Mathematics for Economists

DECO403

LOVELY
PROFESSIONAL
UNIVERSITY

ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ
MATHEMATICS FOR ECONOMIST

Produced & Printed by
LAXMI PUBLICATIONS (P) LTD.
113, Golden House, Daryaganj,
New Delhi-110002
for
Lovely Professional University
Phagwara

DLP-7837-264-MATH FOR ECONOMIST-PUNJABI C—
Printed at :

ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ
(CONTENTS)

ਇਕਾਈ (Units) **ਪੱਨਾਂ ਸੰਖਿਆ (Page No.)**

ਪਾਠਕ੍ਰਮ
(SYLLABUS)
ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ
(Mathematics for Economist)

ਉਦੇਸ਼

- ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਦੇ ਗਣਿਤ ਪਹਿਲੂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਾਉਣਾ।
- ਵਿਦਿਆਥੀਆਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਦੇ ਅੰਤਰਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਅੰਤਰ–ਨਿਰਭਰਤਾ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਾਉਣਾ।
- ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਦੇ ਅਣੁਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੀ ਸਮਝ ਵਧਾਉਣਾ।

Objectives

- To aware of students the mathematical aspects of Economics.
- To introduce the concept of interrelation and inter dependency of mathematical Economics.
- To increase understanding of the application of the mathematical properties of Economics.

Sr. No.	Content
1	Types of Functions: constant function, polynomial functions, rational functions, non-algebraic function, exponential function, log function, Limits & Continuity
2	Differentiation : Simple, Logarithmic differentiation, Second and higher order differentiation
3	Differentiation: Partial, Homogeneous function and Euler's theorem, Economic Applications of differentiation
4	Maxima and Minima of one variable, Maxima and Minima of two variables, Constrained Maxima and Minima, Economic Applications of Maxima and Minima
5	Integration : Basic rules of integration, Methods of integration, Integration as a summation, Definite Integration, Economic Applications of Integration
6	Differential Equations: Introduction, Solution – variable separable case, homogenous case
7	Matrices : Meaning and types, Transpose, trace of a matrix, Adjoint and inverse of the matrix, Cramer's rule, Determinants: Types and properties, Rank of a matrix, Application of matrices in economics
8	Input – Output analysis, Hawkins – Simon Conditions, Closed Economic Input – Output analysis
9	Introduction to Linear Programming, Formulation of Linear programming problems, Graphic methods
10	Linear Programming - Simplex methods

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–1: ਫਲਨ
(Functions)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਫਲਨ ਅਤੇ ਸੰਬੰਧਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਵਿੱਚ।
- ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢਣ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਮਾਨਚਿੱਤਰ ਦੁਆਰਾ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਵਿੱਚ।
- ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਪਰਾਸ ਕੱਢਣ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਰੇਖਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਸੰਬੰਧੀ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਕਈ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਸੁਤੰਤਰ ਰੂਪ ਤੋਂ ਘਟਦੀ-ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਦੂਜੀ ਰਾਸ਼ੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘਟਦੀ-ਵੱਧਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਸਦੀ ਤਰਿਜਯਾ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ ਤਿਰਜਯਾ ਘਟਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਜਾਂ ਵਧਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ **ਗੋਲੇ** ਦਾ ਖੇਤਰਫਨ ਵੀ ਉਸੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਘਟ ਜਾਵੇਗਾ ਜਾਂ ਵੱਧ ਜਾਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ ਗੋਲੇ ਦੀ ਤਿਰਜਯਾ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਅਤੇ ਗੋਲੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਦੂਜੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਹਨ।

ਨੋਟ

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਸਦੀ ਤਿਰਜਯਾ ਉੱਤੇ, ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਘਨ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਸਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਚਰ ਵੇਗ ਨਾਲ ਜਾਂਦੀ ਹੋਈ ਰੇਲ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਦੂਰੀ ਸਮੇਂ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਗਿਰਦੇ ਕਣ ਦਾ ਵੇਗ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਦੂਰੀ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੀ ਸਥਾ ਦਾ ਵਾਯੂਮੰਡਲੀ ਦਾਬ (Atmospheric Pressure) ਉਸ ਸਥਾਨ ਦੀ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੋਂ ਉਚਾਈ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਆਦਿ।

ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਤੇ ਉਸ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਦੂਜੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਿਸ ਦਰ ਤੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਕਈ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਅਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਅਤੇ ਅਧਿਅਨ ਨਿਖੇੜਨ ਗਣਿਤ (Differential Calculus) **ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।**

1.1 ਰਾਸ਼ੀਆਂ (Quantities)

ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ–

1. ਚਰ (Variables) 2. ਅਚਰ (Constants)

1. ਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (Variables)–ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ ਚਰ (Variables) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਹ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮਾਨ ਬਦਲਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਅਗਣਿਤ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮਾਨ (numerical values) ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, **ਚਰ** (Variables) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਆਖਰੀ ਅੱਖਰਾਂ x, y, z, u, v, w ਆਦਿ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

2. ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (Constants)–ਉਹ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮਾਨ ਗਣਿਤ ਦੀ ਹਰੇਕ ਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਅਪਰਿਵਰਤਿਤ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, **ਅਚਰ** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (Constant Quantities) ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ–

(*i*) ਨਿਰਪੇਖ ਜਾਂ ਪੂਰਣ ਅਚਰ (Absolute Constants)

(*ii*) ਸਵੇਛ ਅਚਰ (Arbitrary Constants)

ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਮਾਨ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਨਿਰਪੇਖ ਜਾਂ ਪੂਰਣ ਅਚਰ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ;

ਜਿਵੇਂ: $-5, -3, 1, 11, \sqrt{5}, \pi, \frac{2}{5}, e$ ਆਦਿ।

ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਮਾਨ ਕਿਸੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਸਵੇਛ ਅਚਰ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਅਰੰਭ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ a, b, c, d ਆਦਿ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

1.2 ਸੰਬੰਧਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (Related Quantities)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗੋਲੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਸਦੀ **ਤਿਰਜਯਾ** ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਤਿਰਜਯਾਂ ਵਾਲੇ ਗੋਲਿਆਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਨ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੀ **ਧੰਨ ਸੰਖਿਆ** ਦੇ ਘਟਣ ਜਾਂ ਵਧਣ ਤੇ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਵੀ ਘਟ ਜਾਂ ਵੱਧ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ **ਗੋਲੇ** ਦੀ ਤਿਰਜਯਾ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਾਂ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਸੰਬੰਧਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਹਨ।

ਨੋਟਸ

ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੇ ਬਦਲਣ ਤੇ ਦੂਜੀ ਵੀ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਉਹ **ਸੰਬੰਧਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ** ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਭਾਵੇਂ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਸੰਬੰਧਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਚਰ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਦਾ ਮਾਨ ਸਵੈ-ਇੱਛਾ ਨਾਲ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਦੂਜੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਮਾਨ ਸਵੈ-ਇੱਛਾ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਕਿਸੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਗੋਲੇ ਦੀ ਤਰਿਜਯਾ r_t ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਵੈ-ਇੱਛਾ ਤੋਂ 1, 2, 3, 4, ... ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A, ਨਿਯਮ $A = \pi r^2$ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ π, 4π, 9π, 16π, ... ਹੋਵੇਗਾ।

ਨੋਟ

ਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ–

(*i*) **ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ** (Independent Variables)

(*ii*) **ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਚਰ** (Dependent Variables)

ਜੇਕਰ ਦੋ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਪਰਸਪਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਬੰਧਤ ਹੋਣ ਕਿ ਇੱਕ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ x ਨੂੰ ਸਵੈ-ਇੱਛਾ ਤੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਮਾਨ ਦੇਣ ਤੇ ਤੂਜੀ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ y ਦਾ ਮਾਨ ਉਸ ਉੱਤੇ ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਨੂੰ **ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ** (Independent Variable) ਅਤੇ y ਨੂੰ **ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਚਰ** (Dependent Variable) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–ਮੰਨ ਲਿਓ $y = 2x + 5$.

ਹੁਣ ਚਰ x ਨੂੰ ਸਵੈ-ਇੱਛਾ ਤੋਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ 0, 1, 2, ... ਦੇਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ y ਦੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ 5, 7, 9, ... ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਹੜੇ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਤੋਂ x ਉੱਤੇ ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਥੇ x ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਅਤੇ y ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਚਰ ਹੈ।

1.3 ਫਲਨ (Functions)

ਫਲਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦੋ ਪਰਸਪਰ **ਸੰਬੰਧਤ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ** (Related Quantities) ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਿਓ ਤਿਰਜਯਾ r ਦੇ ਕਿਸੀ ਗੋਲੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਹੈ, ਉਦੋਂ

$$A = \pi r^2$$

ਇੱਥੇ ਰਾਸ਼ੀ r **ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ** (Independent Variable) ਅਤੇ ਰਾਸ਼ੀ A **ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਚਰ** (Dependent Variable) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗੋਲੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਉਸਦੀ ਤਿਰਜਯਾ r ਉੱਤੇ ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਰ A, ਦੂਜੇ ਚਰ r ਦਾ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਗਣਿਤ ਦੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਕੇ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ–

$$A = f(r)$$

ਭਾਵ [A ਫਲਨ ਹੈ, ਚਰ r ਦਾ]

1.4 ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Definition of Functions)

ਇੱਥੇ ਦੋ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x (ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ) ਅਤੇ y (ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਚਰ) ਕਿਸੀ ਨਿਯਮ 'f' ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਬੰਧਤ (related) ਹੋਣ ਕਿ x ਦੇ ਹਰ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ y ਦਾ ਇੱਕ **ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਤੇ ਵਿਲੱਖਣ** (unique) ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ **y ਨੂੰ x ਦਾ f – ਫਲਨ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸਨੂੰ $y = f(x)$ ਲਿਖ ਕੇ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

x ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ $f(x), g(x), \phi(x), \ldots$ ਆਦਿ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1.5 ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ (Explanation of Functions)

ਜੇਕਰ y, ਚਰ x ਦਾ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਭਾਵ $y = f(x)$.

ਉਦੋਂ x ਨੂੰ **ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ** (Independent Variable) ਅਤੇ y ਨੂੰ **ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਚਰ** (Dependent Variable) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $y = 5x + 7$ ਤਾਂ x ਦੇ ਹਰ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ y ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਨ ਜਰੂਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ y ਨੂੰ x ਦਾ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

1.6 ਫਲਨਿਕ ਸੰਕੇਤਨ (Functional Notations)

ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਚਰ-ਰਾਸ਼ੀ y, ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਚਰ-ਰਾਸ਼ੀ x ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ, ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਸੰਕੇਤ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਿਆਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਸੰਕੇਤ ਹੈ:

$$y = f(x)$$

ਨੋਟ

ਜਿਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ "y ਬਰਾਬਰ ਹੈ x ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ"।

ਹੋਰ ਸਕੇਤ ਹਨ: $y = F(x), y = \phi(x), y = \psi(x), \ldots$, ਆਦਿ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ x ਦੇ ਕਿਸੀ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਦੂਜੀ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ y ਦਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ y, x ਦਾ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਬਲਕਿ y ਨੂੰ x ਦਾ ਸੰਬੰਧ (Relation) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ $y^2 = x$. ਇੱਥੇ x ਦੇ ਹਰ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ y ਦੇ ਦੋ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਜਿਹੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਕਦੀ-ਕਦੀ **ਵੱਖਂ-ਵੱਖ ਮਾਨ ਫਲਨ** (Multi-valued function) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

1.7 ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ (Value of Functions)

ਮੰਨਿਆ ਚਰ x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ $y = f(x)$ ਹੈ।

$f(x)$ ਵਿੱਚ $x = a$ ਰੱਖਣ ਤੇ $f(a)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ $x = a$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

$X = a$ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ $= f(a)$

ਜਿਹੜਾ $f(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ a ਰੱਖਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ-ਮੰਨ ਲਿਓ $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

ਉਦੋਂ $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 5,$ [x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ 2 ਰੱਖਣ ਤੇ]

$= 8 - 6 + 5 = 7.$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. **ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ** (Fill in the blanks)-

(i) ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ .... ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਉਹ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮਾਨ ਗਣਿਤ ਦੀ ਹਰ ਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਅਪਰਿਵਰਤਿਤ ਰਹਿੰਦਾ, ... ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

(iii) ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੇ ਬਦਲਣ ਤੇ ਦੂਜੀ ਵੀ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਉਹ .... ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

(iv) ਗੋਲੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਸਦੀ .... ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

(v) ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਮਾਨ ਹਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਹੈ, ... ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

1.8 ਮਾਨਚਿੱਤਰਣ ਦੁਆਰਾ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Definition of Functions by Mapping)

ਜੇਕਰ ਅਰਿਕਤ ਸਮੁੱਚ (Non-empty set) X ਦੇ ਹਰ ਅਵਯਵ x ਦਾ ਗੁਣਨ (Correspondence) ਅਰਿਕਤ ਸਮੁੱਚ Y ਦੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਤੇ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਅਵਯਵ y ਨਾਲ ਕਿਸੀ ਨਿਯਮ f ਦੁਆਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ f ਨੂੰ ਸਮੁੱਚ, X ਨੂੰ ਸਮੁੱਚ Y ਵਿੱਚ ਮਾਨਚਿੱਤਰਣ (Mapping) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ $f : X \to Y$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸੀ ਮਾਨਚਿੱਤਰਣ f ਨੂੰ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਮਾਨਚਿੱਤਰਣ ਦੋ ਸਮੁੱਚਾਂ X ਅਤੇ Y ਨੂੰ ਅਵਯਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨ ਦੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਪਹਿਲੂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ ਇਸਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਪਹਿਲੂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ,

ਨੋਟ

ਜੇਕਰ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਅਰਿਕਤ ਸਮੂੱਚ ਹੋਣ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਨਿਯਮ f ਦੁਆਰਾ X ਦਾ ਹਰੇਕ ਅਵਯਵ Y ਦੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਅਵਯਵ ਨਾਲ ਜੁੜ (associated) ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਦੋਚਰ ਸੰਬੰਧ (binary operation) R, X ਦਾ Y ਵਿੱਚ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $R = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ ਨੂੰ X ਦਾ Y ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–ਜੇਕਰ $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$ ਤਾਂ ਨਿਯਮ $y = x + 2$ ਦੁਆਰਾ X ਦੇ ਅਵਯਵ 1, 2, 3 ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ Y ਦੇ ਅਵਯਵ 3, 4, 5 ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਚਰ ਸੰਬੰਧ $R = \{(1, 3), (2, 4) (3, 5)\}$ ਨੂੰ X ਦਾ Y ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਕਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ

$$f : X \to Y \text{ ਜਾਂ } X \xrightarrow{f} Y$$

ਵੀ ਲਿਖਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ f ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ X ਦਾ ਹਰੇਕ ਅਵਯਵ Y ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਅਵਯਵ ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

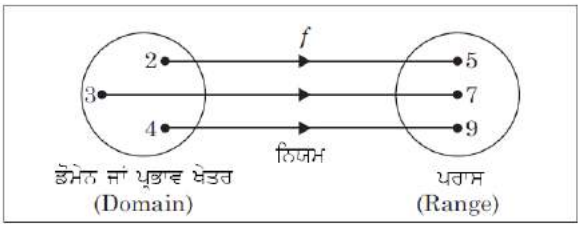
1.9 ਫਲਨ ਦਾ ਡੋਮੇਨ ਜਾਂ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਪਰਾਸ ਜਾਂ ਰੇਂਜ (Domain and Range of Functions)

ਜੇਕਰ ਫਲਨ $f : X \to Y$ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੁੱਚ X ਇਯ ਪ੍ਰਤੀਚਿੱਤਰਣ ਜਾਂ ਫਲਨ f ਦਾ **ਡੋਮੇਨ ਜਾਂ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ** (Domain) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੁੱਚ Y ਇਸਦਾ **ਪਰਾਸ** ਜਾਂ **ਰੇਂਜ** (Range) ਸਹਿ-ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ (Codomain) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਫਲਨ f ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ (Domain) = x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਅਸਲ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਸਮੁੱਚ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਫਲਨ f ਦਾ ਪਰਾਸ (Range) = ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ (Domain) ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਦੇ ਸੰਗਤ, y ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਸਮੁੱਚ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋ–$y = 2x + 1$ ਵਿੱਚ y, x ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ। ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਅਤੇ ਪੰਜ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਧੰਨ ਪੂਰਣ ਅੰਕ ਮਾਨ ਗ੍ਰਹਿਣ ਕਰੇ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਡੋਮੇਨ ਜਾਂ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਸਮੁੱਚ $\{2, 3, 4\}$ ਹੋਇਆ ਅਤੇ ਉਦੋਂ ਫਲਨ ਦਾ ਪਰਾਸ ਸਮੁੱਚ $\{5, 7, 9\}$ ਹੋਇਆ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਚਰ ਸੰਬੰਧ $R = \{(5, 8), (6, 9), (7, 10)\}$ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਸਮੁੱਚ $\{5, 6, 7\}$ ਅਤੇ ਪਰਾਸ ਸਮੁੱਚ $\{8, 9, 10\}$ ਹੋਇਆ।



ਜੇਕਰ ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਦਾ ਇੱਕ ਤੱਤ x, ਪਰਾਸ ਦੇ ਕਿਸੀ ਤੱਤ y ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਪਰਾਸ ਦੇ ਇਸ ਤੱਤ y ਨੂੰ, ਜਿਹੜਾ x ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੈ, $f(x)$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $f(x)$, x ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ f ਦੇ ਮਾਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

$$f : x \to y \text{ ਨੂੰ } f : x \to f(x)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

1.10 ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Kinds of Functions)

1. **ਇੱਕਚਰੀ ਫਲਨ** (Functions of Single Variable)–ਜੇਕਰ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ y **ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ** x ਤੇ ਆਸ਼ਿ੍ਤ ਹੈ, ਉਦੋਂ $y = f(x)$ **ਇੱਕਚਰੀ ਫਲਨ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, $y = f(\theta)$, $s = f(t)$, $v = f(t)$ ਆਦਿ ਇੱਕਚਰੀ ਫਲਨ ਹਨ।

ਨੋਟ

2. **ਬਹੁਚਰੀ ਫਲਨ** (Functions of Many Variable)–ਜੇਕਰ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ u, **ਦੋ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ** x ਅਤੇ y ਉੱਤੇ ਆਸ਼੍ਰਿਤ ਹੈ, ਉਦੋਂ $u = f(x, y)$ **ਬਹੁਚਰੀ ਫਲਨ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
3. **ਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ** (Explicit Function)–ਫਲਨ $y = f(x)$ ਇੱਕ ਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ y ਨੂੰ x ਦੇ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਸੰਭਵ ਹੋਵੇ।

ਜਿਵੇਂ: $y = x^2 + 2x - 5,\qquad y = \cos x,\ y = \dfrac{x}{1+x^2}$ ਆਦਿ।

4. **ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ** (Implicit Function)–ਫਲਨ $y = f(x)$ ਇੱਕ **ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ y ਨੂੰ x ਦੇ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਸੰਭਵ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–

$$Y = x\sin(x + y),\ \text{ਭਾਵ}\ f(x, y) = 0,\ x^2 + y^2 - xy = 0\ \text{ਆਦਿ।}$$

5. **ਸਮ ਫਲਨ** (Even Function)–ਮੰਨ ਲਿਓ $y = f(x)$ ਚਰ x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $f(-x) = f(x)$

ਭਾਵ ਜੇਕਰ $f(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $-x$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਾ ਬਦਲੇ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–

$$f(x) = \cos x = \cos(-x) = f(-x)$$

6. **ਬਿਖਮ ਫਲਨ** (Odd Function)–ਮੰਨ ਲਿਓ $y = f(x)$ ਚਰ x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ– $f(x) = x^3 = -(-x^3) = -f(-x)$.

ਜੇਕਰ $f(-x) = -f(x)$ ਭਾਵ ਜੇਕਰ $f(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $-x$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਬਿਖਮ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

7. **ਬੀਜਕ ਫਲਨ** (Algebraic Function)–ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ x ਦੀ ਵਿਭਿੰਨ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਘਾਤਾਂ ਵਾਲਾ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋਵੇ, **ਬੀਜਕ ਫਲਨ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x$$
$$f(x) = x^{3/2} + x^{-1/3}$$
$$f(x) = (x + a)^{2/3}.$$

ਬੀਜਕ ਫਲਨ ਹਨ।

8. **ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ** (Rational Function)–ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਜਿਸਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਪੂਰਣ ਅੰਕ ਘਾਤਾਂ ਵਾਲੇ ਬੀਜਕ ਵਿਅੰਜਕ ਹੋਣ, **ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

$$f(x) = \frac{2x^3 + x + 7}{x^3 + 5x^2 + x + 5}$$

9. **ਅਬੀਜਕ ਫਲਨ** (Transcendental Function)–

ਅਬੀਜਕ ਫਲਨ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ–

(i) **ਤਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ** (Trigonometrical Functions)–ਜਿਵੇਂ: $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, $\sin 2x + \sec^2 x$ ਆਦਿ।

(ii) **ਵਿਪਰੀਤ ਗੋਲ ਫਲਨ** (Inverse Circular Functions)–ਜਿਵੇਂ: $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\sec^{-1} x$ ਆਦਿ।

(iii) **ਲਘੁਗਣਕੀ ਫਲਨ** (Logarithmic Functions)–ਜਿਵੇਂ: $\log_e x$, $\log_a x$, $\log_e (x^2 + 4x + 3)$ ਆਦਿ।

ਨੋਟ

(iv) **ਚਰਘਾਤੀ ਫਲਨ** (Exponential Functions)–ਜਿਵੇਂ: $e^x, a^x, x^{\sin x}, (\sin x)^{\cos x}$ ਆਦਿ।

10. **ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ** (defined Function)–$x = a$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $f(x)$ ਵਿੱਚ $x = a$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $f(a)$ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਤੇ ਪਰਿਮਿਤ (Finite) ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਜਿਹੜਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਰਥਪੂਰਣ ਭਾਵ ਅਸਲ ਹੋਵੇ।

11. **ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ** (Undefined Function)–$x = a$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਆਦਿ $f(a)$ ਦਾ ਮਾਨ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਤੇ ਅਰਥਹੀਣ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ–

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \times \infty, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–

$$(i)\ y = \frac{\sin x}{x}; \text{ ਜਦੋਂ } x = 0, \left(\frac{0}{0}\right).$$

$$(ii)\ y = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 - 2}; \text{ ਜਦੋਂ } x = \infty \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

$$(iii)\ y = x^{\frac{1}{1-x}}; \text{ ਜਦੋਂ } x = 1, (1^\infty).$$

$$(iv)\ y = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}; \text{ ਜਦੋਂ } x = 0, (\infty - \infty) \text{ ਆਦਿ।}$$

12. **ਅਚਰ ਫਲਨ** (Constant Function)–$y = f(x) = c$, ਜਿੱਥੇ c ਇੱਕ ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ, ਇੱਕ ਅਰਚ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਚਰ ਫਲਨ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਹਰ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ y ਜਾਂ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

13. **ਆਵਰਤੀ ਫਲਨ** (Periodic Function)–ਫਲਨ $y = f(x)$ ਆਵਰਤੀ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ x ਦੇ ਹਰ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ

$$f(x + k) = f(x),$$

ਜਿੱਥੇ k ਕੋਈ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਭਾਵ k ਨੂੰ ਪਾਲਨ ਦਾ ਆਵਰਤਕਾਲ (Period) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

14. **ਫਲਨ ਦਾ ਫਲਨ** (Function of the Function)–ਮੰਨਿਆ $f(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਚਰ x ਦੇ ਕੋਈ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ, ਉਦੋਂ $f[g(x)]$ ਫਲਨ ਦਾ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ $f(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $g(x)$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, $g[f(x)]$ ਵੀ ਫਲਨ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਹੜਾ $g(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $f(x)$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

1.11 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸਮੁੱਚ ਵਿੱਚ ਕਿਰਿਆਵਾਂ (Operations in the Set of Functions)

ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ S ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਅਸਲ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸਮੁੱਚ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਡੋਮੇਨ D ਹੈ। ਉਦੋਂ ਜੇਕਰ f ਅਤੇ g ਸਮੁੱਚ S ਕੋਈ ਦੋ ਫਲਨ ਹੋਣ ਤਾਂ $f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}$ ਦੇ ਅਰਥ ਨਿਮਨਲਿਚਤ ਹੋਣਗੇ:

$$(i)\ (f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in D$$

$$(ii)\ (f-g)(x) = f(x) - g(x), \forall x \in D$$

$$(iii)\ (fg)(x) = f(x) . g(x), \forall x \in D$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨਾਂ $f+g, f-g, fg$ ਦਾ ਡੋਮੇਨ ਵੀ D ਹੈ।

ਨੋਟ

$$(iv)\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \forall\, x \in D \sim S$$

ਜਿੱਥੇ S ਸਮੀਕਰਣ $g(x) = 0$ ਦਾ ਹੱਲ (solution) ਸਮੁੱਚ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ S ਅਜਿਹਾ ਸਮੁੱਚ ਹੈ ਕਿ

$$x \in S \Rightarrow g(x) = 0$$

ਭਾਵ $$S = \{x : g(x) = 0\}$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ f/g ਦਾ ਡੋਮੇਨ $D \sim S$ ਹੈ ਭਾਵ D ਵਿੱਚੋਂ ਉਹਨਾਂ ਅਵਯਵਾਂ x ਨੂੰ ਕੱਢ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $g(x) = 0$.

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ-ਮੰਨ ਲਿਓ $f(x) = \frac{1}{x}$ ਅਤੇ $\phi(x) = x^2, x$ ਨੂੰ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ ਉਦੋਂ $f(x)$ ਅਤੇ $\phi(x)$ ਦੇ ਬੀਜਕ ਯੋਗ ਨੂੰ $f(x) + \phi(x)$ ਜਾਂ $(f + \phi)(x)$ ਨਾਲ ਸੂਚਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ $(f + \phi)(x) = \frac{1}{x} + x^2$ ਹੋਵੇਗਾ। ਦੁਬਾਰਾ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ $f(x).\ \phi(x)$ ਨਾਲ ਸੂਚਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ $f(x).\ \phi(x) = \frac{1}{x} \cdot x^2 = x$ ਹੋਵੇਗਾ। $f\{\phi(x)\}, x$ ਦੇ ਇੱਕ **ਫਲਨ ਦੇ ਫਲਨ** ਨੂੰ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $f, \phi(x)$ **ਦਾ ਫਲਨ** ਅਤੇ ਫਿਰ $\phi(x), x$ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਕੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਹਨ?

$(i)\ y = \sqrt{x}$, $\qquad (ii)\ y = x^3 + 5x,$

$(iii)\ R = \{(2, 3), (5, 6), (2, 11)\}.$

ਹੱਲ : (i) ਜੇਕਰ $\sqrt{x}$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਮਾਨ ਧੰਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ $y = \sqrt{x}$ ਫਲਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਮਾਨ ਇਕੱਠੇ ਲਏ ਜਾਣ ਤਾਂ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) x ਦੇ ਹਰੇਕ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $x^3 + 5x$ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਤੇ ਵਿਲੱਖਣ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

(iii) R ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੁੱਚ X ਦੇ ਅਵਯਵ 2 ਦਾ ਗੁਣਨ ਸਮੁੱਚ Y ਦੇ ਅਵਯਵ 3 ਅਤੇ 11 ਤੋਂ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ X ਦੇ ਹਰੇਕ ਅਵਯਵ ਦਾ ਗੁਣਨ Y ਦੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਤੇ ਵਿਲੱਖਣ ਅਵਯਵ ਤੋਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. $x^2 - 1, \frac{1}{x^3 - 1}$ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੋਮੇਨ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ x ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: (i) $f(x) = x^2 - 1$ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਹਰੇਕ ਅਸਲ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਸਲ ਮਾਨ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸਦਾ ਡੋਮੇਨ ਸਮੁੱਚ R ਹੀ ਹੈ।

(ii) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$ ਵਿੱਚ $x = 1$ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਜੇਕਰ x ਦੇ ਮਾਨ ਬਾਕੀ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ $f(x)$ ਦਾ ਵੀ ਮਾਨ ਅਸਲ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸਦਾ ਡੋਮੇਨ $R \sim \{1\}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ x ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ (ਡੋਮੇਨ) ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਜਦੋਂ $x = 2$ ਤਾਂ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ $\frac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਇੱਕ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇਲਾਵਾ x ਦੇ ਹਰੇਕ ਅਸਲ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਸਲ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਡੋਮੇਨ 2 ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੁੱਚ ਹੈ। ਸੰਕੇਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ

$$D(f) = R \sim \{2\}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜੇਕਰ $x \in R$ ਤਾਂ ਫਲਨ $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ (ਡੋਮੇਨ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 3$ ਅਤੇ $x = -3$ ਉੱਤੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਹਰ ਜ਼ੀਰੋ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f(3)$ ਅਤੇ $f(-3)$ ਦਾ ਮਾਨ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ x ਦੇ ਹਰੇਕ ਅਸਲ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ f ਦਾ ਡੋਮੇਨ ਜਾਂ ਪ੍ਰਾਂਤ 3 ਅਤੇ –3 ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸੰਪੂਰਣ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੁੱਚ ਹੈ।

ਸੰਕੇਤ ਵਿੱਚ, $D(f) = R \sim \{3, -3\}$.

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ $f(x) = 5x^2 + 8x + 7$ ਤਾਂ $f(-9)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

$\because$ $f(x) = 5x^2 + 8x + 7$

$\therefore$ $x = -9$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$f(-9) = 5(-9)^2 + 8(-9) + 7$

$= 405 - 72 + 7 = 340.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਜੇਕਰ $f(x) = \log_e x$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$f(uv) = f(u) + f(v).$$

ਹੱਲ:

$\because$ $f(x) = \log_e x$

ਉਦੋਂ $f(u) = \log_e u$ ...(1)

ਅਤੇ $f(v) = \log_e v$ ...(2)

$f(uv) = \log_e (uv)$

$= \log_e u + \log_e v = f(u) + f(v)$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨਾਲ,

$$f(uv) = f(u) + f(v).$$

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਜੇਕਰ $f(x) = x^2 - x$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $f(y+1) - y^2$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

ਇੱਥੇ $f(x) = x^2 - x$

$\therefore$ $f(y+1) = (y+1)^2 - (y+1)$

$= y^2 + 2y + 1 - y - 1 = y^2 + y$

$\therefore$ $f(y+1) - y^2 = y^2 + y - y^2 = y$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f(y+1) - y^2 = y.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਜੇਕਰ $f(x) = \frac{1}{(1+\tan^2 x)}$ ਤਾਂ $f\left(\frac{À}{4}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

$\because$ $f(x) = \frac{1}{(1+\tan^2 x)}$

ਨੋਟ

$$\therefore \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$ ਉੱਤਰ

ਟਾਸਕ ਜੇਕਰ $f(x) = 5x^2 + 8x + 7$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $f(-10)$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ: 427**)

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਜੇਕਰ $f(\theta) = \frac{1-2\tan\theta}{1+2\tan\theta}$, ਤਾਂ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

$$\because \qquad f(\theta) = \frac{1-2\tan\theta}{1+2\tan\theta}$$

$$\therefore \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-2\tan\frac{\pi}{4}}{1+2\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1-2(1)}{1+2(1)}$$

$$= \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਜੇਕਰ $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$.

ਹੱਲ: $\because$ $$f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$$

ਇੱਥੇ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $\frac{2x}{1+x^2}$ ਰੱਖਣ ਤੇ,

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log\left[\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right] = \log\left[\frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x}\right]$$

$$= \log\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right] = 2\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= 2f(x).$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਜੇਕਰ $\phi(x) = \cot x$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\phi(-x) = -\phi(x)$.

ਹੱਲ:

$$\because \qquad \phi(x) = \cot x.$$

$$\therefore \qquad \phi(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -\phi(x).$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਜੇਕਰ $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ਤਾਂ $\frac{f(a/b)}{f(b/a)}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $$f(a/b) = \frac{(a/b)}{(a/b)-1} = \frac{(a/b)}{(a-b)/b} = \frac{a}{a-b}$$

ਅਤੇ $$f(b/a) = \frac{(b/a)}{(b/a)-1} = \frac{(b/a)}{(b-a)/a} = \frac{b}{b-a}$$

$$\therefore \quad \frac{f(a/b)}{f(b/a)} = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{b-a}{b} = -\frac{a}{b}$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਜੇਕਰ $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, ਤਾਂ $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ:

$$\because \quad f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

x ਦੇ ਸਥਨ ਤੇ $\frac{1}{x}$ ਰੱਖਣ ਤੇ ,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{1}{x^3} - x^3 .$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਜੇਕਰ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ਤਾਂ $\left\{f\left(\frac{a}{b}\right) - f\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $$\because \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\therefore \quad \left\{f\left(\frac{a}{b}\right) - f\left(\frac{b}{a}\right)\right\} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a^2}{b^2}+1} - \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b^2}{a^2}+1}$$

$$= \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2} = 0$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਜੇਕਰ $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, ਤਾਂ $f(x) + f(-x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $$\because \quad f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore \quad f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{(-x)^3} = -x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore \quad f(x) + f(-x) = x^3 - \frac{1}{x^3} - x^3 + \frac{1}{x^3} = 0.$$ ਉੱਤਰ

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਜੇਕਰ $f(x) = \log_e \dfrac{1-x}{x^2+1}$, **ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ** $f(x) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

ਹੱਲ: $\because$ $f(x) = \log_e \dfrac{1-x}{1+x}$

$\therefore$ $x = a$ ਰੱਖਣ ਤੇ, $f(a) = \log_e \dfrac{1-a}{1+a}$

ਹੁਣ $x = b$ ਰੱਖਣ ਤੇ, $f(b) = \log_e \dfrac{1-b}{1+b}$

$$\therefore \quad f(a) + f(b) = \log_e \frac{1-a}{1+a} + \log_e \frac{1-b}{1-b} = \log_e \left\{\frac{1-a}{1+a} \times \frac{1-b}{1-b}\right\}$$

$$= \log_e \left\{\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}\right\} = \log_e \left\{\frac{(1+ab)-(a+b)}{(1+ab)+(a+b)}\right\}$$

$$= \log_e \left\{\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}\right\} = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਜੇਕਰ $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ** $\dfrac{f(a)-f(b)}{1-f(a).f(b)} = \dfrac{a-b}{a+b}$.

ਹੱਲ : $\because$ $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

$$\therefore \quad \frac{f(a)-f(b)}{1-f(a)f(b)} = \frac{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)-\left(\dfrac{b-1}{b+1}\right)}{1-\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)\times\left(\dfrac{b-1}{b+1}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{(a-1)(b+1)-(b-1)(a+1)}{(a+1)(b+1)}}{1-\dfrac{(a-1)(b-1)}{(a+1)(b+1)}}$$

$$= \frac{(a-1)(b+1)-(b-1)(a+1)}{(a+1)(b+1)-(a-1)(b-1)}$$

$$= \frac{ab+a-b-1-ba-b+a+1}{(ab+a+b+1)-(ab-a-b+1)}$$

$$= \frac{2(a-b)}{2(a+b)} = \frac{a-b}{a+b}$$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਜੇਕਰ ਡੋਮੇਨ (ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ) = {–2, –1, 0, 1, 2} ਅਤੇ $f(-2) = 4, f(-1) = 1, f(0) = 0$ $f(1) = 1, f(2) = 4$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ f ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪਰਾਸ (Range) ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਡੋਮੇਨ (ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ)

ਨੋਟ

$$= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ,

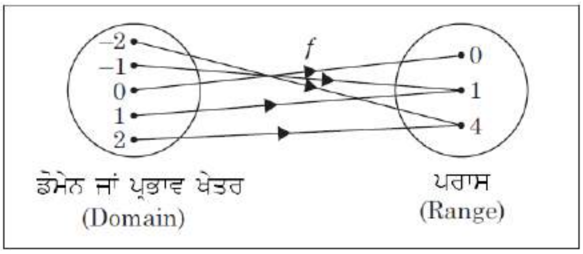
$f(-2) = 4 \Rightarrow -2$ ਦਾ f-ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ $= 4$

$f(-1) = 1 \Rightarrow -1$ ਦਾ f-ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ $= 1$

$f(0) = 0 \Rightarrow 0$ ਦਾ f-ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ $= 0$

$f(1) = 1 \Rightarrow 1$ ਦਾ f-ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ $= 1$

$f(2) = 4 \Rightarrow 2$ ਦਾ f-ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ $= 4$



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਨਿਮਨ ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

ਕਿਉਂਜੋ f ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਅਵਯਵ, ਸਮੁੱਚ $\{0, 1, 4\}$ ਦੇ ਕਿਸੀ ਵਿਲੱਖਣ ਅਵਯਵ ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ (connected) ਹਤੇ ਅਤੇ ਸਮੁੱਚ $\{0, 1, 4\}$ ਦੇ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਅਵਯਵ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਅਵਯਵ ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਇੱਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਸੂਤਰ $f(x) = x^2$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪਰਾਸ = $\{0, 1, 4\}$. ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਜੇਕਰ $f(x) = 1 + 2x$ ਅਤੇ $g(x) = \frac{1}{2}x$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $f\{g(x)\} - g\{f(x)\}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $f(x) = 1 + 2x$ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $g(x)$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$f\{g(x) = 1 + 2g(x) = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) = 1 + x$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $g(x) = \frac{1}{2}x$ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $f(x)$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$g\{f(x)\} = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2}(1 + 2x) = \frac{1}{2} + x$$

$$\therefore \quad f\{g(x)\} - g\{f(x)\} = (1 + x) - \left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2}.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਜੇਕਰ ਫਲਨ $f : R \to R$ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{ਜੇਕਰ } x > 3 \\ x^2 - 2, & \text{ਜੇਕਰ } 2 \le x \le 3 \\ 2x + 3, & \text{ਜੇਕਰ } x < -2 \end{cases}$$

ਤਾਂ $f(2), f(4), f(-1)$ ਅਤੇ $f(-3)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਨੋਟ

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਜੋ 2 ਅੰਤਰਾਲ (–2, 3) ਵਿੱਚ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ $f(x) = x^2 - 2$

$$\therefore \qquad f(2) = (2)^2 - 2 = 2$$

ਕਿਉਂਜੋ 4 ਅੰਤਰਾਲ $(1, \infty)$ ਵਿੱਚ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ $f(x) = 3x - 1$.

$$\therefore \qquad f(4) = 3.4 - 1 = 11.$$

ਕਿਉਂਜੋ –1 ਅੰਤਰਾਲ (–2, 3) ਵਿੱਚ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸਦੇ ਲਈ $f(x) = x^2 - 2$.

$$\therefore \qquad f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1.$$

ਕਿਉਂਜੋ –3 ਅੰਤਰਾਲ $(-\infty, -2)$ ਵਿੱਚ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸਦੇ ਲਈ $f(x) = 2x + 3$.

$$f(-3) = 2(-3) + 3 = -3.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਫਲਨ $\sqrt{(x-2)(4-x)}$ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨਿਆ

$$f(x) = \sqrt{(x-2)(4-x)}$$

ਜਦੋਂ $x > 4$, ਤਾਂ $f(x) = \sqrt{\text{ਰਿਣਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ}}$

= ਕਾਲਪਨਿਕ ਰਾਸ਼ੀ

ਜਦੋਂ $x < 2$, ਤਾਂ $f(x) = \sqrt{\text{ਰਿਣਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ}}$ = ਕਾਲਪਨਿਕ ਰਾਸ਼ੀ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2 \le x \le 4$ ਦੇ ਲਈ ਹੀ $f(x)$ ਅਸਲ ਹੈ।

$\therefore$ $\sqrt{(x-2)(4-x)}$ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $2 \le x \le 4$. **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਜੇਕਰ $f : x \to x + 3$ ਅਤੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = {$x : -2 \le x \le 2$, x ਪੂਰਣ ਅੰਕ ਹੈ} ਤਾਂ ਫਲਨ f ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਪਰਾਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

f ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = {$x : -2 \le x \le 2$, x ਪੂਰਣਅੰਕ}

$= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

f ਦੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਅਵਯਵ f ਫਲਨ ਦੁਆਰਾ $x + 3$ ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

ਅਵਯਵ –2 ਫਲਨ f ਦੁਆਰਾ –2 + 3 = 1 ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੈ।

ਅਵਯਵ –1 ਫਲਨ f ਦੁਆਰਾ –1 + 3 = 2 ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੈ।

ਅਵਯਵ 0 ਫਲਨ f ਦੁਆਰਾ 0 + 3 = 3 ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੈ।

ਅਵਯਵ 1 ਫਲਨ f ਦੁਆਰਾ 1 + 3 = 4 ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੈ।

ਅਵਯਵ 2 ਫਲਨ f ਦੁਆਰਾ 2 + 3 = 5 ਨਾਲ ਗੁਣਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਪਰਾਸ = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

ਅਤੇ ਫਲਨ $f = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ

1. ਜੇਕਰ $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
2. ਜੇਕਰ $f(n) = \dfrac{n}{1+n}$ ਤਾਂ $f(n) + f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। **[ਉੱਤਰ: 1]**
3. ਜੇਕਰ $f(x) = \log_e x$ ਤਾਂ $f(1)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। **[ਉੱਤਰ: 0]**

4. ਫਲਨ $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ ਦਾ ਡੋਮੇਨ (domain) ਅਤੇ ਪਰਿਸਰ (range) ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਫਲਨ ਇਕਾਕੀ ਹੈ? **[ਉੱਤਰ: R]**

5. ਜੇਕਰ $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ਤਾਂ $\dfrac{f\left(\dfrac{a}{b}\right)}{f\left(\dfrac{b}{a}\right)}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। **[ਉੱਤਰ: (-*a/b*))]**

6. ਜੇਕਰ $y = f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋਂ ਕਿ $x = f(y)$. **[ਉੱਤਰ: (-*a/b*))]**

7. ਜੇਕਰ $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x+3}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x).\, f(-x) = 1.$

8. ਜੇਕਰ $f(x) = e^x$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x+y+z) = f(x).\, f(y).\, f(z).$

9. ਜੇਕਰ $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ਤਾਂ $f(-1)$ ਅਤੇ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। **[ਉੱਤਰ:** $2, \left(\dfrac{1}{x^2} + x^2\right)$

10. ਜੇਕਰ $f(x) = x^9 - 6x^8 - 2x^7 + 12x^6 + x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 3$ ਤਾਂ $f(6)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

[ਉੱਤਰ: 30]

11. x ਦੇ ਕਿਨ੍ਹਾਂ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਨਿਮਨ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ?

(*a*) $\dfrac{1}{x-3}$ (*b*) $\dfrac{1}{x^3-1}$ (*c*) $\dfrac{x^3-4}{x-2}$

(*d*) $\tan x$ (*e*) $\sqrt{x}$ (*f*) $\dfrac{a^x-1}{x}$

12. ਜੇਕਰ $f(x) = 3x^2 + 2$ ਅਤੇ $g(x) = 2x + 5$, ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

(*a*) $(f+g)(0)$, $(f+g)(-2)$ (*b*) $(f-g)(3)$, $(f-g)(-1)$

(*c*) $(fg)\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $(fg)(1)$ (*d*) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-1)$

13. ਜੇਕਰ $A = \{a, b, c, -1\}$ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੰਬੰਧਤ 'A ਦਾ A ਵਿੱਚ' ਫਲਨ ਹੈ। ਕਾਰਨ ਵੀ ਦੱਸੋ:

(*a*) $R_1 = \{(-1, c), (c, b), (a, b), (-1, -1)\}$
(*b*) $R_2 = \{(a, b), (b, c), (c, -1), (-1, a)\}$

14. ਜੇਕਰ $f : R \to R$ ਜਿੱਥੇ $f(x) = \begin{cases} 2x+5, x > 9 \\ x^2 - 1, x \in (-9, 9) \\ x - 4, x < -9 \end{cases}$

ਤਾਂ $f(3), f(12), f(-15)$ ਅਤੇ $f\{f(5)\}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਜੇਕਰ $g : R \to R$ ਜਿੱਥੇ $g(x) \begin{cases} x^2 - x, x \geq 2 \\ x - 2, x < 2 \end{cases}$ **[ਉੱਤਰ: 20, −2, −4]**

ਵਿੱਚ $g(5), g(0)$ ਅਤੇ $g(-2)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3, ਜਦੋਂ $-3 \leq x < -1$

16. ਜੇਕਰ $f(x) = \begin{cases} -6x - 3, \text{ ਜਦੋਂਕਿ } -1 \le x \le 0, \text{ ਤਾਂ} \\ 3x - 3, \text{ ਜਦੋਂਕਿ } 0 < x \le 1 \end{cases}$

(*a*) ਫਲਨ f ਦਾ ਡੋਮੇਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(*b*) $f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(0), f(-1), f(2)$ ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(*c*) ਸਮੀਕਰਣ $2f(x) + 3 = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਉੱਤਰ:

(*a*) $D = \{x : -3 \le x \le 1\}$ (*b*) 3, –3/2, –3, 3 (*c*) $x = -1/4$ & 1/2

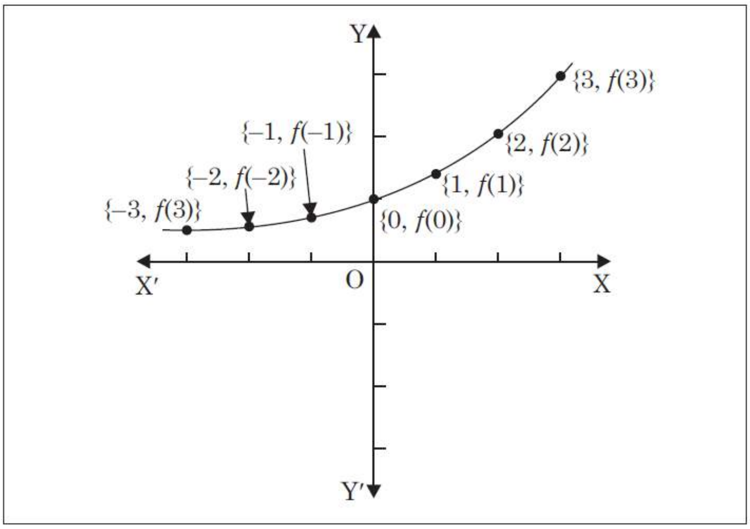
1.12 ਫਲਨ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ (Graph of Functions)

ਜੇਕਰ $y = f(x)$, x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਨੂੰ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ਆਦਿ ਮਾਨ ਦੇਣ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$ ਜਾਂ $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ ਆਦਿ ਹੋਣਗੇ। ਜੇਕਰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਾਂਕ ਜਯਾਮਿਤੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ x-ਅਕਸ਼ ਤੇ x ਅਤੇ y- ਅਕਸ਼ ਤੇ y ਭਾਵ $f(x)$ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਕੇ ਬਿੰਦੂਆਂ $[x_1, f(x_1)\}, \{x_2, f(x_2)\}, \ldots, \{x_n, f(x_n)\}, \ldots$ ਆਦਿ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਕੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਕੋਣ ਵਕਰ (Smooth curve) ਬਣਾ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹੀ ਵਕਰ **ਫਲਨ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਫਲਨ $y = f(x)$ ਦਾ ਲੇਖਾਂਕਨ ਖਿੱਚਣ ਦੇ ਲਈ x ਦੇ ਕੁੱਝ ਚੁਣੇ ਹੋਏ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ y ਭਾਵ $f(x)$ ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨ ਸਾਰਨੀ ਬਣਾ ਲਿਓ–

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

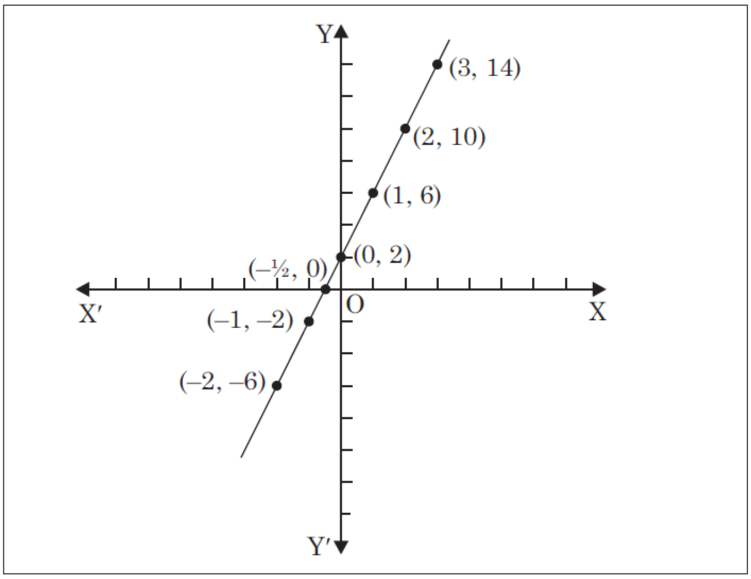
ਹੁਣ ਬਿੰਦੂਆਂ $\{-3, f(-3)\}, \{-2, f(-2)\}, \{-1, f(-1)\}, \{0, f(0)\}, \{1, f(1)\}, \{2, f(2)\}, \{3, f(3)\}$ ਆਦਿ ਨੂੰ ਵਰਗੀਕਰਤ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਤੇ ਦਰਸਾ ਕੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਕੋਣ ਵਰਗ ਬਣਾਓ। ਇਹੀ ਵਕਰ ਫਲਨ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ



ਉਦਾਹਰਣ 1. ਫਲਨ $y = 4x + 2$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚੋ।

ਹੱਲ: x ਨੂੰ ਵਿਭਿੰਨ ਮਾਨ ਦੇ ਕੇ y ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਤੇ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਬਣੇਗੀ:

x	-2	-1	0	1	2	3	$-\frac{1}{2}$
y	-6	-2	$+2$	6	10	14	0

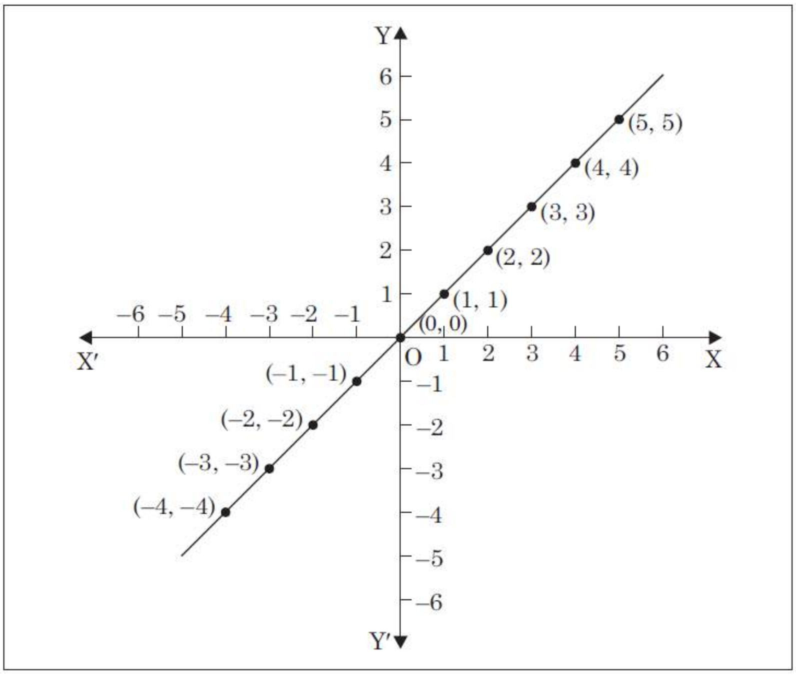


ਹੁਣ x-ਅਕਸ਼ ਤੇ 1 ਖਾਨਾ = 1 ਅਤੇ y-ਅਕਸ਼ ਤੇ 1 ਖਾਨਾ = 2 ਮੰਨ ਕੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ। ਇਹੀ ਅਭੀਸ਼ਟ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਫਲਨ $y = x$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

ਹੱਲ: $y = x$ ਦੇ ਲਈ ਸਾਰਣੀ

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5



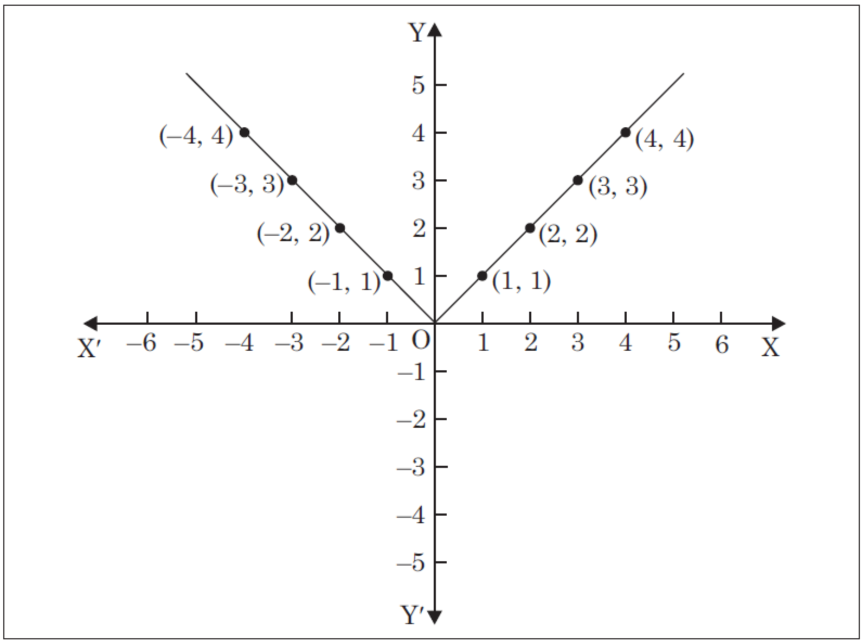
ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਫਲਨ $y = |x|$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

ਹੱਲ: ਇੱਥੇ $y = x$, ਜੇਕਰ $x \geq 0$ ਅਤੇ $y = -x$, ਜੇਕਰ $x < 0$.

$y = |x|$ ਦੇ ਲਈ ਸਾਰਣੀ

x	4	3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	1	2	3	4



ਉਦਾਹਰਣ 4. ਫਲਨ $y = \dfrac{|x|}{x}$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ, ਜੇਕਰ $x \neq 0$.

ਹੱਲ: ਇਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਸਿਗਨਮ (signum) ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

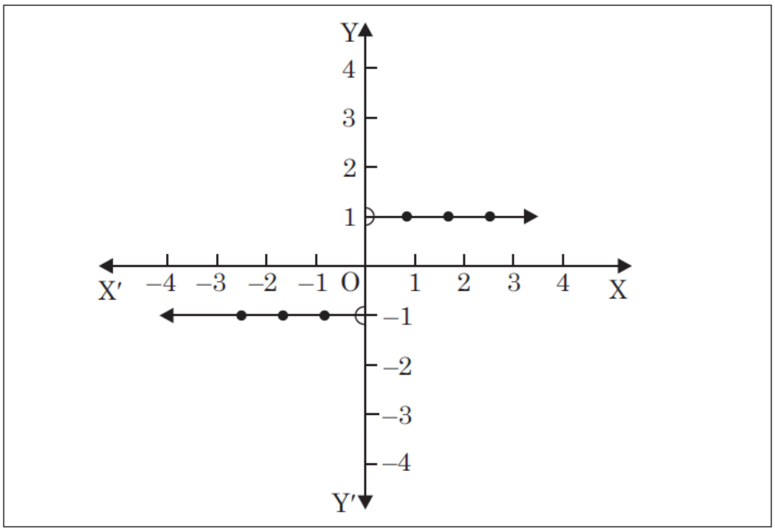
$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ਜੇਕਰ } x > 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \\ -1, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \end{cases}$$

ਫਲਨ $y = \dfrac{|x|}{x}$ ਦੀ ਸਾਰਣੀ

x	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4
y	–1	–1	–1	–1	1	1	1	1

ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਪਾਰਸ਼ਵ ਚਿੱਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਨੋਟ



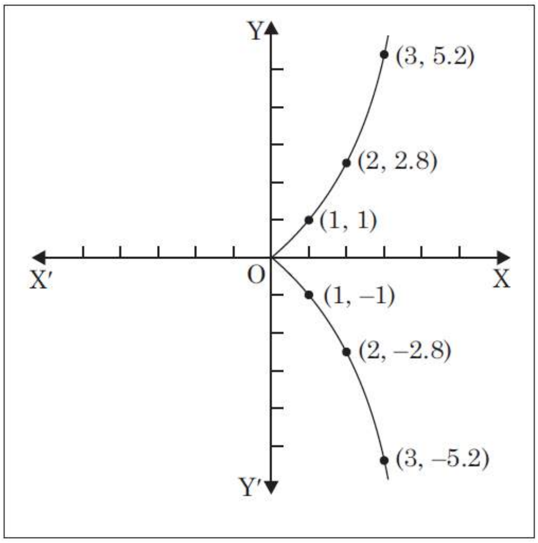
ਉਦਾਹਰਣ 5. ਵਕਰ $y^2 = x^3$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

ਹੱਲ: ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ x ਦਾ ਰਿਣ ਹੈ ਤਾਂ y ਦਾ ਮਾਨ ਅਧਿਕਲਪਿਤ (imaginary) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ x ਦੇ ਧਨ ਮਾਨ ਹੀ ਲਿਆਂਗੇ।

$y^2 = x^3$ ਦੀ ਸਾਰਣੀ

x	0	1	2	3	4
y	0	±1	±2.8	±5.2	±8

ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਪਾਰਸ਼ਵ ਚਿੱਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੈ।



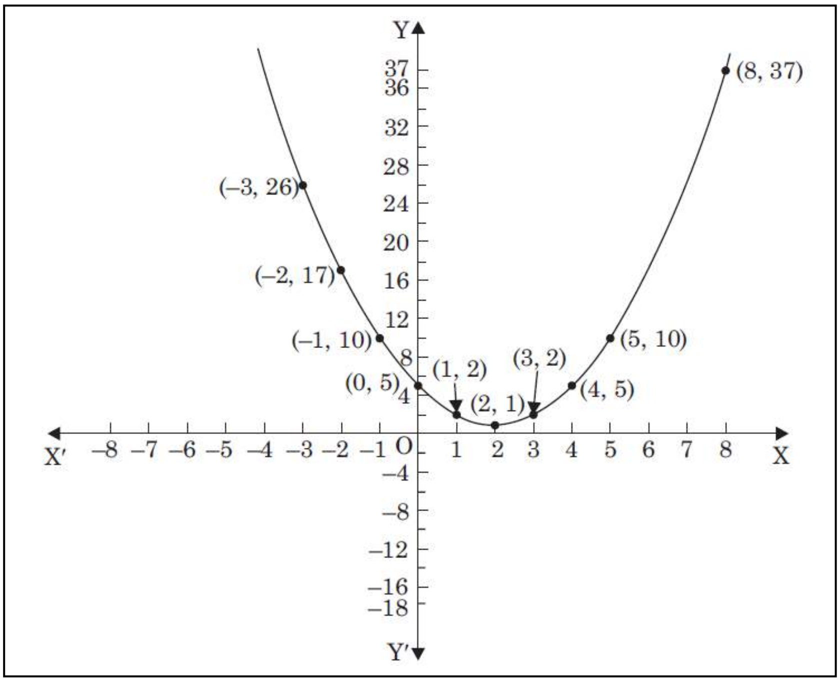
ਉਦਾਹਰਣ 6. ਫਲਨ $y = x^2 - 4x + 5$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

ਹੱਲ: ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਓ

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	8
y	37	26	17	10	5	2	1	2	5	10	37

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮਾਨ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਉਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ y ਦਾ ਮਾਨ ਵੀ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x \to \infty, y \to \infty$ ਜਦੋਂ $x \to -\infty, y \to +\infty$ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਨਿਮਨ ਅੰਕਿਤ ਨਿਸ਼ਕੋਣ ਵਕਰ ਬਣੇਗਾ–

ਨੋਟ



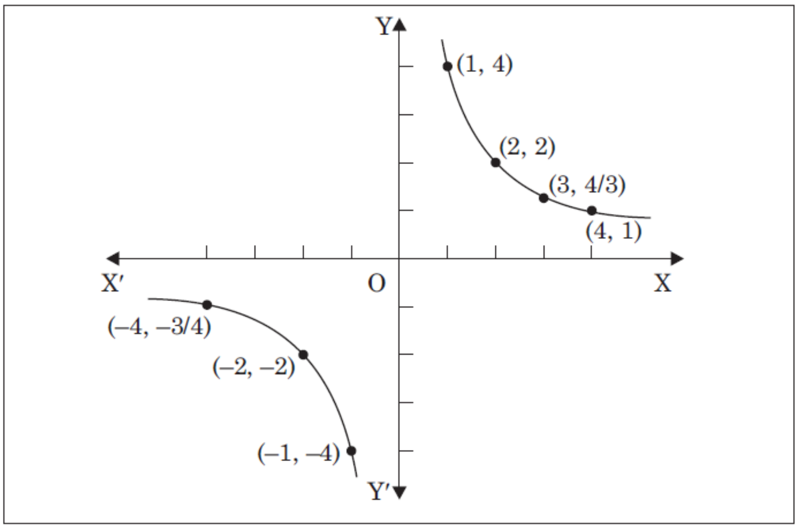
ਉਦਾਹਰਣ 7. ਵਕਰ $xy = 4$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $y = \dfrac{4}{x}$, ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x \to 0, y \to \infty$

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x \to \infty, y \to 0$.

