$ को व्यक्त



चित्र 29.2

नोट

करती हैं। संभाव्य हल मोटी रेखा AZD पर या उसके ऊपर होगा। यह हमारी समस्या में Z बिन्दु पर होता है जहाँ दोनों रेखाएँ AB तथा CD काटती हैं।

यह मालूम करने के लिए कि संभाव्य हल Z पर ही होता है या A अथवा D बिन्दु पर, हम समस्या के दोनों समीकरणों को युगपत समीकरणों के रूप में हल करते हैं:

$$x_1 + 2x_2 = 3 \qquad ...(1)$$

$$2x_1 + 8x_2 = 8 \qquad ...(2)$$

उदाहरण : माना एक उत्पादन दिये हुए निबाधों (Constraints) के अंतर्गत अपना आगम (Revenue) अधिकतम करना चाहता है। माना एक फर्म दो उत्पाद X_1 तथा X_2 का उत्पादन करना चाहती है और उसके लिए उसके पास निम्न प्रकार के तीन साधन a, b तथा c दिये हुए हैं–

$$a = 40, b = 50, c = 42$$

हमने यह भी मान लिया कि X_1 की एक इकाई का उत्पादन करने के लिए उसे निम्न प्रकार से प्रत्येक साधन की आवश्यकता होगी–

$$a = 4, b = 10, c = 6$$

इसी प्रकार से हमने यह भी मान लिया कि X_2 की इकाई का उत्पादन करने के लिए उसे निम्न प्रकार से प्रत्येक साधन की आवश्यकता होगी–

$$a = 10, b = 5, c = 7$$

हमने यह भी मान लिया कि X_1 तथा X_2 की प्रति इकाई कीमत क्रमशः 5 रुपये तथा 7 रुपये है। इस प्रकार से वह उत्पादक दिये हुए साधनों पर अपनी कुल आय (Total Revenue) अधिकतम करना चाहेगा। गणितीय रूप में, उद्देश्य फलन–

$$\text{Max } TR = 5X_1 + 7X_2 = Z$$

फर्म पर प्रतिबंध दिये हुए हैं तथा फर्म उन साधनों से अधिक उपयोग नहीं करेगी–

$$4X_1 + 10X_2 \le 40 \qquad ...(i)$$

$$10X_1 + 5X_1 \le 50 \qquad ...(ii)$$

$$6X_1 + 7X_2 \le 42 \qquad ...(iii)$$

यहाँ, $X_1, X_2 \le 0$

फर्म के इन प्रतिबंधों को निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है–

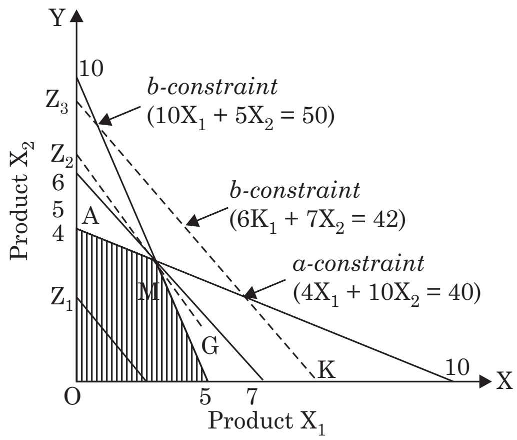
प्रथम प्रतिबंध यह बतलाता है कि a साधन जो कि X_1 तथा X_2 के उत्पादन के प्रयोग में लाया जाता है। वह साधन 'a' की कुल पूर्ति से अधिक नहीं हो सकता। यह साधन पूर्ति से कम या बराबर हो सकता है, अधिक नहीं। इसी प्रकार के अन्य प्रतिबंधों के संबंध में होगा। यहाँ हम रेखीय प्रायोजन को ग्राफ की सहायता से दर्शायेंगे।

सर्वप्रथम हम X_1 तथा X_2 के निर्देशांक निकालेंगे, जिसके लिए हम निबाध समीकरणों की असमानताएँ (Inequalities) हटा देंगे और इस प्रकार हमें तीन तकनीकियों के निर्देशांक (10, 4), (5, 10) तथा (7, 6) प्राप्त होंगे। यही तकनीकियाँ प्रयोजन समस्या का संभावित हल (Feasible Solution) प्रकट करेंगी। चित्र में X-अक्ष पर X_1 उत्पाद तथा Y-अक्ष पर X_2 उत्पाद मापा गया है। यहाँ फर्म द्वारा अपनाये गये तीन निबाधों के निर्देशांकों की सहायता से ग्राफ द्वारा एक सरल रेखा के रूप में अंकित किये गये हैं। Z_1–उद्देश्य फलन (Objective Function) है।