$xy = 4$ **ਦੀ ਸਾਰਣੀ**

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	∞
x	0	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	∞	4	2	$\frac{4}{3}$	1	0



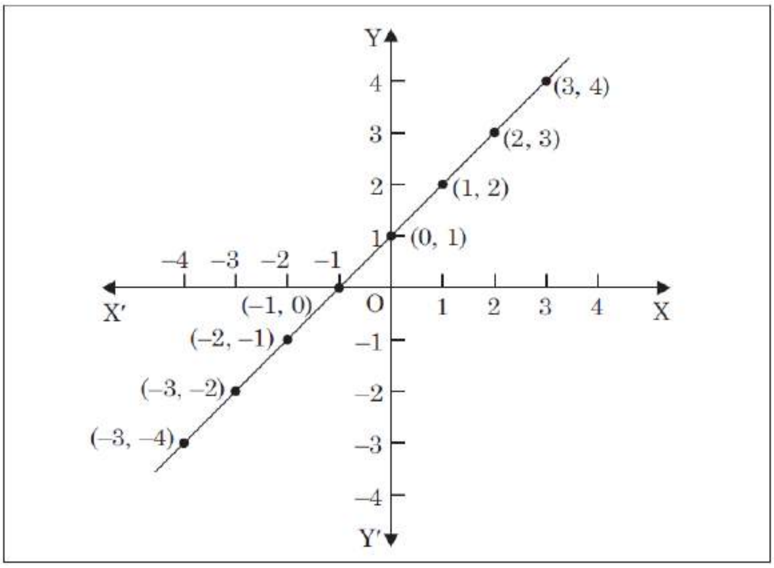
ਉਦਾਹਰਣ 8. ਫਲਨ $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

ਹੱਲ : ਇਹ ਫਲਨ $x = 1$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $y = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = (x+1), (x \neq 1)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਫਲਨ $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ਦੀ ਸਾਰਣੀ

x	0	1	2	3	–1	–2	–3	–4
y	1	2	3	4	0	–1	–2	–3

ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਪਾਰਸ਼ਵ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਉਦਾਹਰਣ 9. ਫਲਨ $y = \frac{1}{1 - x}$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

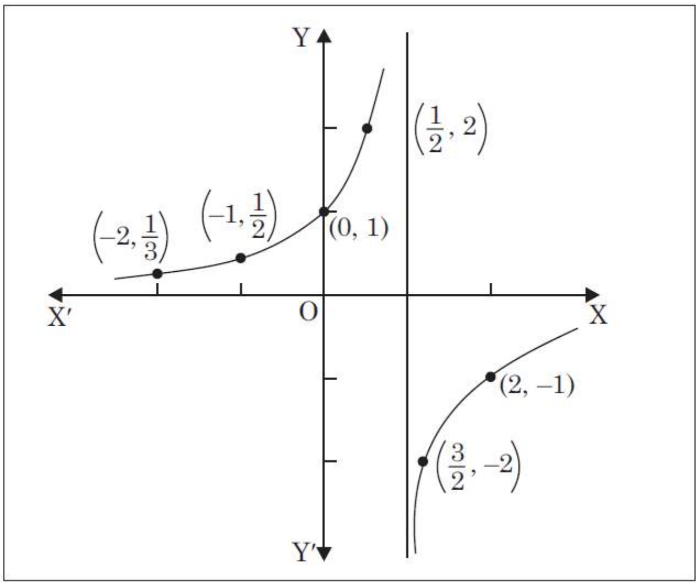
ਹੱਲ : x ਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮਾਨ ਦੇ ਕੇ y ਦੇ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਬਣਦੀ ਹੈ-

ਫਲਨ $y = \frac{1}{1 - x}$ ਦੀ ਸਾਰਣੀ

x	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	∞	–2	–1

ਨੋਟ

ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਪਾਰਸ਼ਵ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



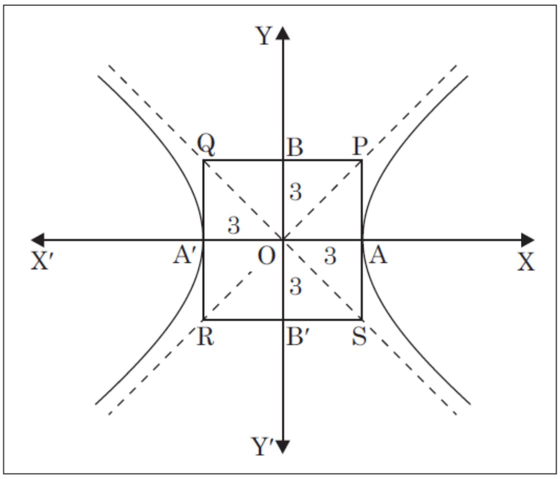
ਉਦਾਹਰਣ 10. ਵਕਰ $x^2 - y^2 = 9$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵਕਰ ਨਿਮਨ ਹੈ–

$$x^2 - y^2 = 9$$

ਜਾਂ $$(x^2/9) - (y^2/9) = 1$$

ਜਿਹੜਾ $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਇੱਕ **ਅਤਿਪਰਵਲ** (hyperbola) ਹੈ।



ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ,

$$a^2 = 9 \text{ ਅਤੇ } b^2 = 9$$

$\Rightarrow$ $$a = \pm 3 \text{ ਅਤੇ } b = \pm 3$$

$\therefore$ ਅਰਧ–ਅਨੁਪ੍ਰਸਥ ਅਕਸ਼ $= a = 3$

ਅਤੇ ਅਰਧ–ਸੰਯੁਗਮੀ ਅਕਸ਼ $= b = 3$

ਹੁਣ x-ਅਕਸ਼ ਤੇ $OA = OA' = 3$

ਅਤੇ y-ਅਕਸ਼ ਤੇ $OB = OB' = 3$

ਦੂਰੀਆਂ ਲੈ ਕੇ ਵਰਗ ***PQRS*** ਬਣਾਇਆ।

1.13 ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਰੇਖਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ (Use of Linear Functions in Economics)

ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਰੇਖਿਕ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗ ਹੈ। ਬਾਜਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ, ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਾਮਯਾਵਸਥਾ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਅਜਿਹੀ ਕੀਮਤ ਅਤੇ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ ਮਾਲ ਬੇਚਣ ਅਤੇ ਖਰੀਦਣ ਵਾਲੇ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਣ।

ਨੋਟ

ਮੰਨਿਆ ਕਿ ਮੰਗ ਫਲਨ, $q = 16 - 4p$ ਹੈ ....(*i*)

ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ, $q = -8 + 4p$ ਹੈ ...(*ii*)

ਜਿੱਥੇ, q ਵਸਤੂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਅਤੇ p ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ q ਅਤੇ p ਦਾ ਅਜਿਹਾ ਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹੜਾ ਸਮੀਕਰਣ (*i*) ਅਤੇ (*ii*) ਦੋਨੋਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਦੋਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਸਾਮਯਾਵਸਥਾ ਵਿੱਚ

$$16 - 4p = -8 + 4p$$

ਜਾਂ $$8p = 24$$

ਜਾਂ $$p = \frac{24}{8} = 3$$

p ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (*i*) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$q = 16 - (4 \times 3) = 16 - 12 = 4$$

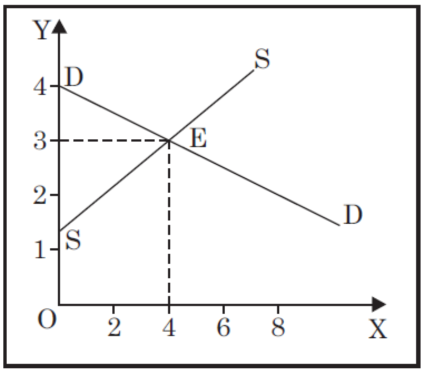
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਮਯਾਵਸਥਾ ਕੀਮਤ = 3 ਅਤੇ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 4 ਇਕਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ *X*-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਅਤੇ *Y*-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। *DD* ਮੰਗ ਫਲਨ ਅਤੇ *SS* ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਦੋਨੋਂ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ *E* ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਮਯਾਵਸਥਾ ਵੀ *E* ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ *Y* – ਭੁਜਾਂਕ ਸਾਮਯਾਵਸਥਾ ਮੁੱਲ ਅਤੇ *X*-ਭੁਜਾਂਕ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਮਾਤਰਾ ਦੱਸੇਗਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਮਯਾਵਸਥਾ ਮੁੱਲ = 3 ਅਤੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ = 4 ਹੋਵੇਗੀ।

ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ



ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਫਲਨ

(ੳ) ਪਰਵਲ (Parobola) (ਅ) ਅਤਿਪਰਵਲ (Hyperbola)

(ੲ) ਲਘੁਗਣਕ ਫਲਨ (Logarithmic Function) ਅਤੇ

(ਸ) ਘਾਤੀ ਫਲਨ (Exponential Function)।

(ੳ) ਪਰਵਲ (Parobola)**:** ਪਰਵਲ ਦਾ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ y, x ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਦੂਜੀ ਘਾਤ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ y ਨੂੰ x ਦਾ ਦੋਘਾਤੀ (quardratic) ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$y = a + bx + cx^2 \qquad ...(i)$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ x, y ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਦੂਜੀ ਘਾਤ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਨੂੰ y ਦਾ ਦੋਘਾਤੀ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ ਗਣਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਨ–

$$x = a + bx + cy^2 \qquad ...(ii)$$

ਉਪਰੋਕਤ (*i*) ਅਤੇ (*ii*) ਪਰਵਲ ਦੇ ਸਧਾਰਣ ਫਲਨੀ ਰੂਪ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਉਲੇਖਯੋਗ ਹੈ ਕਿ ਪਰਲਵ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ (*i*) xy ਦਾ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ (*ii*) x^2 ਜਾਂ y^2 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

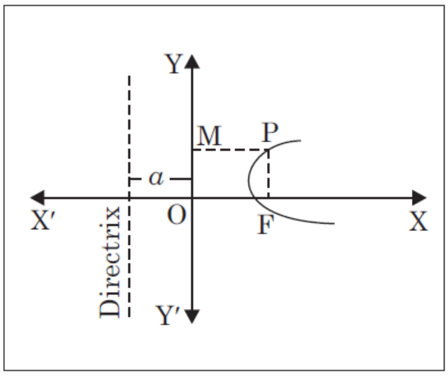
ਇੱਥੇ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਯੋਗ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੁੱਲ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ–

ਨੋਟ

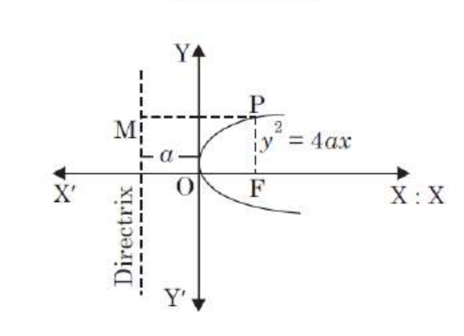
ਜੇਕਰ ਪਰਵਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $y^2 = 4ax$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਰਵਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੁੱਲ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਪਰਵਲ ਵਕਰ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਰਕ ਪਰਵਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 = 4by$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪਰਵਲ ਵਕਰ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਪਰੋਕਤ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ O ਪਰਵਲ ਦਾ ਸਿਖਰ (Vertix) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। $y^2 = 4ax$ ਪਰਵਲ ਦੇ ਲਈ OY ਅਕਸ਼ ਦੇ ਸਮਾਨ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ, ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਤੱਕ ਵਕਰ ਦੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ **ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ** (Directrix) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਕਰ $x^2 = 4by$ ਦੇ ਲਈ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ OX ਦੇ ਸਮਾਨ ਸਿਖਰ b ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

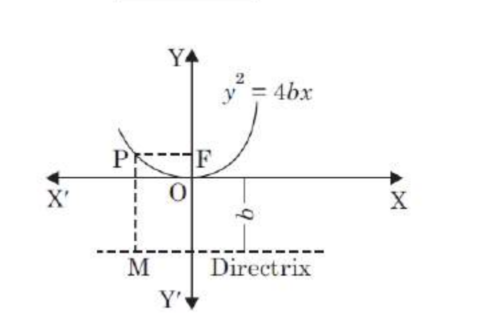
ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ



ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ



ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ



ਉਹ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਜਿਹੜੀ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਪਰਵਲ ਦਾ ਅਕਸ਼ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਅਕਸ਼ ਪਰਵਲ ਨੂੰ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਸਮਾਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ a ਜਾਂ b ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਪਰਵਲ ਨੂੰ ਫੋਕਸ (Focus) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਪਰਵਲ ਦਾ ਇਹ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਗੁਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਉੱਤੇ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਫੋਕਸ ਅਤੇ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ਅ) ਅਤਿਪਰਵਲ (Hyperbola) **:** ਪਰਵਲ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਤਿਪਰਵਲ ਫਲਨ ਦਾ ਵੀ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗ ਹੈ। ਅਤਿਪਰਵਲ ਫਲਨ ਨੂੰ ਗਣਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (ਜਿੱਥੇ } a, b \text{ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹਨ)}$$

ਜਾਂ
$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}$$

ਉਦੋਂ
$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right)$$

ਜਾਂ
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{\left(x^2 - a^2\right)}$$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਅਨੁਰੇਖਣ ਕਰੀਏ ਤਾਂ

(i) ਜਦੋਂ $x = \pm a, y = 0$

(ii) $x > |a|$, ਅੰਕਿਆ ਮੰਨਿਆ ਕਿ $a = b = 3$

ਉਦੋਂ $$y = \pm\sqrt{(x^2 - 9)}$$

(iii) ਜੇਕਰ $x < 2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ y ਦਾ ਮਾਨ ਕਾਲਪਨਿਕ ਹੋਵੇਗਾ, ਪਰੰਤੂ x ਦੇ ਦੂਜੇ ਮੂਲਾਂ ਦੇ ਲਈ y ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੂਲ ਕੱਢੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ-

***x* ਦਾ ਮੁੱਲ**	***y* ਦਾ ਮੁੱਲ**
+ 2 ਜਾਂ –2	0 ਜਾਂ 0
+ 3 ਜਾਂ –3	$+\sqrt{5}$ ਜਾਂ $-\sqrt{5}$
+ 4 ਜਾਂ –4	$+\sqrt{12}$ ਜਾਂ $-\sqrt{12}$

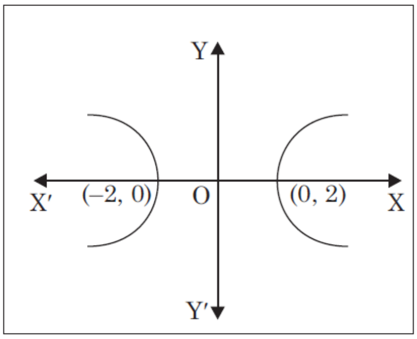
ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਅਤਿਪਰਲਵ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਹੈ ਤਾਂ ਅਤਿਪਰਵਲ ਵਕਰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ-

ਜੇਕਰ ਕੇਂਦਰ-ਬਿੰਦੂ (h, k) ਹੈ ਤਾਂ ਅਤਿਪਰਲਵ ਵਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ-

$$\frac{(x - h^2)}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

ਸਧਾਰਣ ਤੌਰ ਤੇ ਅਤਿਪਰਲਵ ਫਲਨ ਨੂੰ $xy = a$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ $a > 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ (*i*)



(ੲ) ਲਘੁਗਣਕ ਫਲਨ (Logarithmic Function) : ਜਦੋਂ y, x ਦਾ ਫਲਨ ਨਾ ਹੋ ਕੇ $\log x$ ਦਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਲਘੁਗਣਕ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਲਘੁਗਣਕ ਫਲਨ ਦਾ ਸਧਾਰਣ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ-

$$y = \alpha + \beta \log x$$

ਇੱਥੇ $\alpha = 0$ ਅਤੇ $\beta = 1$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ $y = \log x$ ਮਾਤਰ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਮੰਨਿਆ ਕਿ ਲਘੁਗਣਕ ਸਮੀਕਰਣ $y = 5 + 5 \log_{10}x$ ਹੋਵੇ (ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ $\alpha = 5$, $\beta = 5$ ਮੰਨਿਆ ਹੈ)

ਤਾਂ
$$y = -5 + 5 \times 0 = -5 \qquad (\text{ਜੇਕਰ } x = 1)$$
$$y = -5 + 5 \times 1 = 0 \qquad (\text{ਜੇਕਰ } x = 10)$$
$$y = -5 + 5 \times 2 = 5 \qquad (\text{ਜੇਕਰ } x = 100)$$
$$y = -5 + 5 \times 3 = 10 \qquad (\text{ਜੇਕਰ } x = 1000)$$

ਇਸ ਦਾ ਵਕਰ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ (*i*) ਦੇ ਅੱਗੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ-

ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਯੋਗ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ x ਦਾ ਮਾਨ 0 ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਲਘੁਣਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਬਹੁਧਾ log ਦਾ ਅਧਾਰ e ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਦੋ-ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਦਾ ਸਧਾਰਣ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ–

$$\log y = \alpha + \beta \log x$$

ਜਾਂ $$\log y = \alpha \log x^{\beta}$$

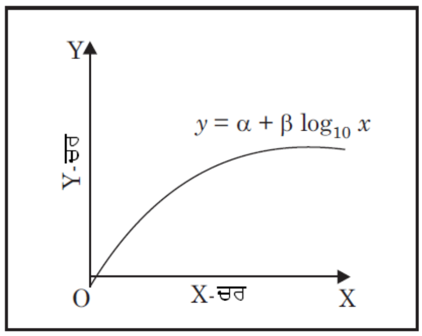
$$\log y - \log x^{\beta} = \alpha$$

ਜਾਂ $$\log \frac{y}{x^{\beta}} = \alpha$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{y}{x^{\beta}} = e^{\alpha}$$

$$\therefore \quad y = e^{\alpha} x^{\beta} = Ax^{\beta}$$

ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ(*ii*)



(ਜਦੋਂ ਕਿ $A = e^{x}$)

ਇਸ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਹਨ–

(i) ਜੇਕਰ $\beta = 1$ ਉਦੋਂ $y = \frac{A}{x}$ ਜਾਂ $xy = A$

(ਉਦੋਂ ਇਹ ਆਇਤ ਪਰਵਲ ਹੋ ਜਾਏਗਾ)

(ii) ਜੇਕਰ $\beta < 1$ ਹੈ ਤਾਂ x ਦੇ ਵਧਣ ਦੇ ਨਾਲ y ਵੱਧਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ $0 < \beta < 1$ ਹੈ ਤਾਂ x ਦੇ ਵਧਣ ਦੇ ਨਾਲ y ਘਟਦੀ ਦਰ ਤੋਂ ਵੱਧਦਾ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ $\beta < 0$ ਹੈ ਤਾਂ x ਵਧਣ ਦੇ ਨਾਲ y ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇਹ ਉਲੇਖਯੋਗ ਹੈ ਕਿ ਘਨਾਤਮਕ ਘਾਤ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਘਾਤ ਮੰਗ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿੱਚ ਉਚਿਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤਾਂਕ ਸਥਿਰ ਲੋਚ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

(ਸ) ਘਾਤੀ ਫਲਨ (Exponential Function) : ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਵੀ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਵਿੱਚ y, x ਦਾ ਫਲਨ ਨਾ ਹੋ ਕੇ x ਦੇ ਘਾਤੀ ਦਾ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

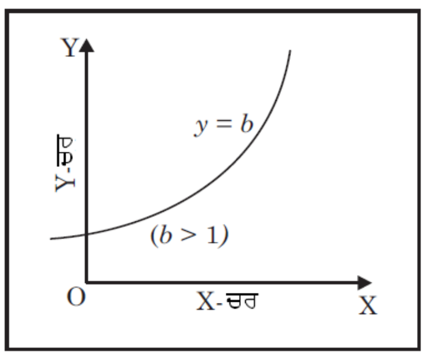
$$y = \log_e x,\ y = e^{x},\ y = e^{\sin x}$$

ਆਦਿ

ਜੇਕਰ ਸਾਡੀ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $y = b^{x}$ ਹੋਵੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ $b > 1$ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਵਕਰ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ–

ਮੰਨਿਆ ਘਾਤੀ ਫਲਨ $x = A\ B^{y}$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਲਘੂਗਣਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾ ਸਕਦਾ ਹਾਂ–

ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ



$$\log x = \log A + y \log B$$

$$\therefore \quad y \log B = \log x - \log A$$

ਜਾਂ $$y = \frac{\log x}{\log B} - \frac{\log A}{\log B}$$

ਮੰਨਿਆ $\frac{1}{\log B} = \beta$ ਅਤੇ $-\frac{\log A}{\log B} = \alpha$ ਉਦੋਂ

$y = \alpha + \beta \log x$, ਜੋ ਕਿ ਸਾਡਾ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਹੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਮੰਨਿਆ ਕਿ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਵਕਰ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵਿਭਿੰਨ ਮੂਲਾਂ ਤੇ ਮੂਲ ਅਤੇ ਮੰਗ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਕੱਢੋ।

ਮੂਲ (*P*)	ਮੰਗ (*D*)	ਪੂਰਤੀ (*S*)
2	40	50
5	20	60

ਹੱਲ : ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਰੇਖਿਕ ਰੂਪ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

	ਮੰਗ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ	**ਪੂਰਤੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ**
1.	(40, 2)	(50, 2)
2.	(20, 5)	(60, 5)

ਮੰਨਿਆ x = ਮਾਤਰਾ ਅਤੇ y = ਮੂਲ ਹੈ ਤਾਂ (40, 2) ਅਤੇ (20, 5) ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$y \cdot y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

y_1, y_2, x_1 ਅਤੇ x_2 ਦਾ ਮੂਲ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$y - 2 = \frac{5-2}{20-40}\ (x - 40)$$

ਜਾਂ $$y - 2 = \frac{3}{-20}(x - 40)$$

ਜਾਂ $$-20(y - 2) = 3(x - 40)$$

ਜਾਂ $$-20y + 40 = 3x$$

ਜਾਂ $$3x = 160 - 20y$$

ਜਾਂ $$x = \frac{160}{3} - \frac{20}{3}y = 53.33 - 6.66y$$

ਜੇਕਰ x = ਮੰਗ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ D ਰੱਖੀਏ ਅਤੇ y = ਮੂਲ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ p ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ ਮੰਗ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋਵੇਗਾ–

$$D = 53.33 - 6.66p$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ **ਪੂਰਤੀ ਰੇਖਾ** (50, 2) ਅਤੇ (60, 5) ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਗੁਜਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋਵੇਗਾ–

$$y - 2 = \frac{5-2}{60-5}\ (x - 5)$$

ਜਾਂ $$y - 2 = \frac{3}{10}(x - 50)$$

ਜਾਂ $$10y - 20 = 3x - 150$$

$$3x = 130 + 10y$$

$$x = 13 + 3.33y$$

ਜੇਕਰ x = ਪੂਰਤੀ ਮਾਤਰਾ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ S ਅਤੇ y = ਮੂਲ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ p ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ ਪੂਰਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋਵੇਗਾ–

$$S = 13 + 3.33p$$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਵਲ ਦੇ ਫੋਕਸ ਅਤੇ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ ਪਤਾ ਕਰੋ–

(*i*) $y^2 = 16x$ **(*ii*) $x^2 = 20y$**

ਨੋਟ

ਹੱਲ : (*i*) $y^2 = 16x$ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ,

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਵਕਰ ਦੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ –4 ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ ਭਾਵ $x = -4$ ਅਤੇ ਫੋਕਸ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟ (4, 0) ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।

(*ii*) $x^2 = 4by$ ਤੋਂ $x^2 = -20y$ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ

$$b = 5$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਵਕਰ ਦੇ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ +5 ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ, ਭਾਵ $y = 5$ ਅਤੇ ਫੋਕਸ, (0, 5) ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ।

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

2. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)-

(i) ਜੇਕਰ $f : x \to y$ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੁੱਚ x ਇਸ ਫਲਨ f ਦਾ ਕੀ ਕਹਾਉਂਣਾ ਹੈ?

(*a*) ਡੋਮੇਨ (*b*) ਰੇਂਜ (*c*) ਚਰ (*d*) ਅਚਰ

(ii) ਜੇਕਰ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ y ਇੱਕ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ x ਉੱਤੇ ਆਸ਼ਿ੍ਤ ਹੈ, ਉਦੋਂ $y = f(x)$ ਕੀ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ?

(*a*) ਬਹੁਚਰੀ ਫਲਨ (*b*) ਇੱਕਚਰੀ ਫਲਨ (*c*) ਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ (*d*) ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ

(iii) ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਜਿਸਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਪੂਰਣ ਅੰਕ ਘਾਤਾਂ ਵਾਲੇ ਬੀਜਕ ਵਿਅੰਜਕ ਹੋਣ, ਕੀ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ?

(*a*) ਬੀਜਕ ਫਲਨ (*b*) ਬਿਖਮ ਫਲਨ (*c*) ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ (*d*) ਅਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ

1.14 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਤੇ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਦੂਜੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਕਈ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਅਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਅਤੇ ਅਧਿਅਨ ਨਿਖੇੜਨ ਗਣਿਤ (Differential Calculus) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ ਚਰ (Variables) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਹ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮਾਨ ਬਦਲਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਅਗਣਿਤ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮਾਨ (nummerical values) ਦਿੱਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, **ਚਰ** (Variables) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।
- ਉਹ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮਾਨ ਗਣਿਤ ਦੀ ਹਰ ਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਅਪਰਿਵਰਤਿਤ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, **ਅਚਰ** ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਫਲਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦੋ ਪਰਸਪਰ **ਸੰਬੰਧਤ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ** (Related Quantities) ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਫਲਨ $f : X \to Y$ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੁੱਚ X ਇਸ ਪ੍ਰਤਿਚਿਤਰਣ ਜਾਂ ਫਲਨ f ਦਾ **ਡੋਮੇਨ ਜਾਂ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ** (Domain) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੁੱਚ Y ਇਸਦਾ **ਪਰਾਸ** ਜਾਂ **ਰੇਂਜ** (Range) ਸਹਿ– ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ (Codomain) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ y **ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ** x ਉੱਤੇ ਆਸ਼ਿ੍ਤ ਹੈ, ਉਦੋਂ $y = f(x)$ **ਇੱਕਚਰੀ ਫਲਨ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, $y = f(\theta), s = f(t), v = f(t)$ ਆਦਿ ਇੱਕਚਰੀ ਫਲਨ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ u, **ਦੋ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ** x ਅਤੇ y ਉੱਤੇ ਆਸ਼ਿ੍ਤ ਹੈ, ਉਦੋਂ $u = f(x, y)$ **ਬਹੁਚਰੀ ਫਲਨ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਰਾਸ਼ੀ x ਦੀ ਵਿਭਿੰਨ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਘਾਤਾਂ ਵਾਲਾ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋਵੇ, **ਬੀਜਕ ਫਲਨ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਜਿਸਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਪੂਰਣ ਅੰਕ ਘਾਤਾਂ ਵਾਲੇ ਬੀਜਕ ਵਿਅੰਜਕ ਹੋਣ, **ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

- ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਰੇਖਿਕ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗ ਹੈ। ਬਾਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ, ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਾਮਯਾਵਸਥਾ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਅਜਿਹੀ ਕੀਮਤ ਅਤੇ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ ਮਾਲ ਬੇਚਣ ਅਤੇ ਖਰੀਦਣ ਵਾਲੇ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਣ। ਨੋਟ
- ਉਹ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਜਿਹੜੀ ਸਿਰਖ ਤੋਂ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਪਰਵਲ ਦਾ ਅਕਸ਼ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

1.15 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਡੋਮੇਨ (Domain)–ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ।
- ਰੇਂਜ (Range)–ਪਰਾਸ।

1.16 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰੋ–

   (*a*) $y = f(x) = 5 - 3x$; ਪਰਾਸ $x = -2$ ਤੋਂ $x = 5$ ਦੇ ਲਈ।

   (*b*) $y = f(x) = 2x^2 - 5x + 1$; ਪਰਾਸ $x = -5$ ਤੋਂ $x = 7$ ਦੇ ਲਈ।

   (*c*) $y = f(x) = \dfrac{24}{x}$ ਪਰਾਸ $x = 1$ ਤੋਂ $x = 9$ ਦੇ ਲਈ

2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਣੀ ਦੁਆਰਾ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਮੂਲ	ਮੰਗ	ਪੂਰਤੀ
1	100	50
2	50	75
3	0	100

3. ਕਿਸੀ ਬਾਜ਼ਾਰ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸਾਮਯ ਮੂਲ ਤੇ ਮਾਤਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ–

   (*i*) $D = 15 - 3p$; $S = - 10 + 2p$

   (*ii*) $D = 12 - 2p$; $S = -20 - 4p$

   (*iii*) $D = 50 - 4p$; $S = 2 + 10p - p^2$

4. ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ–

   $D = 100 - 10p \quad S = -12 + 9p$

5. ਪਰਵਲ ਦਾ ਸਿਖਰ, ਫੋਕਸ ਅਤੇ ਡਾਇਰੇਕਟ੍ਰਿਕਸ ਪਤਾ ਕਰੋ–

   (*i*) $y = x^2 + 3x - 2$ ਸੰਕੇਤ– $y = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{17}{4}$

   (*ii*) $(x - 2)^2 = 4y - 16$

6. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ $y = 5_L{}^{.5}K^{.5}$ ਵਿੱਚ L ਅਤੇ K ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਪਾਤਕਾਲ ਵਿੱਚ ਪੂੰਜੀ ਸਥਿਰ ਹੈ ਅਤੇ $K = 100$ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਰੇਖਣ ਕਰੋ। ਔਸਤ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਉਤਪਾਦ (Y/L) ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਵਕਰ ਦਾ ਅਨੁਰੇਖ ਕਰੋ।

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. (*i*) ਚਰ (*ii*) ਅਚਰ (*iii*) ਸੰਬੰਧ (*iv*) ਤਿਰਜਯਾ (*v*) ਨਿਰਪੇਖ
2. (*i*) (*a*) (*ii*) (*b*) (*iii*) (*c*)

ਨੋਟ

1.17 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ।*
2. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਨਟਿਸ ਹੋਲ ਪਬਲਿ.।*
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ।*
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ।*
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ।*
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ।*
7. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਨਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ।*
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ।*

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–2: ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ
(Limits and Continuity)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸਾਨੀ ਹੋਵੇਗੀ।
- ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

- ਸੀਮਾਵਾਂ ਉੱਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਤੇ ਉਸ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਣਗੇ।
- ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਜਾਣ ਸਕਣਗੇ।
- ਜਯਾਮਿਤੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਲਈ।
- ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਉਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ।
- ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਉੱਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਤੇ ਉਸ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸਾਨੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਜਯਾਮਿਤੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ (Geometrical Series) ਦੇ ਯੋਗ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ–

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$$ ਅਨੰਤ ਤੱਕ।

1 ਪਦ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .5

2 ਪਦਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .75

3 ਪਦਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .875

4 ਪਦਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .9375

5 ਪਦਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .96875

6 ਪਦਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .984375

7 ਪਦਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .9921875

8 ਪਦਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .99609375

9 ਪਦਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .998046875

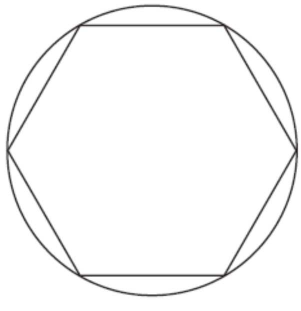
10 ਪਦਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ = .9990234375

.... = ...

ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਉਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਯੋਗਫਲ 1 ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਭਾਵੇਂ ਯੋਗਫਲ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਪਾਉਂਦਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਦਾਂ ਦੀ ਉਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਲੈ ਕੇ ਯੋਗਫਲ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਜਿੰਨਾ ਚਾਹੀਏ ਉਨਾ ਘੱਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

2. ਮਾਨ ਲਿਓ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਤਰਿਜਯਾ ਦੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਇੱਕ ਸਮ-ਬਹੁਭੁਜ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਯਾਮਿਤੀ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ



(*i*) ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਗੋਲੇ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਭਾਵੇਂ ਬਹੁਭੁਜ ਵਿੱਚ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੀ ਵੱਧ ਕਿਉਂ ਨਾ ਹੋਵੇ।

(*ii*) ਬਹੁਭੁਜ ਵਿੱਚ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਪਰਿਮਿਤ ਰੂਪ ਤੋਂ ਵਧਾਉਣ ਤੇ **ਅਸੀਂ ਗੋਲੇ ਅਤੇ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਜਿੰਨਾ ਚਾਹੀਏ ਘੱਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।**

ਕੈਲਕੁਲਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਹਿਕੇ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਜਦੋਂਕਿ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਪਰਿਮਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ (ਜਾਂ ਅਨੰਤ ਵੱਲ ਪ੍ਰਵਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ), ਗੋਲੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

$\lim_{n\to\infty}$ (ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ) = ਗੋਲੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ।

3. ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਸੀਮਾ (Limit of a Sequence)–ਕ੍ਰਮ

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots$$

ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $s_n = \frac{1}{n}$, ਜਿੱਥੇ s_n ਕ੍ਰਮ ਦਾ n ਵਾਂ ਪਦ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ n ਦਾ ਮਾਨ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਵੱਧਦਾ ਹੈ $\frac{1}{n}$ ਦਾ ਮਾਨ ਉਵੇਂ-ਉਵੇਂ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ n ਨੂੰ ਉਚਿਤ ਵੱਡ ਚੁਣ ਕੇ, $\frac{1}{n}$ ਨੂੰ ਜਿੰਨਾ ਚਾਹੀਏ ਉਨਾ ਛੋਟਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ $n > 10{,}000$ ਤਾਂ $\frac{1}{n} < 0.0001$ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $n > 10^8$ ਤਾਂ $\frac{1}{n} < 10^{-8}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਅਨੰਤ ਦੇ ਵੱਲ ਪ੍ਰਵਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\frac{1}{n}$ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਵੱਲ ਪ੍ਰਵਰਿਤ (tends to) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕ੍ਰਮ $\{s_n\}$ ਦੀ ਸੀਮਾ 0 ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots$

ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $s_n = \frac{n-1}{n}$ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਵੱਧਦਾ ਹੈ s_n ਉਵੇਂ-ਉਵੇਂ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ n ਨੂੰ ਉਚਿਤ ਵੱਡਾ ਚੁਣ ਕੇ ਅਸੀਂ s_n ਅਤੇ 1 ਦੇ ਅੰਕੜਾ ਅੰਤਰ ਭਾਵ $|s_n - 1|$ ਨੂੰ ਜਿੰਨਾ ਛੋਟਾ ਚਾਹੀਏ, ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਲਈ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

ਸਧਾਰਣ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿਸੀ ਕ੍ਰਮ $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots$ ਦੇ ਲਈ n ਨੂੰ ਉਚਿਤ ਵੱਡਾ ਚੁਣਨ ਤੇ ਜੇਕਰ s_n ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਸੰਖਿਆ A ਦੇ ਅੰਕੜਾ ਅੰਤਰ $|s_n - A|$ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਜਿੰਨਾ ਚਾਹੀਏ ਉਨਾ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਛੋਟਾ ਕਰ ਸਕੀਏ A ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ $\{s_n\}$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A$$

ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਕ੍ਰਮ

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ n^2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਦਾ ਮਾਨ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, s_n ਵੀ ਉਵੇਂ-ਉਵੇਂ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ n ਨੂੰ ਉਚਿਤ ਵੱਡਾ ਲੈ ਕੇ s_n ਨੂੰ ਜਿੰਨਾ ਵੱਡਾ ਚਾਹੀਏ, ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ $s_n > 10{,}000$ ਜੇਕਰ $n > 100$, $s_n > 10^8$ ਜੇਕਰ $n > 10^4$, ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਥੇ s_n ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਵੀ ਵੱਡਾ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ $S_n \to \infty$, ਜੇਕਰ $n \to \infty$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

4. ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਉਦਾਹਰਣ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨਾ ਉਚਿਤ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਕੁੱਝ ਫਲਨ x ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਵੇਂ

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ $\frac{x^2-1}{x-1}$ ਦਾ ਮਾਨ $x = 1$ ਉੱਤੇ $\frac{0}{0}$ ਭਾਵ ਅਨਿਰਧਾਰ (indeterminate) ਹੈ।

ਨੋਟ

ਜੇਕਰ $x = .9$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $\frac{(.9)^2 - 1}{.9 - 1} = 1.9$,

ਜੇਕਰ $x = .99$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $\frac{(.99)^2 - 1}{.99 - 1} = 1.99$,

ਜੇਕਰ $x = .999$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $\frac{(.999)^2 - 1}{.999 - 1} = 1.999$,

ਜੇਕਰ $x = .9999$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $\frac{(.9999)^2 - 1}{.9999 - 1} = 1.9999$, ਆਦਿ।

x	.9	.99	.999	.9999	---
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	---

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x ਦਾ ਮਾਨ ਵੱਧਦੇ-ਵੱਧਦੇ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ ਫਲਨ $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ਦਾ ਮਾਨ 2 ਦੇ ਨੇੜੇ ਪਹੁੰਚ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ ਜੇਕਰ $x = 1.1$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $\frac{(1.1)^2 - 1}{1.1 - 1} = 2.1$,

ਜੇਕਰ $x = 1.01$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $\frac{(1.01)^2 - 1}{1.01 - 1} = 2.01$,

ਜੇਕਰ $x = 1.001$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $\frac{(1.001)^2 - 1}{1.001 - 1} = 2.001$,

ਜੇਕਰ $x = 1.0001$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $\frac{(1.0001)^2 - 1}{1.0001 - 1} = 2.0001$ ਆਦਿ।

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	---
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	---

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x ਦਾ ਮਾਨ ਘਟਦੇ-ਘਟਦੇ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ਦਾ ਮਾਨ 2 ਦੇ ਨੇੜੇ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x ਭਾਵੇਂ 1 ਤੋਂ ਥੋੜਾ ਜਿਆਦਾ ਮਾਨ $1+\varepsilon$ (ਜਿੱਥੇ ε ਇੱਕ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸਵੇਛ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ) ਤੋਂ ਘਟਦੇ-ਘਟਦੇ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਪਹੁੰਚੇ ਜਾਂ 1 ਤੋਂ ਥੋੜਾ ਘੱਟ ਮਾਨ $1-\varepsilon$ ਤੋਂ ਵੱਧਦੇ-ਵੱਧਦੇ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਪਹੁੰਚੇ। ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਨ 2 ਦੇ ਵੱਲ ਪ੍ਰਵਰਤਿ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਨ 2 ਫਲਨ $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ਦੀ $x \to 1$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

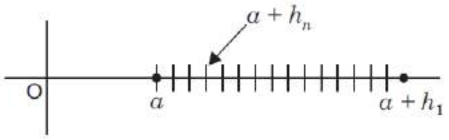
ਨੋਟ

2.1 ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ (Limit of a Function)

ਮੰਨ ਲਿਓ $y = f(x)$ ਕੋਈ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $h_1, h_2, ... h_n, ...$ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੁੱਚ (a set of positive numbers) ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਾਨ ਲਗਾਤਾਰ ਘੱਟ (continually decreasing) ਰਿਹਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$h_1 > h_2 > h_3 > .... > h_n > .... > 0 \qquad ...(1)$$

ਅਤੇ ਜਿਸਨੂੰ, n ਨੂੰ ਉਚਿਤ ਵੱਡਾ ਲੈ ਕੇ, ਜਿੰਨਾ ਚਾਹੀਏ ਉਨਾ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਛੋਟਾ ਬੇਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ h_n ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ,



$$f(a + h_1), f(a + h_2), ..., f(a + h_n) \qquad ...(2)$$

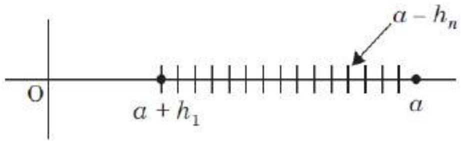
ਘਟਦੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ A ਦੇ ਵੱਲ ਪ੍ਰਵਰਿਤ (tends to) ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ A ਨੂੰ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ $x = a$ ਉੱਤੇ **ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ** (right hand limit) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ A ਨੂੰ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ, ਜਦੋਂ x, a ਦੇ ਵੱਲ ਪ੍ਰਵਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਤਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A = f(a+0)$$

ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖਦੇ ਹਨ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ x ਦੇ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਮਾਨਾਂ (values) ਉੱਤੇ ਹੀ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਕਿ a ਤੋਂ ਵੱਧ (greater) ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ a ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ)।



ਹੁਣ ਅਸੀਂ x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਮਾਨਾਂ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹੜੇ a ਤੋਂ ਘੱਟ (smaller) ਹਨ (ਭਾਵ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ a ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ)।

ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ h_n ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਫਲਨ

$$f(a - h_1), f(a - h_2)......, f(a - h_n),......$$

ਦੇ ਮਾਨ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ B ਦੇ ਵੱਲ ਪ੍ਰਵਰਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸੰਖਿਆ B ਨੂੰ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (left hand limit) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = B = f(a-0)$$

ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $A = B$ ਭਾਵ

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$$

ਤਾਂ A ਨੂੰ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਸਮੁੱਚ $h_1, h_2,........, h_n,........$ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ (sequence) ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੀਮਾ 0 ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਜਾ ਕ੍ਰਮ (2) ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਯੋਗ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਸੀਮਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ (limit to exist) ਦੇ ਲਈ $f(a + h_n)$ ਕ੍ਰਮ (1) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਲਈ, ਸੰਖਿਆ A ਨੂੰ ਪ੍ਰਵਰਿਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ $f(a - h_n) - A$ ਦਾ ਅੰਕੜਾ ਅੰਤਰ, h_n ਨੂੰ ਉਚਿਤ ਛੋਟਾ ਚੁਣਕੇ, ਜਿੰਨਾ ਚਾਹੀਏ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਉਨਾ ਛੋਟਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। $a + h_n$ {ਜਾਂ $a - h_n$} $= x$ ਅਤੇ $|x - a| = h_n$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

ਨੋਟ

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ (ਮੰਨ ਲਿਓ A ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗੁਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ $|x - a|$ ਭਾਵ $x - a$ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮਾਨ) ਉਚਿਤ ਰੂਪ ਤੋਂ ਛੋਟੀ (ਪਰੰਤੂ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ, $|f(x) - A|$ ਭਾਵ $f(x) - A$ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮਾਨ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਹੇਠਲੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਪਰਭਿਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

ਸੀਮਾ ਦੀ ਦੂਜੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ

ਜਦੋਂ $x \to a$ (ਜਦੋਂ x, a ਦੇ ਵੱਲ ਪ੍ਰਵਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ) ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ (ਮੰਨ ਲਿਓ A) ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗੁਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਸਵੇਛ ਧਨਾਤਮਕ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ε ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਦੂਜੀ ਜ਼ੀਰੋ ਨਾਲ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ δ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $|f(x) - A| < \varepsilon$, x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ

$$0 < |x - a| < \delta.$$

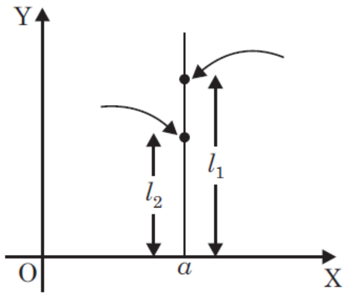
ਨੋਟਸ ਜੇਕਰ $x = a$ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ (limit) L ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ–

$$\lim_{x \to a} \text{it}\, f(x) = L \text{ ਜਾਂ } \lim_{x \to a} f(x) = L$$

2.2 ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (Right Hand and Left Hand Limits)

2.2.1 ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (Right hand limit)

ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਫਲਨ ਦੀ **ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (R. H. L.)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਲਈ ਧੰਨ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਨ–



ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ $= f(a + 0) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l_1.$

2.2.2 ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (Left hand limit)

ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ **ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (L.H.L.)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਲਈ (–) ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ–

ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ $= f(a - 0) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2.$

2.3 ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ

(Working Rules for Finding Right Hand Limit and Left Hand Limit)

(i) ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਚਰ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $(x + h)$ ਅਤੇ $(x - h)$ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ।

(ii) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (i) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲਨ x ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ (ਮੰਨ ਲਿਓ a) ਨਾਲ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ।

(iii) ਹੁਣ $h \to 0$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰੋ [ਭਾਵ (*ii*) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲਨ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਰੱਖਕੇ $h = 0$ ਰੱਖੋ]। ਨੋਟ

ਵਿਆਖਿਆਤਮਕ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਫਲਨ $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ ਦੀ $x = 2$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਪੱਖ (Right hand limit) ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (Left hand limit) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ

I. $$f(x+h) = \frac{1}{2+(x+h)}$$

II. $$f(2+h) = \frac{1}{2+(2+h)} = \frac{1}{4+h}$$

III. $$\lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{4+h}$$

ਜਾਂ $$f(2+0) = \frac{1}{4}$$

ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ

I. $$f(x-h) = \frac{1}{2+(x-h)}$$

II. $$f(2-h) = \frac{1}{2+(2-h)} = \frac{1}{4-h}$$

III. $$\lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{4-h}$$

ਜਾਂ $$f(2-0) = \frac{1}{4}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਫਲਨ $f(x) = x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ਦੀ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ

I. $$f(x+h) = (x+h)\cos\frac{1}{x+h}$$

II. $$\lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} h\cos\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \times \lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{h}$$

$= 0$ [-1 ਅਤੇ 1 ਦੇ ਮੱਧ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਪਰਿਮਿਤ (finite) ਰਾਸ਼ੀ]

ਜਾਂ $$f(0+0) = 0$$

III. $$f(x-h) = (x-h)\cos\frac{1}{x-h}$$

ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ

I. $$f(0-h) = -h\cos\left(-\frac{1}{h}\right)$$

II. $$\lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0}(-h)\cos\left(-\frac{1}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}(-h)\lim_{h\to 0}\cos\left(-\frac{1}{h}\right)$$

$=-0$ [-1 ਅਤੇ 1 ਦੇ ਮੱਧ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਪਰਿਮਿਤ (finite) ਰਾਸ਼ੀ]

ਜਾਂ $$f(0-0) = 0$$

2.4 ਸੀਮਾ ਦਾ ਵਜੂਦ (Existence of Limit)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਦੋਨੋਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹੋਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਾ ਦਾ ਵਜੂਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l \quad \text{(ਮੰਨ ਲਿਓ)}$$

ਇੱਥੇ l ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ–

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

ਨੋਟ

2.5 ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ (Distinction Between Limit and Value of a Function $f(x)$ on $x = a$)

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$	$f(a)$
1. ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਉਹ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਵੱਲ ਫਲਨ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ x ਦਾ ਮਾਨ a ਦੇ ਵੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।	ਉਹ ਰਾਸ਼ੀ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਫਲਨ $f(x)$ ਵਿੱਚ $x = a$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
2. ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $x = a$ ਦੇ ਨੇੜਲੇ $f(x)$ ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।	$x = a$ ਉੱਤੇ ਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ $x = a$ ਉਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।
3. $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦਾ ਵਜੂਦ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।	$x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ।

2.6 ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਅਤੇ ਸੀਮਾ (Value and Limit of a Function)

ਚਰ x ਦੇ ਕਿਸੀ ਮਾਨ a ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦਾ ਮਾਨ ਭਿੰਨ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕੁੱਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲਈ $x = a$ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦਾ ਮਾਨ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਭਾਵ $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

2.7 ਸੀਮਾਵਾਂ ਉੱਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ (Theorems on Limits)

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ $f(x)$ ਅਤੇ $\phi(x)$ ਦੋ ਫਲਨ ਹੋਣ ਅਤੇ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to a} \phi(x) = B$ ਤਾਂ

$$(i)\ \lim_{x \to a} \{f(x) \pm \phi(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \phi(x) = A \pm B.$$

$$(ii)\ \lim_{x \to a} \{k\, f(x)\} = k \lim_{x \to a} f(x) = kA.$$

$$(iii)\ \lim_{x \to a} \{f(x)\, \phi(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} \phi(x) = AB$$

ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗੁਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ (ਮੰਨ ਲਿਓ A).

$$(iv)\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \phi(x)} = \frac{A}{B}, \text{ ਜੇਕਰ } B \neq 0.$$

$$(v)\ \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to a} f(h + a).$$

2.8 ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ (Method of Finding the Limit of a Function)

ਭਾਵੇਂ ਸਾਨੂੰ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਦੋਨੋਂ ਸੀਮਾਵਾ ਪਤਾ ਕਰਨੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਮੱਧਮਿਕ ਸਤਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਜਿਆਦਾਤਰ ਸਿੱਧੇ ਹੀ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਨੋਟ

ਜੇਕਰ $y = f(x) = \dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}$, ਤਾਂ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਲੀਆਂ ਚਾਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ:

ਸਥਿਤੀ 1 (Type 1): ਜਦੋਂ $x \quad a$ ਜੇਕਰ $\phi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$ ਤਾਂ $f(a) = \dfrac{0}{0}$ ਜਿਹੜਾ ਅਨਿਰਧਾਰਯ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ–

(*i*) ਫਲਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਅਤੇ $x \quad a$ ਮੰਨ ਕੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨਾਲ ਉਭੇਨਿਸ਼ਠ ਗੁਣਲਖੰਡ ਨੂੰ ਕੱਟ ਦਿਓ।

(*ii*) ਬਾਕੀ ਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਥਾਨ a ਰੱਖ ਕੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰ ਲਿਓ। ਇਹੀ ਫਲਨ ਦੀ $x \quad a$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਾ ਹੋਵੇਗੀ।

ਸਥਿਤੀ 2 (Type 2): $x \quad a$ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ $x = a + h$ ਰੱਖਕੇ, ਇੱਥੇ h ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਧਾ (Increment) ਹੈ $f(a+h)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜਦੋਂ $h \quad 0$ ਭਾਵ $f(a+h)$ ਵਿੱਚ $h = 0$ ਰੱਖਕੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰ ਲਿਓ। ਇਹੀ ਫਲਨ ਦੀ $x \quad a$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਾ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿਉਂਕਿ ਜਦੋਂ

$x = a + h$ ਅਤੇ $x \quad a$ ਤਾਂ $h \quad 0$.

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

(*i*) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ A ਦੇ ਵੱਲੇ ਪ੍ਰਵਰਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਤਾਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ A ਨੂੰ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ $x = a$ ਉੱਤੇ .... ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(*ii*) ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ .... ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(*iii*) ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਦੋਨੋਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਵਿਦਮਾਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਾ ਦਾ .... ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(*iv*) ਚਰ x ਦੇ ਕਿਸੀ ਮਾਨ a ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਅਤੇ .... ਮਾਨ ਭਿੰਨ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(*v*) ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਦੋਨੋਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ ਪਰੰਤੂ .... ਸਤਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਜਿਆਦਾਤਰ ਸਿੱਧੇ ਹੀ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਕਦੀ-ਕਦੀ ਉਭਨਿਸ਼ਠ ਗੁਣਲਖੰਡ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣਾ ਸਰਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ (*ii*) ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਕੇ ਸੀਮਾ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਜਾਣੀ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਨਿਮਨ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਕਿਰਿਆ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ।

ਟਿੱਪਣੀ–ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਉਭਨਿਸ਼ਠ ਗੁਣਲਖੰਡ ਜਿਹੜਾ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ, ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣਾ ਤੁਰੰਤ ਸੰਭਵ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਪ੍ਰਸਾਰ (expansion in series) ਜਾਂ ਕਿਸੀ ਰੂਪਾਂਤਰਣ (transformation) ਦੇ ਬਾਅਦ ਇਹ ਕਿਰਿਆ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\lim\limits_{x \quad a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :
$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 + a^2 + ax)}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^2 + a^2 + ax), \qquad [\because x \neq a]$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_e(1+x)-x}{x^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots\right]-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left[-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}-\ldots\right]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\ldots\right]$$
$$=-\frac{1}{2}+0-\ldots=-\frac{1}{2}.$$
ਉੱਤਰ

ਟਾਸਕ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-b^3}{x-b}$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ। **[ਉੱਤਰ: $3b^2$]**

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x-a}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^2-2ax+a^2}{x-a}\right)^2=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x-a)=a-a=0.$$
ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x+3)}\qquad [\because x\neq 2]$$
$$=\frac{2-1}{2+3}=\frac{1}{5}.$$
ਉੱਤਰ

ਸਥਿਤੀ 3 (Type 3): ਅਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ (Limit of irrational function)

ਜੇਕਰ $y=f(x)$ ਇੱਕ $f(x)$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਬਣਾ ਲਿਓ ਫਿਰ ਸਥਿਤੀ 1 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਤ ਲੈਣਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x-1}}{x}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}$$

ਨੋਟ

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+......\infty-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x}{2!}+......\infty = \frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/2}-(1-x)^{1/2}}{x} = 1.$

ਹੱਲ: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/2}-(1-x)^{1/2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

ਉੱਤਰ

ਸਥਿਤੀ 4 (Type 4): ਫਲਨ ਦਾ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ, ਜਦ $x \quad \infty$.

ਅਜਿਹੇ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ $x=\frac{1}{Z}$ ਰੱਖਕੇ ਸੀਮਾ ਦਾ ਰੂਪ $x \quad \infty$ ਨੂੰ ਬਦਲਕੇ $Z \quad 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਰੱਖ ਦਿਓ। ਫਿਰ ਸਥਿਤੀ 3 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੀਮਾ ਕੱਢੋ ਲਿਓ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. $\lim\limits_{x \quad \infty} \frac{9x^2+3x+7}{5x^2+2x+1}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ $x=\infty$ ਰੱਖਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ $\frac{\infty}{\infty}$ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ x^2 ਦਾ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ।

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+3x+7}{5x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{9+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{9+0+0}{5+0+0}$$

$$= \frac{9}{5}, \text{ਜਦੋਂ ਕਿ } x\to\infty$$

ਕਿਉਂਜੋ $x \quad \infty$ ਇਸ ਲਈ $\frac{3}{x},\frac{7}{x^2},\frac{2}{5x},\frac{1}{x^2}$ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧਣਗੇ ਅਤੇ ਫਲਨ $\frac{9}{5}$ ਦੇ ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim\limits_{x \quad \infty} \frac{9x^2+3x+7}{5x^2+2x+1} = \frac{9}{5}.$ **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\lim_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x-a}=ma^{m-1}$, ਜਿੱਥੇ m ਕੋਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : **ਪਹਿਲੀ ਵਿਧੀ** : ਖੱਬਾ ਪੱਖ $=\lim_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{m-1}+x^{m-2}a+x^{m-3}a^2+....+a^{m-1})}{(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}(x^{m-1}+x^{m-2}a+x^{m-3}a^2+....+a^{m-1}), (\text{ਜਦੋਂ } x\neq a)$$

$$=a^{m-1}+a^{m-1}+....+a^{m-1}=ma^{m-1}=\text{ ਸੱਜਾ ਪੱਖ।}$$

ਦੂਜੀ ਵਿਧੀ : $\lim_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x-a}$ ($x=a+h$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x\to a$, $h\to 0$)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^m-a^m}{(a+h)-a}=\lim_{h\to 0}\frac{a^m\left(1+\frac{h}{a}\right)^m-a^m}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^m\left\{1+m\left(\frac{h}{a}\right)+\frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2+....-1\right\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^m h\left\{\frac{m}{a}+\frac{m(m-1)}{2}\frac{h}{a^2}+....\right\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}a^m\left\{\frac{m}{a}+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{h}{a^2}+....\right\}, (h\neq 0)$$

$$=a^m\times\frac{m}{a}=ma^{m-1}=\text{ ਸੱਜਾ ਪੱਖ।}$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਹ ਬੀਜਕ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਸੂਤਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਪਯੁਕਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. $\lim_{x\to 0}\left(1+\dfrac{p}{x}\right)^x$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{p}{x}\right)^x$

ਉਪ੍ਰਮੇਯ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^x=e^p, \text{ ਕਿਉਂਕਿ } \lim_{x/p\to\infty}\left\{\left(1+\frac{p}{x/p}\right)^{x/p}\right\}^p=e^p.$$

ਉਦਾਹਰਣ 10. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\log x}{1-x}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $x=1+h$ ਰੱਖੋ, ਜਦੋਂਕਿ h ਬਹੁਤ ਹੀ ਛੋਟਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-....}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - ....\right) \text{ (ਜਦੋਂ } h \neq 0) = -1.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 11. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...\right)\right]$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[2\left(x + \frac{x^3}{3!} + ...\right)\right]$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[2\left(1 + \frac{x^2}{3!} + ...\right)\right] \qquad [\because \quad x \neq 0]$$
$$= 2.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 12. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} .... \infty\right) - 1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \infty\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ... \infty\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to a}\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ... \infty\right)$$
$$= \text{(ਜਦੋਂ } x \neq 0) = 1.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 13. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2+3.....+x}{x^2}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2+3+....+x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{2x^2}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}. \qquad \left[\because \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\right]$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਭੀਸ਼ਟ ਮਾਨ = $\frac{1}{2}$. **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x} = \log_e \frac{a}{b}$.

ਜਾਂ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਨੋਟ

ਖੱਬਾ ਪੱਖ $= \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log_e a} - e^{x\log_e b}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[1 + x\log_e a + \frac{(x\log_e a)^2}{2!} + \ldots\right] - \left[1 + x\log_e b + \frac{(x\log_e b)^2}{2!} + \ldots\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{\log_e a - \log_e b + \frac{x[(\log_e a)^2 - (\log_e b)^2]}{2!} + \ldots\right\}$$

$= \log_e a - \log_e b = \log_e \left(\frac{a}{b}\right) =$ ਸੱਜਾ ਪੱਖ। **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਫਲਨ $f(x)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ਜਦੋਂ } x > 0 \\ -1, & \text{ਜਦੋਂ } x < 0 \\ 0, & \text{ਜਦੋਂ } x = 0 \end{cases}$$

ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ਵਜੂਦ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $f(0+h) = 1$.

$\therefore$ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ $= f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (1) = 1$.

ਅਤੇ $f(0-h) = -1$

$\therefore$ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ $= f(0-0) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (-1) = -1$.

$\because$ $\lim_{x\to 0+0} f(x) \neq \lim_{x\to 0-0} f(x)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x\to 0} f(x)$ ਵਜੂਦ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ ਦਾ ਵਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜਦੋਂ $x > 2$, $|x-2| = (x-2)$

$\therefore$ $\text{R.H.L.} = \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2+0} \frac{x-2}{x-2} = 1$

$\therefore$ $\text{L.H.L.} = \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2-0} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

$\text{R.H.L.} \neq \text{L.H.L.}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ ਦਾ ਵਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਫਲਨ $f(x)$ ਜਿਸਦੇ ਲਈ

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

ਨੋਟ

ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

ਹੱਲ: $\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} (1+h)^2 = 1$

ਅਤੇ $\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} (1-h)^2 = 1$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x\to 1} f(x) = 1.$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਫਲਨ $f(x)$ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ਜਦੋਂ } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ਜਦੋਂ } x = \frac{1}{2} \\ 1-x, & \text{ਜਦੋਂ } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1/2} f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\text{R.H.L.} = f\left(\frac{1}{2}+0\right) = \lim_{x\to 1/2+0} f(x)$

$$= \lim_{h\to 0} f\left(\frac{1}{2}+h\right) = \lim_{h\to 0}\left[1-\frac{1}{2}-h\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}-h\right] = \frac{1}{2}$$

$$\text{L.H.L.} = f\left(\frac{1}{2}-0\right) = \lim_{x\to 1/2-0} f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{1}{2}-h\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}-h\right) = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ R.H.L. = L.H.L.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x\to 1/2} f(x) = \frac{1}{2}.$ ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.1

ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ:

1. $\lim_{x\to 0} (7x^2 - 5x + 1).$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x}.$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x/2} - 1}{x}.$
4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$
5. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$

ਨੋਟ

7. $\lim_{x \to 0} \frac{y^2}{x}$ ਜਿੱਥੇ $y^2 = ax + bx^2 + cx^3$.

8. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1 + x^2}$.

9. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}$.

10. $\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2}$.

11. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

12. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

13. $\lim_{x \to a} \frac{x^5 - a^5}{x^2 - a^2}$.

14. $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$.

15. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$.

16. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 5x + 1}$.

17. $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

18. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x} - 1}$.

19. ਜੇਕਰ $f(x) = |x|$, ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

20. ਜੇਕਰ $f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$, ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\lim_{x \to 1} f(x)$ ਅਸਤਿਤਵਹੀਣ ਹੈ।

21. ਫਲਨ $f(x)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਕਿ

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ਜੇਕਰ } 0 \le x < 1 \\ 2, & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \\ 2 - x, & \text{ਜੇਕਰ } x \ge 1 \end{cases}$$

ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

22. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 1} = 1$.

23. $\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ।

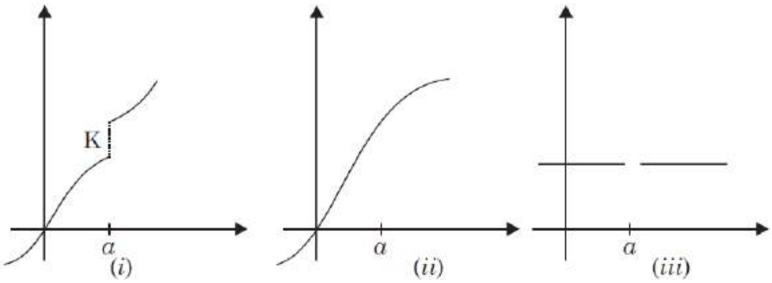
ਉੱਤਰ

1. 1	2. 0	3. $\frac{1}{2}$	4. 3	5. 4
6. $\frac{1}{2}$	7. a	8. 1	9. 1	10. $2a^2$
11. $\frac{3}{2}$	12. 4	13. $\frac{5}{2}a^3$	14. n	15. $\frac{1}{2}$
16. 3	17. $\frac{1}{e}$	18. 2	23. $\frac{m}{n}$	

ਨੋਟ

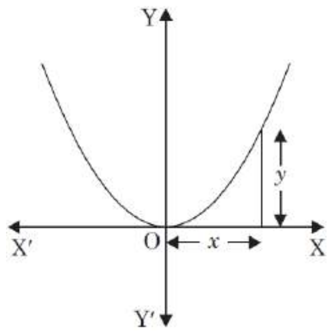
2.9 ਜਯਾਮਿਤੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Geometrical Definition)

ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਅਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰਤਾ (Continuity and Discontinuity): ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ (graph) ਖਿੱਚਣ ਤੇ ਜਿਹੜਾ ਵਕਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇ ਕਿ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਟੁੱਟਦਾ (break) ਨਾ ਹੋਵੇ, (ਭੰਗ ਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੋਵੇ) ਤਾਂ ਫਲਨ $f(x)$ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ **ਲਗਾਤਾਰ** (continuous) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।



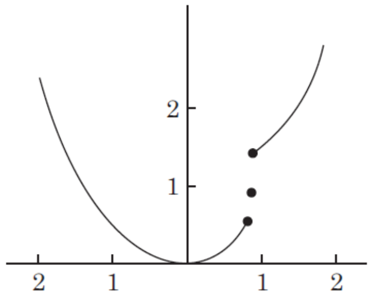
ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਟੁੱਟ (break) ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਅਲਗਾਤਾਰ (discontinuous) ਕਹਾਏਗਾ। ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਮਨ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚਿੱਤਰ (*i*) ਵਿੱਚ $f(x)$ ਦੇ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਕਿਸੀ ਉਚਾਈ ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ k ਦਾ ਇੱਕ **'ਉਛਾਲ'** (jump) ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਦਿਸ਼ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਚੱਲ ਰਹੇ ਹੋਈਏ ਤਾਂ $x = a$ ਇੱਕ ਭੰਗ (break) ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = a$ ਵੱਲ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਚੱਲਣ ਵਿੱਚ ਪੇਂਸਿਲ ਨੂੰ ਉਠਾਉਣਾ ਪਏਗਾ। ਫਲਨ (*iii*) ਦਾ ਵਕਰ ਵੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਭੰਗ (break) ਹੈ। ਫਲਨ (*ii*) $x = a$ ਉੱਤੇ ਭੰਗ (break) ਨਹੀਂ ਹੈ ਭਾਵ ਵਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਟੁੱਟਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $f(x)$, $x = a$ ਉੱਤੇ **ਲਗਾਤਾਰ** ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ (*i*) ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਫਲਨ $y = x^2$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੀਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਵਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਜਿਹੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਉੱਤੇ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੱਜੇ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਜਾਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਚੱਲੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਕ੍ਰਮ-ਭੰਗ ਨਹੀਂ ਪਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੇ ਪੇਂਸਿਲ ਚਲਾਈਏ ਤਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਕਿਸੀ ਥਾਂ ਪੇਂਸਿਲ ਉਠਾਉਣੀ ਨਹੀਂ ਪਏਗੀ। ਇਹ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ (Continuous function) ਹੈ।



ਉਦਾਹਰਣ (*ii*)
$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{ਜੇਕਰ } x < 1 \\ 1, & \text{ਜੇਕਰ } x = 1 \\ 1 + \frac{1}{2}x^2, & \text{ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$$

ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਖਿੱਚੀਏ ਤਾਂ ਦੋ ਵਿਭਿੰਨ ਪਰਵਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (1, 1) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੱਜੇ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਜਾਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਚੱਲੀਏ ਤਾਂ, $x = 1$ ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਮ ਭੰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $x = 1$ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਪੇਂਸਿਲ ਚੱਲਾਈਏ ਤਾਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਪੇਂਸਿਲ ਨੂੰ ਉਠਾਉਣਾ (to lift) ਪਏਗਾ। ਇਹ ਫਲਨ ਅਲਗਾਤਾਰ (Discontinuous) ਹੈ।



ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕਦਮ ਛਾਲ (sudden jump) ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ, x ਦਾ ਮਾਨ ਬਦਲਣ ਤੇ ਹੋਲੀ-ਹੋਲੀ ਬਦਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

ਨੋਟ

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਤਾਂ $|f(x) - f(a)|$ ਦਾ ਮਾਨ, x ਨੂੰ a ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਚੁਣ ਕੇ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਛੋਟਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

2.10 ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ (Continuity of a Function at any Point)

ਕੋਸ਼ੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Cauchy's definition): ਇੱਥ ਫਲਨ $f(x)$, $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਵੇਛ (arbitrary) ਚੁਣੀ ਗਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ε ਜਿਹੜੀ ਕਿੰਨੀ ਵੀ ਛੋਟੀ ਹੋਵੇ ਪਰੰਤੂ ਜ਼ੀਰੋ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ε ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ δ ਅਜਿਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕੀਏ ਕਿ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲਈ

$$0 < |x - a| < \delta .$$

ਭਾਵ ਅੰਤਰਾਲ $(a - \delta, a + \delta)$ ਦੇ ਕਿਸੀ ਵੀ ਬਿੰਦੂ x ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਅਤੇ $f(a)$ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਅੰਤਰ ਇੱਕ ਸਵੇਛਤਾ ਨਿਦਰਿਸ਼ਟ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ε ਤੋਂ ਵੀ ਘੱਟ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਫਲਨ $f(x)$ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ **ਲਗਾਤਾਰ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਵੈਕਲਪਿਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ: ਫਲਨ $f(x)$, $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ (Continuous) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $\lim_{x \to a}$ ਦਾ ਵਜੂਦ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਉਹ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

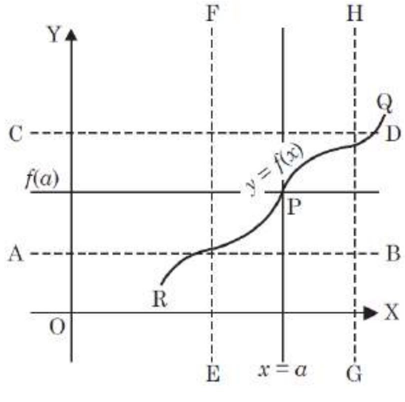
ਨੋਟਸ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ਭਾਵ [$f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਜਦੋਂ $x \to a$] = [ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ, ਜਦੋਂ $x = a$]

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $f(a + 0) = f(a - 0) = f(a)$, ਤਾਂ $f(x)$ ਨੂੰ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਫਲਨ $f(x)$ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਫਲਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੇ :

1. ਜੇਕਰ ਫਲਨ $f(x)$, $x = a$ ਉੱਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ ਭਾਵ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਨ ਹੋਵੇ।
2. ਜਦੋਂ x ਦਾ ਮਾਨ a ਦੇ ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦਾ ਹੋਵੇ, ਉਦੋਂ $f(x)$ ਕਿਸੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵਧੇ ਭਾਵ $\lim_{x \to a} f(x)$ ਵਜੂਦ ਹੋਵੇ।
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ਹੋਵੇ।

2.11 ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਾ ਜਯਾਮਿਤੀ ਅਰਥ (Geometrical Meaning of Continuity)

ਮੰਨ ਲੋ QR ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ $P[a, f(a)]$ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ε ਕੋਈ ਸਵੇਛਤਾ ਨਿਦਰਿਸ਼ਟ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = f(a) - \varepsilon$, $y = f(a) + \varepsilon$, x-ਅਕਸ਼ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਤੇ P ਦੇ ਨਿੱਚਲੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਵੱਲ ਹੋਵੇਗੀ।



ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ε ਦੇ ਸੰਗਤ $x = a$ ਦੇ ਪਰਿਤ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਜਿਸਦੀ ਚੌੜਾਈ 2δ ਹੈ, ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਨੂੰ ਰੇਖਾ $x = a$ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਅਤੇ y-ਅਕਸ਼ ਦੇ ਸਮਾਨ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a - \delta$ ਅਤੇ $x = a + \delta$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਜੇਕਰ ਦੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a - \delta, x = a + \delta$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੇ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਦਾ ਹਰ ਬਿੰਦੂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = a - \varepsilon, y = a + \varepsilon$ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਵੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਫਲਨ $f(x)$ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : (*i*) ਅਚਰ ਫਲਨ (constant function) $f(x) = c$, x ਦੇ ਹਰੇਕ ਅਸਲ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(*ii*) ਫਲਨ $f(x) = \sin x$ ਅਤੇ $f(x) \cos x$, x ਦੇ ਹਰੇਕ ਅਸਲ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

2.12 ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ (Method to Finding Continuity of a Function at any Point)

ਸੀਮਾ (limit) ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $\lim_{x \to a} f(x)$ ਦਾ ਵਜੂਦ (existence) ਤਾਂ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ

$f(x)$ ਦੀ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ = $f(x)$ ਦੀ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ

ਭਾਵ $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

ਭਾਵ $$f(a - 0) = f(a + 0)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ (continuity) ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਦਿਖਾਉਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦੀ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ = $f(x)$ ਦੀ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ = ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ**

Left Hand Limit = Right Hand Limit = Value of the Function

ਭਾਵ $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ਜਾਂ $$f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$$

ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (R.H.L.) ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਵਿੱਚ $x = a + h$ ਰੱਖੋ, ਜਿੱਥੇ $h \to 0$, ਜਦੋਂ $x \to a$

ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (L.H.L.) ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਵਿੱਚ $x = a - h$ ਰੱਖੋ, ਜਿੱਥੇ $h \to 0$, ਜਦੋਂ $x \to a$

2.13 ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ (Continuity of a Function in an Interval)

ਇੱਕ ਫਲਨ $f(x)$ ਕਿਸੀ ਵਿਵਰਿਤ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਫਲਨ $f(x)$ ਕਿਸੀ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ (closed interval) $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ

(i) ਇਹ x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $a < x < b$

(ii) $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$

(iii) $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

ਭਾਵ ਫਲਨ ਖੁੱਲੇ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $x = a$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਤੋਂ ਅਤੇ $x = b$ ਉੱਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਤੋਂ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ।

ਇੱਕ ਅੰਤਰਾ ਵਿੱਚ ਅਲਗਾਤਾਰਤਾ (Discontinuity in an interval): ਫਲਨ $f(x)$ ਕਿਸੀ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਅਲਗਾਤਾਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਜਾਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ।

2.14 ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ (Theorem on Continuous Functions)

(i) ਜੇਕਰ $f(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਦੋਨੋਂ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ ਤਾਂ $f(x) \pm g(x)$ ਵੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਨੋਟ

(ii) ਜੇਕਰ $f(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਦੋਨੋਂ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ ਤਾਂ $f(x)\,g(x)$ ਵੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

(iii) ਜੇਕਰ $f(x)$ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਅਤੇ k ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $k\,f(x)$ ਵੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) ਜੇਕਰ $f(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਅਤੇ $g(a) \neq 0$ ਤਾਂ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ਵੀ $x = a$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

(v) ਜੇਕਰ $f(x), x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਅਤੇ $f(a) \pm 0$ ਤਾਂ $\dfrac{1}{f(x)}$ ਵੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

(vi) ਜੇਕਰ $f(x), x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਤਾਂ $|f(x)|$ ਵੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = x^2 + 1, x = 2$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

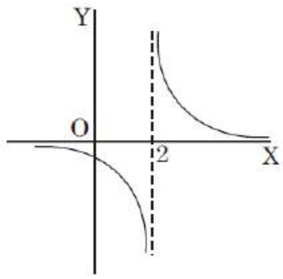
ਹੱਲ: $\lim_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2).$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = 2$ ਉੱਤੇ ਲਗਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਫਲਨ $f(x) = \dfrac{1}{x-2}, x = 2$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: (*i*) $f(2)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਹਰ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ)।

(*ii*) $\lim_{x \to 2} f(x)$ ਦਾ ਵਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ (∞ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ)।

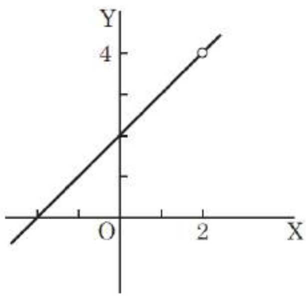


$x = 2$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਹਰ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 2$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਅਲਾਗਾਤਾਰਤਾ (discontinuity) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਫਲਨ $f(x)\dfrac{x^2-4}{x-2}, x = 2$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ (discontinuous) **ਹੈ।**

ਹੱਲ: (*i*) $f(2)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਨੋਂ ਜ਼ੀਰੋ ਹਨ)।

(*ii*) $\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = 2$ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 ਵਿੱਚ ਅਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$; ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਕੇ $f(2) = 4$.

$f(x)\,\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ਅਤੇ $g(x) = x + 2$ ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ ਸਮਾਨ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਵਿੱਚ ਛੇਦ (hole) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਦੂਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਕਿਉਂਕਿ ਸੀਮਾ ਦਾ ਵੀ ਵਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਕੀ ਫਲਨ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 1, & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$ ਮੂਲਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ?

ਹੱਲ : $f(x), x = 0$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ (continuous) ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $f(0) = 1$, (ਦਿੱਤਾ ਹੈ) ਨੋਟ

ਅਤੇ $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. **ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਫਲਨ** $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & \text{ਜਦੋਂ } x \neq 0 \\ 1, & \text{ਜਦੋਂ } x = 0 \end{cases}$ **ਮੂਲਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।**

ਹੱਲ : $f(x), x = 0$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ (discontinuous) ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $f(0) = 1$

ਅਤੇ $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

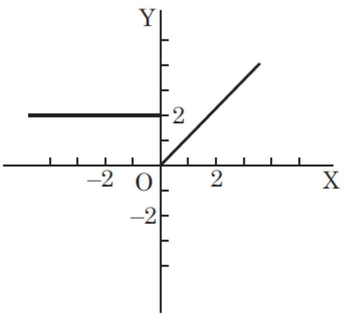
$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{x} \cdot \cos x = 2.1 \cos 0^0 = 2$$

ਭਾਵ $$f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x).$$

ਵਿਆਖਿਆਤਮਕ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $f(x) = \begin{cases} 2, x < 0 \text{ ਦੇ ਲਈ} \\ x, x \geq 0 \text{ ਦੇ ਲਈ} \end{cases}$

ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚੋ।



ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ ਮੂਲਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ (discontinuous) ਹੈ।

ਹੱਲ : $f(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣਾ ਅਤਿ ਸਰਲ ਹੈ। ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਉਛਾਲ (jump) ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੂਲਬਿੰਦੂ ($x = 0$) ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (R.H.L.):

$x \geq 0$ ਦੇ ਲਈ, $$f(x) = x$$

$$f(x+h) = (x+h)$$

$$f(0+h) = (0+h)$$

$$\lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} h$$

$$\therefore \quad f(0+0) = 0 \quad \ldots(i)$$

ਮੂਲਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (L.H.L.) ($x < 0$ ਦੇ ਲਈ)

$x < 0$ ਦੇ ਲਈ, $$f(x) = 2$$

$$f(x-h) = 2$$

$$f(0-h) = 2$$

$$\lim_{h \to 0} f(0-h) = 2$$

$$\therefore \quad f(0-0) = 2 \quad \ldots(ii)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (i) ਅਤੇ (ii) ਤੋਂ $f(0+0) \neq f(0-0)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਅਲਗਾਤਾਰ (discontinuous) ਹੈ।

(**ਨੋਟ:** ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਦਰਸਾਉਣ ਕਿ $x = 0$ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦੱਖਣ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।)

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ $f(x) = |x-1|+|x+2|$, ਜਿੱਥੇ x ਕੋਈ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x)$, $x = 1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ: $x = 1$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਸੀਮਾ (R.H.L.)

$$f(x) = |x-1| + |x+2|$$
$$f(x+h) = |x+h-1| + |x+h+2|$$
$$f(1+h) = |1+h-1| + |1+h+2|$$
$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} [\,|h| + |3+h|\,]$$
$$= |0| + |3+0| = 3$$

$x = 1$ ਉੱਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (L.H.L.)

$$f(1-h) = |1-h-1| + |1-h+2|$$
$$f(1-h) = |1-h| + |3-h|$$
$$\lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} [\,|h| + |3-h|\,]$$
$$= |0| + |3-0| = 3$$
$$\text{L.H.L.} = \text{R.H.L.}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

$x = -2$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਸੀਮਾ (R.H.L.)

$$f(x) = |x-1| + |x+2|$$
$$f(-2+h) = |-2+h-1| + |-2+h+2|$$
$$= |h-3| + |h|$$
$$\lim_{h\to 0} f(-2+h) = \lim_{h\to 0} [\,|h-3| + |h|\,]$$
$$= |-3| + |0| = 3$$

$x = -2$ ਉੱਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (L.H.L.)

$$f(x) = |x-1| + |x+2|$$
$$f(-2-h) = |-2-h-1| + |-2-h+2|$$
$$= |-3-h| + |-h|$$
$$= |3+h| + |h|$$
$$\lim_{h\to 0} f(-2-h) = \lim_{h\to 0} [\,|3+h| + |h|\,]$$
$$= 3$$
$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$, $x = a$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : $$\text{L.H.L.} = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a-h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(a-h)-a} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{-h} = -\infty$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(a+h)-a} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = \infty$$

$\therefore$ $\text{L.H.L.} \neq \text{R.H.L.}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = a$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਦਿਖਾਓ ਕਿ $f(x) = |x|, x = 0$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $f(0) = |\,0\,| = 0$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} |0-h| = \lim_{h \to 0} (h) = 0$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} |0+h| = \lim_{h \to 0} (h) = 0$$

$\therefore$ $\text{L.H.L.} = \text{R.H.L.} = f(0)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਦਿਖਾਓ ਕਿ $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ ਜੇਕਰ } x \neq 1, \\ 2, \text{ ਜੇਕਰ } x = 1. \end{cases}$

ਬਿੰਦੂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ, $f(1) = 2$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} (1+h)^2 = 1$$

ਅਤੇ $$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{h \to 0} (1-h) = \lim_{h \to 0} (1-h)^2 = 1$$

$\therefore$ $$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 6. k ਦੇ ਕਿਸ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4}, & x \neq 4 \\ k, & x = 4 \end{cases}$

$X = 4$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ: $\because$ $x = 4$ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ k ਹੈ।

$\therefore$ $f(4) = k$

$x = 4$ ਉੱਤੇ $$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 4+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(4+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{4+h-4} = \lim_{h \to 0} \frac{16+h^2+8h-16}{h}$$

ਨੋਟ

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+8)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+8), \because h \neq 0$$

$$= 8$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 4-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(4-h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4-h)^2 - 16}{4-h-4} = \lim_{h \to 0} \frac{16+h^2-8h-16}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h+8), h \neq 0$$

$$= 8$$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $x \neq 4$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

$$\text{L.H.L.} = \text{R.H.L.} = f(4)$$

$$8 = 8 = k$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $k = 8$. **ਉੱਤਰ**

ਟਾਸਕ k ਦੇ ਕਿਸੀ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $f(x) \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5}, & x \neq 5 \\ k, & x = 5 \end{cases}$

$x = 5$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। **ਉੱਤਰ:** $k = 10$

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਫਲਨ $f(x)$ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਣ ਕਰੋ ਜਦੋਂ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $f(0) = 1$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0-h|}{0-h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h} = -1$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0-h|}{0+h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

$\therefore$ $\text{R.H.L.} \neq \text{L.H.L.}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਅਗਾਤਾਰ ਹੈ।

$\because$ $\text{L.H.L.} = \text{R.H.L.} = f(1)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਜੇਕਰ $f(x) \begin{cases} 3ax + b, & \text{ਜੇਕਰ } x > 1 \\ 11, & \text{ਜੇਕਰ } x = 1 \\ 5ax - 2b, & \text{ਜੇਕਰ } x < 1 \end{cases}$

$X = 1$ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f(x)$, $x = 1$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

ਨੋਟ

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} f(1+h) = 11$$

$$\lim_{h \to 0} 3a(1+h) + b = 11$$

$$3a + b = 11$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, $$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 11$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} 5a(1-h) - 2b = 11$$

$$\Rightarrow \quad 5a - 2b = 11$$

ਸਮੀ. (*i*) ਤੇ (*ii*) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$a = 3, b = 5.$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਫਲਨ $f(x)$ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ [0, 1] ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ–

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \\ \frac{1}{2} - x, & \text{ਜੇਕਰ } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{ਜੇਕਰ } x = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} - x, & \text{ਜੇਕਰ } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1, & \text{ਜੇਕਰ } x = 1 \end{cases}$$

ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਅਲਗਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : (*i*) $x = 0$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ $f(0) = 0$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{1}{2} - (0+h)\right\} = \frac{1}{2} \neq f(0)$$

$\therefore$ ਫਲਨ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(*ii*) $x = \frac{1}{2}$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 1/2-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2} - h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - h\right)\right\} = 0$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 1/2+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2} + h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + h\right)\right\} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{6} - h\right) = \frac{1}{6}.$$

$$\therefore \quad \text{L.H.L.} \neq \text{R.H.L.}$$

ਨੋਟ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = \frac{1}{2}$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

***(iii)* $x = 1$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ** $f(1) = 1$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{2}{3} - (1-h)\right\} = -\frac{1}{3} \neq f(1)$$ **ਉੱਤਰ**

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ **$x = 0, 1$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਣ ਕਰੋ ਜਦੋਂ**

$$f(x) = |\,x\,| + |\,x - 1\,| \text{ ਜਾਂ}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{ਜੇਕਰ } x < 0 \\ 1, & \text{ਜੇਕਰ } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & \text{ਜੇਕਰ } x \geq 1 \end{cases}$$

ਹੱਲ: *(i)* $x = 0$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ

$$f(0) = 1$$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} (1) = 1$$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (1 + 2h) = 1$$

$$\therefore \qquad \text{L.H.L.} = f(0) = \text{R.H.L.}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

***(ii)* $x = 1$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ**

$$f(1) = (2 \times 1 - 1) = 1,$$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} (1) = 1.$$

$$\text{R.H.L} = \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} \{2\,(1+h) - 1\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \{1 + 2h\} = 1$$

$$\therefore \qquad \text{L.H.L.} = f(1) = \text{R.H.L.}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $x = 1$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿਹੜਾ ਫਲਨ $f(x)$, $\forall x \in R$ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ਅਲਗਾਤਾਰ (discontinuous) ਹੈ।

ਹੱਲ : $x = 0$ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ

$$f(0) = 0 \qquad \ldots(i)$$

$x = 0$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (R.H.L.):

$$f(x+h) = \frac{e^{1/(x+h)}}{1+e^{1/(x+h)}}$$

$$f(0+h) = \frac{e^{1/(0+h)}}{1+e^{1(0+h)}}$$

∴ $$\lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{1/h}}{1+e^{1/h}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{e^{-1/h+1}}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f(0+0) = \frac{1}{0+1} = 1,$ $[\because \lim_{h\to 0} e^{-1/h} = 0]$ ...(*i*)

$x = 0$ ਉੱਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (L.H.L.):

$$f(x-h) = \frac{e^{1/(x-h)}}{1+e^{1/(x-h)}}$$

$$f(0-h) = \frac{e^{1/(0-h)}}{1+e^{1/(0-h)}} = \frac{e^{-1/h}}{1+e^{-1/h}}$$

∴ $$\lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h}}{1+e^{-1/h}}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f(0-0) = \frac{0}{1+0} = 0$ ...(*iii*)

(*ii*) ਅਤੇ (*iii*) ਤੋਂ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ ≠ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਇੱਕ ਫਲਨ $f(x)$ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ:

$$f(x) = \begin{cases} x, x < 1 \\ 2-x, 1 \le x \le 2 \\ x - \frac{1}{2}x^2 \ x > 2. \end{cases}$$

ਕੀ $f(x)$, $x = 1$ ਅਤੇ $x = 2$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ?

ਹੱਲ: ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ $f(x) = 2 - x$ ਤੋਂ $f(1) = 2 - 1 = 1$ ...(*i*)

$x = 1$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (R.H.L.) $\because x > 1$ ਦੇ ਲਈ $f(x) = 2 - x$

ਹੁਣ $$f(1+0) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} 2-(1+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} 1-h = 1$$ ...(*ii*)

$x = 1$ ਉੱਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (L.H.L.) $\because f(x) = x$,

$$f(1-0) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} (1-h) = 1$$ ...(*iii*)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (*i*), (*ii*) ਤੇ (*iii*) ਤੋਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ $f(1) = f(1+0) = f(1-0)$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ $x = 2$ ਉੱਤੇ $f(x) = 2 - x$ ਤੋਂ $f(2) = 2 - 2 = 0$ ...(*iv*)

$x = 2$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (R.H.L.) $\because$ $x > 2$ ਦੇ ਲਈ $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$

$$f(2+0) = \lim_{h \to 0} f(2+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (2+h) - \frac{1}{2}(2+h)^2$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{2}h^2 - h = 0; \qquad ...(v)$$

$x = 2$ ਉੱਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (L.H.L.) $\because$ $x < 2$ ਦੇ ਲਈ $f(x) = 2 - x$

$$f(2-0) = \lim_{h \to 0} f(2-h) = \lim 2 - (2-h) = 0 \qquad ...(vi)$$

$\therefore$ (*iv*), (*v*), (*vi*) ਤੋਂ,

$f(2) = f(2+0) = f(2-0) = 0.$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 2$ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.2

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲਈ ਅਲਗਾਤਾਰਤਾ (discontinuity) ਦੇ ਬਿੰਦੂ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ–

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \le 0 \\ +1, & x > 0. \end{cases}$

2. $f(x) = |x - 1|.$

3. $f(x) = |x| + |x - 1|.$

ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਨਿਮਨ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਆਪਣੇ ਸਾਹਮਣੇ ਦਰਸਾਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ:

4. ਫਲਨ $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $x = 1, 3$ ਉੱਤੇ।

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x \ne -2 \\ 0, & x = -2 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

6. ਜੇਕਰ $f(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{ਜਦੋਂਕਿ } x \ge 5 \\ 5x - 24, & \text{ਜਦੋਂਕਿ } x < 5 \end{cases}$

ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $f(x)$, $x = 5$ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x)$ ਜਿੱਥੇ

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 2 \\ 2x - 3, & x \ge 2 \end{cases}$$

ਹਰ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਫਲਨ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ ਵੀ ਖਿੱਚੋ।

ਨਿਮਨ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਣ ਕਰੋ–

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \ne 2 \\ 4, & x = 2 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a^2}{x - a}, & x \ne a \\ 2a, & x = a \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3. \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} -x^2, x \leq 0 \\ x^2, x > 0 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 5x-4, & 0 < x \leq 1 \\ 4x^3-3x, & 1 < x < 2 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -1 < x < 3 \\ 5, & x = 3 \\ 8-x, & x > 3 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$

23. ਬਿੰਦੂ $x = 1$ ਅਤੇ $x = 2$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਪਤਾ ਕਰੋ। $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ ਜੇਕਰ } 0 < x < 1 \\ x, \text{ ਜੇਕਰ } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^3}{4}, \text{ ਜੇਕਰ } 2 \leq x < 3 \end{cases}$

24. ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = 0, 1, 2$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ਜੇਕਰ } x \leq 0 \\ 5x-4, & \text{ਜੇਕਰ } 0 < x \leq 1 \\ 4x^2-3x, & \text{ਜੇਕਰ } 1 < x < 2 \\ 3x+4, & \text{ਜੇਕਰ } x \geq 2. \end{cases}$$

25. ਜੇਕਰ $f(x) = x^2 + 1$, ਜਦੋਂ $x \neq 1$ ਅਤੇ $f(x) = 3$ ਜਦੋਂ $x = 1$, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ $f(x)$ ਬਿੰਦੂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਜਾਂ ਅਲਗਾਤਾਰ।

ਉੱਤਰ

1. 0	2. ਕੋਈ ਨਹੀਂ	3. ਕੋਈ ਨਹੀਂ	8. ਲਗਾਤਾਰ
9. ਲਗਾਤਾਰ	10. ਅਲਗਾਤਾਰ	11. ਲਗਾਤਾਰ	12. ਅਲਗਾਤਾਰ
13. $x = 3$, ਅਲਗਾਤਾਰ	14. $x = 0$, ਲਗਾਤਾਰ	15. ਅਲਗਾਤਾਰ	16. ਅਲਗਾਤਾਰ
17. $x = 0$, ਲਗਾਤਾਰ	18. ਅਲਗਾਤਾਰ	19. ਅਲਗਾਤਾਰ	20. ਅਲਗਾਤਾਰ
21. ਲਗਾਤਾਰ	22. ਲਗਾਤਾਰ	23. ਹਾਂ	24. ਲਗਾਤਾਰ, $x = 1$, 2 ਅਤੇ ਅਲਗਾਤਾਰ $x = 0$ ਉੱਤੇ
25. ਅਲਗਾਤਾਰ।			

ਨੋਟ

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

2. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)–

(i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ ਦਾ ਮਾਨ ਹੈ–

(*a*) $3a^2$ (*b*) $3a$ (*c*) $3b^2$ (*d*) $3b$

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = ...$

(*a*) $\dfrac{1}{e}$ (*b*) e (*c*) $-e$ (*d*) ∞

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \log e.......$

(*a*) $\dfrac{b}{a}$ (*b*) $\dfrac{1}{b}$ (*c*) $\dfrac{a}{b}$ (*d*) $-\dfrac{a}{b}$

(iv) ਜੇਕਰ $f(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਦੋਨੋਂ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ ਤਾਂ $f(x) \pm g(x)$, $x = a$ ਉੱਤੇ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?

(*a*) ਲਗਾਤਾਰ (*b*) ਅਲਗਾਤਾਰ (*c*) ਸੰਗਤ (*d*) ਅਸੰਗਤ

(v) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 1} = ...$

(*a*) 2 (*b*) $2e$ (*c*) 1 (*d*) $\dfrac{1}{e}$

2.15 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਫਲਨ ਦੀ **ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (R.H.L.)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਲਈ ਧਨ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਨ–

  ਦੱਖਣ ਪੱਖ $= f(a + 0)$

  $= \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_1.$

- ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ **ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਲਈ (–) ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਨ–

  ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ $= f(a - 0)$

  $= \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_2.$

- ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਚਰ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $(x + h)$ ਅਤੇ $(x - h)$ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ।
- ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (*i*) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲਨ x ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ (ਮੰਨ ਲਓ a) ਨਾਲ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ।
- $h \to 0$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰੋ [ਭਾਵ (*ii*) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲਨ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਰੱਖਕੇ $h = 0$ ਰੱਖੋ]।

- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਅਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਦੋਨੋਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੀ $x = a$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਾ ਦਾ ਵਜੂਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

  $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$ (ਮੰਨ ਲਿਓ)

- ਇੱਥੇ l ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ–

  $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

- ਸਾਨੂੰ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਤੇ ਵਾਮ ਪੱਖ ਦੋਨੋਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਮੱਧਮਿਕ ਸਤਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਕਈ ਵਾਰ ਸਿੱਧੇ ਹੀ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
- ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਉਭਨਿਸ਼ਠ ਗੁਣਲਖੰਡ ਜਿਹੜੇ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣਾ ਤੁਰੰਤ ਸੰਭਵ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਪ੍ਰਸਾਰ (expansion in series) ਜਾਂ ਕਿਸੀ ਰੁਪਾਂਤਰਣ (transformation) ਦੇ ਬਾਅਦ ਇਹ ਕਿਰਿਆ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਲੇਖਾਚਿੱਤਰ (graph) ਖਿੱਚਣ ਤੇ ਜਿਹੜਾ ਵਕਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇ ਕਿ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਟੁੱਟਦਾ (break) ਨਾ ਹੋਵੇ, (ਭੰਗ ਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੋਵੇ) ਤਾਂ ਫਲਨ $f(x)$ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ **ਲਗਾਤਾਰ** (continuous) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਫਲਨ $f(x)$ ਕਿਸੀ ਵਿਵਰਿਤ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।
- ਫਲਨ $f(x)$ ਕਿਸੀ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ (closed interval) $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ
  (i) ਇਹ x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $a < x < b$
  (ii) $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ (iii) $\lim_{x \to b+0} f(x) = f(b)$.

2.16 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਕ੍ਰਮ (Sequence)–ਕ੍ਰਮ, ਸਿਲਸਿਲਾ।
- ਸਤਤ (Continually)–ਲਗਾਤਾਰ।

2.17 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 2ax + a^2}{x - a} \right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। **(ਉੱਤਰ : $-a$)**
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \log e \dfrac{a}{b}$.
3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। **(ਉੱਤਰ : 3)**
4. ਫਲਨ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \text{ ਉੱਤੇ।} \end{cases}$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਣ ਕਰੋ। **(ਉੱਤਰ : ਅਲਗਾਤਾਰ)**
5. ਦਰਸਾਓ ਕਿ $f(x) = |x|, x = 0$ ਉੱਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer : Self Assessment)

1. (*i*) ਦੱਖਣ ਪੱਖ ਸੀਮਾ (*ii*) ਵਾਮ ਪੱਖੀ ਸੀਮਾ (*iii*) ਵਜੂਦ (*iv*) ਸੀਮਾਂਤ (*v*) ਮੱਧਮਿਕ।
2. (*i*) (*a*) (*ii*) (*b*) (*iii*) (*c*) (*iv*) (*a*) (*v*) (*c*)

ਨੋਟ

2.18 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ. ।*
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ।*
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – *ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ।*
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – *ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ।*
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ।*
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ।*
7. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ।*
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ।*

ਇਕਾਈ–3: ਨਿਖੇੜਨ (Differentiation)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਨਿਖੇੜਨ–ਗੁਣਾਂਕ ਜਾਂ ਨਿਖੇੜਨਾ ਕੱਢਣ ਵਿੱਚ।
- ਕਿਸੀ ਅਚਰ ਰਾਰਸ਼ੀ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ–ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ।
- x^n ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ–ਗੁਣਾਂਕ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਲਈ।
- ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਅੰਤਰ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ–ਗੁਣਾਂਕ ਕੱਢਣ ਲਈ।

ਨੋਟ

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਮੰਨ ਲਿਓ $y = x^2$

ਜਦੋਂ $x = 2$, ਤਾਂ $y = 4$, ਜਦੋਂ $x = 3, y = 9$.

X, 2 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 3 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ y ਵੀ 4 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 9 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕੋਈ ਚਰ ਕਿੰਨਾ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਉਸਨੂੰ ਉਸਦੇ ਵਾਧੇ (Increment) ਕਹਿੰਦੇ ਹੈ। x ਦੇ ਵਾਧੇ ਨੂੰ ਲਗਭਗ δx ਦੁਆਰਾ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ 'ਡੇਲਟਾ ਐਕਸ' (delta x) ਕਹਿਕੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ $\delta x = 3 - 2 = 1$ ਅਤੇ $\delta y = 9 - 4 = 5$

ਜੇਕਰ x, 1 ਤੋਂ ਬਦਲਕੇ .8 ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ $\delta x = .8 - 1 = -2$.

ਨੋਟਸ ਇਹ ਧਿਆਨ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ δx ਕਰਕੇ ਅਰਥ $= \delta \times x$ ਨਹੀਂ ਹੈ ਭਾਵ ਇਹ δ ਅਤੇ x ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤੀਕ (Symbol) ਹੈ। ਇਹ ਏਕਲ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ।

ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦਾ ਮਾਨ x ਤੋਂ ਬਦਲਕੇ $x + \delta x$ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪਰਤੰਤਰ ਚਰ ਦਾ ਮਾਨ ਵੀ y ਤੋਂ ਬਦਲਕੇ $y + \delta y$ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

3.1 ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਜਾਂ ਨਿਖੇੜਨਾ (Differential Coefficient)

ਮਾਨ ਲਿਓ $y = x^2$, x ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ। ਮਾਨ ਲਿਓ x ਦਾ ਅਰੰਭਕ ਮਾਨ 3 ਹੈ।

ਹੇਠਲੀ ਸਾਰਨੀ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ x ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ δx ਹੋਣ ਤੇ y ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ δy ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਾਧਿਆਂ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤ $\frac{\delta y}{\delta x}$ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ x ਦੇ ਅਰੰਭਕ ਮਾਨ 3 ਵਿੱਚ 4, 3, 2, 1, ... ਆਦਿ ਦਾ ਵਾਧਾ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

δx	ਨਵਾਂ x $(x + \delta x)$	ਨਵਾਂ y $(y + \delta y)$	δy	$\frac{\delta y}{\delta x}$
4	7	49	40	10
3	6	36	27	9
2	5	25	16	8
1	4	16	7	7
0.1	3.1	9.61	.61	6.1
0.01	3.01	9.0601	.0601	6.01
0.001	3.001	9.006001	.006001	6.001
0.0001	3.0001	9.00060001	.00060001	6.0001
h	$3 + h$	$6 + 6h + h^2$	$6h + h^2$	$6 + h$

ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਸਪਟਸ਼ ਹੈ ਕਿ

1. ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ δx ਛੋਟਾ ਹੋ ਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵਧਦਾ ਹੈ (approaches zero) ਉਵੇਂ-ਉਵੇਂ δy ਵੀ ਛੋਟਾ ਹੋ ਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਭਰੰਤੂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $\frac{\delta y}{\delta x}$ ਛੋਟਾ ਹੋਣ ਤੇ ਵੀ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵਧਣ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਮਾਨ ਦੇ ਵੱਲੇ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ।

ਨੋਟ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ δx ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ δy ਬਹੁਤ ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ $\frac{\delta y}{\delta x}$, 6 ਦੇ ਵੱਲੇ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ,

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 6$$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $y = x^2$

$\therefore \quad y + \delta y = (x + \delta x)^2$

$\therefore \quad y + \delta y - y = (x + \delta x)^2 - x^2$

$\therefore \quad \delta y = x^2 + 2x.\delta x + (\delta x)^2 - x^2$

$\therefore \quad \delta y = 2x.\delta x + (\delta x)^2$

$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x$

$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = \lim_{\delta x \to 0} (2x + \delta x)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2x$

$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ ਨੂੰ ਫਲਨ y ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (Differential coefficient of y with respect to x) ਜਾਂ ਅਵਕਲਜ (Derivative) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਕਿਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਦੇਹ ਤੋਂ ਬਚਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ ਨੂੰ $\frac{d}{dx}(y)$ ਜਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਲਿਖਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਨਿਖੇੜਨ (Differentiation) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ $\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ $\frac{\delta y}{\delta x}$ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਸਾਵਧਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। $\frac{\delta y}{\delta x}$ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $\frac{dy}{dx}$ ਭਿੰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਬਲਕਿ $\frac{\delta y}{\delta x}$ ਦੇ ਸੀਮਾਂਤ ਮਾਨ (limiting value) ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਰਫ ਸੰਕੇਤ ਹੀ ਹੈ। dy ਨੂੰ dx ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਇਸਨੂੰ dy ਬਟੇ dx (dy upon dx) ਪੜ੍ਹਨਾ ਅਸ਼ੁੱਧ ਹੈ। $\frac{dy}{dx}$ ਨੂੰ ਡੀ ਡੀ ਐਕਸ ਆਫ ਵਾਈ [*d-dx* of *y*] ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੱਸ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ $\frac{d}{dx}(y)$ ਭਾਵ y ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ।

3.2 ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Definition)

ਜੇਕਰ x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ $f(x)$ ਅਤੇ $x + \delta x$ ਦਾ ਉਹੀ ਫਲਨ $f(x + \delta x)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

ਨੋਟ

ਦਾ ਸੀਮਾਂਤ ਮਾਨ (limiting value), x ਦੇ ਸਾਪੇਖ $f(x)$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਜਾਂ ਨਿਖੇੜਨਾ (differential coefficient) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ 1. ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (differential coefficient) ਨੂੰ $\frac{dy}{dx}, y', y_1, \frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x), f'(x), \mathrm{D}f(x), f'$ ਆਦਿ ਸੰਕੇਤਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ 2. ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (differential coefficient) ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ **ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨਾ** (differentiating the function) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਨਿਖੇੜਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਚਰ ਪਦ (steps) ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

ਪਹਿਲਾ ਪਦ–x ਨੂੰ $x + \delta x$ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ ਅਤੇ $f(x + \delta x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

ਦੂਜਾ ਪਦ– ਅੰਤਰ $f(x + \delta x) - f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

ਤਿੱਜਾ ਪਦ–ਅੰਤਰ ਨੂੰ δx ਨਾਲ ਵੰਡਣਾ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

ਚੌਥਾ ਪਦ–ਜਦੋਂ δx ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਵੱਲੇ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਉਦੋਂ ਅਨੁਪਾਤ $\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

ਟਿੱਪਣੀ–ਇੱਥੋਂ ਅੱਗੇ x ਦਾ ਵਾਧਾ δx ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ h ਲਿਖਿਆ ਜਾਏਗਾ ਤਾਂਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ δ ਅਤੇ x ਦੀ ਦੁਵਿਧਾ ਵਿੱਚ ਨਾ ਰਹੋ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ $f(x)$, x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ਨੂੰ $f(x)$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ h ਦਾ ਫਲਨ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ h ਨੂੰ ਚਰ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ x ਨੂੰ ਅਚਰ।

3.3 ਕਿਸੀ ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (Differential Coefficient of a Constant)

ਮੰਨ ਲਿਓ c ਕੋਈ ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ $f(x) = c$ ਹੁਣ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ।

ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f(x + h) = c$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} c = 0}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

3.4 ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (Differential Coefficient of the Product of a Constant and a Function)

ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ a ਕੋਈ ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਅਤੇ $f(x)$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\frac{d}{dx}\{af(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{af(x+h)-af(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ a \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}$$

$$= a \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \frac{d}{dx} \{f(x)\}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{af(x)\} = a \frac{d}{dx}\{f(x)\}}$$

ਜੇਕਰ $y = au$ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{du}{dx}$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਅਚਰ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਅਚਰ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

3.5 x^n ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ
(Differential Coefficient of x^n Respect to x)

ਮੰਨ ਲਿਓ $f(x) = x^n$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $f(x + h) = (x + h)^n$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x^n ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\frac{d}{dx}(x^n)$ ਹੈ।

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^n . \frac{(1+h/x)^n - 1}{h}, x^n \text{ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਕੱਢਕੇ।}$$

ਹੁਣ ਕਿਉਂਕਿ $h \to 0$, ਅਸੀਂ $\frac{h}{x}$ ਨੂੰ ਇਕਾਹੀ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ n ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $(1+h/x)^n$ ਦਾ ਦੋ ਪਦ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial Theorem) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d}{dx} x^n = \lim_{h \to 0} \frac{x^n}{h} \left\{ 1 + n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{h^2}{x^2} + \ldots\ldots - 1 \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n}{h} \left\{ n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{1.2} . \frac{h^2}{x^2} + \ldots\ldots \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^n \left\{ \frac{n}{x} + \frac{n(n-1)\,h}{1.2x^2} + \ldots\ldots \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^n \left\{ \frac{n}{x} + h \times (\text{ਇੱਕ ਅਭਿਸਾਰੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ}) \right\}$$

$$= nx^{n-1}, \text{ਕਿਉਂਕਿ } h \to 0$$

ਨੋਟ

$$\therefore \qquad \boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$$

ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਨਤੀਜਾ ਇਹ ਹੈ, $\boxed{\frac{d}{dx}x = 1}$

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\frac{d}{dx}(9x^7) = 9.\frac{d}{dx}(x^7) = 9.7x^{7-1} = 63x^6.$

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\frac{d}{dx}(-6x^2) = -6\frac{d}{dx}x^2 = -6.2x^{2-1} = -12x.$

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = -\frac{1}{2}x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}.$

ਟਾਸਕ $\frac{d}{dx}(5x^6)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ : $30x^5$**)

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

(*i*) ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਫਲਨ ਦਾ .... ਕਰਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(*ii*) ਅਚਰ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਅਚਰ ਦੇ .... ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(*iii*) $\frac{dy}{dx} = \text{.........}\frac{du}{dx}$ (*iv*) $\frac{d}{dx}x^n = nx\text{.........}$

(*v*) $\frac{d}{dx}(9x^7) = \text{.........}$

3.6 ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (Differential Coefficient of Sum and Subtract of Two Function)

ਮੰਨ ਲਿਓ $\qquad f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$

$\therefore \qquad f(x+h) = f_1(x+h) \pm f_2(x+h)$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h \to 0}\frac{\{f_1(x+h) \pm f_2(x+h)\} - \{f_1(x) \pm f_2(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{\{f_1(x+h) - f_1(x)\} \pm \{f_2(x+h) - f_2(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0}\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}$$

ਨੋਟ

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d}{dx}f_1(x) \pm \frac{d}{dx}f_2(x)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ :

ਮੰਨ ਲਿਓ $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm .... + f_n(x)$

ਤਾਂ
$$\boxed{\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}f_1(x) \pm \frac{d}{dx}f_2(x) \pm .... \pm \frac{d}{dx}f_n(x)}$$

ਨੋਟਸ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $y = u + v$, **ਤਾਂ** **ਜੇਕਰ** $y = u - v$ **ਤਾਂ**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{ਅਨੁਸਾਰ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, **ਜੇਕਰ** $y = u \pm v \pm w \pm ....$ **ਤਾਂ**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm ....$$

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\frac{d}{dx}(5x^7 + 2x)$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ:
$$\frac{d}{dx}(5x^7 + 2x) = \frac{d}{dx}(5x^7) + \frac{d}{dx}2x = 5\frac{d}{dx}(x^7) + 2\frac{d}{dx}(x)$$
$$= 5.7x^6 + 2 = 35x^6 + 2.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\frac{d}{dx}(x^5 - 4x^3 + 8x - 7)$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :
$$\frac{d}{dx}(x^5 - 4x^3 + 8x - 7) = \frac{d}{dx}x^5 + \frac{d}{dx}(-4x^3) + \frac{d}{dx}(8x) + \frac{d}{dx}(-7)$$
$$= \frac{d}{dx}(x^5) + (-4)\frac{d}{dx}x^3 + 8\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(-7)$$
$$= 5x^4 - 4 \times 3x^2 + 8 \times 1 - 0$$
$$= 5x^4 - 12x^2 + 8.$$
ਉੱਤਰ

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਵਿਉਤਪੰਨ ਉਪਰੋਕਤ ਸੀਮਾ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਪਰੰਤੂ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕੁੱਝ ਮਾਨਕ ਰੂਪਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਗਿਆਨ ਤੋਂ ਮੁਲਾਂਕਣ ਦੀ ਮਿਹਨਤ ਬਚਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਣਾਹਰਣ 3. ਫਲਨ $\left\{\frac{lx^2 + mx + n}{\sqrt{x}}\right\}$ **ਦਾ** x **ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :
$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{lx^2 + mx + n}{\sqrt{x}}\right\} = \frac{d}{dx}\{lx^{3/2} + mx^{1/2} + nx^{-1/2}\}$$

ਨੋਟ

$$= l\frac{d}{dx}x^{3/2} + m\frac{d}{dx}x^{1/2} + n\frac{d}{dx}x^{-1/2}$$

$$= l\,\frac{3}{2}x^{1/2} + m\,.\,\frac{1}{2}x^{1/2-1} + n\,.\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1/2-1}$$

$$= \frac{3}{2}\,lx^{1/2} + \frac{1}{2}mx^{-1/2} - \frac{1}{2}nx^{-3/2}.$$ ਉੱਤਰ

ਟਾਸਕ $\frac{d}{dx}(2x^7 + 5x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। **(ਉੱਤਰ : $14x^6 + 5$)**

ਉਦਾਹਰਣ 4. $1 + x + \left(\frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\right) + \ldots\ldots$ **ਫਲਨ ਦਾ x ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\frac{d}{dx}\left\{1 + x + \left(\frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\right) + \ldots\ldots\right\}$

$$= \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2!}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4!}\right) + \ldots$$

$$= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \ldots\ldots$$

$$= 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$ ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.1

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ:

1. $3x^3, x^{-5}, x^9$

2. $3x^2, 6x^{-3}, \frac{x^5}{3}$

3. $x^{1/2}, x^{7/3}, x^{-5/2}$

4. $\sqrt{x^3}, \sqrt{x}, \sqrt{x^{-7}}$

5. $3x^{1/3}, 5x^{1/7}, 2x^{1/4}$

6. $\frac{7}{x^2}, \frac{5}{x^{3/2}}, \frac{1}{x}$

7. $x + \frac{2}{x}$

8. $x^m + a^n$

9. $ax^2 + bx + c$

10. $(ax)^m + (2b)^m$

11. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{a}$

12. $y = (ax)^m + \left(\frac{b}{x}\right)^n$

13. $y = ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \ldots\ldots$

14. $y = a + \frac{a}{x} + \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^3 + \ldots\ldots$

15. ਜੇਕਰ $y = x^5 + 2x^4 + 7$, ਤਾਂ $x = 0$ ਪਰ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ $y = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉੱਤਰ

1. $9x^2, -5x^{-6}, 9x^8$
2. $6x, -18x^{-4}, \frac{5}{3}x^4$
3. $\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}, -\frac{5}{2}x^{\frac{-7}{2}}$
4. $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{-7}{2}x^{\frac{-9}{2}}$
5. $x^{\frac{-2}{3}}, \frac{5}{6}x^{\frac{-6}{7}}, \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{4}}$
6. $14x^{-3}, \frac{-15}{2}x^{\frac{-5}{2}}, -\frac{1}{x^2}$
7. $1 - \frac{2}{x^2}$
8. mx^{m-1}
9. $2ax + b$
10. $ma^m x^{m-1}$
11. $\frac{1}{4\sqrt{x}}$
12. $a^m mx^{m-1} - nb^n x^{-n-1}$
13. $a + 2ax + 3ax^2 + \ldots\ldots$
14. $-\frac{a}{x^2} - \frac{2a^2}{x^3} - \ldots\ldots$
15. $\frac{dy}{dx} = 0$
16. $n_{c_1} + 2n_{c_2}\, x + \ldots\ldots$

3.7 ਫਲਨ e^x ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ, ਜਦੋਂਕਿ e (Exponential) ਚਰ ਘਾਤੀ ਹੈ

(Differential Coefficient of Function e^x Respect to x when e is Exponential)

ਇੱਥੇ $\quad f(x) = e^x$

ਤਾਂ $\quad f(x+h) = e^{x+h}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ e^x ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\frac{d}{dx}e^x$ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ
$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!}\ldots\ldots - 1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x h\,\frac{\left(\frac{1}{1!} + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\ldots\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x \{1 + h \text{ ਇੱਕ ਅਭਿਸਾਰੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ}\}$$

$$= e^x \frac{1}{1!} + 0 = e^x.$$

$$\therefore \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

3.8 ਫਲਨ a^x ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ, ਜਦੋਂਕਿ a ਇੱਕ ਅਚਰ ਹੈ (Differential Coefficient of Function a^x Respect to x when a is a Non-variable)

ਇੱਥੇ $f(x) = a^x$

ਤਾਂ $f(x + h) = a^{x+h}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ a^x ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\frac{d}{dx} a^x$ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ
$$\frac{d}{dx} a^x = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \left[1 + \frac{h \log_e a}{1!} + \frac{h^2 (\log_e a)^2}{2!} + ... - 1\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \left[\frac{h \log_e a}{1!} + \frac{h^2 (\log_e a)^2}{2!} + ...\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x . h \left[\frac{\log_e a}{1!} + \frac{h (\log_e a)^2}{2!} + ...\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} a^x \left[\frac{\log_e a}{1!} + h\,(\text{ਇੱਕ ਅਭਿਸਾਰੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ})\right]$$

$$= a^x \left[\frac{\log_e a}{1!} + 0\right] = a^x \log_e a.$$

$$\therefore \qquad \boxed{\frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a}$$

3.9 ਫਲਨ $\log_e x$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ, ਜਦੋਂਕਿ ਅਧਾਰ ਚਰ ਘਾਤੀ ਹੈ (Differential Coefficient of Function $\log_e x$ Respect to x, when base is Exponential)

ਇੱਥੇ $f(x) = \log_e x$

ਤਾਂ $f(x + h) = \log_e (x + h)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\log_e x$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ $\dfrac{d}{dx}\log_e x$ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ
$$\frac{d}{dx}\log_e x = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e x\,(1+h/x)-\log_e x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e x+\log_e(1+h/x)-\log_e x}{h}$$
[ਸੂਤਰ: $\log_e(mn)=\log_e m+\log_e n$]
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h/x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h}{x}-\dfrac{h^2}{2x^2}+\dfrac{h^3}{3x^3}-\dfrac{h^4}{4x^4}+\ldots\ldots}{h}$$
$$\left[\text{ਸੂਤਰ: } \log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{h}{2x^2}+\dfrac{h^2}{3x^3}-\dfrac{h^3}{4x^4}+\ldots\ldots\right]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}-\frac{h}{2x^2}+\frac{h^2}{3x^3}-\frac{h^3}{4x^4}+\ldots\ldots\right\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}-h\times(\text{ਇੱਕ ਅਭਿਸਾਰੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ})\right\}=\frac{1}{x}.$$

$\therefore$
$$\boxed{\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x}}$$

ਨੋਟਸ

$\log_e x$ ਨੂੰ $\ln x$ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

3.10 ਫਲਨ $\log_a x$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ, ਜਦੋਂਕਿ ਲਘੂਗਣਕ ਦਾ ਅਧਾਰ ਕੋਈ ਅਚਰ ਹੈ (Differential Coefficient of Function $\log_a x$, Respect to x when base of Logrithimics is a Non-variable)

ਇੱਥੇ $f(x)=\log_a x=(\log_e x)\log_a e$ [ਸੂਤਰ ਤੋਂ]
$$=\log_a e.\log_e x$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ $\log_a x$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\dfrac{d}{dx}\log_a x$
$$=\frac{d}{dx}\log_a e.\log_e x=\log_a e\frac{d}{dx}\log_e x,$$

ਨੋਟ

$$= \log_a e.\frac{1}{x} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e}$$

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $6x^{1/3} + 2e^x$ **ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :
$$\frac{d}{dx}(6x^{1/3} + 2e^x) = \frac{d}{dx}(6x^{1/3}) + \frac{d}{dx}(2e^x)$$
$$= 6.\frac{d}{dx}(x^{1/3}) + 2\frac{d}{dx}(e^x)$$
$$= 6.\frac{1}{3}x^{-2/3} + 2e^x = 2x^{-2/3} + 2e^x.$$
ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. $6 \log x - \sqrt{x} - 7$ **ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :
$$\frac{d}{dx}(6\log x - \sqrt{x} - 7) = 6.\frac{d}{dx}\log x - \frac{d}{dx}(x^{1/2}) - \frac{d}{dx}(7)$$
$$= 6.\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^{-1/2} - 0 = \frac{6}{x} - \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$
ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਫਲਨ $5\sqrt{x} + 7\log_e x - 11\log_a x$ **ਦਾ** x **ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ:
$$\frac{d}{dx}(5\sqrt{x} + 7\log_e x - 11\log_a x) = \frac{d}{dx}(5x^{1/2}) + \frac{d}{dx}(7\log_e x) - \frac{d}{dx}(11\log_a x)$$
$$= 5\frac{d}{dx}x^{1/2} + 7.\frac{d}{dx}\log_e x - 11.\frac{d}{dx}\log_a x$$
$$= \frac{5}{2}x^{-1/2} + \frac{7}{x} - 11\log_a e.\frac{1}{x}.$$
ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.2

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x **ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :**

1. $e^x + \log_e x + l^x$
2. $\frac{1}{2x} + 7e^x$
3. $\frac{x^3\log_e x + x - x^3e^x}{x^3}$
4. $5\log_{10} x + 3$
5. $3\log_e x + x^{3/2} + 3$
6. $x(1 + x^2) + a^x$
7. $e^x + a^x + 1$
8. $\log_a x + \log_e x^2$
9. $\log_{10} x$
10. $7x^{-2/7} + \log_2 x$
11. $\frac{xe^x - 1}{x}$
12. $\sqrt{a + 2a^2e^x + a^3e^{2x}}$

13. $\sqrt[3]{1 + 3\log_a x + 3(\log_a x)^2 + (\log_a x)^3}$ **14.** $\log_e \sqrt{x} + a^x + 3$

15. $\frac{1}{a^x} + \log_a x.$

ਉੱਤਰ

1. $e^x + \frac{1}{x} + l^x \log_e l$ 2. $-\frac{1}{2x^2} + 7e^x$ 3. $\frac{1}{x} - 2x^{-3} - e^x$

4. $\frac{5}{x}\log_{10} e$ 5. $\frac{3}{x} + \frac{3}{2}x^{1/2}$ 6. $1 + 3x^2 + a^x \log_e a$

7. $e^x + a^x \log_e a$ 8. $\frac{1}{x}\log_e a + \frac{2}{x}$ 9. $\frac{1}{x}\log_{10} e$

10. $-2x^{-9/7} + \frac{1}{x}\log_2 e$ 11. $e^x + x^{-2}$ 12. $a^{3/2} e^x$

13. $\frac{1}{x}\log_a e$ 14. $\frac{1}{2x} + a^x \log_e a$ 15. $-a^{-x}\log_e a + \frac{1}{x}\log_a e$

3.11 ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ
(Differential Coefficient of the Quotient of Two Functions)

ਮੰਨ ਲਿਓ $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ਤਾਂ $F(x+h) = \frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)f_2(x) - f_1(x)f_2(x+h)}{hf_2(x+h)f_2(x)}$$

ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ $f_1(x)\,f_2(x)$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਅਤੇ ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f_2(x)\{f_1(x+h) - f_1(x)\} - f_1(x)\{f_2(x+h) - f_2(x)\}}{hf_2(x+h)f_2(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f_2(x)\left\{\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}\right\} - f_1(x)\left\{\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}\right\}}{f_2(x+h)f_2(x)}$$

$$= \frac{f_2(x)\cdot\frac{d}{dx}f_1(x) - f_1(x)\frac{d}{dx}f_2(x)}{[f_2(x)]^2}$$

ਭਾਵ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (Diff. Coeff.)

$$= \frac{\text{(ਹਰ) ਅੰਸ਼ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ) – (ਅੰਸ਼) (ਹਰ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ –ਗੁਣਾਂਕ)}}{\text{ਹਰ ਦਾ ਵਰਗ}}$$

$$= \frac{\text{Denr. (Diff. Coeff. of Numr.) – Numr.(Diff.Coeff. of Denr.)}}{\text{Square of Denominator}}$$

ਨੋਟ

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ

$$\left[\begin{array}{l} \text{ਜੇਕਰ } y = \dfrac{u}{v} \text{ ਤਾਂ} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}. \end{array}\right]$$

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ $y = \frac{e^x}{x}$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}e^x - e^x\frac{d}{dx}x}{x^2} = \frac{xe^x - e^x.1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\log_e x}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\log_e x}\right) = \frac{\log_e x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\log_e x)}{(\log_e x)^2}$$

$$= \frac{(\log_e x)\cdot \cos x - (\sin x)\cdot \frac{1}{x}}{(\log_e x)^2}$$

$$= \frac{x\log_e x \cos x - \sin x}{x(\log_e x)^2}.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਫਲਨ $\frac{x^n}{\log_e x}$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^n}{\log_e x}\right\} = \frac{\log_e x\frac{d}{dx}x^n - x^n\frac{d}{dx}\log_e x}{(\log_e x)^2}$$

$$= \frac{\log_e x . nx^{n-1} - x^n \cdot \frac{1}{x}}{(\log_e x)^2} = \frac{nx^{n-1}\log_e x - x^{n-1}}{(\log_e x)^2}$$

$$= \frac{x^{n-1}(n\log_e x - 1)}{(\log_e x)^2}.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜੇਕਰ $y = \frac{x}{x+5}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$x\frac{dy}{dx} = y(1-y).$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ,
$$y = \frac{x}{x+5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+5)\cdot\frac{d}{dx}(x) - x\cdot\frac{d}{dx}(x+5)}{(x+5)^2} = \frac{(x+5).1 - x.1}{(x+5)^2}$$

$\therefore$
$$= \frac{x+5-x}{(x+5)^2} = \frac{5}{(x+5)^2} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{(x+5)^2} \quad \ldots(1)$$

ਅਤੇ
$$y(1-y) = \frac{x}{x+5}\left(1 - \frac{x}{x+5}\right) = \frac{x}{x+5}\left(\frac{5}{x+5}\right) = \frac{5x}{(x+5)^2} \quad \ldots(2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ,

$$x\frac{dy}{dx} = y(1-y).$$

ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.3

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\frac{1}{x^{1/4}}$

2. $\frac{x^n}{\log_e x}$

3. $\frac{x}{a^2+x^2}$

4. $\frac{x^2}{e^2+x^2}$

5. $\frac{e^x}{1+x^2}$

6. $\frac{e^x}{1+e^x}$

7. ਜੇਕਰ $f(x) = \frac{x^3}{a^2-x^2}$ ਤਾਂ $f'\left(\frac{a}{2}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਜੇਕਰ $y = \frac{x-4}{2\sqrt{x}}$ ਤਾਂ $x = 4$ ਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ $x = 0$ ਉੱਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮਾਨ ਮਿਲ ਸਕਦਾ ਹੈ?

9. ਜੇਕਰ $y = \frac{5x^2+6x+7}{2x^2+3x+4}$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਜੇਕਰ $y = \frac{a^x}{x^n}$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਨਿਮਨ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ:

11. **(*i*)** $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$ **(*ii*)** $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

12. **(*i*)** $\frac{xe^x-1}{x}$ **(*ii*)** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$

ਨੋਟ

ਉੱਤਰ

1. $-\frac{1}{4}x^{-5/4}$
2. $\frac{nx^{n-1}\log_e x - x^{n-1}}{(\log_e 2)^2}$
3. $\frac{a^2 - x^2}{(a^2+x^2)^2}$
4. $\frac{2xe^2}{(e^2+x^2)^2}$
5. $\frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$
6. $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$
7. $\frac{11}{19}$
9. $\frac{3(x^2+4x+1)}{(2x^2+2x+4)^2}$
10. $\frac{a^x}{x^n}[\log_e a - \frac{n}{x}]$
11. (i) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}$ (ii) $\frac{-4}{[e^x - e^{-x}]^2}$
12. (i) $e^x + \frac{1}{x^2}$ (ii) $\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$
13. $\frac{3x^2 + 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca)}{(x+a)^2(x+b)^2(x+c)^2}$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

2. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)-

(i) $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d}{dx}f_1(x) \pm$ ....

(a) $\frac{d}{dx}f_2$ (b) $\frac{d}{dx}f_1$ (c) $\frac{d}{dx}f(x)$ (d) $\frac{d}{dx}\{f(x)\}$

(ii) $\frac{d}{d(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?

(a) $\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ (b) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ (c) $-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ (d) $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$

(iii) $3x^3$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਕਿੰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ?

(a) $6x^2$ (b) $3x^2$ (c) $9x^2$ (d) $9x$

(iv) $\frac{d}{dx}(e^x) =$ ....

(a) e (b) 1 (c) $e^{\frac{1}{x}}$ (d) e^x

(v) $\frac{d}{dx}\log_a x =$ .... $\log_a e$

(a) $\frac{1}{x}$ (b) x (c) $\log_a$ (d) $\log x$

3.12 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- $\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$ ਨੂੰ ਫਲਨ y ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪਖੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (Differential coefficient of y with respect to x) ਜਾਂ ਅਵਕਲਜ (Derivative) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਕਿਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਦੇਹ

ਤੋਂ ਬਚਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ ਨੂੰ $\frac{dy}{dx}(y)$ ਜਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਲਿਖਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੀਮਾ ਪਤਾਕਰਨ ਦੀ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਨਿਖੇੜਨ (Differentiation) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

- ਜੇਕਰ x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ $f(x)$ ਅਤੇ $x + \delta x$ ਦਾ ਉਹੀ ਫਲਨ $f(x + \delta x)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\lim_{x+0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ ਦਾ ਸੀਮਾਂਤ ਮਾਨ (limiting value), x ਦੇ ਸਾਪੇਖ $f(x)$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (differential coefficient) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d}{dx} f_1(x) \pm \frac{d}{dx} f_2(x)$
- ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a$ ਭਾਵ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (Diff. Coeff.)

3.13 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ (Differential Coefficient) **–** ਅਵਕਲਜ।
- ਵਾਧਾ (growth) – ਵਾਧਾ।

3.14 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. $\frac{d}{dx}(-6x^2)$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $-12x$)
2. $\frac{d}{dx}(5x^6 + 2x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $30x^5 + 2$)
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a$.
4. $6 \log x - \sqrt{x} - 7$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\frac{6}{x} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$)
5. ਜੇਕਰ $y = \frac{x}{x+5}$ ਤਾਂ ਸਾਬਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $x\frac{dy}{dx} = y(1-y)$ ।

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. (*i*) ਨਿਖੇੜਨ (*ii*) ਗੁਣਨਫਲ (*iii*) *a* (*v*) $n - 1$ (*v*) $63x^6$
2. (*i*) (*a*) (*ii*) (*b*) (*iii*) (*c*) (*iv*) (*d*) (*v*) (*a*)

3.15 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
2. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
7. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।

ਇਕਾਈ–4: ਲਘੂਗਣਕ ਨਿਖੇੜਨ (Logarithmic Differentiation)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਲਘੂਗਣਕ ਨਿਖੇੜਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।
- ਅਨੰਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਕੱਢਣ ਲਈ।
- ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਨ ਲਈ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਜੇਕਰ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਾਤ ਅੰਕ ਵੀ ਉਸੀ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਉਹ ਫਲਨ ਜਿਸਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨਾਂ ਹੋਵੇ ਕਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਾਂ ਭਾਗਫਲ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ **ਲਘੂਗਣਕ ਨਿਖੇੜਨ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

4.1 ਲਘੂਗਣਕ ਨਿਖੇੜਨ (Logarithmic Differentiation)

x ਦੇ ਪਤਾ ਫਲਨ ਨੂੰ y ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਮਾਨ ਲਿਓ। ਹੁਣ ਦੋਨੋਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਲਘੂਗਣਕ ਲਿਓ ਜਿਸ ਨਾਲ ਘਾਤ ਅੰਕ ਗੁਣਾ ਵਿੱਓ, ਗੁਣਾ ਜੋੜ ਵਿੱਚ, ਆਦਿ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਣਗੇ।

ਹੁਣ ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਕੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ y ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ y ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ $\frac{dy}{dx}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਨੋਟ

ਸਾਵਧਾਨੀ $\log (a + b) \neq \log a + \log b$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $y = x^x + (\sin x)^{\cos x}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $\log y \neq \log x^x + \log (\sin x)^{\cos x}$.

ਅਜਿਹੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰ ਪਦ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਪਏਗਾ। ਫਿਰ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸੰਯੁਕਤ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

ਨੋਟਸ ਕੁੱਝ ਉਪਯੋਗੀ ਸੂਤਰ:

(*i*) $\log (m. n) = \log m + \log n$

(*ii*) $\log\left(\frac{m}{n}\right) = \log m - \log n$

(*iii*) $\log (m)^n = n \log m$.

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਫਲਨ $e^x . \log_e x . \tan x$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $y = e^x . \log_e x. \tan x$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਲੁਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \log e^x + \log (\log_e x) + \log \tan x$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x}(e^x) + \frac{1}{\log_e x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\tan x}(\sec^2 x)$$

$$= 1 + \frac{1}{x \log_e x} + \frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \frac{1}{x \log_e x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 1 + \frac{1}{x \log_e x} + 2\operatorname{cosec} 2x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[1 + \frac{1}{x \log_e x} + 2\operatorname{cosec} 2x\right]$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{dy}{dx} = e^x \log_e x \tan x \left[1 + \frac{1}{x \log_e x} + 2\operatorname{cosec} 2x\right].$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ $y = x^{\sin^{-1} x}$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $y = x^{\sin^{-1} x}$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ log ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \log x^{\sin^{-1} x} = \sin^{-1} x . \log x$$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin^{-1}x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{x} \cdot \sin^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \log x\right]$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{1}{x}\sin^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \log x\right].$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਫਲਨ 10^x ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ 10 ਇੱਕ ਅਚਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $y = 10^x$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \log 10^x$$

ਜਾਂ $$\log y = x \log 10$$

ਜਾਂ $$\log y = x.$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$y = 10^x$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = 10^x.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਫਲਨ $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $$y = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$\log y = \log\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

ਜਾਂ $$\log y = \log 1 - \log(x+a) - \log(x+b) - \log(x+c)$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+c}$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = -y\left[\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c}\right]$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\left[\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c}\right].$$ **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ $(\sin y)^x = a$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $(\sin y)^x = a$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਲਘੁਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log (\sin y)^x = \log a$$

ਜਾਂ $$x \log \sin y = \log a$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$x \cdot \frac{1}{\sin y} \cdot \cos y \frac{dy}{dx} + \log \sin y = 0$$

$$x \cot y \frac{dy}{dx} = -\log \sin y$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\log \sin y}{x \cot y}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਜੇਕਰ $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $(\cos x)^y = (\sin y)^x$

ਦੋ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਲਘੁਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$y \log \cos x = x \log \sin y$$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$y \frac{1}{\cos x} x^{-\sin x} + \log \cos x \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{\sin y} \cdot \cos y \cdot \frac{dy}{dx} + \log \sin y \cdot 1$$

$$-y \tan x + \log \cos x \frac{dy}{dx} = x \cot y \frac{dy}{dx} + \log \sin y$$

$$\frac{dy}{dx}(\log \cos x \_ x \cot y) = (\log \sin y + y \tan x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log \sin y + y \tan x}{\log \cos x - x \cot y}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 7. $\log (xy) = x^2 + y^2$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\log (xy) = x^2 + y^2$

$\log x + \log y = x^2 + y^2$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਤੋਂ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - 2y\right) = 2x - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1-2y^2}{y}\right) = \frac{2x^2-1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.1

ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰੋ–

1. x^x.
2. $x^{\sin x}$.
3. $(\log x)^x$.
4. $(1 + x)^x$.
5. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
6. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
7. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
8. $x^x + a^x + x^a$.
9. $\dfrac{x\sqrt{1+x}}{(1+x^2)^{3/2}}$.
10. e^{x^x}.
11. $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$.
12. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{\sqrt{x-c}}$.
13. $(x \log x)^{\log \log x}$.
14. ਜੇਕਰ $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.
15. ਜੇਕਰ $y = 10^{10^x}$, ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
16. ਜੇਕਰ $y = \dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉੱਤਰ

1. $[x^x(1 + \log x)]$
2. $[\sin x (\cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x})]$
3. $(\log x)^x (\log \log x + \dfrac{1}{\log x})$
4. $(1+x)^x \left[\dfrac{x}{1+x} + \log(1+x)\right]$
5. $(x - 2)(x - 3) + (x - 11)(x - 3) + (x - 1)(x - 2)$
6. $\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$
7. $\dfrac{-1}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}}$
8. $x^x \log_e x + a^x \log_e a + ax^{a-1}$
9. $\dfrac{2+3x-4x^2-3x^3}{2\sqrt{(1+x)}\,(1+x^2)^{5/2}}$
10. $e^{x^x} x^x (1 + \log_e x)$
11. $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}\left(\dfrac{1-x^2}{x^4+x^2+1}\right)$

ਨੋਟ

12. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{\sqrt{x-c}}\left[\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{2(x-c)}\right]$ 13. $(x \log x)(\log\log x-1)$

14. $10^x \cdot 10^{10^x} (\log_e 10)^2$ 15. $\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\left[\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{3}{x+4}-1\right]$

4.2 ਅਨੰਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ (Sums of Infinite Tables)

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ $y = x^{x^{x\cdots\infty}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{1-y\log x}$.

ਹੱਲ : $y = x^{x^{x\cdots\infty}} = x^y$ ਕਿਉਂਕਿ $x^{x^{x\cdots\infty}} = y$

ਲਘੁਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ $\log y = y \log x$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = y\cdot\frac{d}{dx}\log x + \log x\,\frac{dy}{dx}$$

$$= y\cdot\frac{1}{x} + \log x\,\frac{dy}{dx}.$$

$\therefore$
$$\left(\frac{1}{y}-\log x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-y\log x}.$$
ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\ldots\ldots\infty}}}$, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{2y-1}$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\ldots\ldots\infty}}}$,

$\Rightarrow$ $y=\sqrt{\sin x+y}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $y^2 = \sin x + y$, ਵਰਗ ਕਰਨ ਤੇ

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx}$$

$$(2y-1)\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}.$$
ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ $y=e^{x+e^{x+e^{x+\cdots\infty}}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1-y}$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $y = x^{x+e^{x+e^{x+\cdots\infty}}}$

$\Rightarrow$ $y = e^{x+y}$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਲਘੁਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ,

ਨੋਟ

$$\log y = \log \{e^{x+y}\}$$
$$= (x + y) \log e$$
$$= x + y, \qquad [\because \log e = 1]$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{y} - 1\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1-y}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}.$$

ਉੱਤਰ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜੇਕਰ $y = a^{x^{a^{x\ldots\infty}}}$ **ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 logy}{x(1 - ylogx.logy)}$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\quad y = a^{x^{a^{x\ldots\infty}}} = a^{x^y}$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਲਘੁਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = x^y \log a$$

ਦੁਬਾਰਾ ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਲਘੁਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log(\log y) = y \log x + \log(\log a)$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਤੇ

$$\frac{1}{\log y}\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y\cdot\frac{1}{x} + \frac{dy}{dx}(\log x) + 0$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{y\log y} - \log x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \left(\frac{1 - y\log x\,.\log y}{y\log y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2\log y}{x(1 - y\log x\,.\log y)}.$$

ਉੱਤਰ

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

(i) ਅਜਿਹੇ ਫਲਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਲਘੁਗਣਕ ਲੈ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਉਸਨੂੰ .... ਨਿਖੇੜਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(ii) $\log\left(\frac{m}{n}\right) = \log m -$ ....

(iii) $\log (m)^n$ .... $\log m$

ਨੋਟ

(iv) .... $= \log m + \log n$

(v) $\log\left(\dfrac{25}{12}\right) = \log 25 - \log$ ....

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.2

ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਜੇਕਰ $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...\infty}}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(2y-1)\dfrac{dy}{dx} = 1$.

2. ਜੇਕਰ $y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + ...\infty}}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(2y-1)\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$.

3. ਜੇਕਰ $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}....\infty}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{2 - y\log x}$.

4. ਜੇਕਰ $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)....\infty}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 \cot x}{1 - y\log(\sin x)}$.

5. ਜੇਕਰ $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + ... + \infty}}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x(2y-1)}$.

6. ਜੇਕਰ $y = x^2 + \cfrac{1}{x^2 + \cfrac{1}{x^2 + ...}}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy^2}{1+y^2}$.

4.3 ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ (Implict Function)

ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਸਮੀਕਰਣ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸਨੂੰ ਤੁਰੰਤ y ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ, ਤਾਂ y ਨੂੰ x ਦਾ ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ (implict function) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ y ਦਾ ਮਾਨ x ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ, ਤਾਂ y ਨੂੰ x ਦਾ ਸਪਟਸ਼ ਫਲਨ (explict function) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ

ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ–ਕਿਸੀ ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ (Implict Function) ਦੁਆਰਾ dy/dx ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ dy/dx ਦੇ ਪਦ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਕਰਕੇ ਉਸਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ: $ax^2 + 2hxy + by^2 = 2$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$a\,.\frac{d}{dx}(x^2) + 2h\frac{d}{dx}(xy) + b\,.\frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

ਜਾਂ $$2ax + 2h\left(x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 1\right) + 2by \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ਜਾਂ $$2(hx + by)\frac{dy}{dx} = -2(ax + hy)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{ax + hy}{hx + by}\right).$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$a\frac{d}{dx}(x^2) + 2h \cdot \frac{d}{dx}(xy) + b \cdot \frac{d}{dx}(y^2) + 2g \cdot \frac{d}{dx}(x) + 2f \cdot \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(c) = 0$$

ਜਾਂ $$a(2x) + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + b\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2g \cdot 1 + 2f \cdot \frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

ਜਾਂ $$2(hx + by + f)\frac{dy}{dx} = -2(ax + hy + g)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(ax + hy + g)}{(hx + by + f)}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ $y = x^y$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $y = x^y$, ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = y \log x.$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= y \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{1}{y} - \log x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜੇਕਰ $\sin y = x\sin(a + y)$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a}$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $\sin y = x\sin(a + y)$ ਜਾਂ $x = \frac{\sin y}{\sin(a + y)}$

ਹੁਣ ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

ਨੋਟ

$$1 = \frac{\sin(a+y)\,.\,\frac{d}{dx}\sin y - \sin y\,.\,\frac{d}{dx}\sin(a+y)}{\{\sin(a+y)\}^2}$$

ਜਾਂ $$\sin^2(a+y) = \sin(a+y)\,.\,\cos y\,\frac{dy}{dx} - \sin y\,.\,\cos(a+y)\,\frac{dy}{dx}$$

ਜਾਂ $$\sin^2(a+y) = \{\sin(a+y)\cos y - \sin y\cos(a+y)\}\,\frac{dy}{dx}$$

ਜਾਂ $$\sin^2(a+y) = \sin(a+y-y)\,\frac{dy}{dx}$$

ਜਾਂ $$\sin a\,\frac{dy}{dx} = \sin^2(a+y)$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ $x^y = e^{x-y}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $x^y = e^{x-y}$, ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$y\log_e x = (x-y)\log e \text{ ਜਾਂ } y\log_e x = x - y$$

ਜਾਂ $y(1+\log x) = x$ ਜਾਂ $$y = \frac{x}{1+\log x}$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x).1 - x(1/x)}{(1+\log x)^2} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}.$$

ਟਾਸਕ $x^{\sin x}$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। **ਉੱਤਰ :** $[\sin x\,(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x})]$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.3

$\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. $xy = c$.
2. $x^2 + y^2 = a^2$.
3. $3x^2 + y^2 = 5$.
4. $5x^2 + 5y^2 - 11x - 9y - 12 = 0$.
5. $x^n + y^n = a^n$.
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
7. $y^2 = 4ax$
8. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
9. ਜੇਕਰ $x^p y^q = (x+y)^{p+q}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
10. $x^y + y^x = a^b$
11. $y^x = x^y$
12. $x^x + y^y = 1$

ਨੋਟ

13. ਜੇਕਰ $y\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{(1-y^2)} = 1$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(1-y^2)}{(1-x^2)}} = 0.$$

14. ਜੇਕਰ $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

15. ਜੇਕਰ$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = -(1+x)^{-2}.$$

ਉੱਤਰ

1.	$-\frac{y}{x}$	2.	$-\frac{x}{y}$	3.	$\frac{-3x}{y}$
4.	$-\frac{(10x-11)}{10y-9}$	5.	$-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$	6.	$\frac{-b^2x}{a^2y}$
7.	$\frac{2a}{y}$	8.	$\frac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}$	10.	$\frac{-yx^{y-1}+y^x\log y}{xy^{x-1}+x^y\log x}$
11.	$\frac{y(y-x\log x)}{x(x-y\log x)}$	12.	$-\frac{x^x[1+\log x]}{y^y(1+\log y)}$		

4.4 ਮਾਪਦੰਡਕ ਫਲਨ (Parametric Function)

ਕਦੀ–ਕਦੀ x ਅਤੇ y ਦੋਨੋਂ ਕਿਸੀ ਤਿੱਜੀ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਿੱਜੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਮਾਪਦੰਡ (Parameter) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ **ਮਾਪਦੰਡਕ ਸਮੀਕਰਣ** ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਮਾਪਦੰਡ ਦਾ ਲੋਪਨ (elimination) ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ dy/dx ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਜਿਵੇਂ, ਜੇਕਰ $x = f_1(t)$ ਅਤੇ $y = f_2(t)$; ਜਿੱਥੇ t ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਅਤੇ x ਅਤੇ y ਪਰਤੰਤਰ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}.$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ y ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ–ਗੁਣਾਂਕ, ਮਾਪਦੰਡ ਦੇ ਸਾਪੇਖ y ਅਤੇ x ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ–ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਭਾਗਫਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ $x = at^2$ ਅਤੇ $y = 2at$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $x = at^2$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ t ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

ਨੋਟ

$$\frac{dx}{dt} = 2at$$

ਅਤੇ $$y = 2at$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ t ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ $x = a\cos\theta$ ਅਤੇ $y = b\sin\theta$, ਤਾਂ dy/dx ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$ ਅਤੇ $\frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\frac{b}{a}\cot\theta$$

ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.4

$\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$
2. $x = \cos t,\ y = \sin t.$
3. $x = \log t,\ y = e^t + \cos t.$
4. ਜੇਕਰ $x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

   (*i*) $\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ (*ii*) $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਦੋਂ $t = \frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਉੱਤਰ

1. $\frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$ 2. $-\cot t$ 3. $t\,(e^t - \sin t)$

4. (*ii*) $-3/2$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

2. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)–

(*i*) ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਸਮੀਕਰਣ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸਨੂੰ ਤੁਰੰਤ y ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ, ਤਾਂ y ਨੂੰ x ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਫਲਨ ਕਹਾਂਗੇ?

(*a*) ਅਸਪਸ਼ਟ (*b*) ਸਪਸ਼ਟ (*c*) ਸਮਾਂਤਰ (*d*) ਸੰਗਤ

(*ii*) ਜੇਕਰ y ਦਾ ਮਾਨ x ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ, ਤਾਂ y ਨੂੰ x ਦਾ ਕਿਹਾੜਾ ਫਲਨ ਕਹਾਂਗੇ?

(*a*) ਅਸਪਸ਼ਟ (*b*) ਸਪਸ਼ਟ (*c*) ਸਮਾਂਤਰ (*d*) ਸੰਗਤ

(iii) $xy = c$ ਦਾ ਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ– ਨੋਟ

(a) $-\frac{x}{y}$ (b) $\frac{x}{y}$ (c) $-\frac{y}{x}$ (d) $\frac{y}{x}$

4.5 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਜੇਕਰ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਾਤ ਅੰਕ ਵੀ ਉਸੀ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਉਹ ਫਲਨ ਜਿਸਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ ਕਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਾਂ ਭਾਗਫਲ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ **ਲਘੂਗਣਕੀ ਨਿਖੇੜਨ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- $\log (m \,.\, n) = \log m + \log n$
- $\log \left(\frac{m}{n}\right) = \log m - \log n$
- $\log (m)^n = n \log m.$
- ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਸਮੀਕਰਣ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸਨੂੰ ਤੁਰੰਤ y ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ, ਤਾਂ y ਨੂੰ x ਦਾ ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ (implicit function) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ y ਦਾ ਮਾਨ x ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ, ਤਾਂ y ਨੂੰ x ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ (explicit function) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਕਦੀ-ਕਦੀ x ਅਤੇ y ਦੋਨੋਂ ਕਿਸੀ ਤਿੱਜੀ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਿੱਜੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਮਾਪਦੰਡ (Parameter) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ **ਮਾਪਦੰਡਕ ਸਮੀਕਰਣ** ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।

4.6 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਫਲਨ (Function) – ਕਾਰਜ।
- ਅਨੰਤ (Infinite) – ਜਿਸਦਾ ਅੰਤ ਨਾ ਹੋਵੇ।

4.7 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਜੇਕਰ $y = x^{\sin^{-1} x}$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $x^{\sin^{-1} x}\left[\frac{1}{x}\sin^{-1} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\log x\right]$)
2. ਜੇਕਰ $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\frac{\log \sin y + y \tan x}{\log \cos x - x \cot y}$)
3. ਜੇਕਰ $y = x^y$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y \log x}$.
4. ਜੇਕਰ $x = a \cos \theta$ ਅਤੇ $y = b \sin \theta$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਰਿਕਲਿਤ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $-\frac{b}{a}\cot \theta$)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. *(i)* ਲਘੂਗਣਕ *(ii)* $\log n$ *(iii)* n *(iv)* $\log (m.\, n)$ *(v)* 12
2. *(i)* *(a)* *(ii)* *(b)* *(iii)* *(c)*.

ਨੋਟ

4.8 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
2. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
6. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।

ਇਕਾਈ-5: ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਉੱਚਤਰ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ (Second and Higher Order Differentiation)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਉੱਪਰੋਥਲੀ ਨਿਖੇੜਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਜੇਕਰ y, x ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਵੀ x ਦਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਨੂੰ y ਦਾ ਦੂਜਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਤਿੱਜਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਨਾਂਵ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

5.1 ਉੱਪਰੋਥਲੀ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ (Successive Differentiation)

ਜੇਕਰ, y, x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ y ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਭਾਵ $\frac{dy}{dx}$ ਵੀ x ਦਾ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਫਿਰ ਤੋਂ ਨਿਖੇੜਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ਨੂੰ y ਦਾ **ਦੂਜਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ y ਦੇ ਦੂਜੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਨੂੰ y ਦਾ **ਤਿੱਜਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਨਿਖੇੜਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, ...$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉੱਪਰੋਥਲੀ ਅਵਕਲਜ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਸੰਕੇਤਨ ਨਿਮਨ ਤਾਲਿਕਾ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ-

ਮੂਲ ਫਲਨ $y = f(x)$	ਸਧਾਰਣ ਸੰਕੇਤਨ	ਹੋਰ ਸੰਕੇਤਨ
ਪਹਿਲਾ ਅਵਕਲਜ	$\frac{dy}{dx}$	$f'(x), Dy, y_1$
ਦੂਜਾ ਅਵਕਲਜ	$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$	$f''(x), D^2y, y_2$

ਨੋਟ

ਤਿੱਜਾ ਅਵਕਲਜ	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$	$f'''(x), D^3y, y_3$
....	....	....
nਵਾਂ ਅਵਕਲਜ	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^ny}{dx^n}$	$f^n(x), D^ny, y_n$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $y = x^7$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx} = 7x^6$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}(7x^6) = 42x^5$$

ਅਤੇ $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(42x^5) = 210x^4.$$

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ ਤਾਂ $f''''(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ,

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$
$$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e + 0$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d + 0$$
$$f'''(x) = 60ax^2 + 24bx + 6c + 0$$
$$f''''(x) = 120ax + 24b.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ $y = A \sin mx + B \cos mx$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0.$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $y = A \sin mx + B \cos mx$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ,

$$\frac{dy}{dx} = A \cos mx . \frac{d}{dx}(mx) + B(-\sin mx).\frac{d}{dx}(mx)$$
$$= Am \cos mx - Bm \sin mx$$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਦੁਬਾਰਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Am(-\sin mx).\frac{d}{dx}(mx) - Bm \cos mx.\frac{d}{dx}(mx)$$
$$= -Am^2 \sin mx - Bm^2 \cos mx$$
$$= -m^2(A \sin mx + B \cos mx) = -m^2y$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0.$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ $y = \sin(\sin x)$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $y_2 + y_1 \tan x + y \cos^2 x = 0$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $y = \sin(\sin x)$

$$y_1 = [\cos(\sin x)].\cos x \qquad ....(1)$$

ਨੋਟ

ਦੁਬਾਰਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\begin{aligned} y_2 &= [\cos(\sin x)].(-\sin x) + \cos x.[-\sin(\sin x)]\cos x \\ &= -\sin x\cos(\sin x) - \cos^2 x\sin(\sin x) \\ &= -\sin x\cos(\sin x) - y\cos^2 x, \qquad [\because y = \sin(\sin x)] \\ &= -\sin x.\frac{y_1}{\cos x} - y\cos^2 x, \qquad [(1) \text{ ਤੋਂ}] \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $y_2 + y_1\tan x + y\cos^2 x = 0$.

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜੇਕਰ $y = e^{ax}\sin bx$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + a^2)y = 0$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $y = e^{ax}\sin bx$ ...(1)

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{ax}\frac{d}{dx}(\sin bx) + \sin bx.\frac{d}{dx}(e^{ax}) \\ &= e^{ax}\cos bx.\frac{d}{dx}(bx) + \sin bx.e^{ax}.\frac{d}{dx}(ax) \\ &= be^{ax}\cos bx + ae^{ax}\sin bx \\ &= be^{ax}\cos bx + ay, \text{ [ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੋਂ]} \qquad ...(2) \end{aligned}$$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਦੁਬਾਰਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= b\left[e^{ax}.\frac{d}{dx}(\cos bx) + \cos bx.\frac{d}{dx}(e^{ax})\right] + a\frac{dy}{dx} \\ &= b\left[e^{ax}.(-\sin bx).\frac{d}{dx}(bx) + \cos bx.e^{ax}.\frac{d}{dx}(ax)\right] + a\frac{dy}{dx} \\ &= b[-be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx] + a\frac{dy}{dx} \\ &= -b^2e^{ax}\sin bx + a(be^{ax}\cos bx) + a\frac{dy}{dx} \\ &= -b^2y + a\left(\frac{dy}{dx} - ay\right) + a\frac{dy}{dx} = 2a\frac{dy}{dx} - (a^2 + b^2)y, \end{aligned}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + a^2)y = 0$.

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)y$ ਦਾ .... ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$.............

(iii) $\frac{d}{dx}(.............) = \frac{d^2y}{dx^2}$.

ਨੋਟ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.1

1. ਜੇਕਰ $y = 8x^3 + 4x^2 + 3x + 11$ ਤਾਂ $\frac{d^3y}{dx^3}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਜੇਕਰ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ਤਾਂ $\frac{d^3y}{dx^3}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਜੇਕਰ $y = x^2 \log x$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x}$.

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਦੂਜੇ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ:

4. (*i*) $x^3 \log x$. (*ii*) $x \log x$.

5. $\sin(\cos x)$.

6. $x^3 e^{4x}$. **7.** $\tan e^x$.

8. e^{nx} ਦਾ nਵਾਂ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਜੇਕਰ $y = A \sin px + B \cos px$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = 0$.

10. ਜੇਕਰ $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2xy}{(ax - y^2)^3}$.

11. ਜੇਕਰ y, z ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $z = ax$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 \frac{d^2y}{dz^2}$.

12. ਜੇਕਰ $y = (\sin^{-1} x)^2$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1 - x^2) y_2 - xy_1 = 2$.

13. ਜੇਕਰ $y = e^{\tan^{-1} x}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1 + x^2) y_2 + (2x + 1) y_1 = 0$.

14. ਜੇਕਰ $\sqrt{x+y} + \sqrt{y-x} = c$, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{c^2}$.

15. ਜੇਕਰ $x^2 + xy + y^2 = a^2$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{6a^2}{(x+2y)} = 0$.

16. ਜੇਕਰ $y = \tan^{-1}\frac{1-2\log x}{1+2\log x} + \tan^{-1}\frac{3+2\log x}{1-6\log x}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

17. ਜੇਕਰ $p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2p}{d\theta^2} + p = \frac{a^2b^2}{p^3}$.

18. ਜੇਕਰ $y = e^{a \sin^{-1} x}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1 - x^2) y_2 - xy_1 - a^2 y = 0$.

19. ਜੇਕਰ $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1 - x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$.

5.2 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਜੇਕਰ y, x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ y ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਭਾਵ $\frac{dy}{dx}$ ਵੀ x ਦਾ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਫਿਰ ਤੋਂ ਨਿਖੇੜਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ਨੂੰ y ਦਾ **ਦੂਜਾ ਨਿਖੇੜਨ- ਗੁਣਾਂਕ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

5.3 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਉਂਪਰੋਥਲੀ (Successive) – ਕ੍ਰਮਾਗਤ।
- ਵੱਖ–ਵੱਖ (Miscellaneous) – ਮਿਸ਼ਰਿਤ।

5.4 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਜੇਕਰ $y = x^3 - \frac{1}{x^3}$, ਤਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ । (**ਉੱਤਰ** : $6x - 12x^{-5}$)

2. ਜੇਕਰ $y = x^3 \log x$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{6}{x}$.

3. ਜੇਕਰ $y = e^{ax} \sin bx$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0$.

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. (*i*) ਦੂਜਾ (*ii*) $\frac{d^3y}{dx^3}$ (*iii*) $\frac{dy}{dx}$

5.5 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ।*
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ।*
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ।*
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ।*
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ।*
6. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ. ।*
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ।*
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ।*

ਇਕਾਈ–6: ਨਿਖੇੜਨ : ਸਾਪੇਖ (Differentiation: Partial)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਕਿਸੀ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸਮਝ ਸਕਣਗੇ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਕਿਸੀ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

6.1 ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਕਿਸੀ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ (Differentiation of a Function in Respect of Other Function)

ਮੰਨ ਲਿਓ $y_1 = f_1(x)$ ਅਤੇ $y_2 = f_2(x)$

ਭਾਵ y_1 ਅਤੇ y_2, x ਦੇ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ, ਦੋਹਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1'(x) \text{ ਅਤੇ } \frac{dy_2}{dx} = f_1'(x)$$

ਹੁਣ y_1 ਦਾ y_2 ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\frac{dy_1}{dy_2}$

ਨੋਟਸ

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\frac{dy_1}{dx}}{\frac{dy_2}{dx}} = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_1 \text{ ਦਾ } x \text{ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ – ਗੁਣਾਂਕ}}{y_2 \text{ ਦਾ } x \text{ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ – ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ

ਸਾਧਕ–ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਕਿਸੀ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\tan^{-1} x$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\sin^{-1} x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ $x = \frac{1}{2}$ ਉੱਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :
$$\frac{d(\tan^{-1} x)}{d(\sin^{-1} x)} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$$

$x = \frac{1}{2}$ ਉੱਤੇ
$$= \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 2. $e^{\tan x}$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\sin x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $y_1 = e^{\tan x}$ ਅਤੇ $y_2 = \sin x$

ਇੱਥੇ $$dy_1 = \frac{d}{dx} e^{\tan x} = e^{\tan x}. \sec^2 x$$

ਅਤੇ $$dy_2 = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{de^{\tan x}}{d \sin x} = \frac{e^{\tan x}. \sec^2 x}{\cos x} = \frac{e^{\tan x}}{\cos^3 x}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\tan^{-1} x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $y_1 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ ਅਤੇ $y_2 = \tan^{-1} x$.

$x = \tan\theta$ ਰੱਖਣ ਤੇ
$$y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}$$
$$= \tan^{-1} \frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta} = \tan^{-1} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \tan^{-1} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta}$$
$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{\tan^{-1} x}{2}$$

ਨੋਟ

$$\therefore \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan^{-1}x}{2}\right) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

ਅਤੇ $$\frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{d[\tan^{-1}\{\sqrt{1-x^2}-1\}/x}{d(\tan^{-1}x)}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2(1+x^2)}}{\dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{2}.$$

ਉੱਤਰ

ਟਾਸਕ $\tan^{-1}x$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\sin^{-1}x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ $x = \dfrac{1}{3}$ ਉੱਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$)

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ **ਦਾ** $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ **ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $y_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ ਅਤੇ $y_2 = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ ਰੱਖਣ ਤੇ,

$$y_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$$

ਉਦੋਂ $$\frac{dy_1}{dx} = 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

ਅਤੇ $$y_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$$

ਉਦੋਂ $$\frac{dy_2}{dx} = 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{d[\tan^{-1}\{2x/(1-x^2)\}]}{d[\sin^{-1}\{2x/(1+x^2)\}]}$$

$$= \frac{\dfrac{d}{dx}[\tan^{-1}\{2x/(1-x^2)\}]}{\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}\{2x/(1+x^2)\}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \times \frac{1+x^2}{2} = 1.$$

ਉੱਤਰ

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਫਲਨ $f(x) = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ ਦਾ $\sin^{-1}x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ
$$y_1 = \sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$$
$$x = \sin\theta$$
$$y_1 = \sin^{-1}(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}) = \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$$
$$y_1 = \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$
$$y_1 = 2\theta = 2\sin^{-1}x$$
$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

ਦੁਬਾਰਾ
$$y_2 = \sin^{-1}x$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ਉਦੋਂ
$$\frac{d\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})}{d\sin^{-1}x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 2.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਜੇਕਰ $\sqrt{1-x^6}+\sqrt{1-y^6} = a^3(x^3-y^3)$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}\sqrt{\frac{1-y^6}{1-x^6}}$.

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $x^3 = \sin\theta, y^3 = \sin\phi$ ਅਤੇ $\sqrt{1-x^6}+\sqrt{1-y^6} = a^3(x^3-y^3)$

ਜਾਂ $\sqrt{1-\sin^2\theta}+\sqrt{1-\sin^2\phi} = a^3(\sin\theta-\sin\phi)$
$$\cos\theta+\cos\phi = a^3(\sin\theta-\sin\phi)$$
$$2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2} = a^3.2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$
$$\Rightarrow \quad \cot\frac{\theta-\phi}{2} = a^3$$
$$\Rightarrow \quad \theta-\phi = 2\cot^{-1}a^3$$
$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}x^3-\sin^{-1}y^3 = 2\cot^{-1}a^3$$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}.3x^2 - \frac{1}{\sqrt{1-y^6}}.3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}\sqrt{\frac{1-y^6}{1-x^6}}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਜੇਕਰ $y = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$, ਉਦੋਂ $x = 0$ ਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $y = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = (1+x+x^2+x^3)^{-1}$

ਨੋਟ

$$\frac{dy}{dx} = -(1+x+x^2+x^3)^{-2}(1+2x+3x^2)$$

$x = 0$ ਉੱਤੇ $$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(1+x+x^2+x^3)^{-3}(1+2x+3x^2) - (1+x+x^2+x^3)^{-2}(2+6x)$$

$x = 0$ ਉੱਤੇ $$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਜੇਕਰ $\sin y = x\cos(a+y)$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\cos a}$ ਅਤੇ $x = 0$ ਉੱਤੇ $\frac{dy}{dx} = \cos a$

ਹੱਲ : $\sin y = x\cos(a+y)$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\sin y}{\cos(a+y)}$$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$1 = \frac{\cos(a+y)\cos y\frac{dy}{dx} - \sin y.\{-\sin(a+y)\}\frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$1 = \frac{\{\cos(a+y).\cos y + \sin(a+y).\sin y\}\frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$1 = \frac{\cos(a+y-y)\frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$1 = \frac{\cos a}{\cos^2(a+y)}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\cos a}$$

ਦੁਬਾਰਾ ਜਦੋਂ $x = 0$

ਉਦੋਂ $\sin y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = n\pi$

$x = 0$ ਉੱਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+n\pi)}{\cos a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 a}{\cos a}\ \cos a.$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਜੇਕਰ $y = (\sin^{-1}x)^2 + (\cos^{-1}x)^2$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 4.$$

ਹੱਲ :

$$y = (\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(\sin^{-1} x - \cos^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = 2(\sin^{-1} x - \cos^{-1} x)$$

x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x).\frac{dy}{dx} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$\frac{(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1-x^2}} = 2.\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 4.$$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)–

(i) ax^7 ਦਾ x^7 ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਹੋਵੇਗਾ–

(*a*) a (*b*) x (*c*) x^7 (*d*) a^2

(ii) $\log x$ ਦਾ $\tan x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਹੋਵੇਗਾ–

(*a*) $\frac{\sin^2 x}{x}$ (*b*) $\frac{\cos^2 x}{x}$ (*c*) $\frac{x}{\cos^2 x}$ (*d*) $\frac{x}{\sin^2 x}$

(iii) $\tan^{-1}x$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\sin^{-1}x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ $x = \frac{1}{2}$ ਉੱਤੇ ਹੋਵੇਗਾ–

(*a*) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (*b*) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ (*c*) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (*d*) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.1

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. x^5 ਦਾ x^2 ਦੇ ਸਾਪੇਖ।

2. e^x ਦਾ $\sqrt{x}$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ।

3. $x\sin^{-1} x$ ਦਾ $\sin^{-1} x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ।

4. $\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ਦਾ $\sqrt{x}$ ਦੇ ਸੋਪਖ।

5. $(\log \sin x)^{\sin x}$ ਦਾ $\sin x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ।

6. $\log(x^2 + 2x + 1)$ ਦਾ $(x^2 + 2x)$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ।

7. $\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ ਦਾ $\sqrt{1-x^2}$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ $x = \frac{1}{2}$ ਉੱਤੇ ਮਾਨ ਦੱਸੋ।

ਨੋਟ

ਉੱਤਰ

1. $\frac{5}{2}x^3$ 2. $2\sqrt{x}\,e^x$ 3. $x + \sqrt{1-x^2}.\sin^{-1} x$

4. $\frac{-2}{1+x}$ 5. $(\log \sin x)^{\sin x}.[\log(\log \sin x + 1 \log \sin x)]$

6. $\frac{1}{x^2+2x+1}$ 7. 4.

6.2 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਮੰਨ ਲਿਓ $y_1 = f_1(x)$ ਅਤੇ $y_2 = f_2(x)$ ਭਾਵ y_1 ਅਤੇ y_2, x ਦੇ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ, ਦੋਹਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1'(x) \text{ ਅਤੇ } \frac{dy_2}{dx} = f_2'(x)$$

6.3 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਸਾਪੇਖ (Partial) – ਅੰਸ਼ਿਕ।

6.4 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ-ਗੁਣਾਂਕ $\tan^{-1} x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਉੱਤਰ : $\frac{1}{2}$)
2. ਜੇਕਰ $\sqrt{1-x^6} + \sqrt{1-y^6} = a^3(x^3 - y^3)$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਬਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} = \sqrt{\frac{1-y^6}{1-x^6}}$

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

(i) *(a)* *(ii)* *(b)* *(iii)* *(c)*.

6.5 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
5. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–7: ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਅਤੇ ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ (Homogeneous Function and Euler's Theorem)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਜਾਣਨ ਵਿੱਚ।
- ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਭਲੀਭਾਂਤ ਸਮਝਣ ਲਈ।
- ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਲਈ।
- ਸੀ.ਈ.ਸੀ. (ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ) ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋਣ ਲਈ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨ ਜਿਹੜੇ ਜਿਆਦਾਤਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਸਾਰੇ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਧਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਉਤਪਾਦਨ ਵੀ ਉਸੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਜਾਏਗਾ।

ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਵੰਡੇ ਗਏ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਉਤਪਾਦਨ ਵਿਭਿੰਨ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਜੋਗ ਦੁਆਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਵਰਤਮਾਨ ਵਿੱਚ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਭਿੰਨ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਲੱਗ ਗਏ ਹਨ।

7.1 ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ : ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Homogeneous Function: Definition)

ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਜਿਆਦਾਤਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

ਨੋਟ

ਜੇਕਰ $\boldsymbol{x \to tx}$ and $\boldsymbol{y \to ty}$ ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ t ਧਨਾਤਮਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹੈ।

ਤਾਂ $$f(tx, ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2(x^2 - y^2)$$
$$= t^2 f(x, y)$$

ਜੇਕਰ ਫਲਨ $f(x, y) = x^3 - y^3$ ਹੈ ਤਾਂ
$$f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$$
$$f(x, y) = x^n - y^n$$
ਤਾਂ $$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਦਾ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ,
$$f(x, y) = x^2 + xy - 3y^2$$
ਤਾਂ, $$f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$$
$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$$
ਅਤੇ, $$f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$$

ਫਲਨ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

ਨੋਟਸ ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨ $f(x, y) n$ ਕੋਟਿ ਦਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ। ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਜਿਆਦਾਤਰ ਜ਼ੀਰੋ ਕੋਟਿ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $f(x, y, z) = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}$

ਤਾਂ, $$f(tx, ty, tz) = \frac{tx}{tz} + \frac{ty}{tz} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = f(x, y, z) = t^0 f(x, y, z)$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{xz} + \dfrac{z^2}{xy}$

$$f(tx, ty, tz) = \frac{t^2x^2}{t^2yz} + \frac{t^2y^2}{t^2xz} + \frac{t^2z^2}{t^2xy}$$
$$= t^0 f(x, y, z)$$

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਜੇਕਰ q ਮਾਤਰਾ, p ਕੀਮਤ ਅਤੇ y ਆਮਦਨ ਹੈ ਤਾਂ ਮੰਗ ਫਲਨ ਨਿਮਨ ਹਨ

$q = f(p, y) = \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{kp}}$ ਜਿੱਥੇ k ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹੈ।

ਤਾਂ $$f(tp, ty) = \frac{ty}{kp} = \frac{y}{kp} t^0 f(p, y)$$
$$q = f(p, y) = f(tp, ty)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਮੂਲ p ਅਤੇ ਆਮਦਨ x ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਮੰਗ q ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

1. Euler's Theorem states that all factors of production are increased in a given proportion resulting output will also increase in the same proportion each factor of production (input) is paid the value of its marginal product, and the total output is just exhausted.

ਨੋਟ

7.2 ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ (Euler's Theorem)

ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਸਾਰੇ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਧਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਉਤਪਾਦਨ ਵੀ ਉਸੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਜਾਏਗਾ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਮੂਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪੁਰਸਕਾਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ ਖਤਮ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।[1] ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਹੇਠਲੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ, $p = f(L, K)$ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ (Linear Homogenous Function) ਹੁੰਦੀ ਹੈ–

$$P = L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K}, \text{ ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ } P = LMP_L + KMP_K$$

ਜਿੱਥੇ P = ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ L = ਮਿਹਨਤ ਸਾਧਨ ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ, K = ਪੂੰਜੀ ਸਾਧਨ ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ, $\frac{\partial P}{\partial L}$ ਜਾਂ MP_L = ਮਿਹਨਤ ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਅਤੇ $\frac{\partial P}{\partial K}$ ਜਾਂ MP_K = ਪੂੰਜੀ ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

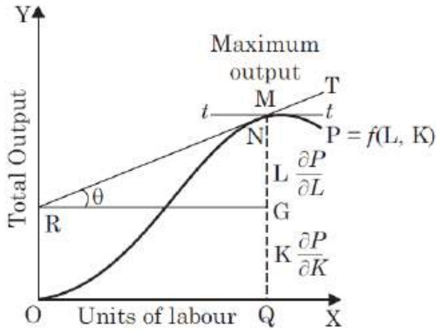
ਮਾਨਤਾਵਾਂ (Assumptions)

ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ–

1. ਪੈਮਾਨੇ ਦੇ ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦਾ ਨਿਯਮ (The Law of Constant Returns of Scale) ਕਿਰਿਆਸ਼ੀਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਰੇਖੀ ਸਮਰੂਪ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਟਿ (Degree) ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
2. ਬਾਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤਿਯੋਗਿਤਾ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
3. ਇਹ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨ ਦੀ ਵੰਡ ਦੀ ਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਚੱਲਦੀ ਹੈ।
4. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੇਂ ਦੇ ਲਈ ਤਕਨੀਕੀ ਸਥਿਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

7.2.1 ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਚਿਤਰਕ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ (Diagramatical Presentation of Euler's Theorem)

ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਕੇ ਚਿੱਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਿਓ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ $P = f(L, K)$ ਹੈ ਤਾਂ ਦੋਨੋਂ ਸਾਧਨ L ਅਤੇ K ਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ P ਉੱਤੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾ, ਅਸੀਂ L ਸਾਧਨ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਉਤਪਾਦਨ P ਉੱਤੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦੇਖਾਂਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ K ਸਾਧਨ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ K ਸਾਧਨ ਦਾ P ਉੱਤੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦੇਖਾਂਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ L ਸਾਧਲ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।



ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ 7.1

ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ 7.1 ਵਿੱਚ L ਸਾਧਨ ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ X-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ Y-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। TP ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। M ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਲ ਲਿਓ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਵਕਰ TP ਉੱਤੇ N ਬਿੰਦੂ TI ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹੈ। N ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ X-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਲੰਬਵਤ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹੈ ਜਿਹੜੀ X-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ Q ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਹੁਣ, N ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਢਾਲ (Slope) $\frac{\partial P}{\partial K} = \tan\theta$

$$= \frac{NG}{RG} = \frac{NG}{OQ}$$

ਹੁਣ $$L\frac{\partial P}{\partial L} = OQ\frac{NG}{OQ} = NG \quad .....(i)$$

ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ, $$P = L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K}$$

ਜਾਂ $$K\frac{\partial P}{\partial K} = P - L\frac{\partial P}{\partial L} = QN - NG = QG \quad .....(ii)$$

ਜਿੱਥੇ P = ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਸਤਰ

$$P = L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K}$$

ਜਾਂ $QN = NG + QG$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ QN, NG ਅਤੇ OG ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ NG ਅਤੇ QG ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ L ਸਾਧਨ ਅਤੇ K ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਪੁਰਸਕਾਰ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਫਰਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਸਾਧਨ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪੁਰਸਕਾਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਤਮ ਹੋ ਜਾਣਗੇ।

7.2.2. ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਗਣੀਤਕ ਹੱਲ (Mathematical Solution of Eulers Theorem)

ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਦੁਆਰਾ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦੱਸਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ $u = f(x, y)$ ਇੱਕ h ਕੋਟਿ ਦਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅੱਗੇ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ–

$$= xf_{tx} + yf_{ty}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{R.H.S.}) = \frac{\partial t^h}{\partial t} f(x, y) + t^h \frac{\partial f(x, y)}{\partial t} \quad (\text{L.H.S.})$$
$$= ht^{h-1} f(x, y) - 0$$
$$= ht^{h-1} f(x, y)$$

ਜਿੱਥੇ L.H.S. ਖੱਬਾ ਹੈ ਅਤੇ R.H.S. ਸੱਜਾ ਹੈ ਤਾਂ L.H.S. = R.H.S.

$$xf_{tx} + yf_{ty} = ht^{h\text{-}1} f(x, y)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $t = 1$ ਤਾਂ, t ਦੀ ਕੁੱਝ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

$$xf_x + yf_y = hf(x, y)$$

h ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਕੋਟਿ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ $h = 1$

ਤਾਂ $$xf_x + yf_y = f(x, y)$$

ਜਾਂ $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

ਜੇਕਰ ਦੂਜਾ ਕੋਟਿ ਸਮੀਕਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਹੋਵੇਗਾ

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$$

ਦੋ ਚਰਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੇ ਲਈ ਸਧਾਰਨੀਕਰਣ ਕਰਨ ਤੇ ਨੋਟ

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+...=ku(x,y,z,....)$$

ਜਿੱਥੇ k ਸੀਮਰਣ ਦੀ ਕੋਟਿ ਹੈ।

$$f(x, y, z) = 3x + 2y - 4z$$

ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਹੈ

ਤਾਂ ਮੂਲ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$xf_x + yf_y + zf_z = 1 \times (3x + 2y - 4z)$$
$$f_x = 3, f_y = 2, f_z = -4$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੱਬਾ ਪੱਖ ਹੇਠਲਾ ਹੋਵੇਗਾ;

$$\text{L.H.S.} = 3x + 2y - 4z = \text{R.H.S.}$$

7.2.3 ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਮਹੱਤਵ (Importance of Euler's Theorem)

ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਵੰਡ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਉਤਪਾਦਨ ਵਿਭਿੰਨ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਜੋਗ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਵਾਲ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ। ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਾਧਨ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪੁਰਸਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ ਖਤਮ ਹੋ ਜਾਏਗਾ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇਹ ਪ੍ਰਮੇਯ ਉਤਪਾਦਕ ਦੀ ਅਪਲਕਾਲੀਨ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰਦੀ ਹੈ–ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਹਰੇਕ ਸਾਧਨ ਵਿੱਚ ਬਟਵਾਰਾ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਵਿਭਿੰਨ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਵੰਡ ਆਦਿ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਪ੍ਰਮੇਯ ਫਰਕ ਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸਾਧਨਾਂ ਦਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨ ਨੂੰ ਉਸ ਸੀਮਾ ਤੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਉਸਦਾ ਮੁੱਲ ਉਸਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨ ਦੀ ਕੀਮਤ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਜਿਆਦਾਤਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ .... ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. .... ਪ੍ਰਮੇਯ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦੱਸਦੀਆਂ ਹਨ।
3. ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ .... ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਹੈ।
4. .... ਵਿਭਿੰਨ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਜੋਗ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ .... ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਾਧਨ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪੁਰਸਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ ਖਤਮ ਹੋ ਜਾਏਗਾ।

7.3 ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ (Cobb-Douglas Production Function)

ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਦਾ ਸਹਿਰਾ ਸੀ.ਡਬਲਿਯੂ. ਕੋਬ (C.W. Cobb) ਅਤੇ ਡੀ. ਐਚ. ਡੋਗਲਸ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ਪ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਉਦਯੋਗਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਸਧਾਰਣ ਨਿਯਮ (Universal law) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਨੂੰ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ–

$P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$

ਜਿੱਥੇ P = ਉਤਪਾਦਨ, L = ਮਿਹਨਤ ਸਾਧਨ, K = ਪੂੰਜੀ ਸਾਧਨ, u = ਤਰੁੱਟੀ (Disturbance Terms) ਅਤੇ A ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ।

α ਅਤੇ β ਧਨਾਤਮਕ ਮਾਪਦੰਡ (Parameters) ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ $\alpha > 0, \beta > 0, L > 0$ ਅਤੇ $\alpha + \beta = 1$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੁੱਝ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਇਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਨੂੰ u ਦੇ ਬਿਨਾਂ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

$$P = AL^{\alpha} K^{\beta} \ (\alpha > 0, \beta > 0)$$

ਜੇਕਰ $\alpha + \beta = 1$

ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਦੋ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਭਾਵ

$$P = f(L, K)$$

ਜੇਕਰ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਕਿਸੀ ਸਥਿਰ λ (Lemda) ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ

$$\lambda P = f(\lambda L, \lambda K)$$

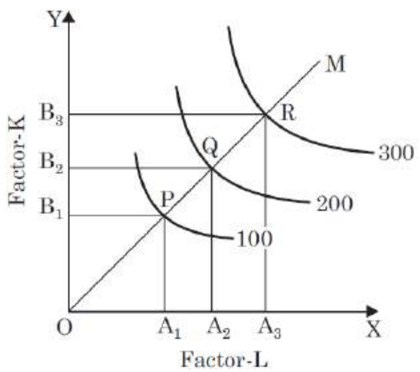
ਤਾਂ,
$$f(\lambda L, \lambda K) = A(\lambda L)^{\alpha} (\lambda K)^{\beta} u$$
$$= \lambda^{\alpha+\beta} AL^{\alpha} K^{\beta} u$$
$$= \lambda\alpha + \beta P \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } = P = AL^{\alpha} K^{\beta} u)$$

ਜੇਕਰ $\alpha + \beta = 1$, ਉਦੋਂ ਉਤਪਾਦਨ ਪੈਮਾਨ ਦੇ ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੋਏਗਾ।
ਜੇਕਰ $\alpha + \beta > 1$, ਪੈਮਾਨੇ ਦਾ ਵੱਧਦਾ ਹੋਇਆ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਕਾਰਜਸ਼ੀਲ ਹੋਵੇਗਾ।
ਅਤੇ $\alpha + \beta < 1$, ਪੈਮਾਨੇ ਦਾ ਘਟਦਾ ਹੋਇਆ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਕਾਰਜਸ਼ੀਲ ਹੋਵੇਗਾ।

7.3.1 ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Characteristics of Cobb Douglas Production Function)

1. ਜੇਕਰ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਸਥਿਰ ਰਾਸ਼ੀ λ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਤਪਾਦਨ ਵੀ λ ਗੁਣਾ ਵੱਧ ਜਾਏਗਾ। ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ $P = L_{\alpha} K^{\beta} u$ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਮਿਹਨਤ L ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ (K) λ ਤੋਂ ਗੁਣਾ ਵਧਾ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤਾਂ

$$p' = A(\lambda L)^{\alpha} (\lambda K)^{\beta} u$$
$$= \lambda^{\alpha+\beta} AL^{\alpha} K^{\beta} u$$
$$= \lambda AL^{\alpha} K^{\beta} u \qquad (\text{ਜੇਕਰ } \alpha + \beta = 1)$$
$$= \lambda P$$



ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ 7.2

ਨੋਟ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਸਾਧਨਾਂ ਨੂੰ ਵਧਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਉਸੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਉਪਾਦਨ ਵੀ ਵੱਧ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ 7.2 ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। X-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਸਾਧਨ L (ਮਿਹਨਤ) ਅਤੇ Y-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਸਾਧਨ K (ਪੂੰਜੀ) ਨੂੰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਉਤਪਾਦਨ ਦੀਆਂ 100 ਇਕਾਈਆਂ ਉਤਪਾਦਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਧਨ L ਦੀ OA_1 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ ਸਾਧਨ K ਦੀ OB_1 ਇਕਾਈਆਂ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀਆਂ 200 ਇਕਾਈਆਂ ਉਤਪਾਦਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਸਾਧਨ L ਅਤੇ ਸਾਧਨ R ਨੂਗੰ ਵੀ ਦੁੱਗਣੀ ਜਰੂਰੀ ਪਏਗੀ। ਇੱਥੇ OA_2 ਬਿਲਕੁਲ OA_1 ਦਾ ਦੁੱਗਣਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ OB_2 ਬਿਲਕੁਲ OB_1 ਦਾ ਦੁੱਗਦਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀਆਂ 300 ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸਾਧਨ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ 7.2 ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸਨੂੰ ਦੂਜੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। OM ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਪਥ ਹੈ ਜਿਹੜਾ P, Q ਅਤੇ R ਸੰਤੁਲਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਰੇ ਸੰਤੁਲਨ ਬਿੰਦੂ ਸਮਾਨ ਅੰਤਰ ਤੇ ਹੋਣਗੇ ਭਾਵ $OP = PQ = QR$, ਜਿਹੜਾ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਤਪਾਦਨ ਉਸੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਧੇਗਾ ਜਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਸਾਧਨ ਵਧਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

2. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਸਮਰੂਪ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਟਿ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ: ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਸਮਰੂਪ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਟਿ (Degree) ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਤਪਾਦਨ ਸਥਿਰ ਪੈਮਾਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ

ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ, $P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ log ਲੈਣ ਤੇ

$$\log P = \log A + \alpha \log L + \beta \log K + \log u$$

ਵੱਖ–ਵੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ L ਅਤੇ K ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਕ ਨਿਖੇੜਨ (Differentiate) ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1\partial P}{P\,\partial L} = \frac{\alpha}{L} \qquad .....(i)$$

ਅਤੇ

$$\frac{1\partial P}{P\,\partial K} = \frac{\beta}{K} \qquad .....(ii)$$

(i) ਅਤੇ (ii) ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਣ ਤੇ

$$L\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha P \qquad .....(iii)$$

$$K\frac{\partial P}{\partial L} = \beta P \qquad .....(iv)$$

ਸਮੀਕਰਣ (iii) ਅਤੇ (iv) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial L} = P\alpha + P\beta + P(\alpha+\beta)$$

$$= P \qquad [\therefore \quad \alpha + \beta = 1]$$

3. ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਸਮਰੂਪ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਟਿ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ (Elasticity of Substitution) ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇਕਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ $P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$ ਜਿਥੇ $\alpha + \beta = 1$ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\text{ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ} = \sigma = \frac{\text{ਸਾਧਨ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਪਰਤਨ}}{\text{ਸਾਧਨ ਦੀ ਕੀਮਤ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਰਿਪਰਤਨ}}$$

$$\therefore \qquad \sigma = \frac{\partial(K/L)/(K/L)}{\partial(P_L/P_K)/P_L/P_K} = \frac{\partial(K/L)/K/L}{\partial R/R}$$