माना उत्पादक a तथा b निबाधों को प्रयोग में लाता है तो फर्म के लिए $OAMG$ क्षेत्र संभावित क्षेत्र (Feasible Zone) प्राप्त होगा। इसी प्रकार यदि वह a तथा c निबाधों का प्रयोग करता है तो उसे क्षेत्र $OATK$ संभावित क्षेत्र प्राप्त होगा। इसी प्रकार यदि फर्म b तथा c निबाधों को प्रयोग में लेती है तो क्षेत्र $OLNG$ संभावित

नोट

क्षेत्र प्राप्त होगा। यदि वह तीनों निबाधों a, b तथा c को एक साथ काम में लेता है तो उसे क्षेत्र $OAMG$ के बराबर संभावित क्षेत्र प्राप्त होगा। फर्म का संभावित हल इस क्षेत्र के अंतर्गत ही होगा।



चित्र 29.3: रेखीय प्रायोजना समस्या का चित्रमय प्रदर्शन

यदि उत्पादक क्षेत्र $OAMG$ जो कि चित्र में छायांकित क्षेत्र से दर्शाया गया है, में X_1 तथा X_2 उत्पाद का संभावित हल खोजना चाहेगा तो वह ठीक नहीं होगा क्योंकि उसे प्रत्येक तकनीकी का अधिकतम उपयोग करना चाहिए। अतः संभावित हल (Feasible Solution) क्षेत्र $OAMG$ की सीमा पर होगा। अब सवाल उठता है कि यदि वह संभावित क्षेत्र की सीमा पर उद्देश्य फलन ले जाता है तो उसे X_1 तथा X_2 का अनुकूलतम हल (Optimum Solution) प्राप्त करने के लिए फर्म को केवल एक ही बिन्दु प्राप्त होना चाहिए जो कि X_1 तथा X_2 का एक ही हल देगा। इसके लिए उसे कोने का हल (Corner Solution) ढूँढ़ना होगा। अतः इस स्थिति में फर्म उद्देश्य फलन Z_1 को समान्तर परिवर्तित करेगी। संभावित हल के एक कोने के जिस एक बिन्दु को उद्देश्य फलन स्पर्श कर देती है, वह X_1 तथा X_2 का एक अनुकूलतम हल होगा। यहाँ चित्र-29.6 में M बिन्दु पर X_1 तथा X_2 उत्पाद का अनुकूलतम हल प्राप्त होगा।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)–

1. रेखीय प्रोग्रामिंग किसमें बहुत ही लाभदायक सिद्ध हुआ है?

   (*a*) अर्थशास्त्र में (*b*) विज्ञान में (*c*) गणित में (*d*) राजनीति में।

2. अनेक संरोधनों के कारण वास्तविक समस्याएँ किस तकनीक द्वारा हल नहीं की जा सकतीं?

   (*a*) अवकल (*b*) रेखीय प्रोग्रामिंग (*c*) समाकलन (*d*) इनमें से कोई नहीं।

3. कौन-सी समस्या पहली आर्थिक समस्या थी जिसका रेखीय प्रोग्रामिंग द्वारा हल लागत के समीकरण द्वारा किया गया?

   (*a*) धन (*b*) आवास (*c*) आहार (*d*) पानी

29.3 सारांश (Summary)

- फर्म का नवक्लासिकी सिद्धांत तक समय में एक या दो चरों को लेकर निर्णयकरण की समस्या का विश्लेषण करता है। इसका संबंध एक समय में एक उत्पादन प्रक्रिया से होता है।
- आहार समस्या पहली आर्थिक समस्या थी जिसका रेखीय प्रोग्रामिंग द्वारा हल लागत के न्यूनतमीकरण द्वारा किया गया था।
- रेखीय प्रोग्रामिंग अर्थशास्त्र में बहुत ही लाभदायक साधन सिद्ध हुआ है परन्तु इसकी अपनी सीमाएँ हैं। वास्तव में, अनेक संरोधनों के कारण वास्तविक समस्याएँ रेखीय प्रोग्रामिंग तकनीक द्वारा हल नहीं की जा सकतीं।

29.4 शब्दकोश (Keywords)

नोट

- इष्ट (Optimise): वाञ्छित।
- प्रमुख (Primal): मुख्य।

29.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. लागत का न्यूनतमीकरण की व्याख्या करें।
2. रेखीय प्रोग्रामिंग की सीमाएँ लिखें।
3. आगत का न्यूनतमीकरण-आहार समस्या का हल प्रस्तुत करें।

उत्तर: स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. (*a*)   2. (*b*)   3. (*c*).