ਜਿੱਥੇ $K/L =$ ਸਾਧਨ ਮਾਤਰਾ ਅਨੁਪਾਤ

$R = P_L P_K =$ ਸਾਧਨ ਕੀਮਤ ਅਨੁਪਾਤ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੀਮਾਂਤ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਤਕਨੀਕੀ ਦੀ ਦਰ = $\frac{\partial K}{\partial L}$

$\therefore$ $$\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K} = R$$

ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, $$R = \frac{\partial P/\partial L}{\partial P/\partial K}$$

ਸਾਡਾ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ $P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$

L ਅਤੇ K ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਨਿਖੇੜਨ ਤੇ

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \beta AL^{\alpha} K^{\beta} u$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1} K^{\beta-1} u$$

$$R = \frac{\partial P/\partial L}{\partial P/\partial K} = \frac{\alpha AL^{\alpha-1} K^{\beta} u}{\beta AL^{\alpha} K^{\beta} u} = \frac{\alpha}{L}\frac{K}{\beta}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{K}{L}\right)$$

$$\partial R = \alpha/\beta\partial\,(K/L)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\sigma = \frac{\partial(K/L)/K/L}{\partial(P_L/P_K)/P_L/P_K} = \frac{\partial(K/L)/K/L}{\partial R/R}$$

$$\sigma = \frac{\partial(K/L)/K/L}{\frac{\partial(K/L)\cdot\alpha/b}{(K/L)\cdot\alpha/b}} = \mathbf{1}$$

ਉੱਤਰ

4. ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਪੂੰਜੀ ਅਤੇ ਮਿਹਨਤ ਜਰੂਰੀ ਸਾਧਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ-ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਧੰਨ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਵੀ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ

ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ, $P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$

ਮੰਨਿਆ $L = 0$

$P = A.B.\ K^{\beta} u = 0$

ਮੰਨਿਆ $K = 0$

$P = AL^{\alpha} .O.\ u.\ = 0$

5. ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ($P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$) ਰੇਖੀ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ α ਅਤੇ β ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਮਿਹਨਤ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ ਦੇ ਹਿੱਸੇ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ, $P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$

L ਅਤੇ K ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{P} = \frac{\partial p}{\partial L}\alpha.\frac{1}{L}$$

$$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial K} = \beta.\frac{1}{K}$$

$\therefore$ $$\alpha = \frac{L}{P}\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{\text{ਮਿਹਨਤ}}{\text{ਉਤਪਾਦਨ}} \times \text{ਮਿਹਨਤ ਦਾ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਨ}$$

ਨੋਟ

$$= \frac{\text{ਮਜਦੂਰੀ ਦਾ ਹਿੱਸਾ}}{\text{ਉਤਪਾਦਨ}}$$

$$= \text{ਮਜਦੂਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਹਿੱਸਾ}$$

ਅਤੇ $$\beta = \frac{K}{P}\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{\text{ਪੂੰਜੀ}}{\text{ਉਤਪਾਦਨ}} \times \text{ਪੂੰਜੀ ਦਾ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਨ}$$

$$= \frac{\text{ਪੂੰਜੀ ਦਾ ਹਿੱਸਾ}}{\text{ਉਤਪਾਦਨ}}$$

$$= \text{ਪੂੰਜੀ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਹਿੱਸਾ}$$ **ਉੱਤਰ**

6. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਮਿਹਨਤ ਲੋਚ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ ਲੋਚ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ (5) ਤੋਂ

$$\alpha = \frac{L}{P}\frac{\partial P}{\partial L}$$

$$= \frac{\partial P/P}{\partial L/L} = \text{ਮਿਹਨਤ ਦੀ ਲੋਚ}$$

$$\beta = \frac{K}{P}\frac{\partial P}{\partial K}$$

$$= \frac{\partial P/P}{\partial K/K} = \text{ਪੂੰਜੀ ਦੀ ਲੋਚ}$$ **ਉੱਤਰ**

ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਪਥ (Expansion Path) ਰੇਖੀ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਗੁਜਰਦਾ ਹੈ।

ਕੋਬ ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ

$$P = AL^{\alpha} K^{\beta} u$$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ 'Log' ਲੈਣ ਤੇ

$$\log P = \log A + \alpha \log L + \beta \log K + \log u$$

L ਅਤੇ K ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\alpha}{L} \quad .....(A)$$

$$\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial \text{K}} = \frac{\beta}{K} \quad .....(B)$$

ਸਮੀਕਰਣ (A) ਅਤੇ (B) ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਣ ਤੇ

$$MP_L = \frac{\partial P}{\partial L} = P \cdot \frac{\alpha}{L}$$

ਅਤੇ $$MP_K = \frac{\partial P}{\partial L} = P \cdot \frac{\beta}{\text{K}}$$

$\therefore$ $$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{P\alpha/L}{\beta P/K} = \frac{P_L}{P_K}$$

ਜਾਂ $$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{K}{L} = \frac{P_L}{P_K}$$

ਨੋਟ

ਜਾਂ $\alpha KP_K = \beta LP_L$

ਜਾਂ $\alpha KP_K - \beta LP_L = 0$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਪਥ ਰੇਖੀ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਗੁਜਰਦੀ ਹੈ।

7.3.2 ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਮਹੱਤਵ (Economic Significance of Cobb-Douglas Production Function)

ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਵਰਤਮਾਨ ਵਿੱਚ ਕਈ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਕੋਬ ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਭਿੰਨ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਲੱਗ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਿਨ-ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਵਿਭਿੰਨ ਉਦਯੋਗਾਂ ਅਤੇ ਖੇਤੀ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵਧਣ ਲੱਗ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਹ ਇਹਨਾਂ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਲਈ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਭਿੰਨ ਨੀਤੀਆਂ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੰਮ ਆਉਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਮਿਹਨਤ ਪੂੰਜੀ ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ (Marginal Productivity) ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਨਿਰਧਾਰਣ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਸਹਾਹਿਤਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। (ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਉਤਪਾਦਨ ਤਕਨੀਕੀ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।) ਇਸ ਫਲਨ ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਸਾਧਨ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਪੁਰਸਕਾਰ ਉਸਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਫਲਨ ਖੇਤੀ ਵਿੱਚ ਆਰਥਿਕ ਲੋਚ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਮਦਦ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਅਤੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਸ ਲੋਚ ਗੁਣਾਂਕ (Elasticity Coefficients) ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਯਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਲੋਚ ਗੁਣਾਂਕ ਅੰਤਰ-ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਜਾਂ ਅੰਦਰੂਨੀ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਿਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਇਹ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਰੇਖੀ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\alpha + \beta = 1$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ ਸਥਿਰ ਫਲਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕਾਰਜਸ਼ੀਲ ਹੋਵੇਗਾ। ਜਦੋਂ $\alpha + \beta > 1$ ਅਤੇ $\alpha + \beta < 1$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤਾਂ ਫਲਨ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਵਧੇ ਹੋਏ ਅਤੇ ਘਟਦੇ ਹੋਏ ਪੈਮਾਨੇ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕਾਰਜਸ਼ੀਲ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਫਲਨ ਪੈਮਾਨ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਪ੍ਰਤਿਫਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਿਯੋਗ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇਹ ਫਲਨ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤਾ (Substitutability) ਦੇ ਲਈ ਜਰੂਰੀ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਫਲਨ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਖੇਤੀ ਅਤੇ ਉਦਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਭੂਮਿਕਾ ਨਿਭਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮਿਹਨਤ ਨੀਤੀਆਂ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੇਤਰ ਤੁਲਨਾ, ਸਾਧਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤਾ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪਤਾ ਕੋਟਿ (Degree of Homogeneity) ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

7.3.3 ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations of Cobb-Douglas Production Functions)

ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਸਥਾਰਪੂਰਣ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਖੇਤੀ ਅਤੇ ਨਿਰਮਾਣਕਾਰੀ ਉਦਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਵਿਭਿੰਨ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਆਲੋਚਨਾਵਾਂ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਮੁੱਖ ਆਲੋਚਕ **ਪ੍ਰੋ.ਕੇ.ਜੇ. ਅਰੋ. (K.J. Arrow), ਐਚ.ਬੀ. ਚੇਨਰੀ (H.B. Chenery), ਬੀ. ਐਸ. ਮਿਨਹਾਸ (B.S. Minhas), ਅਤੇ ਆਰ.ਐਮ. ਸੇਲੋ (R.M. Salow)** ਰਹੇ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਨਿਮਨ ਆਲੋਚਨਾਵਾਂ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ-

1. ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਖ ਦੋਸ਼ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕੇਵਲ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਦੋ ਸਾਧਨ (ਮਿਹਨਤ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ) ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਚੱਲਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸਲੀਅਤ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿੱਚ ਹੋਰ ਸਾਧਨਾਂ ਦਾ ਵੀ ਸਮਾਨ ਮਹੱਤਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਫਲਨ ਕਈ ਸਾਧਨਾਂ (ਦੋ ਸਾਧਨਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੇਵਲ ਨਿਰਮਾਣਕਾਰੀ ਉਦਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਫਲਨ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਖੇਤਰ ਸੰਕੁਚਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

2. ਇਹ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਕੇਵਲ ਪੈਮਾਨ ਦੇ ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕਾਰਜਸ਼ੀਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪੈਮਾਨੇ ਦੇ ਵਧਦੇ ਅਤੇ ਘਟਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਨਿਯਮ ਵੀ ਉਤਪਾਦਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਰਿਆਸ਼ੀਲ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਫਲਨ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਵਿੱਚ ਕਾਰਜ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

3. ਫਲਨ ਇਸ ਮਾਨਤਾ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ ਕਿ ਤਕਨੀਕੀ ਗਿਆਨ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਤਪਾਦਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਤਕਨੀਕੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਉਤਪੱਤੀ ਦਾ ਪੈਮਾਨਾ ਵੀ ਤਕਨੀਕੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਵਿੱਚ ਪਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਰ ਤਕਨੀਕੀ ਦੀ ਇਹ ਮਾਨਤਾ ਝੂਠੀ ਹੈ।

4. ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਾਧਨ (Inputs) ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਧਨ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਵੀ ਸਮਾਨ ਕੁਸ਼ਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਮਿਹਨਤ ਜਨਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਮਜ਼ਦੂਰ ਤਾਂ ਕੁਸ਼ਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਨਹੀਂ।

5. ਇਹ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀ ਕੋਈ ਉੱਚਤਮ ਸੀਮਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ **ਐਮ. ਪ੍ਰੋ. ਚਾਂਦ** (M. Chand) ਦਾ ਕਹਿਣਾ ਹੈ, "ਕਿਉਂਕਿ ਫਲਨ *P* (ਉਤਪਾਦਨ) ਦੇ ਲਈ ਕੋਈ ਉੱਚਤਮ ਸੀਮਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੁਵੀਧਾਜਨਕ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਵਿਵਹਾਰ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਕੜਾ ਮਾਪ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦੇ ਮੂਲਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੀਮਾ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਨਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ।"[1]

6. ਫਲਨ ਦੇ α ਅਤੇ β ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਮਿਹਨਤ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ ਦੇ ਹਿੱਸੇ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਤਾਂ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਾਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗਿਤਾ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਅਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗਿਤਾ ਜਾਂ ਏਕਾਧਿਕਾਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਾਈ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸੰਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।

7. ਕਿਉਂ ਜੋ ਇਹ ਸਾਧਨਾਂ ਤਦੀ ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਉੱਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਾਧਨ ਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਨੂੰ ਭੁਲਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਿਸੀ ਸਾਧਨ ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਜ਼ੀਰੋ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

8. ਆਖਰੀ, ਫਲਨ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਅਖਰੀਲੇ ਸੰਬੰਧ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਣ ਵਿੱਚ ਅਸਮਰੱਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7.4 ਸੀ.ਈ.ਐਸ. (ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ) ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ (The C.E.S. Production Function)

ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ (Elasticity of Substitution) ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇਕਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ ਸਥਿਰ (ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ ਇਕਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ (Constant Elasticity Substitution Production Function) ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਦੋ ਵਿਭਿੰਨ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੇ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ **ਕੇ.ਜੇ. ਅਰੋ (K.J. Arrow), ਚੇਨਰੀ** (Chenery), **ਬੀ.ਐਸ. ਮਿਨਹਾਸ** (B.S. Minhas) ਅਤੇ **ਆਰ.ਐਮੀ ਸੇਲੋ** (R. M. Salow) ਆਉਂਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੂਜੇ ਵਿੱਚ **ਐਮ. ਬਰਾਊਨ** (M. Brown) **ਡੀ ਕਨੀ** (De Cani) ਆਉਂਦੇ ਹਨ। ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਇਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਭਿੰਨ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਸੀ ਪਰੰਤੂ ਨਤੀਜਾ (Result) ਸਮਾਨ ਸਨ। ਪਹਿਲੇ ਸਮੂਹ ਨੇ ਸੀ.ਈ.ਐਸ. (C.E.S.) ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ–

$$P = \gamma[\delta C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-u/\alpha}$$

$$(\gamma > 0, 0 < \delta < 1, \alpha > -1)$$

ਜਿੱਥੇ P = ਉਤਪਾਦਨ; C = ਪੂੰਜੀ ਸਾਧਨ; N = ਮਿਹਨਤ ਸਾਧਨ; α = ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪੈਰਾਮੀਟਰ (Substitution Parameter); γ = ਤਕਨੀਕੀ ਕੁਸ਼ਲਤਾ ਗੁਣਾਂਕ ਜਾਂ ਕੁਸ਼ਲਤਾ ਪੈਰਾਮੀਟਰ (Technical Efficiency Coefficient or Efficiency Parameter) (ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਇੱਥੇ ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਵਿੱਚ A ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ); δ = ਪੂੰਜੀ ਤੀਬਰਤਾ ਗੁਣਾਂਕ (Coefficient of Capital Intensity) (ਇੱਥੇ ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਫਲਨ ਵਿੱਚ α ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਾਰਜ ਕਰਦਾ ਹੈ।);

$1 - \delta$ = ਮਿਹਨਤ ਤੀਬਰਤਾ ਗੁਣਾਂਕ (Labour Intensity Coefficient)

v = ਸਮਰੂਪਤਾ ਕੋਟਿ (Degree of Homogeneity)

ਨੋਟ

7.4.1 ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of C.E.S. Production Function)

1. ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਰੇਖੀ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ (σ) ਸਥਿਰ $\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ $P = \gamma(\delta\, C^{\alpha} + (1 - \delta)N^{-\alpha})^{-u/\alpha}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਬਸ਼ਰਤੇ $\gamma > 0, 0 < \delta < 1$ ਅਤੇ $\alpha > -1$

ਉਤਪੱਤੀ–ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ

$$\sigma = \frac{\partial \log(N/C)}{\partial \log R} = \frac{\partial (N/C)/N/C}{\partial R/R}$$

ਇੱਥੇ, $\frac{N}{C}$ **=** ਉਤਪਾਦਨ ਸਾਧਨਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ $R = \frac{P_C}{P_N}$ = ਮੂਲ ਅਨੁਪਾਤ।

ਹੁਣ ਉਤਪਾਦਨ

$$P = \gamma[\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha} \quad \text{....(7.1)}$$

N ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \gamma\,[-v/\alpha]\,[\delta\, C^{-\alpha} + (1-\alpha)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha} -1 \times [-\alpha(1-\delta)N^{-\alpha-1}]$$

$$= \frac{\gamma v}{\alpha}[\delta C^{-\alpha} + (1-\alpha)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha - 1}\ [\alpha(1-\delta)N^{-(\alpha+1)}] \quad \text{...(7.2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (7.1) ਦੁਆਰਾ

$$\left[\frac{P}{\gamma}\right] = [\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha}$$

ਜਾਂ
$$\left[\frac{P}{\gamma}\right]^{-\alpha/v} = [\delta\, C^{-\alpha} + (1-\alpha)N^{-\alpha}]$$

ਜਾਂ
$$\left[\frac{P}{\gamma}\right]^{-(\alpha/v)(-v/\alpha-1)} = [\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha-1} \quad \text{...(7.3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (7.3) ਨੂੰ ਸੀਮਰਣ (7.2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \gamma v\left[\frac{P}{\gamma}\right]^{1+\alpha/v} = (1-\delta)N^{-(1+\alpha)} \quad \text{....(7.4)}$$

ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੀਕਰਣ (7.1) ਨੂੰ C ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\partial P}{\partial C} = \gamma v[\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha 1}\ \delta \cdot C^{-1+\alpha}$$

$$= \gamma v\left[\frac{P}{\gamma}\right]^{1+\alpha/v} \delta C^{-(1+\alpha)} \quad [\text{ਸਮੀਕਰਣ (7.3) ਤੋਂ}]$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕੇ

$$MTRS = \frac{\partial P/\partial C}{\partial P/\partial N} = \frac{\partial N}{\partial C} = R$$

ਨੋਟ

$$\therefore \qquad R = \frac{\gamma v\left[\frac{P}{\gamma}\right]^{1+\alpha/v} \delta C^{-(1+\alpha)}}{\gamma v\left[\frac{P}{\gamma}\right]^{1+\alpha/v} (1-\delta)N^{-(1+\alpha)}}$$

ਜਾਂ
$$= \frac{d}{1-d}\left(\frac{C}{N}\right)^{(1+\alpha)}$$

ਜਾਂ
$$R = \frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{N}{C}\right)^{1+\alpha}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ log ਲੈਣ ਤੇ

$$\log R = \log\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) + (1+\alpha)\log\left[\frac{N}{C}\right]$$
$$= \log \delta' + (1+\alpha)\log G$$

ਇੱਥੇ, $\delta' = \frac{\delta}{1-\delta}$ ਅਤੇ $G = \frac{N}{C}$ ਰੱਖਣ ਤੇ

G ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial G} = \frac{1+\alpha}{G}$$

ਜਾਂ
$$\frac{G}{R}\cdot\frac{\partial R}{\partial G} = 1+\alpha$$

ਜਾਂ
$$\frac{\partial G}{G}/\partial R/R = \frac{1}{1+\alpha}$$

ਜਾਂ
$$\frac{\partial(NC)/N/C}{\partial R/R} = \frac{1}{1+\alpha}$$

$\therefore$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦਾ ਲੋਚ $= \sigma = \frac{1}{1+\alpha}$ **ਉੱਤਰ**

2. **ਸੀ.ਈ.ਐਮ. ਦੇ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦ** (Marginal Product) **ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਭਾਵ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।**

ਉਤਪੱਤੀ–ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ

$$P = \gamma[\delta C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-v/\alpha}$$

N ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \gamma^{\alpha/v}\cdot\gamma P^{1+\alpha/v}(1-\delta)N^{-\alpha-1} \text{ (ਪਹਿਲੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਤੋਂ)}$$
$$Or\ MP_N = \gamma^{\alpha/v}\cdot v(1-\delta)P^{1+\alpha}N^{-(1+\alpha)}$$
$$= R_1\frac{P^{1+\alpha/v}}{N^{1+\alpha/v}} \text{ ਇੱਥੇ } R_1 = \gamma^{-\alpha/v}(1-\delta)$$

ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤਿਫਲਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $v = 1$

ਨੋਟ

$\therefore$ $$MP_N = R_1 \frac{P^{1+\alpha}}{N^{1+\alpha}} = R_1 \left[\frac{P}{N}\right]^{1+\alpha}$$

ਜਾਂ $$MP_N = R_1 \left(\frac{P}{N}\right)^{1/\sigma} \qquad \left[\text{ਇੱਥੇ, } \sigma = \frac{1}{1+\alpha}\right]$$

$\therefore$ $MP_N =$ ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ $MP_N > 0$

ਦੁਬਾਰਾ $$P = \gamma[\delta\, C^{-\alpha} + (1-\delta)N^{-\alpha}]^{-\upsilon/\alpha}$$

C ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$MP_C = \frac{\partial P}{\partial C} = \gamma^{-\alpha/v} \cdot vp^1 + \alpha\delta\, C^{-\alpha-1}$$

$$= \gamma^{-\alpha/v} \cdot \upsilon\delta P^{-1+\alpha/v}\, C^{-(1+\alpha)} \text{ (ਪਹਿਲੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਤੋਂ)}$$

ਜਾਂ $$MP_C = R_2 \frac{P^{1+\alpha/v}}{C^{1+\alpha/v}} \qquad \text{ਇੱਥੇ, } R_2 = \gamma^{-\alpha/w}\upsilon\delta$$

ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਸਕਿਰ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕਿਰਿਆਸ਼ੀਲ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $v = 1$

$$MP_C = R_2 \frac{P^{1+\alpha}}{C^{1+\alpha}} = R_2 \left(\frac{P}{C}\right)^{1+\alpha}$$

$$= R_2 \left(\frac{P}{C}\right)^{1/\sigma} \qquad \left[\text{ਇੱਥੇ,} \sigma = \frac{1}{1+\alpha}\right]$$

= ਧਨਾਤਮਕ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $MP_C > 0$

3. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਨ ਵਕਰ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਗਿਰਦੇ ਹੋਏ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਭਾਵ

$$\frac{\partial^2 P}{\partial M^2} < 0 \text{ ਅਤੇ } \frac{\partial^2 P}{\partial C^2} < 0$$

ਟਾਸਕ ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਕੀ ਗੁਣ ਹਨ?

7.4.2 ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਉੱਤੇ ਲਾਭ
(Advantages of C.E.S. Production Function Over Cobb-Douglas Production Function)

1. ਸੀ. ਈ. ਐਸ. (C.E.S.) ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀ ਅਪੇਖਿਆ ਵੱਧ ਸਧਾਰਣ ਉਤਪਾਦਨ ਤਕਨੀਕੀ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ ਸਥਿਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਲੋਚ ਇਕਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

2. ਸੀ. ਈ. ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀ ਅਪੇਖਿਆ ਵੱਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਪੈਰਾਮੀਟਰਸ (Parameters) ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤਤਾ (Substitutability) ਅਤੇ ਕੁਸ਼ਲਤਾ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਸਥਾਰਪੂਰਣ ਖੇਤਰ ਹੈ।

ਨੋਟ

3. ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਫਲਨ ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਹੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਫਲਨ $\alpha = 10$ ਵਿੱਚ ਰੱਖ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਫਲਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਏਗਾ।

4. ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਸ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ ਅਸਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇਸ ਫਲਨ ਨੇ ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਝੂਠੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

7.4.3 ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations of C.E.S. Production Function)

ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਨੇ ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਝੂਠੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਵੀ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰ ਵਿਆਪਕ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਆਲੋਚਨਾਵਾਂ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ–

1. ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਵੀ ਕੋਬ–ਡੋਗਲਸ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਕੇਵਲ ਦੋ ਸਾਧਨਾਂ (ਮਿਹਨਤ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ) ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਚੱਲਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਵੱਧ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। **ਪ੍ਰੋ.ਐਚ.ਉਜਾਵਾ** (Prof. H. Uzawa) ਦਾ ਕਹਿਣਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਫਲਨ ਨੂੰ n–ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ–ਜੇਕਰ $x = A\sqrt{ab}$ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਹੈ, a ਅਤੇ b ਸਾਧਨ ਦੇ ਲਈ ਮੰਗ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ P_a ਅਤੇ P_b ਸਥਿਰ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਵਕਰ $x = \beta - \alpha p$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਾਧਨ ਦੀ ਮੰਗ ਕੀਮਤਾਂ ਅਤੇ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ?

If $x = A\sqrt{ab}$ is the production function, find the factor demand for 'a' and 'b' when their prices are P_a and P_b. If the demand curve is $x = \beta - a\,p$ what is the factor demand in terms of prices and constants.

ਹੱਲ (Solution)–ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ

$$x = A\sqrt{ab}$$
$$= Aa^{1/2}b^{1/2} \quad \text{....}(i)$$

ਸਮੀਕਰਣ (i) ਨੂੰ ਵੱਖ–ਵੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ 'a' ਅਤੇ 'b' ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{1}{2}Aa^{-1/2}b^{1/2}$$

ਅਤੇ
$$\frac{\partial x}{\partial b} = \frac{1}{2}Aa^{1/2}b^{-1/2} \quad \text{....}(ii)$$

ਸਮੀਕਰਣ (i) ਅਤੇ (ii) ਤੋਂ

$$MP_a = \frac{1}{2}\frac{Aa^{1/2}b^{1/2}}{a} = \frac{x}{2a} \qquad \left(x = A\sqrt{ab}\right)$$

$$MP_b = \frac{1}{2}\frac{Aa^{1/2}b^{1/2}}{b} = \frac{x}{2b}$$

ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{MP_a}{MP_b} = \frac{P_a}{P_b}$$

$$\frac{x/2a}{x/2b} = \frac{P_a}{P_b}$$

ਜਾਂ
$$\frac{b}{a} = \frac{P_a}{P_b}$$

ਨੋਟ

ਜਾਂ $$b = \frac{P_a}{P_b} \text{ ਅਤੇ } a = b\frac{P_b}{P_a}$$

'a' ਅਤੇ 'b' ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\frac{x}{A} = a\sqrt{P_a/P_b}$$

ਜਾਂ $$a = \frac{x}{A} = \sqrt{P_a/P_b} \quad .....(iii)$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ $$b = \frac{x}{A}\sqrt{P_a/P_b} \quad .....(iv)$$

ਸੀਮਕਰਣ (iii) ਅਤੇ (iv) a ਅਤੇ b ਸਾਧਨ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਾਧਨ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ, ਮੰਗ ਵਕਰ

$$x = \beta - \alpha\, p$$

ਕਿਉਂਕਿ $$TC = ap_a + bp_b$$

a ਅਤੇ b ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$TC = ap_a + a\frac{p_a}{P_b}\cdot pb = 2ap_a$$

$$= 2p_a\frac{x}{A}\sqrt{P_b/P_a} \quad \text{[ਸਮੀਕਰਣ } (iii) \text{ ਤੋਂ]}$$

x ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\partial(TC)}{\partial x} = \frac{2p_a}{A}\sqrt{p_b/p_a} = \frac{2}{A}\sqrt{(P_aP_b)}$$

$$MC = \frac{2}{A}\sqrt{(p_ap_b)}$$

ਕਿਉਂਜੋ $$MC = p \quad \text{(ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗਿਤਾ ਦੀ ਸਥਿਤਰ ਵਿੱਚ)}$$

ਦੁਬਾਰਾ $$x = \beta - \alpha p \quad = \beta - \alpha\frac{2}{A}\sqrt{(p_ap_b)} \quad ....(v)$$

x ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$= \beta - \alpha\frac{2}{A}\sqrt{(p_ap_b)} = Aa^{1/2}b^{1/2} = Aa^{1/2}b^{1/2}\sqrt{P_a/P_b}$$

ਜਾਂ $$= \frac{1}{A}\left(\beta - \frac{2\alpha}{A}\sqrt{(p_ap_b)}\right)\sqrt{p_a/p_b} = a$$

ਜਾਂ $$= \frac{1}{A}\left(\beta - \frac{2\alpha}{A}\sqrt{(p_ap_b)}\right)\sqrt{p_a/p_b} = a$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$b = \frac{1}{A}\left(\beta - \frac{2\alpha}{A}\sqrt{(p_ap_b)}\right)\sqrt{p_a/p_b} \quad ....(vi)$$

ਸਮੀਕਰਣ (v) ਅਤੇ (vi) ਸਾਧਨ a ਅਤੇ b ਦੇ ਸਾਧਨ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ=(ੳ) ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ–

$$Q = A\,K^{\alpha}\,L^{\beta}$$

ਨੋਟ

ਤਾਂ ਪੂੰਜੀ (K) ਤੇ ਮਿਹਨਤ (L) ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ਅ) ਉਪਰੋਕਤ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਪੂੰਜੀ ਤੇ ਮਿਹਨਤ ਦੀ ਉਤਪਾਦਨ ਲੋਚ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

ਹੱਲ (Solution)–(ੳ) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਹੈ–

$$Q = A\,K^{\alpha}\,L^{\beta} \qquad .....(i)$$

ਸਮੀਕਰਣ 'K' ਅਤੇ 'L' ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅੰਸ਼ਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha\,K^{\alpha-1}\,L^{\beta} \qquad .....(ii)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = A\beta\,K^{\alpha}\,L^{\beta-1} \qquad .....(iii)$$

ਫਲਨ (ii) ਅਤੇ (iii) ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂੰਜੀ K ਅਤੇ L ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਣ ਤੇ

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\alpha}{K} \qquad (\therefore\ Q = AK^{\alpha}\,L^{\beta})$$

ਅਤੇ

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\beta}{L}\cdot Q$$

(ਅ) ਪੂੰਜੀ ਦੀ ਉਤਪਾਦਨ ਲੋਚ

$$= \frac{K}{Q}\,\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{K}{Q}\cdot\ A\alpha\,K^{\alpha-1}L^{\beta}$$

$$= \frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\,A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = \alpha\,\frac{A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}} = \alpha$$

ਮਿਹਨਤ ਦੀ ਉਤਪਾਦਨ ਲੋਚ

$$= \frac{L}{Q}\,\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{L}{Q}\cdot\ A\beta\,K^{\alpha}L^{\beta-1}$$

$$= \frac{L}{AK^{\alpha}L^{\beta}}\,A\,\beta\,K^{\alpha}\,L^{\beta-1}$$

$$= \frac{\beta}{AK^{\alpha}\,L^{\beta-1}}\,AK^{\alpha}\,L^{\beta-1} = \beta$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ α ਅਤੇ β ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਪੂੰਜੀ ਤੇ ਮਿਹਨਤ ਦੀ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਲੋਚ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

2. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)–

6. ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਦਾ ਸਹਿਰਾ ਕਿਸਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ?
   (*a*) ਸੀ.ਡਬਲਿਊ. ਕੋਬ ਅਤੇ ਡੀ.ਐਚ. ਡੋਗਲਸ (*b*) ਕੋਬ ਅਤੇ ਮਾਰਸ਼ਲ
   (*c*) ਡੋਗਲਸ ਅਤੇ ਅਰਸਤੂ (*d*) ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ
7. ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਹੈ–
   (*a*) $P = A\,L^{\beta}\,K^{\alpha}\,u$ (*b*) $P = AL^{\alpha}\,K^{\beta}\,u$
   (*c*) $P = L^{\alpha}\,K^{\beta}$ (*d*) $AK^{\beta}\,u$
8. ਸੀ.ਈ.ਐਸ. ਦੇ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ–
   (*a*) ਰਿਣਾਤਮਕ (*b*) ਘਨਾਤਮਕ (*c*) ਧਨਾਤਮਕ (*d*) ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

ਨੋਟ

7.5 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਜਿਆਦਾਤਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਸਾਰੇ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਧਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਉਤਪਾਦਨ ਵੀ ਉਸੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਧ ਜਾਏਗਾ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਉਤਪੱਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪੁਰਸਕਾਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ ਖਤਮ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਵੰਡ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਉਤਪਾਦਨ ਵਿਭਿੰਨ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਜੋਗ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਦਾ ਸਹਿਰਾ ਸੀ.ਡਬਲਿਊ. ਕੋਬ (C.W. Cobb) ਅਤੇ ਡੀ. ਐਚ. ਡੋਗਲਸ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਸਮਰੂਪ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਟਿ (Degree) ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਤਪਾਦਨ ਸਥਿਰ ਪੈਮਾਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਵਰਤਮਾਨ ਵਿੱਚ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਕੋਬ ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਭਿੰਨ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਲੱਗ ਗਏ ਹਨ।
- ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਸਥਾਰਪੂਰਣ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਖੇਤੀ ਅਤੇ ਨਿਰਮਾਣਕਾਰੀ ਉਦਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧਦਾ ਰਿਹਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਵਿਭਿੰਨ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਆਲੋਚਨਾਵਾਂ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ (Elasticity of Subsitution) ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਕਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਸੀ. ਈ. ਐਸ. (C.E.S.) ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀ ਅਪੇਖਿਆ ਵੱਧ ਸਧਾਰਣ ਤਕਨੀਕੀ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

7.6 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਸਮਰੂਪ (Homogeneous)- ਸਮਘਾਤ।
- ਪ੍ਰਮੇਯ (Theorem)- ਸਾਧਕ, ਜਿਸਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

7.7 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣ ਸਹਿਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ।
2. ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਪ੍ਰਸੰਗ ਸਹਿਤ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।
3. ਯੂਲਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਗਣਿਤਕ ਹੱਲ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।
4. ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।
5. ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੇ ਆਰਥਿਕ ਮਹੱਤਵ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।
6. ਕੋਬ-ਡੋਗਲਸ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।
7. ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ (ਸੀ.ਈ.ਐਸ.) ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

ਨੋਟ

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਸਮਰੂਪ 2. ਯੂਲਰਸ 3. ਆਰਥਿਕ 4. ਉਤਪਾਦਨ 5. ਸਮਰੂਪ।
6. (*a*) 7. (*b*) 8. (*c*)

7.8 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
4. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
9. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।

VED1
E\L-LOVELY-H\math8-1 IInd 6-8-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

ਇਕਾਈ–8: ਨਿਖੇੜਨ ਦਾ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ (Use of Differentiation in Economics)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨੂੰ ਜਾਣ ਸਕਣਗੇ।
- ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਅਤੇ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰ ਸਕਣਗੇ।
- ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਦੁਆਰਾ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ ਦੁਆਰਾ ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਕੱਢਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨੂੰ ਜਾਣ ਸਕਣਗੇ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਨਿਖੇੜਨ ਦਾ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਿਨੋ-ਦਿਨ ਵੱਧਦਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਪੇਸ਼ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਦਾ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

8.1 ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਦਾ ਉਪਯੋਗ (Use of Differentiation in Economics)

ਨਿਖੇੜਨ ਦਾ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਿਨੋ-ਦਿਨ ਵੱਧਦਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਨਿਖੇੜਨ ਦਾ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

8.1.1 ਲੋਚ (Elasticity)

ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਲੋਚ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਨਿਖੇੜਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਫਲਨ $y = f(x)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ y ਦੇ ਸੰਘ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਲੋਚ ਅੱਗੇ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ–

$$E_x = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ਨੋਟਸ ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਫਲਨ $q = f(p)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ (E_d) ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਢੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ–

$$E_d = \underset{\Delta p \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta q / q}{\Delta p / p} = \frac{p}{q}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਫਲਨ $q = 300 - 4 . p^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀਮਤ $p = 2$ ਹੋਣ ਤੇ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ ਕੱਢੋ। ਨੋਟ

ਹੱਲ : ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ $E_d = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$; ਇੱਥੇ $q = 300 - 4p^2, \frac{dq}{dp} = -8p$

$$\therefore \quad E_d = \frac{p}{300-4p^2} \times -8p = \frac{-8p^2}{300-4p^2}$$

ਜੇਕਰ $p = 2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $E_d = \frac{-8\times 4}{300-(4\times 4)} \times -8p = \frac{-32}{292} = \frac{-8}{73}$

8.1.2 ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਅਤੇ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ (Marginal Revenue and Elasticity of Demand)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ = ਕੀਮਤ × ਮਾਤਰਾ

ਜਾਂ $TR = p \times q$ [p = ਮੁੱਲ, q = ਮਾਤਰਾ]

q ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$MR = \frac{d(TR)}{dq} = \frac{d}{dq}(d \times q)$$

$$MR = \left[p + q\frac{dp}{dq}\right] = p\left[1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right]$$

ਜਾਂ

$$MR = p\left[1 + \frac{1}{E_d}\right] \qquad \therefore \left[E_d = \frac{q}{p}\frac{dq}{dp}\right]$$

ਜਾਂ

$$MR = AR\left[1 + \frac{1}{E_d}\right]$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿਉਂਜੋ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

$$MR = AR\left[1 - \frac{1}{E_d}\right]$$

8.1.3 ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਨਾਲ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ ਨਾਲ ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਕੱਢਣਾ (Finding Marginal Cost from Total Cost and Marginal Output from Total Output)

ਮੰਨਿਆ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਫਲਨ $C = f(q)$, q ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦੋਂ ਲਾਗਤ $(MC) = \frac{d}{dq}(C)$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ ਫਲਨ $(R) = f(p, q)$

ਉਦੋਂ ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ $(MR) = \frac{d}{dq}(R)$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਮੰਨਿਆ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ $C = 15 + 10q - 9q^2 + q^3$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ (MC) ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ $C = 15 + 10q - 9q^2 + q^3$

ਨੋਟ q ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$MC = \frac{dc}{dq} = 10 - 18q + 3q^2.$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਮੰਨਿਆ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ $R = 6q - 9q^2$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਸੀਮਾਂਤ (MR) ਕੱਢੋ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਸਮਾਂ ਮਾਤਰਾ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ $R = 6q - 9q^2$

'q' ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$MR = \frac{dR}{dq} = 6 - 18q$$

ਸਾਮਯ ਦੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $MR = MC$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$6 - 18q = 10 - 18q + 3q^2$$

ਜਾਂ $3q^2 = 4$

$$q^2 = \frac{4}{3} \quad \text{ਜਾਂ} \quad q = \pm\sqrt{4/3}.$$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)**:**

1. ਨਿਖੇੜਨ ਦਾ .... ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਿਨੋ-ਦਿਨ ਵੱਧਦਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।
2. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਲੋਚ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ .... ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਆਗਮ = ਕੀਮਤ × ....
4. ਕੀਮਤ = $\dfrac{\text{...............}}{\text{ਮਾਤਰਾ}}$
5. $MR = \text{...............}\left[1 - \dfrac{1}{E_d}\right]$

8.1.4. ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਵਿੱਚ ਸਾਮਤਾਵਾਦ ਅਵਸਥਾ : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (Equalibrium in Monopoly: Finding Maximum Profit)

ਨਿਖੇੜਨ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਏਕਾਧਿਕਾਰ ਦੀ ਸਮਤਾਵਾਦ ਅਵਸਥਾ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਉਸਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਨ:

ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਦੀ ਸਮਤਾਵਾਦ ਅਵਸਥਾ $MR = MC$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ

$$\frac{d(R)}{dq} = \frac{d(C)}{dq}$$

ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਭ $\pi = R - C$

ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ ਦੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਾ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ-

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \qquad .....(i)$$

ਅਤੇ

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0 \text{ (ਰਿਣਾਤਮਕ)} \qquad .....(ii)$$

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜਕਰ ਮੰਗ ਫਲਨ $p = 20 - 5q$ ਹੈ ਅਤੇ ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਫਲਨ $Ac = q$ ਹੈ ਤਾਂ ਏਕਾਧਿਕਾਰ ਦਾ ਸਮਤਾਵਾਦ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ ਦੱਸੋ।

ਹੱਲ : (*i*) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਮੰਗ ਫਲਨ $p = 20 - 5q$

ਅਤੇ $AC = q$

ਕੁੱਲ ਆਗਮ $= p \times q$

$= (20 - 5q)q = 20q - 5q^2$

q ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$MR = \frac{d(R)}{dq} = 20 - 10q$$

ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ $(C) = AC \times q = q \times q = q^2$

q ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$MC = \frac{DC}{dq} = 2q$$

ਸਮਤਾਵਾਦ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ, $MR = MC$

$20 - 10q = 2q$

ਜਾਂ $8q = 20$

ਜਾਂ $q = \frac{20}{8} = 2.5$

(*ii*) ਕੁੱਲ ਲਾਭ $(\pi) = R - C$

$= 20q - 5q^2 - q^2$

$= 20q - 6q^2$

ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ ਦੇ ਲਈ $\frac{d\pi}{dq} = 0$ ਅਤੇ $\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{d\pi}{dq} = 20 - 12q = 0$

ਜਾਂ $12q = 20$

ਜਾਂ $q = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -12 =$ ਰਿਣਾਤਮਕ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $q = \frac{5}{3}$ ਉੱਤੇ ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ।

ਨੋਟਸ $\frac{d(R)}{dq}$ ਅਤੇ $\frac{d(C)}{dq}$ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਮੰਗ ਫਲਨ $Q = 23 - 4p + p^2$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ P ਅਤੇ Q ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਅਤੇ ਮਾਤਰਾ ਹਨ। ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਦੋਂ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ (*i*) 8 ਰੁਪਏ ਅਤੇ (*ii*) 5 ਰੁਪਏ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਮੰਗ ਦਾ ਫਲਨ

$$Q = 25 - 4p + p^2\left[\frac{p}{q}\alpha - \frac{dq}{p}\right]$$

'p' ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -4 + 2p$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\text{ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ} = \frac{\text{ਮੰਗੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਰਿਵਰਤਨ}}{\text{ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਰਿਵਰਤਨ}}$$

$$E_d = \frac{\partial Q/Q}{\partial p/p} = \frac{P}{Q}\frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$= \frac{P}{Q}(-4 + 2p) = \frac{-4p + 2p^2}{25 - 4p + p^2}$$

$$Ed_{(p=8)} = \frac{-32 + 128}{25 - 32 + 64} = \frac{96}{57} = +1.6$$

$$Ed_{(p=5)} = \frac{-20 + 50}{25 - 20 + 25} = \frac{30}{30} = +1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕੀਮਤ 8 ਰੁਪਏ ਹੈ ਤਾਂ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ 1.6 ਅਤੇ ਕੀਮਤ 5 ਰੁਪਏ ਹੋ ਜਾਣ ਤੇ ਮਗ ਦੀ ਲੋਚ ਇਕਾਈ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਵਕਰ $Q = 150 - 15p$ ਹੋਵੇ ਤਦਾਂ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ $p = 4$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਮੰਗ ਫਲਨ ਹੈ– $Q = 150 - 15P$

'p' ਵਿੱਚ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ $\frac{\partial Q}{\partial p} = -15$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ $(E_d) = \frac{P\partial Q}{Q\partial p} = \frac{-15p}{150 - 15p}$

$$E_{d(p=4)} = \frac{-15 \times 4}{150 - (15 \times 4)} = \frac{-60}{150 - 60} = \frac{-60}{90} = -0.66$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ: ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਉੱਤੇ ਸੰਖੇਪ ਨੋਟ ਲਿਖੋ–(I) ਮੰਗ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਲੋਚ, (II) ਪੂਰਤੀ ਲੋਚ, (III) ਮੰਗ ਦੀ ਆਮਦਨ ਲੋਚ, (IV) ਔਸਤ ਆਗਮ, ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਅਤੇ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ, (V) ਹਾਨੀਪੂਰਕ ਮੰਗ ਫਲਨ ਅਤੇ (VI) ਮੰਗ ਦੀ ਸਥਾਪਨ ਮੰਗ।

(Write short notes on following-(I) Cross elasticity of demand, (II) Elasticity of supply, (III) Income elasticity of demand, (IV) Relationship between average revenue, marginal revenue and elasticity of demand, (V) Compensated demand function and (VI) Elasticity of substitution of demand).

ਨੋਟ

ਉੱਤਰ : (I) ਮੰਗ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਲੋਚ (Cross Elasticity of Demand)

ਮੰਗ ਫਲਨ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਉਸ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਾ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਦੂਜੀ ਸੰਬੰਧਤ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਾ ਵੀ ਫਲਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਮੰਗ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਲੋਚ ਇਹ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸੰਬੰਧਤ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਮੰਨਿਆ ਇੱਥੇ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ X ਅਤੇ Y ਹਨ। ਇੱਥੇ Y-ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦੇ ਕਾਰਨ X-ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਮੰਗ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ

$$E_C = \frac{X\text{– ਵਸਤੂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਰਿਵਰਤਨ}}{Y\text{– ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਰਿਵਰਤਨ}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗਿਤਾ ਫਰਮ ਦਾ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਨਿਮਨ ਹੈ–

ਮੰਗ ਫਲਨ $P = 30 - x$

ਪੂਰਤੀ (ਲਾਗਤ) ਫਲਨ $C = x^2 + 6x + 7$

ਤਾਂ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਕਿਸੀ ਸਤਰ ਉੱਤੇ ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਮੁੱਲ, ਲਾਭ ਅਤੇ ਸਕਲ ਆਗਮ ਦੇ ਸੰਗਤ ਮਾਨ ਕੀ ਹੋਣਗੇ?

ਹੱਲ: ਫਰਮ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ ਦੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਪੂਰਣ ਹੋਣੀਆਂ ਜਰੂਰੀ ਹਨ–

$$MR = MC \text{ ਜਾਂ } \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0 \qquad \ldots\ldots(i)$$

ਅਤੇ
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} < 0 \qquad \ldots\ldots(ii)$$

ਇੱਥੇ ਸਕਲ ਲਾਭ π = ਕੁੱਲ ਆਗਮ (R) = ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ (C)

ਕੁੱਲ ਆਗਮ (R) = ਮੁੱਲ × ਵਸਤੂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ

$$= P \,.\, x = (30 - x) \,.\, x = 30x - x^2$$

$$MR = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(30x - x^2) = 30 - 2x$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$C = x^2 + 6x + 7$$

$$MC = \frac{\partial C}{\partial x} = 2x + 6$$

ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $MR = MC$

$$30 - 2x = 2x + 6$$

ਜਾਂ
$$-4x = -30 + 6 = -24$$

ਜਾਂ
$$x = \frac{24}{4} = 6$$

x ਦਾ ਮਾਨ ਦੂਜੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$\pi = R - c = (30x - x^2) - (x^2 + 6x + 7)$$
$$= 30x - x^2 - x^2 - 6x - 7$$
$$= 24x - 2x^2 - 7$$

x ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 24 - 4x$$

ਨੋਟ

ਵੱਧ ਤੋਂ ਲਾਭ ਦੇ ਲਈ $\frac{\partial\pi}{\partial x} = 0$ ਜਾਂ $24 - 4x = 0$ ਜਾਂ $-4x = 24$ ਜਾਂ $x = 6$

ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ ਦੀ ਦੂਜੀ ਸ਼ਰਤ $\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} < 0$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} = 4 < 0$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸ਼ਰਤ ਪੂਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਮੰਗ ਫਲਨ ਵਿੱਚ $x = 4$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$p = 30 - x = 30 - 4 = 26$$

ਸਕਲ ਆਗਮ $(R) = 30x - x^2$

$x = 6$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$R = (30 \times 6) - (6 \times 6) = 180 - 36 = 144$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $\pi = 24x - 2x^2 - 7$ ($x = 6$ ਰੱਖਣ ਤੇ)

$$= (24 \times 6) - (2 \times 6 \times 6) - 7$$
$$= 144 - 72 - 7 = 65.$$

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਜੇਕਰ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗਿਤਾ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕਿਸੀ ਫਰਮ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਫਲਨ,

$$\mathbf{C = 0.3x^3 - 3x^2 + 20x + 15}$$

ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ

$P \geq AVC$ ਇੱਥੇ, P = ਮੁੱਲ, AVC = ਔਸਤ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਲਾਗਤ

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $AVC = \frac{TVC}{x} = \frac{TC - TFC}{x}$

ਇੱਥੇ TVC = ਕੁੱਲ੍ਹ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਲਾਗਤ, TC = ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ, TFC ਕੁੱਲ੍ਹ ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ ਅਤੇ x = ਵਸਤੂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$AVC = \frac{\left(0.3x^3 - 3x^2 + 20x + 15\right) - 15}{x} \qquad (\because \quad TFC = 15)$$
$$= 0.3x^2 - 3x + 20$$

AVC ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨ ਤੇ $\frac{\partial(AVC)}{\partial x} = 0$ ਅਤੇ $\frac{\partial^2(AVC)}{\partial x^2} > 0$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{\partial(AVC)}{\partial x} = \frac{\partial\left(0.3x^2 + 3x + 20\right)}{\partial x} = 0.6x - 3 = 0$

ਜਾਂ $0.6x = 3$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 5$

$\frac{\partial^2(AVC)}{\partial x^2} = 0.6 > 0$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 5$ ਉੱਤੇ AVC ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇਗੀ।

ਨਿਊਨਤਮ AVC ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ $x = 5$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$AVC = (3 \times 5 \times 5) - (3 \times 5) + 20$$
$$= 7.5 - 15 + 20 = 12.5$$

ਜੇਕਰ $P < AVC = 12.5$, ਉਤਪਾਦਨ ਸਤਰ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ।

ਜੇਕਰ $P > AVC = 12.5$, ਉਦੋਂ ਪੂਰਤੀ ਸਤਰ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਨੋਟ

$$MC = \frac{\partial C}{\partial x} = 3x.\ 0.3x^2 - 6x + 20$$
$$= 0.9x^2 - 6x + 20$$

ਕਿਉਂਜੋ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗਤ ਵਿੱਚ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ

$$P = MC$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $P = 0.9x^2 - 6x + 20$

ਜਾਂ $0.9x^2 - 6x + 20 - P = 0$

X ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੋਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times .9(20 - P)}}{2 \times .6}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 3.6(20 - P)}}{1.2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 72 + 3.6P}}{1.2}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{-36P - 3.6P}}{1.2}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $P \geq 12.5$ ਤਾਂ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ $x = \frac{6 \pm \sqrt{3.6P - 36}}{1.2}$

ਅਤੇ $P < 12.5$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ $x = 0$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਕਿਸੀ ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਦਾ ਮੰਗ ਫਲਨ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਨਿਮਨ ਹਨ–

$$\boldsymbol{P = 50 - 6q} \qquad \textbf{(ਮੰਗ ਫਲਨ)}$$
$$\boldsymbol{x = 60 + 14q} \qquad \textbf{(ਲਾਗਤ ਫਲਨ)}$$

ਨਿਰਗਤ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਲਾਭ ਦਾ ਸੰਤੁਲਨ ਸਤਰ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੀ ਦੂਜੀ ਸ਼ਰਤ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਗ ਫਲਨ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਨਿਮਨ ਹਨ–

$$P = 50 - 6q \qquad ....(i)$$
$$x = 60 + 14q \qquad ....(ii)$$

ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ ਫਲਨ $(R) = p \times q$

$$= (50 - 6q)q = 50q - 6q^2 \qquad ....(iii)$$

ਲਾਭ $(\pi) = R - C$

$$= 50q - 6q^2 - 60 - 14q \qquad ....(iv)$$
$$= 36q - 6q^2 - 60$$

ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਬੰਧੀ

ਸਮੀਕਰਣ (*iv*) ਨੂੰ 'q' ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d\pi}{dq} = 36 - 12q = 0$$

ਜਾਂ $12q = 36$

ਜਾਂ $q = \frac{36}{12} = 3$

ਨੋਟ

q ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\text{ਮੁੱਲ} = p = 50 - (6 \times 3) = 50 - 18 = 32$$

ਸਮੀਕਰਣ (iv) ਵਿੱਚ q ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\text{ਲਾਭ} = \pi = 36 \times 3 - 6 \times 3 \times 3 - 60$$
$$= 108 - 54 - 60 = 108 - 114 = -6$$

ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੀ ਦੂਜੀ ਸ਼ਰਤ

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$$

ਇੱਥੇ,
$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -12 < 0.$$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਕਿਸੀ ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਫਰਮ ਦਾ ਰੇਖੀ ਫਲਨ

$$p = 15 - 0.5q$$

ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਫਲਨ

$$C = 0.5q^2 + 5q + 10$$

ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਰਗਤ (q), ਮੁੱਲ (p), ਸਮੱਗਰ ਲਾਭ (π) ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਆਗਮ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ੳ) ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ।

(ਅ) ਬਿਕਰੀ ਜਾਂ ਆਗਮ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ।

ਹੱਲ : (ੳ) ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ–

$$p = 15 - 0.5q \quad \text{....}(i)$$
$$C = 0.5q^2 + 5q + 10 \quad \text{....}(ii)$$

$\therefore$ ਕੁੱਲ ਆਗਮ
$$(R) = pq = (15 - 0.5q)q$$
$$= 15q - 0.5q^2 \quad \text{....}(iii)$$

ਕੁੱਲ ਲਾਭ
$$(\pi) = R - C$$
$$= 15q - 0.5q^2 - 0.5q^2 - 5q - 10$$
$$= 10q - q^2 - 10 \quad \text{....}(iv)$$

ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਬੰਧੀ,

$$\frac{d\pi}{dq} = 10 - 2q = 0$$

ਜਾਂ
$$2q = 10$$

ਜਾਂ
$$q = \frac{10}{2} = 5$$

q ਦਾ ਮਾਨ (i), (iii) ਅਤੇ (iv) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$p = 15 - (0.5 \times 5) = 15 - 2.5$$
$$= 12.5$$
$$R = 15 \times 5 - (0.5 \times 5 \times 5)$$
$$= 75 - 12.5 = 62.5$$

ਨੋਟ

$$\pi = (10 \times 5) - (5 \times 5) - 10$$
$$= 50 - 35 = 15$$

(ਅ) ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ ਫਲਨ

$$R = 15\,q - 0.5q^2$$

R ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ

$$\frac{dR}{dq} = 15q - (0.5 \times 2)q = 0$$

ਜਾਂ $15 - q = 0$

ਜਾਂ $q = 15$

q ਦਾ ਮਾਨ (i), (ii) ਅਤੇ (iv) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\pi = 15 - (0.5 \times 15)$$
$$= 15 - 7.5 = 7.5$$
$$R = 15 \times 15 - 0.5 \times 15 \times 15$$
$$= 225 - 112.5$$
$$= 112.5$$
$$\pi = (10 \times 15) - (15 \times 15) - 10$$
$$= 150 - 225 - 10$$
$$= -85.$$

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਕਿਸੀ ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਦਾ ਰੇਖੀ ਮੰਗ ਫਲਨ

$$\boldsymbol{P = 12 - 0.4q}$$

ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਫਲਨ

$$\boldsymbol{C = 0.6q^2 + 4q + 5}$$

ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਰਗਤ (q), ਮੁੱਲ (p) ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਲਾਭ (π) ਦੀ ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਗਣਨਾ ਕਰੋ?

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ।

$$P = 12 - 0.4q \quad \text{....}(i)$$
$$C = 0.6q^2 + 4q + 5 \quad \text{....}(ii)$$

ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ,
$$R = p \times q$$
$$= (12 - 0.4q) \times q \quad \text{....}(iii)$$
$$= 12q - 0.4q^2$$

ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਭ
$$\pi = \pi = R - c$$
$$= (12q - 0.4q^2) - (0.6q^2 + 4q + 5)$$
$$= 12q - 0.4q^2 - 0.6q^2 - 4q - 5$$
$$= 8q - q^2 - 5 \quad \text{....}(iv)$$

ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਬੰਧੀ,
$$\frac{d\pi}{dq} = 8 - 2q = 0$$

ਜਾਂ
$$2q = 8$$
$$q = \frac{8}{2} = 4$$

ਦੂਜੀ ਸ਼ਰਤ ਸੰਬੰਧੀ,
$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -2 < 0$$

ਨੋਟ

q ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਅਤੇ (iv) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$p = 12 - (0.4 \times 4)$$
$$= 12 - 1.6 = 10.4$$
$$\pi = (8 \times 4) - (4 \times 4) - 5$$
$$= 32 - 16 - 5$$
$$= 16 - 5 = 11.$$

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਕਿਸੀ ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਫਰਮ ਦਾ ਮੰਗ ਫਲਨ

$$\boldsymbol{P = 140 - 6q}$$

ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਫਲਨ

$$\boldsymbol{C = 60 + 20q}$$

ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਰਗਤ (q), ਮੁੱਲ (p), ਸਾਰੇ ਆਗਮ (R) ਅਤੇ ਲਾਭ (π) ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਸਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੀ ਦੂਜੀ ਸ਼ਰਤ ਦੱਸੋ।

ਜੇਕਰ ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗੀ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਮੁੱਲ (p), ਨਿਰਗਤ (q) ਅਤੇ ਲਾਭ ਦੇ ਕੀ ਮਾਨ ਹੋਣਗੇ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮਾਨ ਹਨ–

$$P = 140 - 6q \quad \ldots(i)$$
$$C = 60 + 20q \quad \ldots(ii)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁੱਲ ਆਗਮ,
$$R = P \times q$$
$$= (140q - 6q)q = 140q - 6q^2 \quad \ldots(iii)$$

ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਭ,
$$\pi = R - C$$
$$= 140q - 6q^2 - 60 - 20q$$
$$= 120q - 6q^2 - 60 \quad \ldots(iv)$$

ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਬੰਧੀ,

$$\frac{d\pi}{dq} = 120 - 12q = 0$$
$$12q = 120$$
$$q = \frac{120}{12} = 10$$

q ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (i), (iii) ਅਤੇ (iv) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$P = 140 - (6 \times 10) = 140 - 60 = 80$$
$$R = (140 \times 10) - (6 \times 10 \times 10)$$
$$= 1400 - 600 = 800$$
$$\pi = (120 \times 10) - (6 \times 10 \times 10) - 60$$
$$= 1200 - 600 - 60$$
$$= 1200 - 660 = 540$$

ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੀ ਦੂਜੀ ਸ਼ਰਤ,

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -12 < 0$$

ਜੇਕਰ ਏਕਾਧਿਕਾਰ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗੀ ਹੋ ਜਾਣ ਤਾਂ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $MC = P$ ਹੋਵੇਗਾ।

($\therefore$ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗਿਤਾ ਵਿੱਚ $P = MR$)

ਹੁਣ, $C = 60 + 20q$

'q' ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$MC = \frac{dC}{dq} = 20$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $20 = 140 - 6q$ $(\therefore \quad MC = P)$

ਜਾਂ $6q = 140 - 20 = 120$

$q = 20$ ਅਤੇ $p = 20$

ਅਤੇ $\pi = -60$

ਲਾਭ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਦੋ ਪ੍ਰਥਕ ਬਾਜ਼ਾਰਾਂ ਦੇ ਮੰਗ ਫਲਨ ਤੇ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਨਿਮਨ ਹਨ।

$$\boldsymbol{P_1 = 80 - 5q_1,\ P_2 = 180 - 29q_2}$$

ਅਤੇ $\boldsymbol{C = 50 + 20\,(q_1 + q_2).}$

ਮੁੱਲ ਭੇਦ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋਹਾਂ ਬਾਜ਼ਾਰਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ, ਉਤਪਾਦਨ, ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਅਤੇ ਉਤਪਾਦਕ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ–

$$P_1 = 80 - 5q_1 \quad ...(i)$$

$$P_2 = 180 - 29q_2 \quad ...(ii)$$

$$C = 50 + 20\,(q_1 + q_2) \quad ...(iii)$$

ਪਹਿਲੇ ਬਾਜ਼ਾਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਆਗਮ

$$R_1 = P_1q_1 = (80 - 5q_1)q_1$$

$$= 80q_1 - 5q^2 \quad ...(iv)$$

ਦੂਜੇ ਬਾਜ਼ਾਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਆਗਮ

$$R_2 = p_2q_2 = (180 - 29q_2)q_2$$

$$= 180q_2 - 29q_2^2 \quad ...(v)$$

ਸਮੀਕਰਣ (iv) ਨੂੰ q_1 ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$MR_1 = \frac{\partial R_1}{\partial q_1} = 80 - 10q_2 = 0 \quad ....(vi)$$

ਜਾਂ $10q_1 = 80$ ਜਾਂ $q_1 = 8$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (v) ਦਾ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$MR_2 = \frac{\partial R_2}{\partial q_2} = 180 - 58q_1 = 0 \quad ...(vii)$$

ਜਾਂ $58q_2 = 180$ ਜਾਂ $q_2 = \frac{180}{58} = \frac{90}{29}$

$\boxed{\text{ਕੁੱਲ ਲਾਭ } \pi = R_1 + R_2 - C}$

$$= 80q_1 - 5q_1^2 + 180q_2 - 29q_2^2 - 50 - 20q_1 - 20q_2$$

$$= 60q_1 - 5q_1^2 + 160q_2 - 29q_2^2 - 50 \quad ....(viii)$$

q_1 ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (*i*), (*ii*), (*vi*) (*vii*) ਅਤੇ (*viii*) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$P_1 = 80 - 5 \times 8 = 80 - 40 = 40$$

$$P_2 = 180 - 29 \times \frac{90}{29} = 180 - 90 = 90$$

$$MR_1 = 80 - 10 \times 8 = 0$$

$$MR_2 = 180 - 58 \times \frac{90}{29} = 0$$

$$\pi = (60 \times 8) - (5 \times 8 \times 8) + 160 \times \frac{90}{29} - 29 \times \frac{90 \times 90}{29 \times 29} - 50$$

$$= 240 - 320 + \frac{14400}{29} - \frac{8100}{29} - 50$$

$$= -130 + \frac{14400 - 8100}{29}$$

$$= -130 + \frac{6300}{29} = -130 + 217\frac{7}{29}$$

$$= 87\frac{7}{29}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਇੱਕ ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਦੇ ਦੋ ਬਾਜ਼ਾਰਾਂ ਦੇ ਮੰਗ ਫਲਨ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਹਨ–

$$\boldsymbol{P_1 = 2 - q_1}$$

$$\boldsymbol{P_2 = 9 - 6q_2}$$

$$\boldsymbol{C = q_1 + q_2}$$

ਮੁੱਲ ਭੇਦ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋਹਾਂ ਬਾਜ਼ਾਰਾਂ ਮੁੱਲ, ਉਤਪਾਦਨ (ਬਿਕਰੀ ਮਾਤਰਾ), ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਅਤੇ ਏਕਾਧਿਕਾਰੀ ਦਾ ਲਾਭ ਕੱਢੋ। ਬਾਜ਼ਾਰ *A* ਅਤੇ *B* ਦੀ ਮੰਗ ਲੋਚ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ–

$$P_1 = 2 - q_1 \quad \text{...}(i)$$

$$P_2 = 9 - 6q_2 \quad \text{...}(ii)$$

$$C = q_1 + q_2 \quad \text{...}(iii)$$

ਬਾਜ਼ਾਰ *A* ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ

$$R_1 = P_1q_1 = 2q_1 - q_1^2 \quad \text{...}(iv)$$

ਬਾਜ਼ਾਰ *B* ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ

$$R_2 = p_2q_2 = 9q_2 - 6q_2^2 \quad \text{...}(v)$$

ਸਮੀਕਰਣ (*iv*) ਅਤੇ (*v*) ਦਾ q_1 ਅਤੇ q_2 ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਥਕ-ਪ੍ਰਥਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$MR_1 = \frac{\partial R_1}{\partial q_1} = 2 - 2q_1 \quad \text{...}(vi)$$

$$MR_2 = \frac{\partial R_2}{\partial q_2} = 9 - 12q_2 \quad \text{...}(vii)$$

ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਭ, $\pi = R_1 + R_2 - C$

$$= 2q_1 - q_1^2 + 9q_2 - 6q_2^2 - q_1 - q_2$$

$$= q_1 - q_1^2 = 8q_2 - q_2^2 \quad \text{...}(viii)$$

ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਬੰਧੀ,
ਸਮੀਕਰਣ (*viii*) ਦਾ q_1 ਅਤੇ q_2 ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਥਕ-ਪ੍ਰਥਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ

ਨੋਟ

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1} = 1 - 2q_1 = 0 \text{ ਜਾਂ } q_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_2} = 8 - 12q_2 = 0 \text{ ਜਾਂ } q_2 = \frac{2}{3}$$

q_1 ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$P_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$P_2 = 9 - 6 \times \frac{2}{3} = 9 - 4 = 5$$

$$MR_2 = 2 - 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$MR_2 = 9 - 12 \times \frac{2}{3} = 1$$

ਇੱਥੇ $MR_1 = MR_2$ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $P_1 \neq P_2$

ਹੁਣ
$$\begin{bmatrix} MR_1 = P_1\left(1 - \dfrac{1}{e_1}\right) \text{ਇੱਥੇ}, e_1 = \text{ਬਾਜ਼ਾਰ } A \text{ ਦੀ ਲੋਚ} \\ MR_2 = P_2\left(1 - \dfrac{1}{e_2}\right) \text{ਇੱਥੇ}, e_2 = \text{ਬਾਜ਼ਾਰ } B \text{ ਦੀ ਲੋਚ} \end{bmatrix}$$

MR_1, MR_2, P_1 ਅਤੇ P_2 ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\begin{bmatrix} 1 = 1.5\left(1 - \dfrac{1}{e_1}\right) \text{ ਜਾਂ } e_1 = 3 \\ 1 = 5\left(1 - \dfrac{1}{e_2}\right) \text{ ਜਾਂ } e_2 = \dfrac{4}{5} \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਾਜ਼ਾਰ A ਵਿੱਚ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ ਬਾਜ਼ਾਰ ਦੀ ਅਪੇਖਿਆ ਵੱਧ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਾਜ਼ਾਰ A ਵਿੱਚ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਬਾਜ਼ਾਰ B ਦੀ ਅਪੇਖਿਆ ਘੱਟ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਕਿਸੀ ਏਕਾਧਿਕਾਰਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗੀ ਫਰਮ ਦੇ ਮੰਗ ਫਲਨ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਨਿਮਨ ਅੰਕਤ ਹਨ–

$$\boldsymbol{P = 36 - 5q}$$
$$\boldsymbol{C = q^2 + 6q + 5}$$

ਫਰਮ ਦਾ ਲਾਭ, ਉਤਪਾਦਨ ਸਤਰ (q) ਅਤੇ ਮੁੱਲ (p) ਦਾ ਮਾਨ ਦੱਸੋ। ਇਸ ਫਰਮ ਦੀ ਏਕਾਧਿਕਾਰਿਤ ਸਮਰੱਥਾ ਕਿੰਨੀ ਹੈ? ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਮੰਗ ਲੋਚ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ–

$$P = 36 - 5q \quad ...(i)$$

$$C = q^2 + 6q + 5 \quad ...(ii)$$

$$\therefore \quad R = Pq = 36q - 5q^2 \quad ...(iii)$$

$$\therefore \quad MR = \frac{dR}{dq} = 36 - 10q \quad ...(iv)$$

ਅਤੇ
$$\pi = R - C$$
$$= 36q - 5q^2 - q^2 - 6q - 5$$
$$= 30q - 6q^2 - 5 \quad ...(v)$$

ਨੋਟ ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਬੰਧੀ

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 30 - 12q = 0$$

$$12q = 30$$

ਜਾਂ $$q = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2.5$$

q ਦਾ ਮਾਨ (i), (iv) ਅਤੇ (v) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$P = 36 - 5 \times \frac{5}{2} = 36 - \frac{25}{2} = 36 - 12.5 = 23.5$$

$$MR = 36 - 10q$$

$$= 36 - 10 \times \frac{5}{2} = 36 - 25 = 11$$

$$\pi = 30q - 6q^2 - 5$$

$$= 30 \times \frac{5}{2} - 6 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} - 5$$

$$= 75 - \frac{75}{2} - 5$$

$$= 37.5 - 5 = 32.5$$

ਕਿਉਂਜੋ ਇੱਥੇ $P > MR$ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਰਮ ਦੀ ਏਕਾਧਿਕਾਰਿਕ ਸਮਰੱਥਾ $= \frac{P - MR}{MR} \times 100$

$$= \frac{23.5 - 11}{11} \times 100$$

$$= \frac{12.5 \times 100}{11} = 113.6\%$$

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਫਰਮ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ 113.6% ਵਾਧਾ ਕਰਨ ਦੀ ਏਕਾਧਿਕਾਰਿਕ ਸਮਰੱਥਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ $(e) = \frac{P}{P - MR}$

$$= \frac{23.5}{23.5 - 11} = \frac{23.5}{12.5}$$

$$= 1.8.$$

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਫਲਨ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਨਿਮਨ ਹਨ।

$$\mathbf{P = 100 - 0.5\,(q_1 + q_2)}$$

$$\mathbf{C_1 = 5q_1}$$

$$\mathbf{C_2 = 0.5q_2^2}$$

ਹੋਣ ਤਾਂ q_1, q_2, P, π ਅਤੇ π_2 ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੋਹਾਂ ਫਰਮਾਂ ਦੀ ਦੂਜੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਇੱਕ ਫਰਮ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋਣ ਤੇ ਦੂਜੇ ਦੇ ਉਤਪਾਦਕ ਸਤਰ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ,

$$P = 100 - 0.5\,(q_1 + q_2)$$

$$C_1 = 5q_1$$

$$C_2 = 0.5q_2^2$$

ਪਹਿਲੀ ਫਰਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਆਗਮ ਨੋਟ

$\therefore$ $R_1 = Pq_1 = [100 - 0.5(q_1 + q_2)]q_1$

ਦੂਜਾ $= 100q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_2$

ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਫਰਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਆਗਮ

$\therefore$ $R_2 = Pq_2 = [100 - 0.5(q_1 + q_2)]q_2$

$= 100q_2 - 0.5q_1 q_2 - 0.5q_2^2$

ਪਹਿਲੀ ਫਰਮ ਦਾ ਲਾਭ ਫਲਨ

$$\pi_1 = R_1 - C_1$$
$$= 100q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_1q_2 - 5q_1$$
$$= 95q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_1q_2$$

ਦੂਜੀ ਫਰਮ ਦਾ ਲਾਭ ਫਲਨ

$$\pi_2 = R_2 - C_2$$
$$= 100q_2 - 0.5q_1 q_2 - 0.5q_2^2 - 0.5q_2^2$$
$$= 100q_2 - 0.5q_1 q_2 - q_2^2$$

ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 95 - q_1 - 0.5q_2 = 0$$

ਜਾਂ $q_1 + 0.5q_2 = 95$ ....(*i*)

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 100 - 0.5q_1 - 2q_1 = 0$$

ਜਾਂ $0.5q_1 + 2q_2 = 100$ ....(*ii*)

ਸਮੀਕਰਣ (*i*) ਨੂੰ 4 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ

$4q_1 + 2q_2 = 380$ ....(*iii*)

ਸਮੀਕਰਣ (*iii*), ਸਮੀਕਰਣ (*ii*) ਵਿੱਚ ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$$3.5q_1 = 280$$

ਜਾਂ $q_1 = \dfrac{280}{3.5} = 80$

q_1 ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ ....(*i*) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$80 + 0.5q_2 = 95$$

ਜਾਂ $0.5q_2 = 95 - 80 = 15$ ਜਾਂ $q_2 = \dfrac{15}{0.5} = 7.5$

q_1 ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਮਾਨ ਮੰਗ ਫਲਨ ਅਤੇ ਲਾਭ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$P = 100 - 0.5(q_1 + q_2)$$
$$= 100 - 0.5(80 + 7.5)$$
$$= 100 - 0.5 \times 87.5 = 100 - 43.75 = 56.25$$
$$\pi_1 = 95 \times 80 - (0.5 \times 80 \times 80) - (0.5 \times 7.5 \times 80)$$
$$= 7600 - 3200 - 300 = 4100$$
$$\pi_2 = 100 \times 7.5 - 0.5 \times 7.5 \times 80 - 7.5 \times 7.5$$
$$= 75 - 300 - 56.25 = -281.25$$

ਨੋਟ ਦੂਜੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ ਸ਼ਰਤ–

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial {q_1}^2} = -1 < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial {q_2}^2} = -2 < 0$$

ਪ੍ਰਤੀਕਿਰਿਆ ਫਲਨ, (*i*) ਅਤੇ (*ii*) ਦੁਆਰਾ

$$q_1 = 95 - 0.5q_2$$

ਅਤੇ

$$q_2 = \frac{100 - 0.5q_1}{2} = 50 - 0.25q_1$$

ਕਿਉਂਜੋ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਕਰਾਂ ਦਾ ਢਾਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਫਰਮ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋਣ ਤੇ ਦੂਜੀ ਫਰਮ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ (State whether the following statements are True or False) –

6. ਨਿਖੇੜਨ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਏਕਾਧਿਕਾਰ ਦੀ ਸਮਤਾਵਾਦ ਅਵਸਥਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
7. $\frac{d(R)}{dq} \neq \frac{d(c)}{dq}$
8. $MR = MC$
9. $AVC = \frac{TC - TVC}{x}$
10. $AVC = \frac{TC - TFC}{x}$

8.2 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਲੋਚ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਨਿਖੇੜਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਮੰਗ ਫਲਨ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਉਸ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਾ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਦੂਜੀਆਂ ਸੰਬੰਧਤ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਾ ਵੀ ਫਲਨ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਮੰਗ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਲੋਚ ਇਹ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸੰਬੰਧਤ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

8.3 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਉਪਯੋਗ (use)–ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ।
- ਲੋਚ (Elasticity)–ਲਚੀਲਾ।

8.4 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਲੋਚ ਕੱਢਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।
2. ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਅਤੇ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ।
3. ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਨਾਲ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ ਨਾਲ ਸੀਮਾਂਤ ਆਗਮ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ?

4. ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਫਲਨ $P = 20 - 5q$ ਹੈ ਅਤੇ ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਫਲਨ $AC = q$ ਹੈ ਤਾਂ ਏਕਾਧਿਕਾਰ ਦਾ ਸਮਤਾਵਾਦ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ ਦੱਸੋ। (**ਉੱਤਰ :** ਸਮਤਾਵਾਦ ਮੁੱਲ = 2.5, ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = $\frac{5}{3}$)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ	2. ਨਿਖੇੜਨ	3. ਮਾਤਰਾ	4. ਆਗਮ	5. *AR.*
6. ਸੱਚ	7. ਝੂਠ	8. ਸੱਚ	9. ਝੂਠ	10. ਝੂਠ

8.5 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਉਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
6. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
9. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–9: ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ : ਇੱਕ ਚਰ (Maxima and Minima : One Variable)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਲਈ।
- ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ।
- ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਸੰਬੰਧੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।
- ਫਲਨ $y = f(x)$ ਦਾ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਉਚਾਈ **ਅਗਲ-ਬਗਲ** (ਸੱਜੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਦੋਨੋਂ ਮਕਾਨਾਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਤੋਂ **ਵੱਧ** ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਉਚਾਈ **ਉਚਤਰ** (Maximum) ਕਹਾਏਗੀ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਗਲ-ਬਗਲ (ਸੱਜੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਦੋਨੋਂ ਮਕਾਨਾਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਤੋਂ **ਘੱਟ** ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਉਚਾਈ **ਨਿਮਨਤਰ** (Minimum) ਕਹਾਏਗੀ।

9.1 ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਦੀ ਕਲਪਨਾ (Concept of Maxima and Minima)

ਗਣਿਤ ਦਾ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਉਪਯੋਗ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਫਲਨ ਆਪਣੇ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਨ ਤੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਉੱਚ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਘਟਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਆਪਣੇ ਵਧਣ ਵਾਲੀ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਘਟਣ ਵਾਲੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਉੱਚਤਰ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਘਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਅਗਲੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਦੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਵਧਣ ਵਾਲੀ

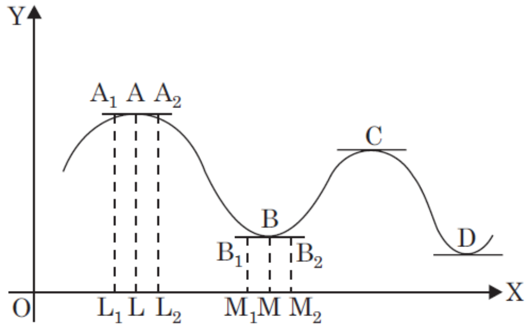
ਨੋਟ

ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਆਉਣ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਉਚਤਰ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਉਸਦੇ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਠੀਕ ਬਾਅਦ (small neighbourhood) ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਮਾਨਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਉਸਦੇ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਠੀਕ ਬਾਅਦ (small neighbourhood) ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : ਮੰਨ ਲਿਓ ਫਲਨ $y = x^3 - 6x^2 - 2$, x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜਿਹੜਾ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਭਾਵ $(x < 1)$ y ਦਾ ਮਾਨ ਵੀ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $1 < x < 3$ ਦੇ ਲਈ y ਦਾ ਮਾਨ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਦੇ ਮੱਧ y ਦਾ ਮਾਨ ਇੱਕ ਉੱਚਤਰ ਮਾਨ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਿਓ $y = f(x)$, ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। $y = f(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਵਕਰ ਉੱਤੇ A, B, C, D ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਉੱਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ x-ਅਕਸ਼ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।



ਹੁਣ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ A ਅਤੇ C ਉੱਤੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ਅਤੇ A ਅਤੇ C ਦੇ ਅੱਗੇ ਵਧਣ ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਮਾਨ ਦਾ ਵਧਣਾ ਰੁਕ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਘਟਣਾ ਅਰੰਭ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ C ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਮਾਨ ਗ੍ਰਹਿਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ C ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਉੱਚਤਰ (Maximum) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ B ਅਤੇ D ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਘਟਣਾ ਬੰਦ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਅੱਗੇ ਵਧਣ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਵਧਣਾ ਅਰੰਭ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f(x)$ ਫਲਨ B ਅਤੇ D ਉੱਤੇ ਜੋ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨਿਮਨਤਰ (Minimum) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਚਤਰ (Maxima)

ਮੰਨ ਲਿਓ ਵਕਰ ਉੱਤੇ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਲਈ $x = a = OL$

$\therefore$ $x = a$ ਉੱਤੇ, $y = f(a) = AL$

ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਲਘੂ ਨੇੜਤਾ (small neighbourhood) ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ A_1 ਲਿਓ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $x = a - h = OL_1$, ਇੱਥੇ h ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = a - h$ ਉੱਤੇ, $y = f(a - h) = A_1L_1 < AL$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਲਘੂ ਨੇੜਤਾ (small neighbourhood) ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ A_2 ਲਿਓ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ

$$x = a + h = OL_2.$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = a + h$ ਉੱਤੇ, $y = f(a + h) = A_2L_2 < AL$

ਹੁਣ ਕਿਉਂਜੋਂ A_1L_1, AL ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ, ਭਾਵ $A_1L_1 < AL$

$\therefore$ $f(a - h) < f(a)$ ਜਾਂ $f(a) > f(a - h)$

ਅਤੇ ਕਿਉਂਜੋਂ A_2L_2, AL ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ, ਭਾਵ $A_2L_2 < AL$

$\therefore$ $f(a + h) < f(a)$ ਜਾਂ $f(a) > f(a + h)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A (ਜਿਸਦੇ ਲਈ $x = a$) ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ, ਭਾਵ $f(a)$ A ਦੇ ਖੱਬੇ ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਹਰ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਮਾਨਾਂ, ਭਾਵ $f(a - h)$ ਅਤੇ $f(a + h)$ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ।

9.2 ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Definition of Maxima and Minima)

ਉੱਚਤਰ (Maxima)

ਮੰਨ ਲਿਓ $y = f(x)$ ਕੋਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $x = a$ ਕੋਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਮੰਨਿਆ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (L.H.S.) ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਨੇੜਲਾ ਬਿੰਦੂ $x = a - h$ ਅਤੇ $x = a$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (R.H.S.) ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਨੇੜਲਾ ਬਿੰਦੂ $x = a + h$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ h ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਅਲਪ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ।

ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ $= f(a)$

ਬਿੰਦੂ $x = (a - h)$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ $= f(a - h)$

ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $x = (a + h)$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ $= f(a + h)$.

ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ **ਉਚਤਰ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ

$$\boxed{f(a - h) < f(a) > f(a + h)}$$

ਭਾਵ $x = a$ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ $f(a)$, **ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ** ਸਥਿਤ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਉਸਦੇ ਮਾਨਾਂ $f(a - h)$ ਅਤੇ $f(a + h)$ **ਦੋਹਾਂ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ।**

ਨੋਟਸ ਕੋਈ ਫਲਨ $f(x)$, $x = a$ ਉੱਤੇ ਉਦੋਂ ਉਚਤਰ (maximum) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ $f(a)$ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਵੇ ਜਿਹੜਾ $x = a$ ਦੇ ਲਘੂ ਨੇੜਲੇ ਵਿੱਚ x ਹਰੇਕ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਗ੍ਰਹਿਣ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਨਿਮਨਤਰ (Minima)

ਮੰਨ ਲਿਓ ਵਕਰ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਲਈ $x = a = OM$

$\therefore$ $x = a$ ਉੱਤੇ, $y = f(a) = BM$.

ਹੁਣ ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਲਘੂ ਨੇੜਲੇ (small neighbourhood) ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ B_1 ਲਿਓ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $x = a - h = OM_1$, ਜਿੱਥੇ h ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = a - h$ ਉੱਤੇ, $y = f(a - h) = B_1M_1 > BM$.

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਲਘੂ ਨੇੜਲੇ (small neighbourhood) ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ B_2 ਲਿਓ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $x = a + h = OM_2$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = a + h$ ਉੱਤੇ, $y = f(a + h) = B_2M_2 > BM$.

ਹੁਣ ਕਿਉਂਜੋ B_1M_1, BM ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ, ਭਾਵ $B_1M_1 > BM$

$\therefore$ $f(a - h) > f(a)$ ਜਾਂ $f(a) < f(a - h)$

ਅਤੇ ਕਿਉਂਜੋ B_2M_2, BM ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ, ਭਾਵ $B_2M_2 > BM$.

$\therefore$ $f(a + h) > f(a)$ ਜਾਂ $f(a) < f(a + h)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ B (ਜਿਸਦੇ ਲਈ $x = a$) ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ, ਭਾਵ $f(a)$, B ਦੇ ਖੱਬੇ ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਹਰ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਮਾਨਾਂ, ਭਾਵ $f(a - h)$ ਅਤੇ $f(a + h)$ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ।

ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $f(x)$ **ਨਿਮਨਤਰ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ

$$\boxed{f(a - h) > f(a) < f(a + h)}$$

ਭਾਵ $x = a$ ਤੋਂ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ $f(a)$, ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਸਥਿਤ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਉਸਦੇ ਮਾਨਾਂ $f(a - h)$ ਅਤੇ $f(a + h)$ **ਦੋਹਾਂ ਤੋਂ ਛੋਟਾ** ਹੈ।

ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਉਚਤਰ ਮਾਨ (Maximum) ਦਾ ਇਹ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਉਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਦਾ ਇਹ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਮਾਨ ਹੈ। ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਉਚਤਰ ਮਾਨ ਦੂਜੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇ। A ਫਲਨ ਜਾਂ ਕੋਟਿ ਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ ਹੈ, ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਸਪਾਸ ਵਾਲੇ ਦੋਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਇਸਦਾ ਮਾਨ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ B ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਜਾਂ ਕੋਟਿ ਦਾ

ਮਾਨ ਨਿਮਨਤਰ (minimum) ਹੈ, ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਕੇਵਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਸਪਾਸ ਵਾਲੇ ਦੋਨੋਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਕੋਟਿ ਦਾ ਮਾਨ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਨੋਟ

9.3 ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ (Condition to Finding Maxima and Minima)

ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $y = f(x)$ ਦੇ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਨਿਮਨ ਹਨ–

(*i*) ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ (Necessary Condition)

ਉਚਤਰ (maximum) ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ (minimum) ਦੋਹਾਂ ਦੇ ਹੀ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਨਿਮਨ ਹਨ–

$$f'(x) = 0 \text{ ਜਾਂ } \frac{dy}{dx} = 0$$

(*ii*) ਉਚਿਤ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ (Sufficient Condition)

ਉਚਤਰ (maximum) ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ (minimum) ਦੇ ਲਈ ਉਚਿਤ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ–

ਉਚਤਰ (maximum) ਦੇ ਲਈ:

$$x = a \text{ ਉੱਤੇ } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ਦਾ ਮਾਨ } = \text{ ਰਿਣਾਤਮਕ}$$

ਰਾਸ਼ੀ ਨਿਮਨ (minimum) ਦੇ ਲਈ :

$$x = a \text{ ਉੱਤੇ } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ਦਾ ਮਾਨ } = \text{ ਧਨਾਤਮਕ}$$

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਗਣਿਤ ਦਾ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਉਪਯੋਗ ਕਿਸੀ .... ਦੇ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਉਚਤਰ ਅਤੇ .... ਮਾਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।
3. .... ਦੇ ਲਈ $x = a$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
4. ਨਿਮਨਤਰ ਦੇ ਲਈ $x = a$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ .... ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

9.4 ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਕਿਸੀ ਦੇ ਵੀ ਨਾ ਹੋਣ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ (Conditions to Absent of Maxima or Minima)

ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ $y = f(x)$ ਨਾ ਤਾਂ ਉਚਤਰ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਨਿਮਨਤਰ ਹੋਵੇਗਾ, ਜੇਕਰ

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ ਦਾ ਮਾਨ } = 0 \text{ ਅਤੇ } \frac{d^3y}{dx^3} \text{ ਦਾ ਮਾਨ } \neq 0$$

ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣ :

1. ਉਚਤਰ ਮਾਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਉਚਤਰ ਮਾਨ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਏਕਾਂਤਰ ਕ੍ਰਮ ਨਾਲ ਆਉਂਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

2. ਫਲਨ ਦੇ ਦੋ ਸਮਾਨ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਥ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਜਰੂਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਜਿੱਥੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਹੈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ x-ਅਕਸ਼ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮਾਨ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ $\frac{dy}{dx} = 0$ ਮਾਨ ਦੇ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਨ ਕਰਨ ਨਾਲ x ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
4. ਫਲਨ ਦੇ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲਦਾ ਹੈ। ਉਚਤਰ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਇਹ ਚਿੰਨ੍ਹ ਧਨ ਤੋਂ ਰਿਣ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਰਿਣ ਤੋਂ ਧਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਾਸਕ ਨਿਮਨਤਰ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਤ ਕਰੋ।

9.5 ਫਲਨ $y = f(x)$ ਦਾ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਕਿਰਿਆ ਪਦ (Steps of Finding Maxima and Minima of the Functions $y = f(x)$)

(i) $y = f(x)$ ਦਾ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(ii) $\frac{dy}{dx} = 0$ ਰੱਖਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ x ਦੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(iii) ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ x ਦੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮਾਨ a_1, a_2, a_3 ਹਨ।

(iv) d^2y/dx^2 ਪਤਾ ਕਰਕੇ a_1, a_2, a_3 ਆਦਿ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

ਜੇਕਰ x ਦੇ ਕਿਸੀ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ ਉਸ x ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਮਨਤਰ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਚਤਰ ਹੋਵੇਗਾ।

(v) ਜੇਕਰ x ਦੇ ਕਿਸੀ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ x ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^3y}{dx^3}$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ। ਜੇਕਰ ਉਸ x ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਉਸ x ਦੇ ਮਾਨ ਉੱਤੇ ਨਾ ਤਾਂ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਾ ਨਿਮਨਤਰ ਹੋਵੇਗਾ।

(vi) ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ x ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ x ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^4y}{dx^4}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਉਸ x ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^4y}{dx^4}$ ਰਿਣ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ x ਦੇ ਮਾਨ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਧਨ ਹੈ ਤਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਵੀ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਜਾਣਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sin x + \cos x$ ਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ $\sqrt{2}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $y = \sin x + \cos x$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$$

ਦੁਬਾਰਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - \cos x$$

y ਦੇ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ, $\frac{dy}{dx} = 0.$

$\therefore$ $\cos x - \sin x = 0$

ਜਾਂ $\sin x = \cos x$

ਜਾਂ $\tan x = 1$

ਜਾਂ $x = \frac{\text{À}}{4}$

$x = \frac{\text{À}}{4}$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ $= -\sin\frac{\text{À}}{4} - \cos\frac{\text{À}}{4}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

= ਰਿਣਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = \frac{\text{À}}{4}$ ਉੱਤੇ y ਦਾ ਮਾਨ ਉਚਤਰ ਹੈ।

y ਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ $= \sin\frac{\text{À}}{4} + \cos\frac{\text{À}}{4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਫਲਨ $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ ਦੇ ਉਚਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ x ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ ਮਾਨ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 \qquad ....(i)$$

ਨੋਟ ਫਲਨ ਦੇ ਉਚਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ $4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$

ਜਾਂ $4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 0$

ਜਾਂ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

ਜਾਂ $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

$\therefore$ $x = 1, 2, 3$

ਸਮੀ. (i) ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 48x + 44$$

$x = 1$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ $= 12(1)^2 - 48(1) + 44$

$= 12 - 48 + 44$

$= 8 =$ ਧਨਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ

$x = 2$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ $= 12(2)^2 - 48(2) + 44$

$= 48 - 96 + 44$

$= -4 =$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 2$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਉਚਤਮ ਹੈ

$x = 3$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ $= 12(3)^2 - 48(3) + 44$

$= 108 - 144 + 44$

$= 8 =$ ਧਨਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 3$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. $x^3 - 2x^2 + x + 6$ ਦਾ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $y = x^3 - 2x^2 + x + 6$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1$$

ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$

ਹੁਣ $\frac{dy}{dx} = 0$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$3x^2 - 4x + 1 = 0$ ਜਾਂ $(3x - 1)(x - 1) = 0$, ਜਿਸ ਨਾਲ $x = \frac{1}{3}$ ਜਾਂ 1

ਇਹਨਾਂ ਹੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਨੋਟ

ਹੁਣ $x = \frac{1}{3}$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ $= 6.\frac{1}{3} - 4 = -2 < 0$ (ਰਿਣਾਤਮਕ)

$\therefore$ ਫਲਨ $x = \frac{1}{3}$ ਉੱਤੇ ਉਚਤਰ ਹੈ।

ਅਤੇ $x = 1$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ $= 6.1 - 4 = 2 > 0$ (ਧਨਾਤਮਕ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਹੈ।

ਉਚਤਰ ਮਾਨ $= f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 6 = \frac{166}{27}$

ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ $= f(1) = 1^3 - 2.\ 1^2 + 1 + 6 = 6.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਫਲਨ $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$, x ਦੇ ਕਿਨ੍ਹਾਂ ਮਾਨਾਂ ਉੱਤੇ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਹੈ? ਫਲਨ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਮਾਨਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

ਹੁਣ ਫਲਨ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) \quad \text{....(1)}$$

ਫਲਨ ਦੇ ਉਚਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ $6(x^2 - 3x + 2) = 0$ ਜਾਂ $x^2 - 3x + 2 = 0$

ਜਾਂ $(x - 1)(x - 2) = 0$ $\therefore$ $x = 1, 2$

ਹੁਣ (1) ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(2x - 3)$$

ਅਤੇ $x = 1$ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(2.\ 1 - 3) = -6$ ਜਿਹੜਾ ਰਿਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਹੈ।

ਇਹ ਉਚਤਰ ਮਾਨ $= 2.\ 1^3 - 9.\ 1^2 + 12.\ 1 - 3$

$= 2 - 9 + 12 - 3 = 2$ **ਉੱਤਰ**

ਹੁਣ $x = 2$ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(2.2 - 3) = 6$ ਧਨ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 2$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਹੈ।

ਅਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ

$= 2.2^3 - 9.2^2 + 12.2 - 3 = 1$ **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 5. x ਦੇ ਕਿਨ੍ਹਾਂ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ, ਫਲਨ $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$, ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਇਹ ਫਲਨ ਨਾ ਉਚਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਨਿਮਨਤਰ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

$$= 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x-1)(x-3)$$

ਫਲਨ ਉਚਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad 5x^2(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore \quad x = 0, 1, 3$

ਹੁਣ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x = 10x(2x^2 - 6x + 3)$

$x = 1$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10(2 - 6 + 3) = -10 \text{ ਰਿਣਾਤਮਕ}$$

$\therefore$ $x = 1$ ਉਤੇ ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਹੈ।

$x = 3$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10 \times 3(2 \times 3^2 - 6 \times 3 + 3) = 30(18 - 18 + 3)$$

$$= 90 \text{ ਧਨਾਤਮਕ}$$

$\therefore$ $x = 3$ ਉਤੇ ਫਲਨ ਨਿਮਨਤਰ ਹੈ।

$x = 0$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਹੈ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਨਹੀਂ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।

ਹੁਣ $\quad \frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 120x + 30$

$x = 0$, ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ

$\frac{d^3y}{dx^3} = 0 - 0 + 30 = 30$ ਜੋ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 0$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਨਾ ਉਚਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਨਿਮਨਤਰ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਫਲਨ $(x-1)(x-2)(x-3)$ ਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11$$

ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

ਨੋਟ

$\therefore \qquad 3x^2 - 12x + 11 = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 3 \times 11}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$\Rightarrow \qquad x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \qquad x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਜਾਂ $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

ਹੁਣ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$

$x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 12 = 2\sqrt{3} \text{ ਧਨਾਤਮਕ}$$

$x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਨਿਮਨਤਰ ਹੈ।

ਅਤੇ $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 12 = -2\sqrt{3} \text{ ਰਿਣਾਤਮਕ}$$

$\therefore \qquad x = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਹੈ।

ਹੁਣ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਵਿੱਚ $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ

$$\text{ਉਚਤਰ ਮਾਨ} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 2\right)\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 3\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ ਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ $(e)^{1/e}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

'e' ਅਧਾਰ ਤੇ ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ logarithm ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \log\left(\frac{1}{x}\right)^x = x \log \frac{1}{x} = x \log x^{-1} = -x \log x$$

'x' ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\left[x.\frac{1}{x} + 1.\log x\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = -(1 + \log x)y$$

ਨੋਟ y ਦੇ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ $-(1 + \log x)\, y = 0$ ਜਾਂ $\log x = -1$ $\because$ $y \neq 0$

ਜਾਂ $-\log x = 1$

ਜਾਂ $\log \frac{1}{x} = \log e \Rightarrow x = \frac{1}{e}$.

ਹੁਣ $\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[y.\frac{1}{x} + (1+\log x)\frac{dy}{dx}\right]$

$x = \frac{1}{e}$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -[ey + 0], \quad \because \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -ey$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। $\therefore$ $x = \frac{1}{e}$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਹੈ।

$\therefore$ ਨਿਰਦਿਸ਼ਟ ਫਲਨ ਵਿੱਚ $x = \frac{1}{e}$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ

ਉਚਤਰ ਮਾਨ $= \left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right)^{1/e} = (e)^{1/e}$ ਸਿੱਧ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. $\frac{\log x}{x}$ **ਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ** $0 < x < \infty$.

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $y = \frac{\log x}{x}$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x.(1/x) - (\log x).1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2(-1/x) - (1-\log x).2x}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x + 2x\log x}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ਰੱਖਣ ਤੇ, $\frac{1-\log x}{x^2} = 0$ ਜਾਂ $1 - \log x = 0$

ਜਾਂ $\log x = 1 = \log e, \therefore x = e$

$x = e$ ਉੱਤੇ, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\log e - 3}{e^3} = \frac{2-3}{e^3} = -\frac{1}{e^3}$ = ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ।

$\therefore$ $x = +e$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਹੈ ਅਤੇ

ਇਸਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ $= \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$. **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਜੇਕਰ $y = a \log x + bx^2 + x$ ਦੇ $x = -1$ ਅਤੇ $x = 2$ ਉੱਤੇ ਉਚਤਰ-ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ (extremum values) ਹਨ ਤਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $y = f(x) = a \log x + bx^2 + x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a.\frac{1}{x} + 2bx + 1$

ਉਚਤਰ-ਨਿਮਨਤਰ ਦੇ ਲਈ, $\frac{dy}{dx} = 0$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-1} = 0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_{2} = 0$$

$\Rightarrow$ $$-a - 2b + 1 = 0 \qquad ....(i)$$

ਅਤੇ $$\left(\frac{a}{2}\right) + 4b + 1 = 0 \qquad ....(ii)$$

(*i*) ਅਤੇ (*ii*) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$a = -2, b = -\frac{1}{2}$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਫਲਨ $x + \sin 2x$, $(0 < x < 2\pi)$ ਦੇ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $$y = x + \sin 2x$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = 1 + 2\cos 2x$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ, $1 + 2\cos 2x = 0$

ਜਾਂ $$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$2x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \qquad [\because 0 < x < 2\pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

ਹੁਣ $$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \sin 2x$$

(1) ਜਦੋਂ $x = \frac{\pi}{3}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin\frac{2\pi}{3} = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$ ਰਿਣਾਤਮਕ

$\therefore$ $x = \frac{\pi}{3}$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਉਚਤਰ ਹੈ।

ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਵਿੱਚ $x = \frac{\pi}{3}$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ, ਫਲਨ ਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ

$$= \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}$$ **ਉੱਤਰ**

(2) ਜਦੋਂ $x = \frac{2\pi}{3}$ ਤਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin\frac{4\pi}{3}$

ਨੋਟ

$$= -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} \text{ ਧਨਾਤਮਕ}$$

$\therefore$ $x = \frac{2\pi}{3}$ ਉੱਤੇ ਫਲਨ ਨਿਮਨਤਰ ਹੈ।

ਅਤੇ $x = \frac{2\pi}{3}$ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ, ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ

$$= \frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$$ **ਉੱਤਰ**

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ

(State whether the following Statements are True or False) –

5. ਉਚਤਰ ਦੇ ਲਈ $x = a$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
6. ਨਿਮਨਤਰ ਦੇ ਲਈ $x = a$ ਉੱਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
7. ਫਲਨ ਦੇ ਦੋ ਸਮਾਨ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਜਰੂਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
8. ਫਲਨ ਦੇ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

9.6 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਉਚਾਈ **ਅਗਲ-ਬਗਲ** (ਸੱਜੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਦੋਹਾਂ ਮਕਾਨਾਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਉਚਾਈ ਉਚਤਰ (Maximam) ਕਹਾਏਗੀ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਗਲ-ਬਗਲ (ਸੱਜੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਦੋਨੋਂ ਮਕਾਨਾਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਤੋਂ **ਘੱਟ** ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਉਚਾਈ ਨਿਮਨਤਰ (Minimam) ਕਹਾਏਗੀ।
- ਫਲਨ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ ਦੇ ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਘਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਅਗਲੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਦੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵਧਣ ਵਾਲੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਆਉਣ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।
- ਉਚਤਰ ਮਾਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਉਚਤਰ ਮਾਨ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਏਕਾਂਤਰ ਕ੍ਰਮ ਨਾਲ ਆਉਂਦੇ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ x ਦੇ ਕਿਸੀ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ ਉਸ x ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਮਨਤਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਚਤਰ ਹੋਵੇਗਾ।

9.7 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਉਚਤਰ (Maximum) – ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ।
- ਨਿਮਨਤਰ (Minimum) – ਨਿਊਨਤਮ।

9.8 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. $x^3 - 2x^2 + x + 6$ ਦਾ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (**ਉੱਤਰ** : ਉਚਤਰ = $\frac{166}{27}$, ਨਿਮਨਤਰ = 6)

2. ਫਲਨ $(x-1)(x-2)(x-3)$ ਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** ਉਚਤਰ = $\frac{2}{3\sqrt{3}}$)

3. ਦਰਸਾਓ ਕਿ $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ ਦਾ ਉਚਤਰ ਮਾਨ $(e)^{1/e}$ ਹੈ।

4. ਫਲਨ $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$, x ਦੇ ਕਿਨ੍ਹਾਂ ਮਾਨਾਂ ਉੱਤੇ ਉਚਤਰ ਜਾਂ ਨਿਮਨਤਰ ਹੈ?

   (**ਉੱਤਰ :** ਉਚਤਰ = 2, ਨਿਮਨਤਰ = 1)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਫਲਨ	2. ਨਿਮਨਤਰ	3. ਉਚਤਰ	4. ਧਨਾਤਮਕ
5. ਝੂਠ	6. ਸੱਚ	7. ਸੱਚ	8. ਝੂਠ।

9.9 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
3. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.* ।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਉਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–10: ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ : ਦੋ ਚਰ ਅਤੇ ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਕ ਸਹਿਤ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ (Maxima and Minima: Two Variables and Constrained Maxima and Minima with Langrange's Multiplier)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਸੰਬੰਧੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।
- ਲੇਂਗਰੇਜ ਵਿਧੀਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਸਲਟਸਕੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਜਾਣ ਸਕਣਗੇ।
- ਸਲਟਸਕੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲੋਚ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਝ ਸਕਣਗੇ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਮੰਨ ਲਿਓ ਕੋਈ, $u = f(xy)$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਅਤੇ (x_0, y_0) ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਉੱਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਅਤੇ $e < n$ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹਨ ਤਾਂ ਫਲਨ ਉਚਤਰ (x_0, y_0) ਉੱਤੇ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ, $f(x_0 - e, y_0 - n) < f(x_0, y_0)$ ਅਤੇ $f(x_0, y_0) > f(x_0 + e, y_0 + n)$ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ $f(x_0 - e, y_0 - n) > f(x_0, y_0)$ ਅਤੇ $f(x_0, y_0) < f(x_0 + e, y_0 + x)$ ਜਿੱਥੇ $f(x_0, y_0)$ ਫਲਨ ਦੀ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮੁੱਲ ਹੈ।

10.1 ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ (Conditions to Finding Maxima and Minima)

ਨੋਟ

(A) **ਜਰੂਰੀ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ (Necessary Condition):** ਜੇਕਰ $u = f(x, y)$

ਤਾਂ $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$

(B) **ਉਚਿਤ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ (Sufficient Condition):**

ਉਚਤਰ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $u = f(x, y)$ ਅਤੇ ਜਰੂਰੀ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ $fx = 0$, and $fy = 0$ ਤਾਂ

$$\partial^2 u/\partial x^2 < 0 \text{ and } \partial^2 u/\partial y^2 > 0$$

$$\therefore \quad \underset{\downarrow (A)}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \cdot \underset{(B)}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} > \Bigg(\underset{(C)}{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\Bigg)^2 \text{ or } AB > C^2 \text{ o } \boxed{f_{xx} \cdot f_{yy} > f_{xy}}$$

ਨਿਮਨਤਰ ਦੇ ਲਈ $u = f(x, y), fx = 0$ ਅਤੇ $f_y = 0$

ਤਾਂ

$$\partial^2 u/\partial x^2 > 0 \text{ ਅਤੇ } \partial^2 u/\partial yz > 0$$

$$\therefore \quad \partial^2 u/\partial x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 \text{ or } \boxed{A.B < C^2}$$

or $f_{xx} \cdot f_{yy} < fxy$

ਉਦਾਹਰ 1. $u = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2x - y = 0 \qquad ....(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x + 2y = 0 \qquad ....(2)$$

(1) ਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$3x^2 + 2x - y = 0$$
$$-x + 2y = 0$$

ਜੇਕਰ $x = 2y$ ਤਾਂ ਪਹਿਲੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$3(2y)^2 + 2(2y) - y = 0$$
$$y(12y + 3) = 0$$

ਜਦੋਂ $y = 0$ or $y = -\frac{1}{4}$

ਜਦੋਂ $y = 0$

$$x = 2y = 0$$

ਜਦੋਂ $y = -\frac{1}{4}$

ਤਾਂ $x = 2y = -\frac{1}{2}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜਰੂਰੀ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਅਤੇ (–1/2, –1/4) ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਮਾਨ, ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਮਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਨੋਟ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x+2, \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1 \qquad ...(3)$$

(0, 0) ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6(0)+2 = 2 > 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\cdot 2 = 4 > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, (0, 0) ਮੁੱਲ, ਨਿਮਨਤਰ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

$u = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4 = 4$ (0, 0) ਮੁੱਲ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ।

ਬਿੰਦੂ (–1/2, –1/4) ਦੇ ਲਈ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)+2 = -1, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = (-1)2-(-1) = -3 < 0$$

ਬਿੰਦੂ (–1/2, –1/4), ਪਲਾਇਣ ਬਿੰਦੂ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਚਤਰ (Maximum)	ਨਿਮਨਤਰ (Minimum)
$f_x = 0, \quad f_y = 0$	$f_x = 0, \quad f_y = 0$
$f_{xx} < 0, \quad f_{yy} < 0$	$f_{xx} > 0, \quad f_{yy} > 0$
$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$	$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$
ਪਲਾਇਣ ਬਿੰਦੂ (Saddle Point)	**ਕੋਈ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨਹੀਂ (No Information)**
$f_x = 0, \quad f_y = 0$	$f_x = 0, \quad f_y = 0$
$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$	$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$

2. ਨਿੱਚੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ *u* ਦਾ ਚਰਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ;

$$\boldsymbol{y = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 24}$$

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ

$$f_x = 3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 - 1 = 0$$

$$f_y = 3y^2 - 27 = 0, \; y^2 - 9 = 0$$

$\therefore$ (1, 3), (1, –3), (–1, 3), (–1, –3)

ਦੂਜੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ

$$f_{xx} = 9x$$

$$f_{yy} = 9y$$

$$f_{xy} = 0$$

(1, 3) ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ

$$f_{xx} = 9x = 9 > 0$$
$$f_{yy} = 9y = 27 > 0$$
$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 243 - 0 = 243 > 0$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਬਿੰਦੂ (1, 3) ਉੱਤੇ u ਨਿਮਨਤਰ ਹੋਵੇਗਾ ਨੋਟ

(1, –3) ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ

$$f_{xx} = 9x = 9 > 0$$
$$f_{yy} = 9y = 27 < 0$$
$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 9(-27) - 0 < 0$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (1, –3) ਉੱਤੇ ਪਲਾਇਣ ਬਿੰਦੂ (ਨਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾ ਨਿਊਨਤਮ) ਹੋਵੇਗਾ।

(–1, 3) ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ

$$f_{xx} = 9x = -9 < 0$$
$$f_{yy} = 9y = 27 > 0$$
$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-9)(27) - 0 < 0$$

ਬਿੰਦੂ (–1, 3) ਉੱਤੇ ਵੀ ਪਲਾਇਣ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(–1, –3) ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ

$$f_{xx} = 9x = -9 < 0,\ f_{yy} = 9y = -27 < 0$$
$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-9)(-27) - 0 > 0$$

ਬਿੰਦੂ (–1, –3) ਉੱਤੇ u ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ

ਨਿਰਬੱਧ ਦੇ ਨਾਲ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਾਂਕ ਵਿਧੀ ਮੰਨਿਆ, ਉਪਯੋਗਤਾ ਫਲਨ ਅਤੇ ਆਮਦਨ ਨਿਰਬੱਧ ਨਿਮਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ– $u = f(x, y)\ P_x x + P_y y = M$

ਇੱਥੇ $u \rightarrow$ ਉਪਯੋਗਤਾ $x, y \rightarrow$ ਵਸਤੂਆਂ, $M \rightarrow$ ਆਮਦਨ px ਅਤੇ $py \rightarrow$ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਕੀਮਤ

ਇੱਥੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਆਪਣੀ ਉਪਯੋਗਤਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਆਮਦਨ ਨਿਰਬੱਧ ਉੱਤੇ ਤਾਂ ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$v = f(x, y) + \lambda(M - P_x . X - P_y . y)$$

10.2 ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਕ ਸਹਿਤ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ (Constrained Maxima and Minima with Langrange's Multiplier)

ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਵਿਧੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਵੀ ਉਹੀ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ ਜਿਹੜੇ ਉਪਰੋਕਤ, ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਏ ਹਨ। ਤੁਸ਼ਟੀਕਰਣ ਫਲਨ ਅਤੇ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਲੈਣ ਤੇ

$$V = f(q_1q_2) + \lambda(y - p_1q_1 - p_1q_2)$$

ਇੱਥੇ $V, \lambda q_1$ ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ λ ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਕ (Multiplier) ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ V ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ V ਨੂੰ q_1, q_2 ਅਤੇ λ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ (Partial differentiation) ਕਰਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = f_1 - \lambda p_1 = 0 \quad ...(4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = f_2 - \lambda p_2 = 0 \quad ....(5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0 \quad ....(6)$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਅਤੇ (5) ਨੂੰ ਲੈਣ ਤੇ

$$f_1 = \lambda p_1 \text{ ਅਤੇ } f = \lambda p_2$$

ਨੋਟ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਤਕਸੀਮ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ ਅਤੇ } \frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

ਇੱਥੇ ਉਹੀ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਜਿਹੜਾ ਪਹਿਲੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ (*A*) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਪੂਰਣ ਨਿਖੇੜਨ (Total differentiation) ਕਰਨ ਤੇ

$$f_{11}dq_1 + f_{12}dq_2 - p_1\, d\lambda = \lambda dp_1$$
$$f_{21}dq_1 + f_{22}dq_2 - p_2\, d\lambda' = dp_2$$
$$-p_1dq_1 - p_2dq_2 = -dy + q_1dp_1 + q_2dp_2$$

ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ (Second Order) ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦੂਜੇ ਨਿਖੇੜਕ ਦਾ ਹੇਸ ਸਾਰਣਿਕ (Bordered Hession Determinant) ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} > 0 \qquad \text{....(7)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (7) ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰਨ ਤੇ

$$f_{11}\,(0.f_{22} - p_2^2) - f_{12}\,(0.f_{21} - p_1p_2) - p_1\{f_{21}(-p_2) - f_{22}\,(-p_1)\} > 0$$

ਜਾਂ $$f_{11}p_2^2 - f_{12}p_1p_2 + f_{21}p_1p_2\,(-f_{22})\,(-p_1^2) > 0$$

ਜਾਂ $$f_{11}p_2^2 - 2f_{12}p_1p_2 + f_{22}\,p_1^2 > 0$$

ਇੱਥੇ ਉਹ ਸਮਾਨ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਪਹਿਲੀ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ (5) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟਸ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੋਗਤਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੀਆਂ ਦੋਹਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸਮਾਨ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ : ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਉਪਭੋਕਤਾ ਵਿਵਹਾਰ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਗਣਿਤਕ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

(Discuss Mathematically the theory of consumer's behaviour with the help of Indifference curve Technique.)

ਹੱਲ: ਇੱਕ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਆਮਦਨ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਵੇਕਸ਼ੀਲ ਉਪਭੋਕਤਾ ਉਸ ਆਮਦਨ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਉਹ ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਜਾਂ ਕੀਮਤ ਰੇਖਾ ਉਦਾਸੀਨ ਵਕਰ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਾਲ ਅਤੇ ਉਦਾਸੀਨ ਵਕਰ ਦਾ ਢਾਲ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾਂਤ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਦਰ (ਉਦਾਸੀਨ ਵਕਰ ਦਾ ਢਾਲ) ਅਤੇ ਦੋਨੋਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਕੀਮਤ ਅਨੁਪਾਤ (ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਾਲ) ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਸੀਨ ਵਕਰ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਦੇ ਢਾਲ ਨੂੰ ਸੀਮਾਂਤ ਉਪਯੋਗਤਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਾਲ ਨੂੰ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਭਾਵ

ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਦਾ ਢਾਲ = ਸੀਮਾਂਤ ਉਪਯੋਗਤਾਵਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ

$$= \frac{MU_1}{MU_2}$$

ਅਤੇ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਾਲ = ਕੀਮਤ ਅਨੁਪਾਤ

ਨੋਟ

$$= \frac{p_1}{p_2}$$

ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਕਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਤੁਸ਼ਟੀਗੁਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਭਾਵ

$$u = f(q_1 \cdot q_2)$$

ਕੁੱਲ ਨਿਖੇੜਨਥ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$du = f_1 dq_1 + f_2 dq_2 = 0$$

($du = 0$ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸੀਮਾਂਤ ਤੁਸ਼ਟੀਕਰਣ ਜ਼ੀਰੋ ਹੁੰਦਾ ਹੈ) ਭਾਵ ਉਪਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜਾਂ $$f_1 dq_1 = -f_2 dq_2$$

ਜਾਂ $$-\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

$-\frac{dq_2}{dq_1}$ ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਦੇ ਢਾਲਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਸੀਮਾਂਤ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਦਰ (MRS) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਦਰ ਵਸਤੂ Q_2 ਦੀ ਉਹ ਮਾਤਰਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਉਪਭੋਕਤ Q_1 ਦੀ ਵਾਧੂ ਇਕਾਈ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਤਿਆਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਤਿਆਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। $-\frac{dq_2}{dq_1}$ ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਕੇਤ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਦਾ ਢਾਲ ਗਿਰਦਾ ਹੋਇਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\therefore$ f_1 ਅਤੇ f_2 ਗੁਣਨ ਸੰਖਿਆ (Cardinal) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ ਜਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਤੁਸ਼ਟੀਗੁਣ ਹੈ। ਭਾਵ

$$f_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = MU_1$$

$$f_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = MU_2$$

ਅਤੇ $$\frac{f_1}{f_2} = \frac{MU_1}{MU_2}$$

ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਨਾਲ $$MRSq_1q_2 = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{Q_1 \text{ ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਪਯੋਗਤਾ}}{Q_2 \text{ ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਉਪਯੋਗਤਾ}}$$

ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$y = p_1q_1 + p_2q_2$$

ਇੱਥੇ y = ਆਮਦਨ, $p_1 = q_1$ – ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਅਤੇ $p_2 = q_2$–ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$dy = p_1dq_1 + p_2dq_2$$

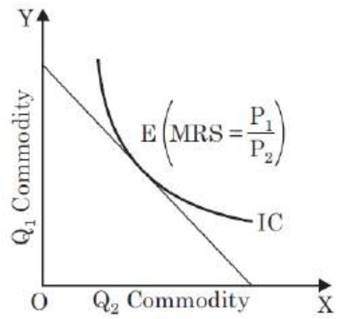
$dy = 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿਉਂਕਿ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਆਮਦਨ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ, ਉਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 = 0$$

ਜਾਂ $$p_1dq_1 = -p_2dq_2$$

ਜਾਂ $$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

ਜਾਂ $$MRSq_1q_2 = \frac{p_1}{p_2}$$



ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ 10.1 ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ

ਨੋਟ

ਭਾਵ ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਦਾ ਢਾਲ = ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਾਲ ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ 10.1 ਵਿੱਚ *IC* ਉਦਾਸੀਨ ਵਕਰ ਹੈ ਅਤੇ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਜਿਹੜੇ *E* ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਭਾਵ *E* ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਢਾਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ $MRSq_1q_2 = \frac{p_1}{p_2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿੱਥੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਇੱਕ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਆਮਦਨ .... ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।
2. ਜਿਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਉਹ .... ਸੰਤੁਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
3. ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਜਾਂ ਕੀਮਤ ਰੇਖਾ .... ਵਕਰ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ।
4. ਉਦਾਸੀਨ ਵਕਰ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਦੇ ਢਲਾਨ ਨੂੰ .... ਉਪਯੋਗਤਾ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।
5. ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਦਾ ਢਾਲ = ਸੀਮਾਂਤ ਉਪਯੋਗਤਾ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ....।

10.3 ਸਲਟਸਕੀ ਸਮੀਕਰਣ (Slutsky Equation)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੇ ਉਪਭੋਗ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਏਗਾ? ਇਹ ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦੇ ਕਾਰਨ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਉਤਪੰਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ– 1. ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ (Income Effect) ਅਤੇ (2) ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ (Substitution Effect)।

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਅਸਲ ਆਮਦਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋ ਜਾਣ ਨਾਲ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਅਸਲ ਆਮਦਨ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਆ ਜਾਵੇਗੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਅਸਲ ਆਮਦਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਫਲਸਰੂਪ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੇ ਉਪਭੋਗ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਏਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ (Income Effect) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਕੀਮਤ ਵਾਧਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਵਸਤੂ ਦਾ ਉਪਭੋਗ ਵੱਧ ਕਰਨ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਵਸਤੂ ਦੀ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਕੀਮਤ ਦੀ ਕੀਮ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਵਸਤੂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਘੱਟ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਕੀਮਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਆਮਦਨ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ, ਉਦੋਂ ਵਸਤੂ ਦੀ ਘੱਟ ਜਾਂ ਵੱਧ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ (Substitution Effect) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਭਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਲਟਸਕੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Slutsky Theorem) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ–

ਉਪਯੋਗਤਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$U = f(q_1 \cdot q_2)$$

ਅਤੇ ਬਜਟ ਨਿਰਬੱਧ (Budget Constraint)

$$y = p_1\,q_1 + p_2\,q_2$$

ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਕ (Langrang's multiplier) ਅਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ–

$$Y = f\,(q_1, q_2) + \lambda(y - p_1q_1 - p_2q_2)$$

ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ q_1, q_2 ਅਤੇ λ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ,

ਨੋਟ

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = f_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = f_2 - \lambda p_2 = 0 \qquad \text{....(8)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

ਹੁਣ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੇ ਕੀਮਤ, ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਪੂਰਣ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਤੇ

$$f_{11}\, dq_1 + f_{12}\, dq_2 - p_1\, d\lambda = \lambda\, dp_1$$
$$f_{21}\, dq_1 + f_{22}\, dq_2 - p_2\, d\lambda = \lambda\, dp_2$$
$$-p_1\, dp_1 - p_2\, dq_2 = -dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2 \qquad \text{....(9)}$$

ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਯੂਹ ਬੀਜਗਣਿਤ ਦੇ ਕ੍ਰੇਮਰ ਨਿਯਮ (Cramer's Rule) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਜੇਕਰ $AB = C$ ਜਿੱਥੇ A, B ਅਤੇ C ਵਯੂਹ ਹੈ ਉਦੋਂ–

$$B = A^{-1}C \text{ ਜਿੱਥ, } A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$$

ਸਮੀਕਰਣ (9) ਨੂੰ ਵਯੂਹ (Matrix) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਤੇ

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dp_1 \\ \lambda dp_2 \\ -dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2 \end{bmatrix} \qquad \text{....(10)}$$

ਕ੍ਰੇਮਰ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda dp_1 \\ \lambda dp_2 \\ -dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2 \end{bmatrix}$$

ਇੱਥੇ, $$\left[A^{-1} = \frac{[D_{ij}]}{|D|}\right]$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$dq_1 = \frac{D_{11}\lambda dp_1 + D_{21}\lambda dp_2 + D_{31}(-dy + q_1 dp_1 + q_1 dp_2)}{|D|} \qquad \text{...(11)}$$

$$dq_2 = \frac{D_{12}\lambda dp_1 + D_{22}\lambda dp_2 + D_{32}(-dy + q_1 dp_2 + q_2 dp_2)}{|D|} \qquad \text{...(12)}$$

ਅਤੇ $$d\lambda = \frac{D_{13}\lambda dp_1 + D_{23}\lambda dp_2 + D_{33}(-dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2)}{|D|} \qquad \text{...(13)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (11) ਵਿੱਚ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ dp_1 ਦਾ ਭਾਵ ਦੇਣ ਤੇ p_2 ਅਤੇ y ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਮੰਨਣ ਤੇ $dy = 0$ ਅਤੇ $dp_2 = 0$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{D_{11}\lambda}{|D|} + q_1 \frac{D_{31}}{|D|} \qquad \text{....(14)}$$

(ਇੱਥ, $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ = ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਭਾਵ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ p_2 ਅਤੇ y ਦੇ ਸਥਿਰ ਰਹਿਣ ਤੇ p_1 ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੇ ਕਾਰਨ p_1 ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਇਆ ਹੈ।)

ਨੋਟ

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{D_2\lambda}{|D|} + p_2 \frac{D_{32}}{|D|} \quad \text{....(15)}$$

(ਇੱਥ, $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ = ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਭਾਵ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ p_2 ਅਤੇ y ਦੇ ਸਥਿਰ ਰਹਿਣ ਤੇ p_2 ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ q_1 ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਇਆ ਹੈ।)

ਸਮੀਕਰਣ (11) ਵਿੱਚ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ dy ਦਾ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ p_1 ਅਤੇ p_2 ਸਥਿਰ ਮੰਨਣ ਤੇ (ਭਾਵ $dp_1 = 0, dp_2 = 0$)।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = -\frac{D_{33}}{|D|} \quad \text{....(16)}$$

ਇੱਥੇ, $\frac{\partial q_1}{\partial \lambda}$ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਥੇ p_1 ਅਤੇ p_2 ਸਥਿਰ ਰਹਿਣ ਤੇ y ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਨਾਲ q_1 ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਸਤਰ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਵੀ ਦੂਜੇ ਹੋਰ ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਉੱਤੇ ਸਥਾਪਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਿਓ ਕੀਮਤ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਹਾਨੀਪੂਰਤੀ ਆਮਦਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਾਲ ਕਰ ਲਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਉਸੀ ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਉੱਤੇ ਬਣਿਆ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਸਦੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $dU = 0$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$U = f(q_1, q_2)$$

ਭਾਵ
$$dU = f_1 dq_1 + f_2 dq_2 = 0$$

ਪਰੰਤੂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$, ਇਸ ਲਈ

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 = 0$$

ਇਹ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (9) ਦੇ ਤਿੱਜੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$-dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2 = 0$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (11) ਦੁਆਰਾ

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) U = \text{ਸਥਿਰ (Constant)} = \frac{D_{11}\lambda}{|D|}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (14) ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਣ ਤੇ

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) U = \text{ਸਥਿਰ } q_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right) \text{ਕੀਮਤ = ਸਥਿਰ} \quad \text{....(17)}$$

ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ

ਸਮੀਕਰਣ (17) ਸਲਟਸਕੀ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਾਸਕ ਉਪਯੋਗਤਾ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

10.4 ਸਲਟਸਕੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲੋਚ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (Slutsky Equation in Elasticity Form)

ਨੋਟ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੰਗ ਦੀ ਲੋਚ,

$$EP = \frac{p}{q}\cdot\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}$$

ਸਲਟਸਕੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) U = \text{Const.} \; -q_1\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right) p = \text{Constant}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ p_1/q_1 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{p_1}{q_2}\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{p_1}{q_2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) U = \text{Const.} \; -\frac{q_1 p_1}{q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right) p = \text{Constant}$$

ਅਤੇ
$$\eta_{1p} = \eta_1 - \frac{p_1 q_1}{y} = \eta_{1y}$$

ਇੱਥੇ η_{1p} = ਕੀਮਤ ਲੋਚ, η_{1s} ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ ਅਤੇ η_{1y} = ਆਮਦਨ ਲੋਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸਧਾਰਨੀਕਰਣ (Generalisation)**:** ਉਪਰੋਕਤ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਨੂੰ n–ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸਤਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨਿਆ n ਉਪਭੋਕਤਾ a ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਉਪਭੋਗ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਉਸਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇਗੀ–

$$U = f(q_1, q_2 \ldots, q_n)$$

ਅਤੇ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇਗੀ–

$$y = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n$$

ਜਾਂ
$$= y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 0$$

ਜਾਂ
$$i = 1, 2 \ldots, n$$

ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਮਗਰ ਉਪਯੋਗਤਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇਗੀ–

$$V = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \left(y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)$$

ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = f_i - \lambda p_i = 0, \text{ ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ } \frac{\partial V}{\partial p_j} = f_i - \lambda p_j = 0$$

or
$$f_i = \lambda p_i \text{ ਅਤੇ } f_j = \lambda p_j$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{f_i}{f_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ i ਵਸਤੂ ਦੇ ਲਈ j ਵਸਤੂ ਦੀ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਦਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ

ਨੋਟ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗਤਾ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਖੇੜਕ ਦਾ ਬੋਰਡਡ ਹੇਸ ਸਾਰਣਿਕ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਦਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} & -p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ fn_1 & fn_2 & \cdots & fnn & -p_n \\ -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_n & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਸਲਟਸਕੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋਵੇਗੀ–

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right) u = \text{const.} - q\left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right) p = \text{const.}$$

ਲੋਚ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ–ਸਲਟਸਕੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ p_i/q_i ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{p_i}{q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right) = \frac{p_i}{q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\right)_{u=\text{const.}} - q_i \frac{p_i}{q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)_{p=\text{const.}}$$

ਜਾਂ $$\eta_{ip} = \eta_{is} - \frac{p_i q_i}{y} = \eta_{1y}$$

ਇੱਥੇ η_{ip} = ਦੀ ਲੋਚ,

η_{is} = ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ ਅਤੇ

η_{iy} = ਆਮ ਲੋਚ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਅਤੇ ਪੂਰਕ ਵਸਤੂਆਂ (Substitutes Goods and Complementary Goods)

ਜੇਕਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਹਨ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਧਨਾਤਮਕ (Positive) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਪੂਰਕ ਹਨ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਰਿਣਾਤਮਕ (Negative) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ

$$\left(\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right) U = \text{const.} > 1, \text{ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਵਸਤੂਆਂ}$$

$$\left(\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right) U = \text{const.} < 1, \text{ ਪੂਰਕ ਵਸਤੂਆਂ}$$

$$\left(\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right) U = \text{const.} = 0, \text{ ਸੁਤੰਤਰ ਵਸਤੂਆਂ}$$

ਸਧਾਰਣ ਵਸਤੂਆਂ, ਹੀਨ ਵਸਤੂਆਂ ਅਤੇ ਗਿਫਿਨ ਵਸਤੂਆਂ (Normal Goods, Inferior Goods and Giffon Goods)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਭਾਵ = ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ + ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ

ਸਧਾਰਣ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)_{\text{ਕੀਮਤ}=\text{ਸਥਿਰ}<0}$$

ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਧਨਾਤਮਕ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ, ਧਨਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨੂੰ ਮਜ਼ਬੂਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਕੀਮਤ ਵਧਣ ਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਅਸਲ ਆਮਦਨ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ q_1 ਮਾਤਰਾ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਮਜ਼ਬੂਤ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਭਾਵ

ਨੋਟ

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) < 0$$, ਸਧਾਰਣ ਵਸਤੂ ਦੇ ਲਈ

ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨੂੰ ਮਜ਼ਬੂਤ ਨਾ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਘਟੀਆ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਉਹ ਵਸਤੂ ਜਿਸਦਾ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ, ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਕੀਮਤ ਘੱਟ ਹੋਣ ਤੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਵੀ ਘੱਅ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਗਿਫਿਨ ਵਸਤੂਆਂ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਗਿਫਿਨ ਵਸਤੂਆਂ ਅਤੇ ਘਟੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ, ਦੋਨੋਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਿਰ ਕੀ ਦੋਨੋਂ ਵਸਤੂਆਂ ਸਮਾਨ ਹਨ, ਉੱਤਰ ਹੈ ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਘਟੀਆ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਰਿਣਾਤਮਕ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਹਿਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਘਟੀਆ ਵਸਤੂਆਂ ਮੰਗ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪਾਲਣ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਗਿਫਿਨ ਵਸਤੂਆਂ ਮੰਗ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਨਹੀਂ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: $u = x^a y^b$ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਤੁਸ਼ਟੀਗੁਣ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿੱਥੇ x ਅਤੇ y ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਹਨ। x ਅਤੇ y ਵਸਤੂਆਂ ਉੱਤੇ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਆਮਦਨ M ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਮੰਗ–

$$x = \frac{aM}{(a+b)p_x} \text{ ਅਤੇ } y = \frac{bM}{(a+b)p_y}$$

ਜਿੱਥੇ p_x ਅਤੇ $p_y x$ ਅਤੇ y ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਕੀਮਤਾਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਤੁਸ਼ਟਗੁਣ ਫਲਨ ਹੈ–

$$U = x^a y^b$$

'x' ਅਤੇ 'y' ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = ax^{a-1}y^{b-1}MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = bx^a y^{b-1}$$

ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ

$$\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}$$

ਜਾਂ $$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y} \qquad ....(i)$$

ਅਤੇ $$x \cdot p_x + y \cdot p_y = M \qquad ....(ii)$$

MU_x ਅਤੇ MU_y ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\frac{ax^{a-1}b}{bx^a y^{b-1}} = \frac{p_x}{p_y} \text{ ਜਾਂ } \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

ਜਾਂ $$y = \frac{p_x}{p_y}\frac{b}{a} \cdot x$$

y ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (ii) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$M = x \cdot px + \frac{p_x}{p_y}\frac{b}{a} x \cdot Py \text{ ਜਾਂ } aM = (a+b)\,p_x \cdot x$$

ਜਾਂ $$x = \frac{aM}{(a+b)px} \text{ ਅਤੇ } y = \frac{bM}{(a+b)\,py}$$

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਉਪਯੋਗਤਾ ਫਲਨ $u = xy$ ਅਤੇ ਬਜਟ ਨਿਰਬੱਧ $2x + y = 6$ ਤਾਂ x, y ਦਾ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਉਪਯੋਗਤਾ ਦੀ ਗਣਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$z = xy + \lambda(2x + y - 6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 2x + y - 6 = 0$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ x, y ਅਤੇ λ ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, $x = 2/3, y = 4/3$ ਅਤੇ $\lambda = -2/3$

ਤਾਂ, ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗਤਾ $u = xy = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{9}$

ਇਹ ਸਮ ਸੀਮਾਂਤ ਉਪਯੋਗਤਾ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

6. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਿਸਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ?