29.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
2. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
6. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*
7. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*

नोट

इकाई–30: सिमप्लैक्स विधि (Simplex Method)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- सिमप्लैक्स विधि को स्पष्ट रूप से समझने में।
- विधि के चरण को समझने हेतु।

प्रस्तावना (Introduction)

रेखीय प्रायोजना विधि में असमीकरणों की संख्या अधिक होने के कारण ग्राफीय विधि अधिक जटिल हो जाती है। इस विधि का प्रयोग दो या तीन असमीकरणों की स्थिति में किया जा सकता है। अत: समीकरणों की संख्या अत्यधिक हो जाने के कारण युग्मपद समीकरणों के लिए एक अन्य गणितीय विधि का प्रयोग किया जाता है जिसे सिमप्लैक्स विधि कहा जाता है।

30.1 सिमप्लैक्स विधि (Simplex Method)

मान लीजिए एक उद्देश्य फलन निम्न है जिसको अधिकतम (या निम्नतम) करना है–

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots\dots + c_nx_n$$

यहाँ सभी स्थिरों (C_i) का मूल्य ज्ञात है।

हम यहाँ यह भी मानकर चल रहे हैं कि m रेखीय असमीकरण है जिसमें प्रत्येक समीकरण में n चलराशियाँ हैं। इस प्रकार प्रतिबंध (Constraints) निम्न हैं–

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots\ a_{in}x_n \ \{\leq = \geq\}\ b_i,\ i = 1, 2 \dots\dots\dots, m \qquad (30.1)$$

नोट

> नोट्स   यहाँ एक तथा केवल एक संकेत ($\leq = \geq$) प्रत्येक प्रतिबंध के लिए होगा। चलराशियों का मूल्य सदैव धनात्मक होगा, अर्थात् $x_i \geq 0, j = 1, 2 \ldots. n.$

x_j का प्रत्येक समूह जो प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है, एक हल (Solution) कहलायेगा। कोई भी हल जो अऋणात्मक प्रतिबंधों (Non-negativity Restrictions) को संतुष्ट करता है, एक संभाव्य हल (Feasible Solution) कहलायेगा। इसी प्रकार से कोई भी संभाव्य हल जो उद्देश्य फलन (Objective Function) Z को अधिकतम (या न्यूनतम) करता है, वह अनुकूलतम संभाव्य हल (Optimal Feasible Solution) कहलायेगा।

यहाँ हम उद्देश्य फलन का दिये हुए प्रतिबंधों के अंतर्गत अनुकूलतम संभाव्य हल खोजने की कोशिश करेंगे। अनुकूलतम संभाव्य हल को ज्ञात करने के लिए हम पहले सभी संभाव्य हल (Feasible Solutions) को ज्ञात करेंगे, तत्पश्चात् उनमें से एक संभाव्य हल ज्ञात करेंगे जो कि उद्देश्य फलन को अधिकतम (या न्यूनतम) को संतुष्ट करता है, वही हमारा अनुकूलतम संभाव्य हल होगा। जैसे-जैसे चलराशियों की संख्या बढ़ती जायेगी, वैसे-वैसे संभाव्य हलों की संख्या बढ़ती जायेगी। यदि हमारी समस्या में 6 चल राशियाँ हैं तो संभावित हलों की संख्या $|\underline{6}\,||\underline{3}\,||\underline{3} = 20$ होगी, जहाँ तीन युग्मपद समीकरण हों तथा तीन ही अज्ञात मूल्य हों।

> टास्क   सिमप्लैक्स विधि क्या है?

समीकरण (30.1) को पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है–

उद्देश्य फलन $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (अधिकतम या न्यूनतम)

निम्नलिखित निबाधों के अंतर्गत

$$\sum_{j=1}^{n} a_i x_j = b_j \qquad \ldots(30.2)$$

$i = 1, 2 \ldots\ldots.. m$

$j = 1, 2 \ldots\ldots n$ (यहाँ समीकरणों को समान बनाते हुए)

$j = 1$

उपरोक्त प्रकार की समस्याओं के संदर्भ में निम्नलिखित आधारभूत प्रमेयों का ज्ञान आवश्यक है–

(1) रेखीय प्रायोजना की समस्या का संभावित हल एक सदिश (Vector) $X = [x_1, x_2, \ldots. x_n]$ हो तो निबाध (30.1) की पूर्ति करता है। x_j के सम्बद्ध सदिश a_j निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है–

$$a_j = [a_{1j} a_{2j} \ldots\ldots.. a_{mj}]$$

(2) राशियाँ $b_1\, b_2 \ldots\ldots. b_m$ एक स्तंभ सदिश b के अवयव हैं जिसको अपेक्षित सदिश (Requirement Vector) कहा जाता है। यहाँ

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ तथा } b \geq 0, \text{ यहाँ 0 एक शून्य सदिश है।}$$

नोट

(3) उद्देश्य फलन के अंतर्गत गुणांक $C_1\ C_2$ .... C_n को चरों x_1, x_2 ...... x_n के सम्बद्ध भार (Prices Associated) कहा जाता है तथा इनके द्वारा बने सदिश को मूल्य सदिश (Price Vector) कहा जाता है, जो कि C से निरूपित किया जाता है। इस प्रकार

$$C = [c_1, c_2, \ldots\ldots c_n]$$

(4) $x_1, x_2, \ldots. x_n$ के मानों का समुच्चय (Set) जो निबाध (30.2) तथा अऋणात्मक शर्त की पूर्ति करता हो, उसको सम्भावित हल (Feasible Solution) कहा जाता है।

(5) वह साध्य हल जो कि उद्देश्य फलन (30.1) को अनुकूलतम करता है, उसे अनुकूलतम हल (Optimal Solution) कहा जाता है। अर्थात् यदि साध्य हल उद्देश्य फलन को न्यूनतम करता है, तब वह न्यूनतम साध्य हल (Minimum Feasible Solution) तथा यदि साध्य हल उद्देश्य फलन को अधिकतम करता है तब वह अधिकतम साध्य हल कहा जाता है।

(6) यदि साध्य हल जिसमें m से अधिक धनात्मक x_i नहीं हैं तो वह मूल साध्य हल (Basic Feasible Solution) कहा जाता है। अतः साध्य हल को मूल साध्य हल में परिवर्तन करना चाहें तो कम से कम $(n - m)$ चरों का लुप्त (Vanish) होना आवश्यक है।

(7) जिस मूल साध्य हल में ठीक m धनात्मक है तो उसे अविकृत मूल साध्य हल (Non-Degenerate Basic Feasible Solution) कहते हैं। अशून्य (Non-Zero) चरों को मूल चर कहा जाता है। जब कम से कम एक मूल चर लुप्त होता हो तो मूल साध्य हल को विकृत मूल साध्य हल (Degenerate Basic Feasible Solution) कहा जाता है।

(8) वह हल जो निबाध (30.1) तथा अऋणात्मक शर्त की पूर्ति न करता हो तो वह असाध्य हल (Non-feasible Solution) कहलाता है।

(9) यदि निबाध में चिह्न (≤) है तो इसको संतुलन समीकरणों में परिवर्तन करने के लिए जिन चरों को प्रयोग किया जाता है, उन्हें स्लैक चर (Slack-Variable) कहते हैं।

क्या आप जानते हैं

वह चर जो असमीकरणों (चिह्न ≥) की समीकरणों में बदलने के लिए प्रयोग किये जाते हैं, उन्हें आधिक्य चर (Surplus Variable) कहते हैं। इन दोनों प्रकार के चरों को संयुक्त रूप में मूकचर (Dummy Variable) कहा जाता है, जिनकी संख्या प्रायः उद्देश्य फलन में चरों की संख्या के बराबर होती है।

30.2 विधि के आगणन चरण (Calculating steps of Method)

(1) असमीकरणों को समीकरणों में बदलने के लिए आवश्यकतानुसार स्लैक अथवा आधिक्य चर का प्रयोग करना चाहिए।

(2) यदि आवश्यक हो तो कृत्रिम चरों का समावेश करना चाहिए। तत्पश्चात् निर्बाधों को $AX = b$ के रूप में लिख लेना चाहिए, जहाँ $b \geq 0$ हों। यदि कोई b_i ऋणात्मक हों तो उसके संगत निबाध को (-1) से गुणा करके धनात्मक बना लेना चाहिए।

(3) प्रारम्भिक मूल साध्य हल ज्ञात करके X_j की गणना कर लेनी चाहिए तथा $Z_j - C_j$ का मान A के प्रत्येक स्तंभ के लिए ज्ञात कर लेना चाहिए।