   (*a*) ਕੀਮਤ (*b*) ਉਪਭੋਗ (*c*) ਉਪਭੋਕਤਾ (*d*) ਵਸਤੂ।

7. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਓਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਅਸਲ ਆਮਦਨ ਵਿੱਚ ਕੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?

   (*a*) ਕਮੀ (*b*) ਵਾਧਾ (*c*) ਸਮਾਨ (*d*) ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

8. ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋ ਜਾਣ ਨਾਲ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਅਸਲ ਆਮਦਨ ਵਿੱਚ ਕੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   (*a*) ਸਮਾਨ (*b*) ਵਾਧਾ (*c*) ਕਮੀ (*d*) ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

9. $E_p = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\Delta q}{\Delta p}.$

   (*a*) $\frac{q}{p}$ (*b*) $\frac{d}{q}$ (*c*) $\frac{q}{d}$ (*d*) $\frac{p}{q}$

10. ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਭਾਵ = ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ + ...

    (*a*) ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ (*b*) ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਭਾਵ (*c*) ਉਪਭੋਕਤਾ ਪ੍ਰਭਾਵ (*d*) ਸਾਰੇ

10.5 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- $\underset{\downarrow A}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \cdot \underset{(B)}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} < \left(\underset{C}{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\right)^2$ or $AB < C^2$ or $f_{xx} \cdot f_{yy} < f_{xy}$

  ਨਿਮਨਤਰ ਦੇ ਲਈ,

  $$u = f(x, y), fx = 0 \text{ ਅਤੇ } f_y = 0$$

ਤਾਂ

ਨੋਟ

$$\partial^2 u/\partial x^2 > 0 \text{ ਅਤੇ } \partial^2 u/\partial yz > 0$$

$$\therefore \qquad \partial^2 u/\partial x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 \quad \text{or} \quad A.B < C^2$$

Or $\qquad f_{xx} \cdot f_{yy} < f\,xy$

- ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਜਾਂ ਕੀਮਤ ਰੇਖਾ ਉਦਾਸੀਨ ਵਕਰ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਾਲ ਅਤੇ ਉਦਾਸੀਨ ਵਕਰ ਦਾ ਢਾਲ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਉਦਾਸੀਨ ਵਕਰ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਦੇ ਢਲਾਨ ਨੂੰ ਸੀਮਾਂਤ ਉਪਯੋਗਤਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਨ ਨੂੰ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।
- ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਕਰ ਦੇ ਹਰ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਤੁਸ਼ਟੀਗੁਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੇ ਉਪਭੋਗ ਵਿੱਚ ਕੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣਗੇ? ਇਹ ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਅਸਲ ਆਮਦਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੋ ਜਾਣ ਨਾਲ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਅਸਲ ਆਮਦਨ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਆ ਜਾਵੇਗੀ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਕੀਮਤ ਵਾਧਾ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਵਸਤੂ ਦਾ ਉਪਭੋਗ ਵੱਧ ਕਰਨ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜਦੋਂ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਸਤਰ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਉਪਭੋਕਤਾ ਸੰਤੁਲਨ ਵੀ ਦੂਜੇ ਹੋਰ ਉਦਾਸੀਨਤਾ ਵਕਰ ਉੱਤੇ ਸਥਾਪਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਹਨ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਧਨਾਤਮਕ (Positive) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਧਨਾਤਮਕ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ, ਧਨਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨੂੰ ਮਜ਼ਬੂਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਕੀਮਤ ਵਧਣ ਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਅਸਲ ਆਮਦਨ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਇਹ ਵਸਤੂ ਜਿਸਦਾ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ, ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਕੀਮਤ ਘੱਟ ਹੋਣ ਤੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਵੀ ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਗਿਫਿਨ ਵਸਤੂਆਂ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਗਿਫਿਨ ਵਸਤੂਆਂ ਅਤੇ ਘਟੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ, ਦੋਨੋਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਭਾਵ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

10.6 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਪੂਰਕ (Complementary) – ਅਨੁਪੂਰਕ।
- ਆਮਦਨ (Income) – ਆਮਦਨੀ।

10.7 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਕ੍ਰੇਮਰ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।
2. ਸਲਟਸਕੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।
3. ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਵਿਧੀ ਕੀ ਹੈ?

ਨੋਟ

4. ਨਿਮਨਤਰ ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

   $f_{xx} \cdot f_{yy} < f_{xy}$.

5. $u = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$ ਦੇ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ ਮੁੱਨ ਕੱਢੋ।

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਸਥਿਰ	2. ਉਪਭੋਕਤਾ	3. ਉਦਾਸੀਨ	4. ਸੀਮਾਂਤ	5. $\frac{MU_1}{MU_2}$
6. (*a*)	7. (*b*)	8. (*c*)	9. (*d*)	10. (*a*).

10.8 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ।*
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ।*
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ।*
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ।*
5. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ।*
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਉਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ।*
9. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ।*

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–11: ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਉਚਤਰ ਅਤੇ ਨਿਮਨਤਰ (Constrained Maxima and Minima)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਲਾਭ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ।
- ਹਾਨੀਪੂਰਕ ਮੰਗ ਫਲਨ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਮੰਨ ਲਿਓ ਇੱਕ ਫਰਮ ਦੋ ਉਤਪਾਦ Q_1 ਅਤੇ Q_2 ਦੀ ਮਾਤਰਾ q_1 ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਕ੍ਰਯ ਕ੍ਰਮਅਨੁਸਾਰ p_1 ਅਤੇ p_2 ਦੀ ਕੀਮਤ ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਯ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਜਹਿੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ ਹੋਵੇਗਾ–

$$R = p_1q_1 = p_2q_3 \quad ....(1)$$

ਮੰਨ ਲਿਓ ਫਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਰਗਤ (Input) ਦੁਆਰਾ ਦੋ ਉਤਪਾਦਾਂ (Output) θ_1 ਅਤੇ θ_2 ਦਾ ਉਤਪਾਦ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ X ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਫਰਮ ਦੇ ਦੋ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਲਾਗਤ (x), q_1 ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਭਾਵ

$$x = h\,(q_1, q_2) \quad ....(2)$$

ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਰਮ ਦੀ ਆਗਮ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ ਅਤੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਲੈਣ ਤੇ

$$V = p_1q_1 = p_2q_2 + \mu\,[x - h\,(q_1q_2)\,\sigma] \quad ....(3)$$

ਇੱਥੇ μ ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਕ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1 - \mu h_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2 - \mu h_2 = 0 \quad ....(4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = x - h\,(q_1,q_2) = 0$$

ਨੋਟ

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਲੈਣ ਤੇ

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_1}{h_2} = RPT \qquad \left(\text{ਇੱਥੇ, } RPT = -\frac{dq_2}{dq_1}\right.$$

ਉਤਪਾਦਨ ਰੁਪਾਂਤਰਣ ਦੀ ਦਰ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{dq_2/\partial x}{dq_1/\partial x} = RPT \qquad ....(5)$$

ਸਮੀਕਰਣ (5) ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਤਪਾਦਨ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਦੀ ਦਰ ਕੀਮਤ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਇਹ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਆਗਮ ਰੇਖਾ ਉਤਪਾਦ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਵਕਰ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਪਹਿਲੀਆਂ ਕ੍ਰਮ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

$$\mu = \frac{p_1}{h_2} = \frac{p_2}{h_2}$$

ਜਾਂ
$$\mu = p\frac{\partial q_1}{\partial x} = p\frac{\partial q_2}{\partial x}$$

ਕਿਉਂਜੋ *RPT* ਨੂੰ ਸੀਮਾਂਤ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1}, \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{1}{h_2}$$

ਨੋਟਸ *RPT* ਕ੍ਰਮ (Second Order) ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦੂਜੇ ਨਿਖੇੜਕ ਦਾ ਬੋਰਡਡ ਹੇਸ ਸਾਰਣਿਕ (Bordered Hession Determinant) ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਲਾਭ ਦੇ ਲਈ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\begin{vmatrix} -\mu h_{11} & -\mu h_{12} & -h_1 \\ -\mu h_{21} & -\mu h_{22} & -h_2 \\ -h_1 & -h_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad ....(6)$$

ਸਮੀਕਰਣ (6) ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰਨ ਤੇ

$$\mu\ (h_{11}\,h_2^2 - 2h_{12}\,h_1\,h_2 + h_{22}h_1^2) > 0 \qquad ....(7)$$

ਜਾਂ
$$h_{11}\,h_2^2 - 2h_{12}\,h_1h_2 + h_{22}h_1^2) > 0 \qquad ....(8)\ (\text{ਕਿਉਂਜੋਂ } \mu > 0)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਰਮ ਸਮੀਕਰਣ (5) ਅਤੇ (7) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਫਰਮ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਆਗਮ ਨੂੰ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲ ਹੋਵੇਗੀ।

11.1 ਲਾਭ ਅਧਿਕੀਕਰਣ (Profit Maximization)

ਲਾਭ θ_1 ਅਤੇ θ_2 ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਮਾਤਰਾ q_1 ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ–

$$\pi = p_1q_1 + p_2p_2 - rh\,(q_1q_2) \qquad ....(8)$$

ਸਮੀਕਰਣ (8) ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਕ ਕਰਨ ਤੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - rh_1 = 0 \qquad ....(i)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - rh_2 = 0 \qquad ....(ii)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੇ (2) ਨੂੰ ਲੈਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ–

$$r = \frac{p_1}{h_1} = \frac{p_2}{h_2}$$

ਜਾਂ

$$r = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} = p_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \qquad ....(9)$$

ਦੂਜਾ ਕ੍ਰਮ ਸ਼ਰਤਾਂ (Second-order Conditions) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$\begin{vmatrix} -rh_{11} & -rh_{12} \\ -rh_{21} & -rh_{22} \end{vmatrix} \qquad (\text{ਇੱਥੇ, } -rh_{11} < 0)$$

ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਵਿਸਮਾਰ ਕਰਨ ਤੇ

$$r^2 (h_{11}h_{12} - h_{12}^2) > 0$$

ਕਿਉਂਕਿ $r > 0$, ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$h_{11} > 0 \; h_{11}\, h_{22} - h_{12}^2 > 0 \qquad ....(10)$$

ਦੋਨੋਂ ਇਕੱਠੀਆਂ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ $h_{22} > 0$ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਵਧਦੀ ਹੋਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (10) ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਇਹ ਦੱਸਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਕਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਮੁੱਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਵੱਲ ਉਨਤੋਦਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਸਮੀਕਰਣ (9) ਦੀਆਂ ਪਹਿਲੀ- ਕ੍ਰਮ ਸ਼ਰਤਾਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਫਰਮ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਲਾਭ ਦੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ।

ਟਾਸਕ ਜੇਕਰ ਲਾਭ θ_1 ਅਤੇ θ_2 ਹੈ ਨਾਲ ਹੀ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਮਤਰਾ q_1 ਅਤੇ q_2 ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਫਲਨ ਕੀ ਹੈ?

11.2 ਹਾਨੀਪੂਰਕ ਮੰਗ ਫਲਨ (Compensated Demand Function)

ਹਾਨੀ ਪੂਰਕ ਮੰਗ ਵਸਤੂ ਦੀ ਉਹ ਮਾਤਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਇੱਕ ਉਪਭੋਕਤਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਕਰ, ਆਰਥਿਕ ਸਹਾਇਤਾ) ਆਦਿ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕ੍ਰਯ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $U = q_1\, q_2$ ਉਦੋਂ ਵਿਅੰਜਕ

$$Z = p_1\, q_1 + p_2 q_2 + \lambda\left(\bar{u}\right) - q_1\, q_2$$

ਨੂੰ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ,

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = p_1 - \lambda\, q_2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_2} = p_2 - \lambda\, q_1 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \bar{U} - q_1\, q_2 = 0$$

q_1 ਅਤੇ q_2 ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਭੀਸ਼ਟ ਹਾਨੀਪੂਰਕ ਮੰਗ ਹੋਵੇਗੀ–

$$q_1 \sqrt{\left(\frac{\bar{U} \cdot p_2}{p_1}\right)}, q_2 = \sqrt{\left(\frac{\bar{U} \cdot p_1}{p_2}\right)}$$

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਫਲਨ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ–

$$q = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}p \quad \text{ਅਤੇ} \quad q = 2p - 3$$

ਸੰਤੁਲਨ ਕੀਮਤ ਅਤੇ ਮਾਤਰਾ ਦੱਸੋ।

ਹੱਲ : ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮੰਗ ਅਤੇ ਪੂਰਤੀ ਦੋਨੋਂ ਸਮਾਨ ਹੋਣਗੀਆਂ, ਭਾਵ

$$\frac{5}{2} - \frac{1}{2}p = 2p - 3 \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{5}{2} + 3 = 2p + \frac{1}{2}p$$

ਜਾਂ $$\frac{5}{2} + 3 = \frac{5}{2}p \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{5}{2} + p = \frac{11}{2}$$

ਜਾਂ $$p = \frac{11}{2} = 2.2$$

ਦੁਬਾਰਾ $$q = 2p - 3$$

p ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$q = \frac{22}{5} - 3 = \frac{22 - 15}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੋਗਤਾ ਫਲਨ $U = 3x^2 y^2$ ਹੈ ਅਤੇ ਬਜਟ ਸੀਮਾ $2x + 3y = 18$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ X ਤੇ Y ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਮੰਗੀਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ (Solution): ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਉਪਯੋਗਤਾ ਫਲਨ ਹੈ–

$$U = 3x^2y^2$$

ਅਤੇ ਬਜਟ ਸੀਮਾ (budget constraint) ਹੈ–

$$2x + 3y = 18$$

ਜਾਂ $$2x + 3y - 18 = 0$$

ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਮੰਗ ਫਲਨ ਹੋਵੇਗੀ–

$$V = 3x^2y^2 + \lambda\,(2x + 3y - 18) \qquad ....(i)$$

ਮੰਗ ਫਲਨ ਦਾ 'x''y' ਅਤੇ 'λ' ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਨਿਖੇੜਨ ਅੰਸ਼ਿਕ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ। ਫਿਰ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਪਯੋਗਤਾ ਨੂੰ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਨਿਖੇੜਕ (first derivative) ਨੂੰ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ–

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 6x\,y^2 + 2\lambda = 0 \qquad ....(ii)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 6x^2y + 3\lambda = 0 \qquad ....(iii)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x + 3y - 18 = 0 \qquad ....(iv)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਲੈਣ ਤੇ

$$\frac{-2\lambda}{-3\lambda} = \frac{6xy^2}{6x^2y} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{2}{3} = \frac{y}{x} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2x = 3y$$

ਜਾਂ $$x = (3/2)y$$

x ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (iv) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$2 \times (3/2)y + 3y - 18 = 0$$

ਜਾਂ $6y = 18$ ਜਾਂ $y = 18/6 = 3$

y ਦਾ ਮਾਨ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੀਕਰਣ (iv) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$2x + (3 \times 3) - 18 = 0$$

ਜਾਂ $2x = 9$ ਜਾਂ $x = 9/2 = 4.5$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x ਅਤੇ y ਦੀ ਮੰਗ ਜਾਣਨ ਵਾਲੀ ਮਾਤਰਾ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ 4.5 ਅਤੇ 3 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਫਰਮ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਪਥ ਉਸਦੇ ਕਾਰਕਾਂ ਦੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਖਰਚ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੱਢੋ ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ– $P = 12 \log L + 30 \log K$

ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਅਦਾਵਾਂ ਦੀ ਕੀਮਤਾਂ $P_L = 2$ **ਅਤੇ** $P_2 = 5$ **ਹੈ।**

(Find the firm's expansion paths expressed in terms of its total expenditure on its inputs in the given production function is $P = 12 \log L + 30 \log K$ and the input prices are $P_L = 2$ and $P_K = 5$)

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਉਤਪਾਦਕ ਦਾ ਮੁੱਖ ਉਦੇਸ਼ ਆਪਣੇ ਉਤਪਾਦਨ (P) ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਸਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ (ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ) ਨਿਮਨ ਹੈ–

$$TC = 2L + 5K$$

ਲੇਂਗਰੇਂਜ ਗੁਣਕ λ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$Z = 12 \log L + 30 \log K + \gamma (TC - 2L - 5K)$$

Z ਨੂੰ K ਅਤੇ λ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਿਕ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = \frac{12}{L} - 2\lambda = 0 \quad ....(i)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = \frac{30}{K} - 5\lambda = 0 \quad ....(ii)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = TC - 2L - 5K = 0 \quad ....(iv)$$

ਸਮੀਕਰਣ (i) ਅਤੇ (ii) ਨੂੰ ਲੈਣ ਤੇ

$$\frac{12}{L} = 2\lambda \text{ ਅਤੇ } \frac{30}{K} = 5\lambda$$

ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਤਕਸੀਮ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{12/L}{30/K} = \frac{2}{5}$$

ਜਾਂ $$\frac{2/L}{5/K} = \frac{2}{5}$$

ਜਾਂ $$\frac{2}{L} = \frac{2}{K}$$

ਜਾਂ $$L = K$$

ਸਮੀਕਰਣ (11.1) ਵਿੱਚ L ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$TC = 2K + 5K = 7K$$

ਜਾਂ $$K = \frac{TC}{7}, \text{ ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ } L = \frac{TC}{7}$$

ਅਤੇ $$\lambda = \frac{12}{2L} = \frac{6}{TC/7} = \frac{42}{TC}$$

ਨੋਟ

(2) ਇਸ ਫਲਨ ਅਤੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰ v (ਸਮਰੂਪਤਾ ਕੋਟਿ) ਪੈਮਾਨੇ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ (Scale of Operation) ਅਤੇ ਤਕਨੀਕੀ ਪਰਿਵਰਤਨਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਸ਼ਕਤੀਆਂ ਪੈਮਾਨੇ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੀ ਕੋਟਿ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਵੱਖਰੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

(3) ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮਾਨਤਾ ਲੈ ਕੇ ਚੱਲਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ ਕੇਵਲ ਤਕਨੀਕੀ ਦੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਇਸਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਅਧਿਅਨ ਤੋਂ ਪਤਾ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਲੋਚ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਤੋਂ ਵੀ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਫਲਨ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਤੱਥ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

(4) ਅੰਤ, ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਪੈਰਾਮੀਟਰ δ ਮਾਪਿਆ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇਸ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਜਾਂਚਣ ਵਿੱਚ ਵੀ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਉਤਪਾਦਨ $P = AL^{\alpha} C^{\beta}$ ਜਿੱਥੇ A, α ਅਤੇ β ਸਥਿਰ ਹਨ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਜੇਕਰ L ਅਤੇ C ਕਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਧਾਇਆ ਜਾਵੇ ਅਤੇ $\alpha + \beta$ ਇਕਾਈ ਦੁਆਰਾ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵੱਧ, ਘੱਟ ਜਾਂ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਧੇਗਾ।

(The production function is $P = AL^{\alpha} C^{\beta}$ where A, α and β are constant. Show that if the factors L, C are increased in the same proportion, the product increases in greater, equal or less proportion, according as $\alpha + \beta$ is greater than, equal to, or less than unity).

ਹੱਲ: ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਹੈ–

$$P = AL^{\alpha} C^{\beta}$$

ਮੰਨਿਆ ਸਾਧਨ L ਅਤੇ C ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ψ ਗੁਣਾ ਵਾਧਾ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ

$$P' = A(\psi L)^{\alpha} (\psi C)^{\beta} \quad \text{(ਇੱਥੇ } \psi > 0 \text{ ਹੈ)}$$

$$= \psi^{\alpha+\beta} AL^{\alpha} C^{\beta}$$

$$= \psi^{\alpha+\beta} P \quad (\therefore\ P = AL^{\alpha} C^{\beta})$$

ਜੇਕਰ $\alpha + \beta = 1$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$P' = \psi P$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਤਪਾਦਨ ਠੀਕ ਉਸੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਜਾਵੇਗਾ ਜਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ ਪੈਮਾਨੇ ਦੇ ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੋਵੇਗਾ–

ਜੇਕਰ $\alpha + \beta < 12\text{-}3$ *i.e.* ਮੰਨਿਆ $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ ਉਦੋਂ

$$P' = \psi^{1/2} P$$

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਕਰਨ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਧੇਗਾ। ਇਹ ਸਥਿਤੀ ਪੈਮਾਨ ਦੇ ਘਟਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਜੇਕਰ $\alpha + \beta > 1$ *i.e.* ਮੰਨਿਆ $\alpha + \beta = 2$ ਉਦੋਂ

$$P' = \psi^{2} P$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਉਤਪਾਦਨ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਉਤਪਾਦਨ ਪੈਮਾਨ ਦੇ ਵਧਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕਿਰਿਆਸ਼ੀਲ ਹੋਵੇਗਾ।

$$L = \frac{TC}{7}, K = \frac{TC}{7} \text{ ਅਤੇ } \lambda = \frac{42}{TC}$$

ਇਹ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਜ਼ਰੂਰੀ ਵਿਸਥਾਰ ਪਥ ਦਾ ਸਿਰਜਨ ਕਰਨਗੇ।

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਜੇਕਰ ਲਾਭ ਦਰ (ਪੂੰਜੀ ਦੀ ਕੀਮਤ) ਸਥਿਰ ਰਹੇ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ ਮਿਹਨਤ ਅਨੁਪਾਤ 10:10 ਤੋਂ ਬਦਲ ਕੇ 12:11 ਹੋ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਵਿੱਚ 25% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ।

(If the profit rate (price of capital remains unaltered, the ratio of amount of capital employed per unit of labour shifts from 10 : 10 to 12 : 11, given that rise in wages is 25%. Determine the elasticity of substitution).

ਹੱਲ (Solution): ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\text{ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ} = \sigma = \frac{\partial\left(\frac{L}{K}\right)/L/K}{\frac{\partial(p_K/P_L)}{P_K/P_L}}$$

ਇੱਥੇ L ਅਤੇ K ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਮਿਹਨਤ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ P_L/P_K ਸਾਧਨ L ਅਤੇ K ਕੀਮਤਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ–

ਅਰੰਭ ਵਿੱਚ, $\frac{L}{K} = \frac{10}{10}$ ਅਤੇ ਅਖੀਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\frac{L}{K} = \frac{12}{11}$

$$\frac{L}{K} \text{ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ} = \partial\left(\frac{L}{K}\right) = \frac{12}{11} - \frac{10}{10} = \frac{12-11}{11} = \frac{1}{11}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial\left(\frac{L}{K}\right)}{L/K} = \frac{\frac{1}{11}}{\frac{10}{10}} = \frac{1}{11}$$

ਅਰੰਭ ਵਿੱਚ $\frac{P_K}{P_L} = 1:1$, ਹੁਣ ਮਜ਼ਦੂਰੀ 25% ਵੱਧ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਨੁਪਾਤ 1.25:1 = 5/4 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\frac{P_K}{P_L} \text{ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ} = \partial\left(\frac{P_K}{P_L}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{1} = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{P_K}{P_L}\right)}{\frac{P_K}{P_L}} = \frac{+\frac{1}{4}}{\frac{1}{1}} = +\frac{1}{4}$$

$$\sigma = \frac{1/11}{1/4} = \frac{4}{11} = 0.36$$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. $x =$ .... (q_1q_2)
2. $V = p_1q_1 = p_2q_2 + \mu\,[x - h$ (............... $)\sigma]$
3. $\pi =$ .... $+ p_2\,q_2 - rh\,(q_1q_2)$
4. ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਲੋਚ $= \sigma = \dfrac{\partial\left(\frac{L}{K}\right)/L/K}{\text{................}}$

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ (Solve the following numericals)

ਨੋਟ

1. ਪਤਾ ਹੈ–

   ਉਪਯੋਗਤਾ ਫਲਨ, $U = q_1 q_2$

   ਪਹਿਲੀ ਵਸਤੂ ਦਾ ਮੁੱਲ, $P_1 = 4$ ਰੂ:

   ਦੂਜੀ ਵਸਤੂ ਦਾ ਮੁੱਲ, $p_2 = 10$ ਰੂ:

   ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਆਮਦਨ, $Y = 100$ ਰੂ:

   ਵਸਤੂ ਦੀ Q_1 ਅਤੇ Q_2 ਦਾ ਉਪਭੋਗ ਦਾ ਸੰਤੁਲਿਤ ਸਤਰ ਦੱਸੋ ਅਤੇ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ। **ਉੱਤਰ :**

   $$\left[q_1 = \frac{25}{2}, q_2 = 5\right]$$

2. ਜੇਕਰ ਉਪਯੋਗਤਾ ਫਲਨ $U = 4q_1\, q_2 + 3q_1$ ਅਤੇ ਆਮਦਨ ਨਿਰਬੱਧ (Constraints) $60 = 2q_2 + 6q_1$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗਤਾ ਲਈ Q_1, Q_2, ਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (**ਉੱਤਰ :** $q_1 = 16.125$, $q_2 = -4.625$)

3. ਜੇਕਰ ਤੁਸ਼ਟੀਗੁਣ ਫਨ $U = (x_1, x_2) = 2\log x_2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਲਈ ਮੰਗ ਵਕਰ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਜੇਕਰ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਮਦਨ W ਹੈ ਅਤੇ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਕੀਮਤਾਂ p_1 ਅਤੇ p_2 ਹਨ।

   ਉੱਤਰ $\left[x_1 = \frac{2W}{p_1}, x_2 = \frac{W}{3p_2}\right]$

11.3 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਮੰਨ ਲਿਓ ਇੱਕ ਫਰਮ ਦੋ ਉਤਪਾਦ Q_1 ਅਤੇ Q_2 ਦੀ ਮਾਤਰਾ q_1 ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਕ੍ਰਯ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ p_1 ਅਤੇ p_2 ਦੀ ਕੀਮਤ ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਯ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਗਮ ਹੋਵੇਗਾ–

  $R = p_1 q_1 = p_2 q_3$
- ਮੰਨ ਲਿਓ ਫਰਮ ਇੱਕ ਨਿਰਗਤ (Input) ਤੋਂ ਦੋ ਉਤਪਾਦਾਂ (Ouput) θ_1 ਅਤੇ θ_2 ਦਾ ਉਤਪਾਦ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ X ਦ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਫਰਮ ਦੇ ਦੋ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਲਾਗਤ (x), q_1 ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਭਾਵ $x = h\,(q_1, q_2)$
- ਲਾਭ θ_1 ਅਤੇ θ_2 ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਮਾਤਰਾ q_1 ਅਤੇ q_2 ਦਾ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ– $\pi = p_1 q_1 + p_2 q_2 - rh\,(q_1 q_2)$
- ਹਾਨੀ ਪੂਰਕ ਮੰਗ ਵਸਤੂ ਦੀ ਉਹ ਮਾਤਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਇੱਕ ਉਪਭੋਕਤਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਕਰ, ਆਰਥਿਕ ਸਹਾਇਤਾ) ਆਦਿ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕ੍ਰਯ ਕਰਦਾ ਹੈ।

11.4 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ (Operation) – ਕਿਰਿਆ।
- ਆਬੰਧ (Condition) – ਸ਼ਰਤ।

11.5 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਲਾਭ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
2. ਹਾਨੀਪੂਰਕ ਮੰਗ ਫਲਨ ਕੀ ਹੈ? ਵਰਣਨ ਕਰੋ।
3. ਜੇਕਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ x ਅਤੇ y ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ ਫਲਨ $U = 3x^2y^2$ ਅਤੇ ਬਜਟ ਸੀਮਾ $2x + 3y = 18$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ x ਤੇ y ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਮੰਗੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (**ਉੱਤਰ :** $x = 4.5$, $y = 3$)

ਨੋਟ

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. h 2. q_1q_2 3. P_1q_1 4. $\dfrac{\partial(P_k / P_L)}{P_K / P_L}$

11.6 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
5. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.* ।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ-12: ਅਨੁਕਲਨ : ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਅਧਾਰਭੂਤ ਨਿਯਮ (Integration : Basic Rules of Integration)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਵਿਆਪਕ ਅਨੁਕਲਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।
- ਮਾਨਕ ਅਨੁਕਲਨ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਸੰਬੰਧੀ।
- x^n ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ, ਜਿੱਥੇ $n\neq 1$, ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱ ਲਕਰਨ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਕਿਸੀ ਅਚਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕੱਢਣ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਫਲਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਯੋਗਫਲ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਸੰਬੰਧੀ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (Integration of the Function)–ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਤਿਲੋਮ (Inverse) ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਅਨੁਕਲਨ (Integration) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਨਿਖੇੜਨ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ (differential coefficient) ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਪਰੰਤੂ ਅਨੁਕਲਨ-ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆਹੈ।

ਉਦਾਹਰਥ ਵਜੋਂ, $\sin x$ ਦਾ x ਦਾ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ $\cos x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ $\cos x$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਨੁਕਲਨ (integral) $\sin x$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਮੰਨ ਲਿਓ $f(x)$, x ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ $f'(x)$ ਹੈ, ਭਾਵ

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x)$$

ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਇੱਕ **ਅਨੁਕਲਨ** (integral), $f(x)$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਨ:

$$\int f'(x)dx = f(x).$$

ਚਿੰਨ੍ਹ "$\int$ " ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਕ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਅਨੁਕਲਨ ਚਿੰਨ੍ਹ (sign of integration) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਫਲਨ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। dx ਵਿੱਚ x ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਨੁਕਲਨ (integration) ਚਰ (variable) x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਨੁਕਲਨ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਚਰ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਚਰ ਨੂੰ ਰੱਖ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਸੰਕੇਤ $\int$ ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਅੱਖਰ S ਦਾ ਵਿਕ੍ਰਤ ਰੂਪ ਹੈ। ਅਸਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕਲਨ ਯੋਗ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਵਿਧੀ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਸ਼ਬਦ sum ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਅੱਖਰ S ਦੁਆਰਾ ਹੀ ਸੰਕੇਤ $\int$ ਬਣਿਆ ਹੈ।

ਨੋਟਸ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (integration) ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨਾ (integration) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਉਸਨੂੰ **ਅਨੁਕਲਨ** (integrand) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਅਨੁਕਲਨ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲਨ ਨੂੰ **ਅਨੁਕਲਨ** (integral) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

$\int f'(x)dx = f(x)$ ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਅਨੁਕਲਨ ਅਤੇ $f(x)$ ਅਨੁਕਲਨ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਵਰਣਨ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ

$$\int \cos x\, dx = \sin x, \qquad \because \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x, \qquad \because \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x, \qquad \because \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

ਅਤੇ
$$\int \frac{1}{t}dt = \log t, \qquad \because \frac{d}{dt}(\log t) = \frac{1}{t}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚ $\cos x$, $\sin x$, e^x ਅਤੇ $\frac{1}{t}$ ਅਨੁਕਲਨ (integrand) ਹਨ ਅਤੇ $\sin x$, $-\cos x$, e^x ਅਤੇ $\log t$ ਅਨੁਕਲਨ (integrals) ਹਨ।

ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਅਨੁਕਲਨ ਅਤੇ ਨਿਖੇੜਨ ਦੋਨੋਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਣ ਤਾਂ ਫਲਨ ਆਪਣੀ ਅਸਲ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋ, $\frac{d}{dx}\left[\int \cos x\, dx\right] = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

ਭਾਵ, $\frac{d}{dx}\left[\int f'(x)\, dx\right] = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x).$

ਇਸ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਨਿਖੇੜਨ ਅਤੇ ਅਨੁਲਨ ਪ੍ਰਤਿਲੋਮ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ।

VED1
E\L-LOVELY-H\math12-1 IInd 6-8-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

ਨੋਟ

12.1 ਵਿਆਪਕ ਅਨੁਕਲਨ (Comprehensive Integrals)

ਨਿਖੇੜਨ ਗਣਿਤ ਦੁਆਰਾ, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ $f(x)$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ (differential coefficient) $F(x)$ ਹੈ, ਤਾਂ $f(x) + c$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਵੀ $F(x)$ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿੱਥੇ c ਕੋਈ ਸਵੈ-ਇਛੁੱਕ ਅਚਰ (arbitrary constant) ਹੈ।

ਭਾਵ ਜੇਕਰ $$\frac{d}{dx}f(x) = F(x)$$

ਤਾਂ $$\frac{d}{dx}\{f(x)+c\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}(c) = \frac{d}{dx}f(x) + 0 = F(x)$$

$$\therefore \quad \int F(x)\,dx = f(x) + c,$$

ਇੱਥੇ c ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇਛੁੱਕ ਅਚਰ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਅਸੰਖਿਅ ਮਾਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਕਿਉਂਜੋ c ਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮਾਨ ਦੇਣ ਤੇ $F(x)$ ਦੇ ਕਈ ਅਨੁਕਲਨ (integrals) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ $f(x)$, $F(x)$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਨੁਕਲਨ (integrals) ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $f(x) + c$ ਉਸਦਾ ਵਿਆਪਕ ਅਨੁਕਲਨ (Comprehensive Integral) ਹੋਵੇਗਾ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਸਵੈ-ਇਛੁੱਕ ਅਚਰ c ਨੂੰ **ਅਨੁਕਲਨ ਅਚਰ** (Constant of integration) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

12.2 ਮਾਨਕ ਅਨੁਕਲਨ (Standard Integral)

ਮਾਨ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਮੱਖ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਹੜੇ ਨਿਮਨ ਹਨ:

ਅਨੁਕਲਨ	ਨਿਖੇੜਨ
1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	$\because \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx}(x^{n+1}) = x^n$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \log \lvert x \rvert + c$	$\because \frac{d}{dx}(\log \lvert x \rvert) = \frac{1}{x}$
3. $\int e^x = e^x + c$	$\because \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$	$\because \frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right) = a^x$
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\because \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
7. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

ਨੋਟ

8. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$	$\because \frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$
9. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
10. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$	$\because \frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
13. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

12.3 x^n ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ, ਜਿੱਥੇ $n \neq -1$
(Integration of x^n Relative to x, Where $n \neq -1$)

$\because$ $$\frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1)x^n$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n$$

$\therefore$ $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ ਜਿੱਥੇ } n \neq -1.$$

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\int dx = \int 1 \, dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c.$

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c.$

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int x^{-10} \, dx = \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + c = \frac{x^{-9}}{-9} + c = -\frac{1}{9} x^{-9} + c.$

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{3/2} + c.$

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\int x^{2/3} dx = \frac{x^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5} x^{5/3} + c.$

ਨੋਟ

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਲੋਮ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ .... ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. ਜਿਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਉਸਨੂੰ .... ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
3. $\int a^x\, dx = \text{..............} + c$
4. $\int \text{............}\, dx \text{..............} = -\cos x + c$
5. $\frac{d}{dx} x^{n+1} = (\text{............}) x^n$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.1

ਅਤਿਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਕਲਨਾਂ (Integrals) ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. (*a*) $\int x\, dx$ (*b*) $\int x^4\, dx$
 (*c*) $\int x^a\, dx$ (*d*) $\int t^3\, dt$
2. (*a*) $\int x^{-7}\, dx$ (*b*) $\int x^{-1/2}\, dx$
 (*c*) $\int x^{-3/2}\, dx$ (*d*) $\int z^{-1/3}\, dz$
3. (*a*) $\int \frac{dx}{x^2}$ (*b*) $\int \frac{dt}{t}$
 (*c*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (*d*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$
4. (*a*) $\int 2^x dx$ (*b*) $\int 3^x dx$
 (*c*) $\int b^x dx$ (*d*) $\int b^{x+a} dx$
5. (*a*) $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ (*b*) $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}$
 (*c*) $\int \frac{dy}{1+y^2}$ (*d*) $\int e^x dx$
6. (*a*) $\int \sec^2 t\, dt$ (*b*) $\int \operatorname{cosec}^2 z\, dz$
 (*c*) $\int \sqrt{1-\cos^2 x\, dx}$ (*d*) $\int (1+\cot^2 x)\, dx$
7. (*a*) $\int \frac{dx}{\operatorname{cosec} x}$ (*b*) $\int \frac{dx}{\cos x \cot x}$
 (*c*) $\int \frac{dx}{5^{-x}}$ (*d*) $\int \frac{dx}{\sec x}$.
8. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\int dx = x$, ਜਦੋਂ ਕਿ $x = 0$.

ਉੱਤਰ

ਨੋਟ

1. (a) $\frac{x^2}{2}+c$	(b) $\frac{x^5}{5}+c$	(c) $\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$	(d) $\frac{t^4}{4}+c$
2. (a) $-\frac{1}{6x^6}+c$	(b) $2x^{1/2}+c$	(c) $x^{-1/2}+c$	(d) $\frac{3}{2}z^{2/3}+c$
3. (a) $\frac{-1}{x}+c$	(b) $\log 1+1+c$	(c) $2x^{\frac{1}{2}}+c$	(d) $2x^{1/2}+c$
4. (a) $\frac{2^x}{\log e^2}+c$	(b) $\frac{3^x}{\log e^3}+c$	(c) $\frac{b^x}{\log e^b}+c$	(d) $\frac{b^{x+a}}{\log e^b}+c$
5. (a) $\sin^{-1} t+c$	(b) $\sec^{-1} z+1\ c$	(c) $\tan^{-1} x+c$	(d) e^x+c
6. (a) $\tan t+c$	(b) $-\cot z+c$	(c) $-\cos x+c$	(d) $-\cot x+c$
7. (a) $-\cos x+c$	(b) $\sec x+c$	(c) $\frac{5^x}{\log_e 5}+c$	(d) $\sin x+c$

12.4 ਕਿਸੀ ਅਚਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (Integration of the Multiplication of a Constant and a Function)

ਜੇਕਰ $\int f'(x)\,dx = f(x)$ ਤਾਂ $\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$

$$\because \quad \frac{d}{dx}\{a\,.\,f(x)\} = a\frac{d}{dx}f(x) = af'(x)$$

$$\because \quad \int af'(x)\,dx = a\,.\,f(x) = a\int f'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int af'(x)\,dx = a\int f'(x)\,dx}$$

ਭਾਵ ਕਿਸੀ ਅਚਰ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਉਸ ਅਚਰ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰ 1. ਫਲਨ $15x^4$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\int 15x^4\,dx = 15\int x^4\,dx$

$= \frac{15}{5}x^5 + c = 3x^5 + c.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\int 7\frac{dx}{x}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।।

ਹੱਲ : $\int 7\frac{dx}{x} = 7\int \frac{dx}{x} = 7\log|x| + c.$ **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int 6\sin x\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ: $\int 6\sin x\,dx = 6\int \sin x\,dx$

$$= 6(-\cos x) + c = -6\cos x + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int 3e^x\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ: $\int 3e^x\,dx = 3\int e^x\,dx = 3e^x + c.$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਫਲਨ e^{x+a} **ਦਾ** x **ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ: $\int e^{x+a}\,dx = \int e^x \cdot e^a dx$

$$= e^a \int e^x\,dx = e^a \cdot e^x + c$$

$$= e^{x+a} + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਟਾਸਕ ਫਲਨ $20x^4$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ:** $4x^5 + c$)

12.5 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (Integration of the Sum and Subtract of the Functions)

ਜੇਕਰ $\int f_1'(x)\,dx = f_1(x)$ ਤਾਂ $\frac{d}{dx}f_1(x) = f_1'(x)$

ਅਤੇ $\int f_2'(x)\,dx = f_2(x)$ ਤਾਂ $\frac{d}{dx}f_2(x) = f_2'(x)$

ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਯੋਗ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{f_1(x) \pm f_2(x)\} = \frac{d}{dx}f_1(x) \pm \frac{d}{dx}f_2(x)}$$

$$= f_1'(x) \pm f_2'(x)$$

$\therefore$ $$\int \{f_1'(x) \pm f_2'(x)\}\,dx = f_1(x) \pm f_2(x) = \int f_1'(x)\,dx \pm \int f_2'(x)\,dx$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\boxed{\int \{f_1'(x) \pm f_2'(x)\}\,dx = \int f_1'(x)dx \pm \int f_2'(x)\,dx}$$

ਇਹ ਕਿਰਿਆ ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਂ ਵੱਧ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿਸੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\int [f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm f_3'(x) \pm ....]\, dx = \int f_1'(x)\, dx \pm \int f_2'(x)\, dx \pm \int f_3'(x)\, dx \pm .....$$

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਫਲਨ $x^6 + \frac{1}{x} - e^x + 1$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int \left(x^6 + \frac{1}{x} - e^x + 1\right) dx = \int x^6 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int e^x dx + \int dx$$

$$= \frac{1}{7}x^7 + \log|x| - e^x + x + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਣਾਹਰਣ 2. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \,.\, \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \sec^2 x \; dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$= \tan x - \cot x + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int \left(3e^x - \frac{1}{5x} + \sec x \tan x\right) dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int \left(3e^x - \frac{1}{5x} + \sec x \tan x\right) dx$$

$$= 3\int e^x dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x} dx + \int \sec x \tan x \, dx$$

$$= 3\, e^x - \frac{1}{5}\log|x| + \sec x + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\int (ax^2 + bx + c)\, dx = a\int x^2\, dx + b\int x\, dx + c\int 1\, dx$$

$$= a\left(\frac{1}{3}x^3\right) + b\left(\frac{1}{2}x^2\right) + cx + d$$

$$= \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d,$$

ਜਿੱਥੇ d ਅਨੁਕਲਨ ਸਥਿਰਅੰਕ ਹੈ।

ਉੱਤਰ

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰ 5. $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int x^2\, dx - 2\int 1\, dx + \int x^{-2}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x + \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + c = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 6. $\int (5x-4)^3\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int (5x-4)^3 dx = \int (125x^3 - 300x^2 + 240x - 64)\, dx$$

$$= 125\int x^3 dx - 300\int x^2 dx + 240\int x\, dx - 64\int 1\, dx$$

$$= 125\left(\frac{1}{4}x^4\right) - 300\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 240\left(\frac{1}{2}x^2\right) 64x + c$$

$$= \frac{125}{4}x^4 - 100x^3 + 120x^2 - 64x + c\,.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਫਲਨ $\sin^2 \frac{x}{2}$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + c = \frac{1}{2}(x - \sin x) + c\,.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 8: $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx = \int (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int 1 \,.\, \cos 2x\, dx$$

$$= \int \cos 2x$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 9. $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int \frac{x^4}{x^2+1} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x + c\,.$$ **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 10. $\int \tan^2 x\, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \tan x - x + c.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 11. $\int \left(\frac{5x+7}{x} + e^x\right) dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int \left(\frac{5x+7}{x} + e^x\right) dx = \int \left(5 + \frac{7}{x} + e^x\right) dx$

$= 5x + 7\log|x| + e^x + c.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 12. $\int \left(\frac{ax^4 + bx^2 + c}{x^4}\right) dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int \left(\frac{ax^4 + bx^2 + c}{x^4}\right) dx = \int \left(a + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^4}\right) dx$

$= \int (a + bx^{-2} + cx^{-4})\, dx$

$= \int a\, dx + b\int x^{-2}\, dx + c\int x^{-4} dx$

$= ax + b\,\frac{x^{-1}}{-1} + c\,.\,\frac{x^{-3}}{-3}\,. + d = ax - \frac{b}{x} - \frac{c}{3x^3} + d$

ਜਿੱਥੇ d ਅਨੁਕਲਨ ਸਥਿਰ ਅੰਗ ਹੈ। **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 13. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx$

$= \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx$

$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}$

$= x - \tan^{-1} x + c.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 14. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx$, ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $1 - \cos x$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ

$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx$

$= \int (\operatorname{cosec}^2 x - \cot x\,.\,\operatorname{cosec} x)\, dx$

$= -\cot x + \operatorname{cosec} x + c\,.$ ਉੱਤਰ

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਫਲਨ $\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :
$$\int \frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}dx = \int \frac{(\sec x + \tan x)(\sec x + \tan x)}{(\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x)}dx$$
$$= \int \frac{(\sec x + \tan x)^2}{\sec^2 x - \tan^2 x}dx$$
$$= \int (\sec^2 x + \tan^2 x + 2\sec x \tan x)\,dx$$
$$= \int (2\sec^2 x - 1 + 2\sec x \tan x)\,dx$$
$$= \int 2\sec^2 x\,dx - \int dx + \int 2\sec x \tan x\,dx$$
$$= 2\int \sec^2 x\,dx - \int dx + 2\int \sec x \tan x\,dx$$
$$= 2\tan x - x + 2\sec x + c.$$
ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਫਲਨ $\dfrac{(x+2)(4x^2-5)}{x}$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :
$$\int \frac{(x+2)(4x^2-5)}{x}dx = \int \frac{(4x^3+8x^2-5x-10)}{x}dx$$
$$= 4\int x^2dx + 8\int x\,dx - 5\int dx - 10\int \frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 5x - 10\log|x| + c$$
$$= \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 10\log|x| + c.$$
ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.2

ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. $\int (e^x + 2\sin x - 3\cos x)\,dx$.
2. $\int (x^2 - \cos x + \sec x \tan x)\,dx$.
3. $\int (7x^6 - 8x^3 + 5)\,dx$.
4. $\int (x+2)(2x+6)\,dx$.
5. $\int \dfrac{ax^3+bx+c}{x^2}dx$.
6. $\int \dfrac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}dx$.
7. $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)dx$.
8. $\int \left(\dfrac{3x^2+4x+5}{\sqrt{x}}\right)dx$.
9. $\int \dfrac{x}{a+x}dx$.
10. $\int \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots\right)dx$.

11. $\int (1-x^2)\sqrt{x}dx$.

12. $\int \frac{e^{\log x}}{x}dx$.

13. $\int \left(\cos x - \frac{5}{x} + e^x\right)dx$.

14. $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$.

ਉੱਤਰ

1. $e^x - 2\cos x - 3\sin x + c$
2. $\frac{x^3}{3} - \sin x + \sec x + c$
3. $x^7 - 2x^4 + 5x + c$
4. $\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 + 12x + c$
5. $\frac{a}{2}x^2 + b\log_e|x|\frac{-c}{x} + c_1$
6. $\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{6x^{3/2}}{5} + 2x^{3/2} + 2\sqrt{x} + c$
7. $2x^{1/2} - 2/3\, x^{3/2} + c$
8. $2\sqrt{x}\left[\frac{3}{5}x^5 + \frac{4}{3}x + 5\right] + c$
9. $x\, a \log_e |a + x| + c$
10. $x + \frac{x^2}{\angle 2} + \frac{x^3}{\angle 3} + \ldots$
11. $\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{7}x^{7/2} + c$
12. $x + c$
13. $\sin x - 5\log|x| + e^x + c$
14. $-\frac{2}{3}\text{cosec } x + \sec x + c$.

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ (State whether the following statements are True or False) –

6. ਕਿਸੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
7. ਕਿਸੀ ਅਚਰ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਉਸ ਅਚਰ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
8. $\int af'(x)dx = a\int f'(x)dx$
9. $\frac{d}{dx}\{f_1(x) \pm f_2(x)\} = \frac{d}{dx}f_1(x) \pm \frac{d}{dx}f_2(x)$

12.6 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਲੋਮ (Inverse) ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਅਨੁਕਲਨ (Integration) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਨਿਖੇੜਨ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ (differential coefficient) ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਅਨੁਕਲਨ-ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ।

ਨੋਟ

- ਚਿੰਨ੍ਹ "$\int$ " ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਕ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਅਨੁਕਲਨ ਚਿੰਨ੍ਹ (sign of integration) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਫਲਨ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। dx ਵਿੱਚ x ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਨੁਕਲਨ (integration) ਚਰ (variable) x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਅਨੁਕਲਨ ਅਤੇ ਨਿਖੇੜਨ ਦੋਨੋਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਿੱਤੀ ਜਾਣ ਤਾਂ ਫਲਨ ਉਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਕਿਉਂਜੋ c ਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮਾਨ ਦੇਣ ਤੇ $F(x)$ ਦੇ ਕਈ ਅਨੁਕਲਨ (integrals) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $f(x)$, $F(x)$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਨੁਕਲਨ (intregal) ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $f(x) + c$ ਉਸਦਾ ਵਿਆਪਕ ਅਨੁਕਲਨ (Comprehensive Integral) ਹੋਵੇਗਾ।

12.7 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਪ੍ਰਤੀਲੋਮ (Inverse) – ਉਲਟਾ।
- ਪ੍ਰਤੀਕ (Symbol) – ਚਿੰਨ੍ਹ।

12.8 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. $\int x^5 \, dx$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $n \neq -1$ (**ਉੱਤਰ :** $\frac{x^6}{6} + c$),
2. ਅਨੁਕਲਨ $\int e^x \, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $e_x + c$)
3. $\int 6 \sin x \, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $-6 \cos x + c$)
4. $\int x - \frac{1}{x} dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c$)
5. $\int \tan^2 x \, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਰਿਕਲਿਤ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\tan x - x + c$)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਅਨੁਕਲਨ	2. ਅਨੁਕਲਕ	3. $\frac{a^x}{\log_e a}$	4. $\sin x$	5. $n + 1$.
6. ਸੱਚ	7. ਝੂਠ	8. ਸੱਚ	9. ਸੱਚ।	

12.9 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
4. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
6. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।

ਇਕਾਈ–13: ਅਨੁਕਲਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ (Methods of Integration)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਸੰਬੰਧੀ।

ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਝ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਸੰਬੰਧੀ।

x^n ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕੱਢਣ ਸੰਬੰਧੀ।

ਅਨੁਕਲਕ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋਣਗੇ।

ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਝ ਮਾਨ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕੱਢਣ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੋ ਮੁੱਢ ਵਿਧੀਆਂ ਹਨ–

1. **ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕਲਨ** (Integration by Substitution)
2. **ਖੰਡ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕਲਨ** (Integration by Parts)

13.1 ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ (Substitution)

ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਨੁਕਲਕ (Integrand) ਨੂੰ ਮਾਨਕ ਸੂਤਰਾਂ (Standard formula) ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਕੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕਲਕ ਦੀ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਨੂੰ ਹੋਰ

ਨੋਟ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਅਨੁਕਲਕ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਅਨੁਕਲਕ ਨੂੰ ਨਵੀਂ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਵਤਿਤ ਕਰ ਲੈਂਦ ਹਨ ਕਿ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

13.2 ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਝ ਨਤੀਜੇ (Some Results Gain from Substitution)

(*i*) ਫਲਨ sin ($ax + b$) ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $ax + b = t$

$$\frac{d}{dx}(ax+b) = dt \quad \therefore \quad a\,dx = dt$$

ਜਾਂ
$$dx = \frac{1}{a}dt$$

$\therefore$
$$\int \sin(ax+b)dx = \int (\sin t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int \sin t\,dt$$

$$= -\frac{1}{a}\cos t + c = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

ਨੋਟਸ
$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਨਾਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ–

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$$

$$\int \sec^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} + c$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b) + c$$

$$\int \operatorname{cosec}(ax+b)\tan(ax+b) = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b) + c$$

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}f(ax+b) + c}$$

ਨੋਟ

(ii) ਫਲਨ $\frac{1}{a^2+x^2}$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $x = at \quad \therefore \quad dx = a\,dt$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2+a^2t^2}\,.\,a\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{a}\tan^{-1} t + c$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

ਇਸ ਲਈ

$$\boxed{\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c}$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + c}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿੱਚ ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੀ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੇ ਵਰਤ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਅਤਿ ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\int(\sqrt{1-5x}+9e^{3x})dx$ **.**

ਹੱਲ : $\int(\sqrt{1-5x}+9e^{3x})\,dx = \int(1-5x)^{1/2}\,dx + 9\int e^{3x}\,dx$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)\frac{(1-5x)^{3/2}}{3/2} + 9\,\frac{e^{3x}}{3} + c$$

$$= \frac{-2}{15}(1-5x)^{3/2} + 3e^{3x} + c.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰ 2. ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

$$\int \sin 4x \cos 6x\,dx\,.$$

$$\int \sin 4x \cos 6x\,dx = \frac{1}{2}\int(2\sin 4x\cos 6x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 10x - \sin 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 10x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$$

ਨੋਟ

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos 10x}{10} + \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{2} + c$$

$$= -\frac{1}{20}\cos 10x + \frac{1}{4}\cos 2x + c.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int \sin^3 \theta \, d\theta$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :
$$\int \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{1}{4}\int (3\sin\theta - \sin 3\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\int \sin\theta\, d\theta - \frac{1}{4}\int \sin 3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}(-\cos\theta) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3\theta + c$$

$$= -\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos 3\theta + c.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int \sqrt{1-\sin x}\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ
$$\sqrt{1-\sin x} = \sqrt{\sin^2\frac{1}{2}x + \cos^2\frac{1}{2}x - 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}$$

$$= \sqrt{\left(\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x\right)^2} = \pm\left(\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x\right)$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{1-\sin x}\, dx = \pm\int\left(\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$= \pm\left[-2\cos\frac{1}{2}x - 2\sin\frac{1}{2}x\right] + c$$

$$= \pm 2\left(\cos\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{2}x\right) + c.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\int\left(7e^{2x} + \frac{5}{2x+7} + \sec^2 3x - 2\sqrt{1-5x}\right)dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: $\int\left(7e^{2x} + \frac{5}{2x+7} + \sec^2 3x - 2\sqrt{1-5x}\right)dx$

$$= 7\int e^{2x}\, dx + 5\int \frac{1}{2x+7}\, dx + \int \sec^2 3x\, dx - 2\int (1-5x)^{1/2}\, dx$$

$$= \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}\log(2x+7) + \frac{1}{3}\tan 3x - 2\frac{(1-5x)^{3/2}}{(-5)\left(\frac{3}{2}\right)} + c$$

$$= \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}\log(2x+7) + \frac{1}{3}\tan 3x + \frac{4}{15}(1-5x)^{3/2} + c.$$ ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.1

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. (a) $(x+2)^3$ (b) $(7x-2)^3$
(c) $(ax+b)^4$ (d) $(3+4x)^5$

2. (a) $\sqrt{4-5x}$ (b) $\sqrt{4x+3}$
(c) $\sqrt{ax+b}$ (d) $\sqrt{2x+\frac{5}{3}}$

3. (a) $\frac{1}{(5x+4)^2}$ (b) $\frac{1}{(a+bx)^4}$ (c) $\frac{1}{\left(\frac{c}{2}+bx\right)^3}$

4. (a) $\frac{1}{3x+1}$ (b) $\frac{1}{a-bx}$

5. (a) $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1-(3x-2)^2}}$

6. (a) $\frac{1}{5+(2-3x)^2}$ (b) $\frac{1}{1+9x^2}$

7. (a) $\sin 3x$ (b) $\cos(4x+5)$

8. $\sqrt{1+\sin\frac{1}{2}x}$ **9.** (a) e^{3x+4} (b) $e^{x/2}$

10. $\cos\left(\frac{2}{5}x-2\right)+a^{3x+2}$.