नोट

(4) अधिकृत समीकरण हेतु प्रत्येक $Z_j - C_j \geq 0$, तो यही पुनरूक्ति (Iteration) अनुकूलतम हल है। पुनः यदि $Z_j - C_j > 0$, (प्रत्येक अनाधार सदिशों के लिए) तब उचित हल अद्वितीय (Unique) है अन्यथा वैकल्पिक हल भी विद्यमान हो सकता है।

(5) आगत सदिश (Entering Vector) तथा चलित सदिश (Departing Vector) का चयन कर लेना चाहिए।

(6) अन्त में, कृत्रिम चरों को पृथक् कर लेना चाहिए।

उदाहरण 1: निम्न को सिमप्लैक्स विधि से हल करें–

न्यूनतम $$Z = 2X_1 - 3X_2 + 7X_2 \quad ...(1)$$

जोकि
$$3X_1 - 4X_2 - 6X_3 \leq 2 \quad ...(2)$$
$$2X_1 - X_2 - 2X_3 \geq 11 \quad ...(3)$$
$$X_1 - 3X_2 - 3X_3 \leq 5 \quad ...(4)$$

जिससे कि $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

हल : सर्वप्रथम निर्बाधों के असमीकरणों की समीकरणों में परिवर्तित करने के लिए स्लैक (Slack) तथा आधिक्य (Surplus) चरों का प्रयोग किया जायेगा। चूँकि यहाँ तीन निबाध समीकरण हैं। अतः तीन स्लैक तथा आधिक्य चरों का उपयोग किया जायेगा। अतः यहाँ X_4, X_5 तथा X_6 का समावेश करने पर दी हुई समस्या को निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है–

$$2X_1 - 3X_2 + 6X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 \quad ...(5)$$

जबकि निबाध निम्नलिखित हैं–

$$3X_1 - 4X_2 - 6X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 2 \quad ...(6)$$
$$2X_1 - X_2 + 2X_3 + 0X_4 - X_5 + 0X_6 = 11 \quad ...(7)$$
$$X_1 + 3X_2 - 2X_4 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = 5 \quad ...(8)$$

साध्य हल को ज्ञात करने के लिए तथ्यों को निम्न व्यूह रूप में दर्शाते हैं–

$$AX = b$$

यहाँ $A = [a_{ij}] = [P_{ij}]$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_6 \end{bmatrix} \text{ तथा } b = P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

अथवा
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ 3 & -4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

---

1. रेखीय प्रयोजना की प्रमुख प्रमेयों के लिए देखिये–

(*i*) Linear Programming by Gass.

(*ii*) Economic Theory and Operation Analysis by William J. Baumol.

नोट

चूँकि आधार व्यूह एकवत व्यूह (Unit Matrix) होना चाहिए किन्तु ज्ञात तथ्यों से यह संभव नहीं हो पा रहा है। अत: एक नवीन सदिश (Vector)P_7 का समावेश करना आवश्यक है। इसलिए प्रारम्भिक आधार P_4, P_7 तथा P_6 हुआ। अत: निम्न सारणी लिखने पर

प्रथम सारणी (First Table)

आधार सदिश (Basis Vector)	$\downarrow C_j$	$C_j \rightarrow$ P_0	2 P_1	–3 P_2	6 P_3	0 P_4	0 P_5	0 P_6	0 P_7
P_4	0	2	3	–4	–6	1	0	0	0
P_7	0	11	2	–1	2	0	–1	0	1
P_6	0	5	1	3	–2	0	0	1	0
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$			–2	+3	–6	0	0	0	0

यहाँ उद्देश्य फलन का मान

$$Z_j = Z_o = 0$$

परन्तु इसका न्यूनतमीकरण नहीं हुआ है, क्योंकि सदिश P_2 के संदर्भ में $Z_j - C_j > 0$ है। अत: P_2 को न्यूनतम करने के लिए हम θ कटूता (θ trick) का उपयोग करेंगे–

$$P_o = 2P_4 + 11P_7 + 5p_6 \quad ...(i)$$

$$\text{P}_2 = -4P_4 + P_7 - 3P_6 \quad ...(ii)$$

समीकरण (*ii*) को θ से गुणा करने पर

$$\theta P_2 = -4\theta\, P_4 + 5P_7 = 3\theta\, P_6 \quad ...(iii)$$

समीकरण (*iii*) को (*i*) में से घटाने पर

$$P_o = \theta P_2 + (2 - 4\theta)\, P_4 + (11 - \theta)\, P_7 + (5 - 3\theta)\, P_6 \quad ...(iv)$$

θ के तीन मानों $\frac{1}{2}$, 11 तथा $\frac{5}{3}$ में से $\theta = \frac{1}{2}$ संबंध मान हैं, अतएव (*iv*) में $\theta = \frac{1}{2}$ रखने पर

$$P_0 = \frac{1}{2}P_2 + 0P_4 + \frac{21}{2}P_7 + \frac{7}{2}P_6$$

$$= \frac{1}{2}P_2 = \frac{21}{2}P_7 + \frac{7}{2}P_6 \quad ...(v)$$

समीकरण (*v*) नवीन आधार 11 हुआ जिसमें P_2, P_7 तथा P_6 सम्मिलित है। अत: P_4 के स्थान पर P_2 का समावेश करने पर अग्रलिखित सारणी के रूप में लिख सकते हैं–

यहाँ उद्देश्य फलन का मान $Z_j = Z_o = -\frac{3}{2}$

यही वांछित मान है क्योंकि $Z_j - C_j < 0$

$$j = 1, 2, ... 7$$

द्वितीय सारणी (Second Table)

आधार सदिश (Basis Vector)	$\checkmark C_j$	$C_j \rightarrow$ P_0	2 P_1	–3 P_2	6 P_3	0 P_4	0 P_5	0 P_6	0 P_7
P_2	–3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{6}{3}$	0	0	0	0
P_7	0	$\frac{21}{3}$	5	0	8	0	–3	0	1
P_6	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{12}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0
Z_j		$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	–3	$-\frac{9}{4}$	0	0	0	0
$Z_j - C_j$			$-\frac{7}{8}$	0	$-\frac{33}{4}$	0	0	0	0

उदाहरण 2: निम्न रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या को हल कीजिए–

अधिकतम $Z = 5X_1 + 4X_2$

जोकि $X_1 + 2X_2 \leq 8000$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 9000$$

जिससे कि $X_1, X_2 > 0$

हल : सर्वप्रथम हम समीकरणों की असमानताओं को स्लैक चलराशियों का समावेश करके दूर करेंगे। अब हम प्रतिबंधों को निम्न प्रकार दर्शा सकते हैं–

$$X_1 + 2X_2 + 0X_3 = 8000$$
$$3X_2 + 2X_2 + 0X_4 = 9000$$

अब हम उपरोक्त तथ्यों के आधार पर निम्नांकित सारणी बनायेंगे–

			Cost	5	4	0	0	
C_β	Solution	X_β	β	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	$\theta = \frac{\text{Sol.}}{Y_k}$
0	8000	X_3	Y_3	1	2	1	0	8000
0	9000	X_4	Y_4	3	2	1	0	$\frac{9000}{3} = 3000$
$\sum Z_j - C_j = \sum C_\beta (Y_j - C_j)$				–5	–4	0	0	

नोट

यहाँ हम पहले पंक्ति Y_k का समावेश करेंगे। इसके लिए 0 का मान ज्ञात करेंगे। θ का मान हल में Y_k की संबंधित मूल्य भाग देकर ज्ञात कर सकते हैं–

$$\theta = \frac{8000}{1} = 8000$$

तथा
$$0 = \frac{9000}{3} = 3000$$

तत्पश्चात् पंक्ति (Row) ही न्यूनतम मूल्य को समावेश करेंगे। यहाँ lवीं पंक्ति (द्वितीय पंक्ति) को kवाँ सदिश हल (अर्थात् 3) के द्वारा हटायेंगे।

द्वितीय सारणी में सर्वप्रथम हम kवीं पंक्ति (पहले की द्वितीय पंक्ति) को प्रथम सारणी की द्वितीय पंक्ति के Pivot से भाग देकर ज्ञात करेंगे। शेष पंक्तियाँ द्वितीय सारणी की नयी पंक्ति (जो कि Pivot से गुणा करके प्राप्त होती है) से गुणा कर देंगे और बाद में उसे पहली सारणी की iवीं पंक्ति से घटा देंगे। यह द्वितीय सारणी की iवीं पंक्ति के परिणाम को दर्शायेंगे। वह स्थिति तब तक दोहराते रहेंगे जबकि $Z_j - Cj$ का मान धनात्मक आ जाए।

			Cost	**5**	**4**	**0**	**0**	
C_β	Solution	X_β	β	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	θ
0	00	X_3	Y_3	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{15000}{4}$
0	3000	X_1	Y_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{9000}{2}$
	$Z_j - C_j$			$5-5$ $=0$	$\frac{10}{3}-4$ $= -\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	

प्रथम पंक्ति के लिए

$$\begin{array}{rcccc} 8000 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3000 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 5000 & 0 & \frac{3}{4}-\frac{1}{3} & \text{घटाने पर} & \end{array}$$

यह विधि तब तक दोहराते जायेंगे जब $Z_j - C_j$ का मान ऋणात्मक आ जायें। चूँकि β प्रथम पंक्ति में न्यूनतम है जबकि $Z_j - C_j$; Y_2 के लिए ऋणात्मक है। इसलिए हम प्रथम पंक्ति को निम्न सारणी में हटा देंगे। यहाँ Pivot का मान 4/3 है जब हम विधि को दोहराते जाते हैं–

नोट

			Cost	5	4	0	0	
C_β	Solution	X_β	β	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	θ
4	$\frac{1500}{4}$	X_2	Y_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	
5		X_1	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
		$Z_j - C_j$		0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

द्वितीय पंक्ति के लिए

3000	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2500	1	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
500	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

घटाने पर

चूंकि यहाँ $Z_j - C_j$ का मान धनात्मक है। हल का स्तंभ (Column) $X_2 = \frac{15000}{4}$ तथा $X_1 = 500$ अधिकतम मान प्रदान करता है।

अब 2 का अधिकतम मान प्राप्त होगा—

$$2 = 5X_1 + 4X_2 = (5 \times 500) + \frac{4 \times 15000}{5}$$

$$= 2500 + 15000 = 17500$$

उदाहरण 3. लाभ अधिकतम करें $Z = 4X + 3Y$

जोकि
$$x + \frac{7}{2}y \leq 9$$
$$2x + y \leq 8$$
$$x + y \leq 6$$

जैसे कि $x \lesseqgtr 0, y \leq 0$

हल (Solution): सबसे पहले हम समीकरणों को संतुलित करने के लिए (Slack variables) का प्रयोग करेंगे। Slack variables जैसे कि s_1, s_2, s_3 आदि है। इन चलराशियों को शून्य से गुणा कर देते हैं, इन्हें तो केवल समीकरण संतुलित करने के लिए जोड़ लिया जाता है। जैसे—

$$Z = 4x + 3y + os_1 = os_2 + os_3 = R$$

सिमप्लैक्स विधि द्वारा आरम्भिक सारणी

नोट

Table I

$C_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	
	Profit	**Qty**	**x**	**y**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**Ratio**
0	s_1	9	1	$\frac{7}{2}$	1	0	0	9
0	s_2	8	2	1	0	1	0	←4
0	s_3	6	1	1	0	0	1	6
	Z_j		0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$		4	3	0	0	0	

Key Column ↑ यहाँ Key Factor = 4

नोट : Key factor = 4 होगा क्योंकि इस अनुपात का मूल्य सबसे कम है।

Subject to $x + \frac{7}{2} y + s_1 + os_2 + os_3 = 9$

$$2x + y + os_1 + s_2 + os_3 = 8$$

$$x + y + os_1 + os_2 + s_3 = 6$$

Table II

$C_j \rightarrow$			**4**	**3**	**0**	**0**	**0**	
	Profit	**Qty**	***x***	***y***	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**Ratio**
4	x	4	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	8
0	s_1	5	0	3	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{3}$
0	s_3	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	4
	Z_j		16	4	2	0	2	
	$C_j - Z_j$			0	1	0	–2	

अभी $C_j - Z_j$ की मूल्य या तो धनात्मक (Positive) में है या शून्य के बराबर या कम। हम तब तक नयी सारणी बनाते रहेंगे जबकि $C_j - Z_j$ कर सभी मूल्य या तो ऋणात्मक (Negative) में या शून्य में न आ जायें।

नोट

Table III

	$C_j \rightarrow$		**4**	**3**	**0**	**0**	**0**	
	Profit	**Qty**	x	y	s_1	s_2	s_3	**Ratio**
3	y	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	
4	x	$\frac{19}{6}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	0	
0	s_3	$\frac{7}{6}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	0	
	Z_j	$\frac{53}{3}$	4	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{6}$	0	
	$C_j - Z_j$		0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{6}$	0	

उपरोक्त सारणी में $C_j - Z_j$ की सभी मूल्य या तो ऋणात्मक (Negative) या शून्य के बराबर प्राप्त हो जाता है। अत:

$$x = 19/6$$
$$y = 5/3$$
$$s_3 = 7/6$$

Working Notes
Table No. IV

	Qty	x	y	s_1	s_2	s_3
O.V.s_1	9	1	$\frac{7}{2}$	1	0	0
N.T. × 1	–4	–1	$-\frac{1}{2}$	–0	$-\frac{1}{2}$	–0
	5	0	3	1	$-\frac{1}{2}$	0
D.V.s_3	6	1	1	0	0	1
N.T. × 1	–4	–1	$-\frac{1}{2}$	–0	$-\frac{1}{2}$	–0
	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1

नोट

Table V

O.V. N.T. × $\frac{1}{2}$	4 $+\frac{5}{6}$ −1	1 +0 −1	$\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ −1	0 $+\frac{1}{6}$ −1	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{12}$ +1	0 0 +1
	19/6	1	0	−1/6	7/12	0
O.V.s_3 N.T. × $\frac{1}{2}$	2 +5/6 7/6	0 +0 −0	$\frac{1}{2}$ +1/2 0	0 +1/6 −1/6	$-\frac{1}{2}$ −1/12 5/12	1 −0 1
	5 38/3	0 4	3 0	1 −2/3	$-\frac{1}{2}$ 7/3	0 0
Z_j	53/3	4	3	1/2	+11/6	0

नोट : O.V. = Original value,
N.T. = New table value.

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. रेखीय प्रायोजना विधि में असमीकरणों की संख्या अधिक होने के कारण ········ विधि अधिक जटिल हो जाती है।
2. कोई भी हल जो अऋणात्मक प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है, एक ········ हल कहलायेगा।
3. कोई भी संभाव्य हल जो उद्देश्य फलन को अधिकतम या न्यूनतम करता है, वह ········ संभाव्य हल कहलाएगा।
4. असमीकरणों को समीकरणों में बदलने के लिए आवश्यकतानुसार ········ अथवा आधिक्य चर का प्रयोग करना चाहिए।
5. वह हल जो अऋणात्मक शर्त की पूर्ति न करता हो, तो वह ········ हल कहलाता है।

30.3 सारांश (Summary)

- रेखीय प्रायोजना विधि में असमीकरणों की संख्या अधिक होने के कारण ग्राफीय विधि अधिक जटिल हो जाती है। इस विधि का प्रयोग दो या तीन असमीकरणों की स्थिति में किया जा सकता है। अत: समीकरणों

नोट

की संख्या अत्यधिक हो जाने के कारण युग्मपद समीकरणों के लिए एक अन्य गणितीय विधि का प्रयोग किया जाता है जिसे सिमप्लैक्स विधि कहा जाता है।

30.4 शब्दकोश (Keywords)

- रेखीय (Linear): रैखिक।
- विधि (Method): नियम।

30.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. संभाव्य हल तथा अनुकूलतम संभाव्य हल से आप क्या समझते हैं?
2. विधि के विभिन्न आगणना चरणों को लिखें।
3. निम्नलिखित रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या को हल करें–

   अधिकतम $z = 5X_1 + 4X_2$

   विषय $X_1 + 2X_2 \leq 8000$

   $3X_1 + 2X_2 \leq 9000$

   इस प्रकार $X_1, X_2 > 0$(उत्तर: अधिकतम मान: 17500)

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. ग्राफीय 2. संभाव्य 3. अनुकूलतम 4. स्लैक 5. असाध्य।

30.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. गणितीय अर्थशास्त्र – *माइकल हैरीसन, पैट्रिक वाल्डरन।*
2. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *कार्ल पी. सिमोन, लॉरेन्स ब्लूम।*
3. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड फाइनान्स – *मार्टिन नार्मन।*
4. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *मालकॉम, निकोलस, यू.सी. लन्दन।*
5. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – यामाने – *प्रैन्टिस हॉल इन्डिया।*
6. एसेन्शियल मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *नॅट सेडेस्टर, पीटर हामन्ड, प्रैन्टिस हॉल पब्लि.*
7. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स – *काऊन्सिल फॉर इकोनॉमिक एजुकेशन।*
8. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – मेहता और मदनानी – *सुल्तान चन्द एण्ड सन्स।*
9. मैथेमेटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट – सिमोन और ब्लूम – *वीवा पब्लिकेशन।*

LOVELY PROFESSIONAL UNIVERSITY
Jalandhar-Delhi G.T. Road (NH-1)
Phagwara, Punjab (India)-144411
For Enquiry: +91-1824-300360
Fax.: +91-1824-506111
Email: odl@lpu.co.in