ਉੱਤਰ

1. (a) $\frac{1}{4}(x+2)^4+c$ (b) $\frac{1}{28}(7x-2)^4+c$ (c) $\frac{1}{5a}(ax+b)^5+c$
(d) $\frac{1}{24}(3+4x)^6+c$

2. (a) $-\frac{2}{15}(4-5x)^{3/2}+c$ (b) $\frac{1}{6}(4x+3)^{3/2}+c$ (c) $\frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}+c$
(d) $\frac{1}{3}\left(2x+\frac{5}{3}\right)^{3/2}+c$

3. (a) $-\frac{1}{5(5x+4)}+c$ (b) $-\frac{1}{3b(a+bx)^3}+c$ (c) $-\frac{1}{2b(c/2+bx)^2}+c$

4. (a) $\frac{1}{3}\log 3x+1+c$ (b) $-\frac{1}{b}\log|9-bx|+c$

5. (a) $\sin^{-1}\frac{x}{5}+c$ (b) $\frac{1}{3}\sin^{-1}(3x-2)+c$

ਨੋਟ

6. $-\frac{1}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{(2-3x)}{\sqrt{5}}+c$ (b) $\frac{1}{3}\tan^{-1}3x+c$

7. $-\frac{1}{3}\cos 3x+c$ (b) $\frac{1}{4}\sin(4x+5)+c$

8. $(\sin\frac{1}{4}x-\cos\frac{1}{4}x)+c$ 9. (a) $\frac{1}{3}e^{3x+4}+c$ (b) $2e^{x/2}+c$

10. $\frac{5}{2}\sin\left(\frac{2}{5}x-2\right)+\frac{1}{3}\frac{a^{3x+2}}{\log_e a}+c$

13.3 x^n ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (Integration of x^n Function)

ਜੇਕਰ x^n ਦੇ ਫਲਨ ਵਿੱਚ x^{n-1} ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਦਿੱਤਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ $x^n = t$ ਮੰਨ ਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\int f\{\phi(x)\}\phi'(x)dx=\int f(t)dt\text{, ਜਿੱਥੇ } \phi(x)=t$$

ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਇਸ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ

$$\phi(x)=x^n$$

$\therefore$ $\phi'(x)=nx^{n-1}$ ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ n ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ

$$\int f(x^n)x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\int f(t)dt$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਅਨੁਕਲਕ ਦਾ ਰੂਪ $\int f(x^n)x^{n-1}dx$ ਹੈ, ਤਾਂ $x^n = t$ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਅਨੁਕਲਨ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਫਲਨ $\cos^2 x\sin x$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\int\cos^2 x\sin x\,dx$ ਮੰਨਿਆ $\cos x = t$

$$\sin x\,dx=-dt=\int -t^2\,dt$$

$$=-\frac{t^3}{3}+c=-\frac{\cos^3 x}{3}+c.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\int\frac{x^8\,dx}{(1-x^3)^{1/3}}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $1-x^3=t$

$\therefore$ $-3x^2\,dx=dt$

$$x^2\,dx = -\frac{dt}{3}$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{(1-x^3)^{1/3}} = \int \frac{(x^3)^2\,x^2\,dx}{(1-x^3)^{1/3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{(1-t)^2\,dt}{t^{1/3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{(t^2-2t+1)\,dt}{t^{1/3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int (t^{5/3} - 2t^{2/3} + t^{-1/3})\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{t^{8/3}}{\frac{8}{3}} - \frac{2t^{5/3}}{\frac{5}{3}} + \frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}}\right] + c$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{3}{8}(1-x^3)^{8/3} - \frac{6}{5}(1-x^3)^{5/3} + \frac{3}{2}(1-x^2)^{2/3}\right] + c$$

$$= -\frac{1}{8}(1-x^3)^{8/3} + \frac{2}{5}(1-x^3)^{5/3} - \frac{1}{2}(1-x^2)^{2/3} + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਰਹਣ 3. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $\sqrt{x} + 1 = t$

$\therefore$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt$

$\therefore$ $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,dt$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t} = 2\log t + c$$

$$= 2\log|\sqrt{x}+1| + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ**

ਹੱਲ : $\int \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx = \int \cos 2x\,dx$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{9-\cos^2 x}}\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਨੋਟ

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $\cos x = t$

$\therefore$ $-\sin x\, dx = dt$

$\therefore$ $\sin x\, dx = -dt$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$$= \int \frac{-dt}{\sqrt{3^2-t^2}}, \text{ ਸੂਤਰ } \int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$= -\sin^{-1}\frac{t}{3} + c$$

$$= -\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{3}\right) + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

$$\int \frac{\log x}{x} dx.$$

ਹੱਲ : $\int \frac{\log x}{x}\, dx$

ਮੰਨਿਆ $\log x = t$

$\frac{1}{x}\, dx = dt$ (x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਿਖੇੜਨ ਨਾਲ)

$$= \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\log x)^2 + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 7. $\int \frac{x^7}{1+x^{16}}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $x^8 = t$ ਤਾਂ $8x^7\, dx = dt$

$$\int \frac{x^7}{1+x^{16}} dx = \int \frac{x^7}{1+(x^8)^2} dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{1+t^2} dt$$

ਸੂਤਰ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ

$$= \frac{1}{8}\tan^{-1} t + c = \frac{1}{8}\tan^{-1} x^8 + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 8. $\int x \sin^3 x^2 \cos x^2 dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $\sin x^2 = t \Rightarrow (\cos x^2)\, 2x\, dx = dt$

$$x \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\, dt$$

$$\int x \sin^3 x^2 \cos x^2\, dx = \int (\sin x^2)^3 . x \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\int t^3\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + c = \frac{1}{8}(\sin x^2)^4 + c = \frac{1}{8}\sin^4 x^2 + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 9. $\int \frac{ax^2}{1-2x^3}\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int \frac{ax^2}{1-2x^3}\,dx$ ਮੰਨਿਆ $1 - 2x^3 = t$

$$-6x^2\,dx = dt$$

$$x^2\,dx = -\frac{1}{6}\,dt = a\int \frac{-\frac{1}{6}dt}{t}$$

$$= -\frac{a}{6}\log t + c = -\frac{a}{6}\log(1-2x^3) + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 10. $\int \frac{(1+\log x)^2}{x}\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $1 + \log x = t$ ਤਾਂ $= \frac{1}{x}dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{(1+\log x)^2}{x}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^{2+1}}{2+1} + c \Rightarrow \frac{t^3}{3} + c$$

$$= \frac{(1+\log x)^3}{3} + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਟਾਸਕ $\int \frac{1}{x(1+\log x)^n}\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

[**ਉੱਤਰ :** $\frac{1}{1-n}(1+\log x)^{-(n-1)} + c.$]

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.2

ਨਿਮਨ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ –

1. $\int x^3 \cos x^4\,dx.$
2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$
3. $\int \frac{3x^2}{9^2 + x^3}\,dx.$
4. $\int nx^{n-1}\cos x^n\,dx.$
5. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx.$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$
7. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx.$
8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$
9. $\int \frac{x^{n-1}}{a+bx^n}\,dx.$
10. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$

ਨੋਟ

11. $\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^m}}\,dx.$

12. $\int \frac{2x^3}{4+x^8}\,dx.$

13. $\int \frac{x^3\,dx}{(4-x^4)^2}.$

14. $\int x^{-1/2}\,\text{cosec}^2\sqrt{x}\,dx.$

15. $\int \text{cosec}^2 x\sqrt{\cot x}\,dx.$

16. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\cos e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = dx.$

17. $\int \frac{x^2}{16+25x^6}\,dx.$

18. $\int e^x(1+x)\,\text{cosec}^2(xe^x)\,dx.$

19. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$

20. $\int x\cos^3 x^2 \sin x^2\,dx.$

ਉੱਤਰ

1. $\frac{1}{4}\sin x^4 + c$

2. $\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + c$

3. $\log|9^2+x^3| + c$

4. $\sin x^n + c$

5. $\frac{1}{3}\tan^{-1} x^2 + c$

6. $\frac{1}{2}\sin^{-1} x^2 + c$

7. $\frac{1}{2}\tan^{-1} x^2 + c$

8. $\sqrt{1+x^2} + c$

9. $\frac{1}{nb}\log|a+bx^n| + c$

10. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c$

11. $-\frac{2}{m}\sqrt{1-x^m} + c$

12. $\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{1}{2}x^4 + c$

13. $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4-x^4} + c$

14. $-2\cot\sqrt{x} + c$

15. $-\frac{2}{3}(\cot x)^{3/2} + c$

16. $2\sin e^{\sqrt{x}} + c$

17. $\frac{1}{60}\tan^{-1}\frac{5x^3}{4} + c$

18. $-\cot(xe^x) + c$

19. $\tan^{-1} x + \frac{1}{3}\tan^{-1} x^3 + c$

20. $-\frac{1}{8}\cos^4 x^2 + c.$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਨੁਕਲਕ ਨੂੰ ਮਾਨਕ ਸੂਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ .... ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(............) + c$
3. $\int \sec^2 ax + dx = -\frac{...............}{a} + c$
4. ਜੇਕਰ x^n ਦੇ ਫਲਨ ਵਿੱਚ .... ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਦਿੱਤਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ $x^n = t$ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ

13.4 ਅਨੁਕਲਕ (Integrand)

ਜੇਕਰ ਅਨੁਕਲਕ (Integrand) $\phi\,[f(x)]\ f'(x)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋਵੇ ਭਾਵ ਇਹ ਕਿਸੀ ਰਾਸ਼ੀ $f(x)$ ਦੇ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇਸੀ ਰਾਸ਼ੀ $f(x)$ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ $f'(x)$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਰਾਸ਼ੀ $f(x)$ ਨੂੰ t ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਮਾਨ ਕੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟਸ

ਜੇਕਰ $f(x) = t$ ਤਾਂ $f'(x)\,dx = dt$

$\therefore$ $\int \phi[f(x)]f'(x)dx = \int \phi(t)dt = \psi(t)$ (ਮੰਨ ਲਿਓ)

$= \psi\,[\phi(x)]$, [t ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ]

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\int \sin^4 x \cos x\, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt.$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int \sin^4 x.\cos x\, dx = \int t^4\, dt$

$$= \frac{t^5}{5} + c = \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\int \cot^3\theta.\operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $\int \cot^3\theta.\operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$ ਮੰਨ ਲਿਓ $\cot\theta = x$ ਤਾਂ $-\operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta = dx$

$\Rightarrow$ $\operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta = -dx$

$\therefore$ $\int \cot^3\theta \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta = -\int x^3\, dx = -\frac{x^4}{4} + c$

$$= -\frac{\cot^4\theta}{4} + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int \frac{4\sin^{-1}x}{(1-x^2)}dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $\sin^{-1}x = t$, ਤਾਂ $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = dt$

$\therefore$ $\int \frac{4\sin^{-1}x\, dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int 4t\, dt = 4 \times \frac{1}{2}t^2 + c = 2\ (\sin^{-1}x)^2 + c.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int \frac{\cos^2(\log x)}{(x)}dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $\log x = t \Rightarrow \frac{1}{x}\, dx = dt$

ਨੋਟ

$$\therefore \quad \int \frac{\cos^2(\log x)}{x}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log x + \frac{\sin 2(\log x)}{2}\right] + c.$$ ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.3

ਅਤਿ ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. (a) $\int \sin x \cos x\,dx$ (b) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$

   (c) $\int \cos^2 x \sin x\,dx$ (d) $\int \cot^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx$

   (e) $\int \sec^p x \tan x\,dx$

2. (a) $\int \frac{(\log_e x)^2}{x}\,dx$ (b) $\int \frac{\cos(\log_e x)}{x}\,dx$

   (c) $\int \frac{1+\log_e x}{x}\,dx$ (d) $\int \frac{1}{x\cos^2(\log_e x)}\,dx$

3. (a) $\int e^x \cos e^x\,dx$ (b) $\int e^x (a+be^x)^n\,dx$

   (c) $\int \frac{e^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (d) $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

4. (a) $\int \frac{\tan^{-1}x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$ (b) $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

   (c) $\int \frac{(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

5. $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

6. $\int \frac{x\tan^{-1}x^2}{1+x^4}\,dx$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,[\sqrt{x}+1]}\,dx.$

ਉੱਤਰ

1. (a) $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$ (b) $\frac{1}{3}\sin^3 x + c$

   (c) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + c$ (d) $-\frac{1}{3}\cot^3 x + c$

   (e) $\frac{1}{p}\sec^p x + c$

2. (*a*) $\frac{1}{3}(\log_e x)^3 + c$ (*b*) $\sin(\log_e x) + c$

(*c*) $\frac{1}{2}(1+\log_e x)^2 + c$ (*d*) $\tan(\log_e x) + c$

3. (*a*) $\sin e^x + c$ (*b*) $\frac{1}{b(n+1)}(a+be^x)^{n+1} + c$

(*c*) $\frac{1}{m} e^{m \sin^{-1} x} + c$ (*d*) $e^{\tan x} + c$

4. (*a*) $\frac{1 + x\tan^{-1} x}{\sqrt{1+x^2}} + c$ (*b*) $\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 + c$

(*c*) $\frac{1}{3}(\sin^{-1} x)^3 + c$

5. $\frac{(x^2-1)^{3/2}}{3} + c$ 6. $\frac{1}{4}\left(\tan^{-1} x^2\right)^2 + c$

7. $2\log|1+\sqrt{x}| + c$

13.5 ਅਜਿਹੀ ਭਿੰਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਜਿਸਦਾ ਅੰਸ਼ (numerator), ਹਰ (denominator) ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ–ਗੁਣਾਂਕ ਹੋਵੇ (Integration of the Fraction whose Numerator is Integral Coefficient of the Denominator)

ਮੰਨ ਲਿਓ ਅਸੀਂ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $f'(x)$, $f(x)$ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ–ਗੁਣਾਂਕ ਹੈ।

$f(x) = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ, $f'(x)dx = dt$

$$\therefore \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log[f(x)]$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(x) + c$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਭਿੰਨ ਦਾ ਅੰਸ਼ (N^r), ਹਰ (D^r) ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਭਿੰਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਹਰ ਦੇ **ਲਘੁਗਣਕ** (log) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।

$$\therefore \qquad \int \frac{d\ \text{ਹਰ}}{\text{ਹਰ}} dx = \log\ (\text{ਹਰ})$$

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $1 + e^x = t$ ਤਾਂ $ex\, dx = dt$

$$\therefore \qquad \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + c$$

$$= \log\left|1+e^x\right|+c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\int \frac{x^4}{x^5+4}dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $x^5 + 4 = t$

$\therefore$ $5x^4\,dx = dt$

ਜਾਂ $x^4\,dx = \frac{1}{5}\,dt$

$$\therefore \quad \int \frac{x^4}{x^5+4}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{5}\log|t| + c$$

$$= \frac{1}{5}\log|x^5+4| + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $e^x + e^{-x} = t \Rightarrow (e^x - e^{-x})\,dx = dt$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|e^x + e^{-x}| + c.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int \frac{dx}{e^x - 1}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\,dx$ [e^{-x} ਨਾਲ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ]

$= \int \frac{1}{t}\,dt$, ਮੰਨਿਆ $1 - e^{-x} = t \Rightarrow e^{-x}\,dx = dt$

$= \log|t| + c = \log|1 - e^{-x}| + c.$ **ਉੱਤਰ**

ਟਾਸਕ $\int \frac{a}{b + ce^x}dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

(ਉੱਤਰ : $-\frac{a}{b}\log\left|be^{-x}+c\right|+c'.$**)**

13.6 ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਝ ਮਾਨਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ (Integration of Some Standard Function by Substitution)

(*i*) tan *x* ਅਤੇ cot *x* ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ

(1) $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

ਮੰਨ ਲਓ $\cos x = t$, ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ $-\sin x\,dx = dt$

$$\therefore \quad \int \tan x\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + c$$

$$= -\log|\cos x| + c = \log|\sec x| + c$$

$\therefore$ $\boxed{\int \tan x\, dx = -\log|\cos x| + c \text{ ਜਾਂ } \log|\sec x| + c}$

(2) $\int \cot x\, dx = \frac{\cos x}{\sin x} dx$

ਮੰਨ ਲਿਓ $\sin x = t$, ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ $\cos x\, dx = dt$

$\therefore$ $\int \cot x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log|\, t\,| + c = \log|\sin x\,| + c$

$\boxed{\int \cot x\, dx = \log|\sin x\,| + c.}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.4

ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. (*a*) $\int \frac{ax^{n-1}}{x^n + b} dx$ (*b*) $\int \frac{3x^2}{(x^3+4)^5} dx$

(*c*) $\int \frac{x^2}{1-2x^3} dx$ (*d*) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

ਉੱਤਰ

1. (*a*) $\frac{a}{n} \log|x^n + b| + c$ (*b*) $-\frac{1}{4}(x^3+4)^{-4} + c$

(*c*) $-\frac{1}{6} \log_e |1 - 2x^3| + c$ (*d*) $2e^{\sqrt{x}} + c$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)–

5. $\int \sin x \cos x\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਹੈ–

(*a*) $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$ (*b*) $\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

(*c*) $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x + c$ (*d*) ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

6. $\int \cot^3 \theta . \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta$ ਦਾ ਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ–

(*a*) $\frac{\cot^4 \theta}{4} + c$ (*b*) $-\frac{\cot^4 \theta}{4} + c$

(*c*) $\frac{\operatorname{cosec}^4 \theta}{4} + c$ (*d*) ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

ਨੋਟ

7. $\sin(\log_e x) + c$ ਕਿਸਦਾ ਹੱਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ?

(*a*) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ (*b*) $\int \cot^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

(*c*) $\int \frac{\cos(\log_e x)}{x} \, dx$ (*c*) ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

8. $\log\left|1+e^x\right| + c$ ਕਿਸਦਾ ਹੱਲ ਹੈ?

(*a*) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ (*b*) $\int \frac{1+e^x}{e^x} dx$

(*c*) $\int e^x \, dx$ (*d*) $\int \frac{-e^x}{1+e^x} dx.$

13.7 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਦੋ ਮੁੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਹਨ–

(*i*) ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕਲਨ (Integration by Substitution)

(*ii*) ਖੰਡ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕਲਨ (Integration by Parts)

- ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਨੁਕਲਕ (Integrand) ਨੂੰ ਮਾਨਕ ਸੂਤਰਾਂ (Standard formulae) ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰਕੇ ਅਨੁਕਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਅਨੁਕਲਕ (Integrand) $\phi[f(x)]\ f'(x)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋਵੇ ਭਾਵ ਇਹ ਕਿਸੀ ਰਾਸ਼ੀ $f(x)$ ਦੇ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇਸੀ ਰਾਸ਼ੀ $f(x)$ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ $f'(x)$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਰਾਸ਼ੀ $f(x)$ ਨੂੰ t ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਮੰਨ ਕੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

13.8 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

1. ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ (Substitution) – ਵਿਸਥਾਪਨ।
2. ਵਿਧੀ (Methods) – ਤਰੀਕਾ।

13.9 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. $\int \sec^2 3x \, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ।   (**ਉੱਤਰ :** $\frac{\tan 3x}{3} + c$)
2. $\int \sin^3 \theta \, d\theta$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਰਿਕਲਿਤ ਕਰੋ।   (**ਉੱਤਰ :** $-\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos 3\theta + c$)
3. ਫਲਨ $\cos^2 x \sin x$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।   (**ਉੱਤਰ :** $-\frac{\cos^3 x}{3} + c$)
4. $\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ   (**ਉੱਤਰ :** $\frac{\sin 2x}{2} + c$)
5. $\int \frac{4\sin^{-1} x}{(1-x^2)} dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ   (**ਉੱਤਰ :** $2(\sin^{-1} x)^2 + c$)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer : Self Assessment)

ਨੋਟ

1. ਅਨੁਕਲਨ	2. $ax + b$	3. $\tan ax$	4. x^{n-1}
5. (*a*)	6. (*b*)	7. (*c*)	8. (*a*)

13.10 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
2. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
5. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਉਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–14: ਯੋਗ (ਜੋੜ) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕਲਨ (Integration as a Summation)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।
- ਦੋ ਮਾਨਕ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਅਨੁਕਲਨ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦੇਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇੱਕ ਜਾਂ ਦੋ ਵਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਅਨੁਕਲਕ ਜਾਂ ਤਾਂ ਕਿਸੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਅਨੁਕਲਕ ਦਾ ਰੂਪ ਲੈ ਲਏ ਜਾਂ ਅਜਿਹੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਏ ਜਿਸਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ। ਜੇਕਰ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਅਜਿਹਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੱਜੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕਲਨ ਰਿਣ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਨਾਲ ਆਪਣੇ ਪਹਿਲੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਓ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

14.1 ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ) ਪਤਾ ਕਰਨਾ [Finding Integral of Multiplication of Two Functions (Divided Integral]

ਜੇਕਰ $f(x)$ ਅਤੇ ਫਲਨ $\phi(x)$ ਦਾ ਗੁਣਨ $f(x).\,\phi(x)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਨਿਖੇੜਨ

$$\frac{d}{dx}\{f(x).\phi(x)\} = f(x)\,\phi'(x) + f'(x)\,\phi(x)$$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ

ਨੋਟ

$$f(x).\ \phi(x) = \int f(x)\,\phi'(x)\,dx + \int f'(x)\,\phi(x)\,dx$$

ਜਾਂ

$$\int f(x)\,\phi'(x)\,dx = f(x).\ \phi(x) - \int f'(x)\,\phi(x)\,dx$$

$$= f(x)\int \phi'(x)\,dx - \int\{f'(x)\int \phi'(x)\,dx\}\,dx$$

$\because$ $\boldsymbol{\phi(x)}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਾਲ $\boldsymbol{\phi'(x)}$ ਦਾ $\boldsymbol{x}$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\boldsymbol{\phi(x)}$ ਦੇ ਸਥਾਨ f $\int \boldsymbol{\phi'(x)\,dx}$ ਦਾ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $f_1(x)$ ਅਤੇ $\boldsymbol{\phi'(x)}$ ਦੇ ਸਥਾਨ $f_2(x)$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\boxed{\int f_1(x).f_2(x)dx = f_1(x)\int f_2(x)dx - \int\left\{\frac{d}{dx}f_1(x).\int f_2(x)dx\right\}dx}$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ

ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ
= ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ × ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ
–[ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਗੁਣਾਂਕ × ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਅਨੁਲਨ]

ਉਪਰੋਕਤ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਦੇਖ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇੱਕ ਜਾਂ ਦੋ ਵਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਅਨੁਕਲਕ ਜਾਂ ਤਾਂ ਕਿਸੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਅਨੁਕਲਕ ਦਾ ਰੂਪ ਲੈ ਲਏ ਜਾਂ ਅਜਿਹੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਏ ਜਿਸਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੀ ਸਫਲਤਾ ਬਹੁਤ ਕੁੱਝ ਅਨੁਕਲਕ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਅਨ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੀ ਚੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸੱਜੇ ਪੱਖ ਦੇ ਦੂਜੇ ਪਦ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਸਰਲਤਾਪੂਰਣ ਢੰਗ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੀ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਸਾਵਧਾਨੀ ਬਰਤਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ **ਕੁੱਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਗੱਲਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ–**

(1) ਜੇਕਰ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਅਜਿਹਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (integral) ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

$\int \boldsymbol{x.(\log x)dx},$ ਵਿੱਚ $\log x$ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ। ਇਸ ਲਈ $\log x$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(2) ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਫਲਨ ਅਜਿਹੇ ਹੋਣ ਕਿ ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਹੀ ਅਨੁਕਲਨ (integral) ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜੇਕਰ x^n ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਕੋਈ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨੋ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, $\int \boldsymbol{x^2.\cos x\,dx}$ ਵਿੱਚ $\boldsymbol{x^2}$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨਾ ਮੰਨਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(3) $\int \boldsymbol{\log x\,dx}, \int \boldsymbol{\tan^{-1} x\,dx}$ ਆਦਿ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ '1' ਨੂੰ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਮੰਨ ਕੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਜਿਵੇਂ $\int \boldsymbol{\log x\,dx} = \int \boldsymbol{(\log x).1\,dx}$ ਆਦਿ।

(4) ਜਰੂਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(5) ਜੇਕਰ ਸੱਜੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ ਅਨੁਲਨ ਰਿਣ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਨਾਲ ਆਪਣੇ ਪੁਰਾਣੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰਨੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

ਨੋਟਸ ਅਸੀਂ, ਸ਼ਬਦ 'ILATE' ਵਿੱਚ, ਪਹਿਲਾਂ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਚੁਣ ਕੇ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਜਿੱਥੇ I-(Inverse trigonometrical functions) ਪ੍ਰਤੀਲੋਮ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ($\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ ਆਦਿ) ਦੇ ਲਈ ਹੈ।

L-(Logarithmic functions) ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ($\log x$, $\log (x^2 \pm a^2)$ ਆਦਿ) ਦੇ ਲਈ ਹੈ।

A-(Algebraic functions) ਬੀਜਕ ਫਲਨਾਂ ($x, x + 1, 2x, \sqrt{x}$ ਆਦਿ) ਦੇ ਲਈ ਹੈ।

T-(Trigonometrical functions) ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$) ਦੇ ਲਈ ਹੈ।

E-(Exponential functions) ਚਰਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ($a^x, e^x, 2^x, 10^x, 3^{-x}$ ਆਦਿ) ਦੇ ਲਈ ਹੈ।

ਉਂਝ ਤਾਂ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਦੀ ਕੋਈ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵਿਧੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਫਿਰ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਉਪਰੋਕਤ ਟਿੱਪਣੀ ਵਿੱਚ ਵਰਣਤ 'ILATE' ਦੁਆਰਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਕੇ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\int \log_e x\, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ ਇੱਥੇ ਇਕਾਈ ਦੂਜੀ ਫਲਨ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ $\log_e x$ ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਨਹੀਂ ਪਤਾ ਲੱਗ ਸਕਦਾ।

$$\int \log_e x\, dx = \int \log_e x \,.\, 1\, dx$$

$$= \log_e x \,.\, \int 1\, dx - \int \left[\frac{1}{x} \int 1\, dx\right] \text{ (ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ)}$$

$$= \log_e x\; x - \int \frac{1}{x} x\, dx = x \log_e x - \int 1\, dx$$

$$= x \log_e x - x + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਚਾਹੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $x \log_e x - x$ ਨੂੰ $x \log \frac{x}{e}$ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ $\log_e e = 1$.

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\int x \sin x\, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਨੁਕਲਕ ਦੇ ਦੋ ਗੁਣਲਖੰਡ ਹਨ, x ਅਤੇ $\sin x$ ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਅਨੁਕਲਕ ਪਤਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਫਲਨ x, x^n ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\int x \sin x\, dx = x\left[\int \sin x\, dx\right] - \int \left[\left(\frac{d}{dx} x\right) \int \sin x\, dx\right] dx$$

$$= x(-\cos x) - \int 1.(-\cos x)\, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int x^2 \log x \, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int x^2 \log x \, dx = \int (\log x) \; x^2 \, dx$

$$= \log x \, . \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) + c$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int x^n \log x$ **ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int x^n \log x \, dx = \int \log x \; x^n \, dx$

[log x, ਜਿਸਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨ ਲਿਓ।]

$$= \log x \, . \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \text{ (ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ)}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\log x - \frac{1}{n+1} \right] + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\int x^2 \cos x \, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ x^2 ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਹੈ।

$\therefore \quad \int x^2 . \cos x \, dx = x^2 . \sin x - \int 2x . \sin x \, dx.$

ਦੂਜੇ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿੱਚ x ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨ ਲਿਓ ਫਿਰ ਖੰਡਾਂ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ।

$\therefore \quad \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2[x \, (-\cos x) - \int 1 . (-\cos x) \, dx]$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

$$= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 6. $\int e^x \sin x \, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ e^x ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਹੈ।

$\therefore \quad \int e^x \sin x \, dx = e^x \, (-\cos x) - \int e^x \, (-\cos x) \, dx$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

ਨੋਟ ਦੁਬਾਰਾ ਖੰਡਾਂ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕਲਨ ਨਾਲ,

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + [e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx]$$

ਆਖੀਰਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਲੈ ਜਾਓ। ਫਿਰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 7. $\int \frac{1}{x^2} \log x\, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :

$$\int \frac{1}{x^2} \log x\, dx = \int \log x \,.\, \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \log x \left(\frac{-1}{x}\right) - \int \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{-\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{-\log x}{x} - \frac{1}{x} + c = \frac{-(1+\log x)}{x} + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਫਲਨ $x^2 a^x$ ਦਾ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $I = \int x^2 a^x\, dx$

ਇੱਥੇ ਅਨੁਲਕਲਕ ਦੋ ਫਲਨਾਂ x^2 ਅਤੇ a^x ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ x^2 ਇੱਕ ਬੀਜਕ ਫਲਲ ਹੈ ਅਤੇ a^x ਚਰਘਾਤੰਕੀ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ILATE ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ A ਅੱਖਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x^2 ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ a^x ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈ ਕੇ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨਗੇ।

$$I = x \int a^x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x).\int a^x\, dx\right\} dx$$

$$= x\left(\frac{a^x}{\log a}\right) - \int 1.\left(\frac{a^x}{\log a}\right) dx$$

$$= x\,\frac{a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int a^x\, dx$$

$$\therefore \qquad I = x.\frac{a^x}{\log a} - \frac{a^x}{(\log a)^2} + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 9. $\int \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, dx$

$$= \int \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}.1\, dx$$

$$= \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, x - \int \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})}.\left\{1 + \frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2 + a^2}}\right\} x\, dx$$

$$= \log\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}\, x - \int \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})}\left\{\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right\} x\, dx$$

ਨੋਟ

$$= \log\{x+\sqrt{x^2+a^2}\}\,x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \log\{x+\sqrt{x^2+a^2}\}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \log\{x+\sqrt{x^2+a^2}\}\,x - \frac{1}{2}\{2\sqrt{x^2+a^2}\}+c$$

$$= \log\{x+\sqrt{x^2+a^2}\}\,x - \sqrt{x^2+a^2}+c$$

$$= x\log\{x+\sqrt{x^2+a^2}\} - \sqrt{x^2+a^2}+c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 10. $\int \tan^{-1} x\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ।**

ਹੱਲ : $\int \tan^{-1} x\,dx = \int (\tan^{-1} x).1\,dx$

$$= (\tan^{-1}x)\,x - \int \frac{1}{1+x^2}.x\,dx$$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t},$$

($1+x^2 = t$ ਅਤੇ $2x\,dx = dt$ ਰੱਖਣ ਤੇ)

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log|t|+c$$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log|1+x^2|+c.$$ (t ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ) **ਉੱਤਰ**

ਟਾਸਕ $\int x^2 \cos x\,dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x + c$)

ਉਦਾਹਰਣ 11. $\int x\tan^{-1} x\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int x\tan^{-1} x\,dx = \int (\tan^{-1} x).x\,dx$

$$= (\tan^{-1}x).\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x - \tan^{-1}x) + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 12. $\int \frac{x}{1+\cos x}dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :

$$\int \frac{x}{1+\cos x}dx = \int \frac{x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$$

$$= \int \frac{x - x\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int \frac{x}{\sin^2 x}dx - \int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int x\,\mathrm{cosec}^2\,x\,dx - \int x\cot x\,\mathrm{cosec}\,x\,dx$$

$$= x(-\cot x) - \int 1.(-\cot x)\,dx$$

$$-[x(-\mathrm{cosec}\,x) - \int 1.(-\mathrm{cosec}\,x)\,dx] + c)$$

$$= -x\cot x + \log|\sin x| + x\,\mathrm{cosec}x - \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 13. $\int \cos^{-1}\frac{1}{x}dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ

$$I = \int \cos^{-1}\frac{1}{x}dx, \qquad \left[\because \cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}x\right]$$

$$= \int \sec^{-1}x\,dx$$

$$= \int (\sec^{-1}x).1\,dx$$

$\sec^{-1}x$ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ 1 ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਲੈ ਕੇ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$= \sec^{-1}x\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x).\int dx\right\}dx$$

$$= x\sec^{-1}x - \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.x\,dx$$

$$= x\sec^{-1}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$= x\sec^{-1}x - \log|x + \sqrt{x^2-1}| + c.$$

ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.1

ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਪਮਾ ਕਰੋ–

1. (*a*) $\int x \log x \, dx$ (*b*) $\int (\log x)^2 \, dx$

(*c*) $\int x^3 \log x \, dx$ (*d*) $\int \log (1 + x^2) \, dx$

(*e*) $\int \sec x \log (\sec x + \tan x) \, dx$

2. (*a*) $\int x e^{ax} \, dx$ (*b*) $\int \frac{e^{1/x}}{x^3} \, dx$

3. (*a*) $\int x \operatorname{cosec}^2 ax \, dx$ (*b*) $\int x \sec^2 x \, dx$

(*c*) $\int x \sec^2 2x \, dx$ (*d*) $\int x^2 \sin x \, dx$

(*e*) $\int \sec^3 x \, dx$ (*f*) $\int x^2 \sin 2x \, dx$

4. (*a*) $\int x \sin nx \, dx$ (*b*) $\int \sin^2 x \, dx$

(*c*) $\int x \tan^2 x \, dx$ (*d*) $\int \sin \sqrt{x} \, dx$

5. (*a*) $\int \sin^{-1} x \, dx$ (*b*) $\int \cot^{-1} x \, dx$

6. (*a*) $\int x^3 \tan^{-1} x \, dx$ (*b*) $\int \frac{\log x}{(1 + x)^2} \, dx$

7. $\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} \, dx$ **8.** $\int \sqrt{x} \, (\log x)^2 \, dx$

9. (*a*) $\int x \log (1 + x) \, dx$ (*b*) $\int \log_{10} x \, dx$

10. $\int \cot^{-1} (1 + x^2 - x) \, dx$ **11.** $\int x^3 e^{x^2} dx$

12. $\int \sin x \log (\sec x + \tan x) \, dx$.

ਉੱਤਰ

1. (*a*) $\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{x^2}{4} + c$ (*b*) $x (\log (x))^2 - 2x \log x + 2x + c$

(*c*) $\frac{1}{4} x^4 \log x - \frac{x^2}{16} + c$ (*d*) $x \log (1 + x^2) - 2 (x - \tan^{-1} x) + c$

2. (*a*) $\frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + c$ (*b*) $e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) + c$

ਨੋਟ

3. (a) $\frac{1}{a^2}[\log \sin ax - ax \cot x] + c$ (b) $x \tan x + \log|\cos x| + c$

(c) $\frac{1}{2} x \tan 2x - \frac{1}{4} \log|\sec 2x| + c$ (d) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$

(e) $\frac{1}{2} \sec x \,.\, \tan x + \frac{1}{4} \log|\sec x + \tan x| + c$

(f) $-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$

4. (a) $\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx + c$ (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + c$

(c) $x \tan x + \log \cos x - \frac{x^2}{2} + c$ (d) $2[-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}] + c$

5. (a) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + c$ (b) $x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \log|1 + x^2| + c$

6. (a) $\frac{1}{4} x^4 \tan^{-1} x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x\right) + c$ (b) $\frac{-\log x}{1+x} + \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + c$

7. $\frac{-x}{\cos x\,(x \sin x + \cos x)} + \tan x + c$ **8.** $\frac{2}{3} x^{3/2}[(\log x)^2 - \frac{4}{3} \log x + \frac{8}{9}] + c$

9. (a) $\frac{x^2 - 1}{2} \log(1 + x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + c$ (b) $x(\log_e x - 1) \log_{10} e + c$

10. $2[x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)] + c$ 11. $\frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1) + c$

12. $x - \cos x \log(\sec x + \tan x) + c$

14.2 ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕਲਨ (Integration by Partial Fractions)

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁੱਝ ਕੁ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਯੋਜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਦੇ ਯੋਗ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਵਿਧੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਯੋਗ ਜਾਂ ਅੰਤਰਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰਕੇ (ਤੋੜ ਕੇ) ਉਪਰੋਕਤ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਜਰੂਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਭੰਗ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਆਪ ਆਪਣੀ ਬੀਜਗਣਿਤ ਦੀ ਪੁਸਤਤਕ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

ਬੀਜਗਣਿਤ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਇੱਕਘਾਤ ਅਤੇ ਦੋਘਾਤ ਗੁਣਲਖੰਡ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ–ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੁੱਝ ਗੁਣਲਖੰਡ ਕਈ ਵਾਰ ਆਉਣ। ਫਲਸਰੂਪ ਪਰਿਮੇਯ ਭਿੰਨ ਦੇ ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹੋਣਗੇ–

(i) ਹਰ ਦੇ ਨਾ–ਦੁਹਰਾਉਣਯੋਗ (non-repeated) ਇੱਕ ਘਾਤ ਗੁਣਲਖੰਡ $x - a$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨ $\frac{A}{x-a}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $A \neq a$.

(ii) ਹਰੇਕ ਬਾਰਮਬਾਰ (repeated) ਗੁਣਲਖੰਡ $(x - b)$ ਦੇ ਸੰਗਤ r ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

$$\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+..........+\frac{B_r}{(x-b)^r}$$

ਇੱਥੇ $B \neq 0.$

(iii) $x^2 + px + q$ ਦੇ ਖੰਡ ਜਿਹੜੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਾਰ ਨਾ ਆਉਣ ਸੰਗਤ ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨ $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇੱਥੇ C ਅਤੇ D ਦੋਨੋਂ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੇ।

(iv) $x^2 + px + q$ ਦੇ ਖੰਡ ਜਿਹੜੇ r ਵਾਰ ਆਏ ਹੋਣ ਜਾਂ ਜੇਕਰ ਖੰਡ $(x^2 + px + q)^r$ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨ $\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+.........+\frac{C_rx+D_r}{(x^2+px+q)^r}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਫਲਨ ਅਜਿਹੇ ਹੋਣ ਕਿ ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਹੀ .... ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜੇਕਰ x^n ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਕੋਈ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨਦੇ ਹਨ।
2. ਜਰੂਰਤ ਅਨੁਸਾਰ .... ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
3. ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਦੀ ਕੋਈ .... ਵਿਧੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਯੋਗ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਦੇ ਯੋਗ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ .... ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦ ਇੱਕ ਘਾਤ ਅਤੇ .... ਗੁਣਲਖੰਡ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

14.3 ਦੋ ਮਾਨਕ ਅਨੁਕਲਨ (Two Standard Integral)

1. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ** $x > a$.

ਹੱਲ : $\because$ $$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x+a)(x-a)}$$

ਮੰਨ ਲਿਓ $$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x-a}=\frac{A(x-a)+B(x+a)}{(x+a)(x-a)}$$

$\therefore$ $A\,(x-a) + B\,(x+a) = 1$

$\Rightarrow$ $(A + B)\,x + (B - A)\,a = 1$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ

$A + B = 0$ ਅਤੇ $(B - A)a = 1$

$\therefore$ $$B=\frac{1}{2a} \text{ ਅਤੇ } A=-\frac{1}{2a}$$

$\therefore$ $$\frac{1}{x^2-a^2}=-\frac{1}{2a\,(x+a)}+\frac{1}{2a\,(x-a)}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right\}$$

$\therefore$ $$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x-a}dx-\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x+a}dx$$

ਨੋਟ

$$= \frac{1}{2a}\log|x-a| - \frac{1}{2a}\log|x+a| + c$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, \text{ ਜਦੋਂ } x > a}$$

2. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ $x > a$.

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{dx}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a}\int \left\{\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2a}[\log|a+x| - \log|a-x|] + c = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$$\therefore \quad \boxed{\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c}$$

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :
$$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{x^2-(b/a)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2(b/a)}\log\left|\frac{x-(b/a)}{x+(b/a)}\right| + c = \frac{1}{2ab}\log\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\int \frac{dx}{24-6x^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :
$$\int \frac{1}{24-6x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{4-x^2}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{2^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{2.2}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c = \frac{1}{24}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int \frac{1}{5-2x-x^2}dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਦੱਸੋ।

ਹੱਲ :
$$\int \frac{dx}{5-2x-x^2} = \int \frac{dx}{5+1-1-2x-x^2} = \int \frac{dx}{6-(1+2x+x^2)}$$

$$= \int \frac{dx}{6-(x+1)^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{6})^2-(x+1)^2}$$

$\because$ ਸੂਤਰ ਨਾਲ, $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

$\therefore \quad \int \frac{dx}{5-2x-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \log\left|\frac{\sqrt{6}+(x+1)}{\sqrt{6}-(x+1)}\right| + c.$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int \frac{3x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx'$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\frac{3x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)} - 6.\frac{1}{(x-2)} + \frac{9}{2}.\frac{1}{(x-3)}$ ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਖੰਡਤ ਕਰਨ

ਤੇ $\int \frac{3x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

$$= \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1} - 6\int\frac{dx}{x-2} + \frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{3}{2}\log|(x-1)| - 6\log|(x-2)| + \frac{9}{2}1\log|(x-3)| + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\because \frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{(x+1)(2x-1)}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੰਨ ਲਿਓ

$$\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1)+B(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

$\therefore \quad A(2x-1) + B(x+1) = 1$

ਜਾਂ $\quad (2A+B)x + (B-A) = 1$

ਦੋਹਾਂ ਪੱਖਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ

$$2A + B = 0 \text{ ਅਤੇ } B - A = 1 \therefore A = -\frac{1}{3} \text{ ਅਤੇ } B = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

$$\therefore \quad \int\frac{1}{2x^2+x-1}dx = \frac{2}{3}\int\frac{1}{2x-1}dx - \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\log|(2x-1)| - \frac{1}{3}\log|(x+1)| + C$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| + C.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 6. $\int \frac{dx}{x-x^3}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x(1-x)(1+x)}$

ਨੋਟ

ਮੰਨ ਲਿਓ $$\frac{1}{x(1-x)(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$$

$$1 = A(1-x^2) + Bx(1+x) + Cx(2-x) \qquad ....(1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $x = 0, 1$ ਅਤੇ -1 ਰੱਖਣ ਤੇ

$$A = 1, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x-x^3} = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}\right] dx$$

$$= \log|x| - \frac{1}{2}\log|1-x| - \frac{1}{2}\log|1+x| + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 7. $\int \frac{dx}{4-x^2}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $$\int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{(2)^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2.2}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c, \qquad \left[\because \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ $\int \frac{1}{(x+b)(x^2+a^2)} dx$ **.**

ਹੱਲ : ਅਨੁਕਲਕ ਨੂੰ ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ ਤੇ

$$\frac{1}{(x+b)(x^2+a^2)} = \frac{A}{x+b} + \frac{Bx+C}{x^2+a^2}$$

ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $$\frac{1}{(x+b)(x^2+a^2)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{x+b} + \frac{b-x}{(a^2+b^2)(x^2+a^2)}\right)$$

$$I = \int \frac{1}{(x+b)(x^2+a^2)} dx$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{dx}{x+a} + \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{b-x}{x^2+a^2} dx$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\log|x+b| + \frac{b}{a^2+b^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2(a^2+b^2)}\int \frac{2x}{x^2+a^2} dx$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[\log|x+b| + \frac{b}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\log|x^2+a^2|\right] + c$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[\log\left|\frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}\right| + \frac{b}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right] + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 9: $\int \frac{dx}{1+x^3}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2};$$

ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{2-x}{3(1-x+x^2)}$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{3}\int\frac{(2-x)\,dx}{1-x+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{(4-2x)\,dx}{1-x+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{6}\int\frac{3-(2x-1)}{1-x+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x+x^2} - \frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{1-x+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}} - \frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{1-x+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(\sqrt{3}/2)^2} - \frac{1}{6}\log|1+x+x^2|+c$$

$$= \frac{1}{6}\log|1+x| + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} - \frac{1}{6}\log|1-x+x^2|+c$$

$$= \frac{1}{6}\log\left|\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 10. $\int \frac{2x-3}{x^2+3x-18}dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ: $$\frac{2x-3}{x^2+3x-18} = \frac{2x-3}{(x-3)(x+6)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+6}$$

ਜਾਂ $2x-3 = A(x+6)+B(x-3)$

ਜਦੋਂ $x-3=0$ ਜਾਂ $x=3$

$3 = 9A$ ਜਾਂ $A = \frac{1}{3}$

ਜਦੋਂ $x+6=0$ ਜਾਂ $x=-6$

$-15 = B(-9)$ ਜਾਂ $B = \frac{5}{3}$

ਉਦੋਂ $$\int\frac{2x-3}{x^2+3x-18}dx = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x+6}$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-3| + \frac{5}{3}\log|x+6|+c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 11. $\int \frac{dx}{e^x - 1}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $$\int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{e^x\, dx}{e^x (e^x - 1)} = \int \frac{dt}{t(t-1)}$$ (ਜਦੋਂ ਕਿ $e^x = t, e^x\, dx = dt$)

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = \log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c$$

$$= \log\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + c = \log|1 - e^{-x}| + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 12. $\int \frac{x}{(x-2)(x-1)^2} dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਅ $$\frac{x}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x = A(x-1)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-2)$$

ਸਮਾਨ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ

$\therefore$ $$A + B = 0, -2A - 3B + C = 1, A + 2B - 2C = 0$$
$$A = 2, B = -2, C = -1.$$

$\therefore$ $$\int \frac{x\, dx}{(x-2)(x-1)^2} = 2\int \frac{dx}{x-2} - 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 2\log|x-2| - 2\log|x-1| - \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= 2\{\log|x-2| - \log|x-1|\} + \frac{1}{x-1} + c$$

$$= 2\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + \frac{1}{x-1} + c.$$ **ਉੱਤਰ**

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.2

ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਨਿਮਨ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. (*a*) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$ (*b*) $\int \frac{x^2\, dx}{x^2 - 4^2}$

(*c*) $\int \frac{dx}{x^2 - 5}$ (*d*) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 - 4}$

(*e*) $\int \frac{x^2}{x^6 - a^6} dx$

2. (*a*) $\int \frac{3x\, dx}{(x-2)(x+1)}$ (*b*) $\int \frac{(x+5)}{(x-1)(x-4)} dx$

(*c*) $\int \frac{(2x+3)\, dx}{(x+2)(x-2)}$ (*d*) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-4)}$

ਉਤਰ

ਨੋਟ

1. (a) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$ (b) $x+2\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+c$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{5}}\log\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+c$ (d) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+c$

(e) $\frac{1}{6a^3}\log\left|\frac{x^3-a^3}{x^3+a^3}\right|+c$

2. (a) $\log 1\,|(x-2)^2\,(x+1)|+c$ (b) $-2\log|x-1|+3\log|x-4|+c$

(c) $\frac{1}{4}\log|x+2|+\frac{7}{4}\log|x-2|+c$

(d) $-\frac{1}{3}\log|x-1|+\frac{1}{4}\log|x-2|+\frac{1}{12}\log|x+2|$

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

2. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)–

6. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ $x<a$:

(a) $\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$ (b) $\frac{1}{a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

(c) $\frac{1}{2a}\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$ (d) $\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a-x}{a+x}\right|+c$

7. $\int\frac{dx}{4-x^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?

(a) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{2-x}{2+x}\right|+c$ (b) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$

(c) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{4-x}{4+x}\right|+c$ (d) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+c$

8. $\int\frac{dx}{x^2-4}$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?

(a) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+c$ (b) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

(c) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$ (d) ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

ਨੋਟ

14.4 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਜੇਕਰ ਫਲਨ $f(x)$ ਅਤੇ $\phi(x)$ ਦਾ ਗੁਣਨ $f(x).\ \phi(x)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਨਿਖੇੜਨ

  $$\frac{d}{dx}\{f(x).\phi(x)\} = \qquad f(x)\,\phi'(x) + f'(x)\,\phi(x)$$

- ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੀ ਚੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਦੇ ਦੂਜੇ ਪਦਾ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਸਰਲਤਾਪੂਰਣ ਢੰਗ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੀ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਸਾਵਧਾਨੀ ਬਰਤਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਅਜਿਹਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (integral) ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਫਲਨ ਅਜਿਹੇ ਹੋਣ ਕਿ ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਹੀ ਅਨੁਕਲਨ (integral) ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜੇਕਰ x^n ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਕੋਈ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਮੰਨੋ।
- ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਦੀ ਕੋਈ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵਿਧੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਉਪਰੋਕਤ ਟਿੱਪਣੀ ਵਿੱਚ ਵਰਣਤ 'ILATE' ਦੁਆਰਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਕੇ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।
- ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਵਿਧੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਯੋਗ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰਕੇ (ਤੋੜ ਕੇ) ਉਪਰੋਕਤ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਜਰੂਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

14.5 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਯੋਗ (Summation) – ਜੋੜ।
- ਅਨੁਕਲਨ (Integral) – ਸੰਪੂਰਣ।

14.6 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. $\int x \sin x\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $-x\cos x + \sin x + c$)
2. $\int x^2 \cos x\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਰਿਕਲਿਤ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $(x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + c$)
3. $\int x \tan^{-1} x\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1} x - \frac{x}{2} + c$)
4. $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 1}$ ਦਾ ਮਾਨ ਦੱਸੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| + c$)
5. $\int \frac{dx}{x - x^3}$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\log|x| - \frac{1}{2}\log|1-x| - \frac{1}{2}\log|1+x| + c$)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਅਨੁਕਲਨ	2. ਵੰਡਿਆ	3. ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ	4. ਬਰਾਬਰ
5. ਦੋ-ਘਾਤ	6. (*a*)	7. (*b*)	8. (*c*).

ਨੋਟ

14.7 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
5. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।

ਇਕਾਈ–15: ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ (Definite Integration)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਅਰਥ, ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਤੇ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਜਾਣਨਗੇ।
- ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਨੂੰ ਸਮਝ ਸਕਣਗੇ।
- ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਸਧਾਰਣ ਗੁਣ ਨੂੰ ਜਾਣ ਸਕਣਗੇ।
- ਅਨੰਤ ਸੀਮਾ ਵਾਲੇ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲੇਗੀ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਮੰਨ ਲਿਓ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (integral), $F(x)$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ x ਦੇ ਦੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਮਾਨਾਂ (values), ਮੰਨ ਲਿਓ, a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ $F(x)$ ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ $F(b) - F(a)$ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦਾ **ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ** (Definite Integral) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਅੱਗੇ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਾਂਗੇ–

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਅਰਥ–ਜਦੋਂ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ, ਕਿਸੇ ਦੋ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ (definite integral) **ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।**

ਜੇਕਰ $\int f(x)\,dx = F(x)$

ਤਾਂ $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ (definite integral) ਦਾ ਮਾਨ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂ ਜੋ, ਨੋਟ

ਜੇਕਰ $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, ਤਾਂ

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+c]_a^b = \{F(b) + c\} - \{F(a) + c\}$$

$$= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a).$$

ਨੋਟਸ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਤੇ **ਅਨੁਕਲਨ ਅਚਰ** ਦਾ ਕੋਈ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ।

15.1 ਅਨੁਕਲਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations of Integration)

ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ, ਜਿਹੜੀ ਅਨੁਕਲਨ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਨਿੱਚੇ ਲਿਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਨਿਮਨ ਸੀਮਾ (lower limit) ਅਤੇ ਸੰਖਿਆ b ਨੂੰ, ਜਿਹੜੀ ਅਨੁਕਲਨ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਉੱਪਰ ਲਿਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਉੱਚ ਸੀਮਾ (upper limit) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

15.2 ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ (Method of Finding Definite Integration)

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (Integral) ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਉਸਨੂੰ ਵੱਡੇ ਕੋਸ਼ਠ (bracket) ਵਿੱਚ ਰੱਖੋ ਅਤੇ ਕੋਸ਼ਠ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਲਿਖੋ। ਹੁਣ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿੱਚ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਉੱਚ ਸੀਮਾ ਰੱਖ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲ ਵਿੱਚੋਂ, ਉਸੀ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਸੀਮਾ ਰੱਖ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲ ਨੂੰ ਘਟਾ ਦਿਓ। ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਭੀਸ਼ਟ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਹੋ ਜਾਏਗਾ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\int_a^b \frac{\log x}{x}\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ।**

ਹੱਲ : $\int_a^b \frac{\log x}{x}\,dx$ ਮੰਨ ਲਿਓ $\log x = t$

$$\frac{1}{x}\,dx = dt$$

$$= \int t\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\left[(\log x)^2\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}[(\log b)^2 - (\log a)^2]$$

$$= \frac{1}{2}\;[\log b + \log a]\;[\log b - \log a]$$

$$= \frac{1}{2}\;\log ab \times \log\frac{b}{a}.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\int_0^{\text{À}/4} \tan x \sec x \, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec x \; dx = \quad [\sec x]_0^{\pi/4} = \left[\sec \frac{\pi}{4} - \sec 0\right]$

$$= \sqrt{2} - 1.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int_1^3 \frac{dx}{x} = [\log x]_1^3 = \log 3 - \log 1 = \log 3.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int_0^{\text{À}/2} \cos^2 x \, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \; dx = \int_0^{\pi/2} \left\{\frac{1+\cos 2x}{2}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} - 0 - \frac{\sin 2 \times 0}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\int_0^{\text{À}/4} \tan^2 x \, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1) \; dx$$

$$= [\tan x - x]_0^{\pi/4} = \left[\tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\tan 0 - 0)\right]$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 6. $\int_0^a y^2 \, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ, $x^2 + y^2 = a^2$.

ਹੱਲ : $\because$ $$x^2 + y^2 = a^2 \quad \therefore \quad y^2 = a^2 - x^2$$

$\therefore$ $$\int_0^a y^2 \; dx = \int_0^a (a^2 - x^2) \; dx$$

$$= \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} - 0 = \frac{2}{3} a^3.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 7. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{0}{a}\right)$$

$$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 8. $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਵੰਡੇ ਹੋਏ ਅਨੁਕਲਨ ਦੁਆਰਾ

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0\right] - [-\cos x]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right] = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 9. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} \, dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0^\circ - \cos 0^\circ)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 - 1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = (\sqrt{2} + 1).$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 10. $\int_1^2 x \log x \, dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਵੰਡੇ ਹੋਏ ਅਨੁਕਲਨ ਦੁਆਰਾ

$$\int_1^2 x \log x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \log x\right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \log x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= 2 \log 2 - \frac{1}{4} \left[x^2\right]_1^2$$

$$= 2 \log 2 - \frac{1}{4} [4 - 1]$$

$$= 2 \log 2 - \frac{3}{4}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 11. $\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\int_0^{\pi/4} \tan x \; dx = [\log \sec x]_0^{\pi/4}$

$$= \log \sec \frac{\pi}{4} \; \log \sec 0$$

$$= \log \sqrt{2} - \log 1, \qquad [\because \; \log 1 = 0]$$

$$= \log \sqrt{2}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 12. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin 2x} \; dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} \; dx$

$$= \int_0^{\pi/6} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} \; dx$$

$$= \int_0^{\pi/6} (\cos x - \sin x)\, dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/6}$$

$$= \left[\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}\right] - [\sin 0 + \cos 0]$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0+1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}-2}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$ **ਉੱਤਰ**

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.1

ਨਿਮਨ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. $\int_1^2 x^4 \; dx.$
2. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$
3. $\int_0^3 e^{x/3} \; dx.$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos x \; dx.$
5. $\int_1^2 \frac{dx}{x}.$
6. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \; dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \sin x \; dx.$
8. $\int_0^{\pi} \sin 3x \; dx.$
9. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \; dx.$
10. $\int_4^9 \sqrt{x} \; dx.$
11. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$
12. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx.$
13. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2 x \; dx.$

ਉੱਤਰ

1. $\frac{31}{5}$
2. 2
3. $3\,(e-1)$
4. 1
5. $\log 2$
6. 1

ਨੋਟ

7. 1 8. $\frac{2}{3}$ 9. $\frac{1}{2}$

10. $\frac{38}{3}$ 11. $\frac{\pi}{4}$ 12. $\frac{\pi}{2}$

13. -2

15.3 ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ (Substitution in Definite Integration)

ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨਕੁਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਦੀ–ਕਦੀ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਚਰ ਨੂੰ ਬਦਲਨਾ ਜਰੂਰੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਰਿਆ–ਵਿਧੀ ਸਰਲ ਬਣੀ ਰਹੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੇ ਨਾਲ–ਨਾਲ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋ, ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ ਅਸੀਂ $\psi(x) = t$ ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ

$$\int f[\psi(x)\psi'(x)]\,dx = \int(t)\,dt.$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਚਰ x ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕਲਨ ਸੀਮਾਵਾਂ a ਅਤੇ b ਤੱਕ ਹੋਣ, ਤਾਂ t ਦੇ ਲਈ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਬੰਧ $t = \psi(x)$ ਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

$\therefore$ ਜਦੋਂ $x = a$, ਉਦੋਂ $t = \psi(a)$ ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x = b$, ਉਦੋਂ $t = \psi(b)$.

$$\therefore \int_a^b f[\phi(x)]\,\phi'(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(t)\,dt.$$

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\int_1^3 \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int_1^3 \frac{\cos(\log x)}{x}$ ਮੰਨ ਲਿਓ $\log x = t$ ਤਾਂ $(1/x)\,dx = dt$

ਜਦੋਂ $x = 1,\ t = \log(1) = 0$

ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x = 3,\ t = \log 3$

$$\therefore \quad \int_1^3 \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx = \int_0^{\log 3} \cos t\ dt = [\sin t]_0^{\log 3}$$

$$= \sin(\log 3) - \sin(0) = \sin(\log 3).$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $x = \tan\theta$; $\therefore\ dx = \sec^2\theta\,d\theta$

ਜਦੋਂ $x = 0$, ਤਾਂ $\tan\theta = 0$ ਭਾਵ $\theta = 0$

ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x = 1$, ਤਾਂ $\tan\theta = 1$ ਭਾਵ $\theta = \frac{1}{4}\pi$

ਨੋਟ

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,.\,\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\,.\,\sec^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$= [\sec\theta]_0^{\pi/4} = \sec\frac{\pi}{4} - \sec 0 = \sqrt{2} - 1.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. $\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $a^2 - x^2 = t$, ਤਾਂ $-2x\,dx = dt$ ਜਾਂ $x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt$

ਜਦੋਂ $x = 0$, $t = a^2$ ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x = a$, $t = a^2 - a^2 = 0$

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{a^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int_{a^2}^0 t^{-1/2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[2t^{1/2}\right]_{a^2}^0$$

$$= -[0-(a^2)^{1/2}] = (a^2)^{1/2} = a.$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3+4\sin x}\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਿਓ $3 + 4\sin x = t$, ਤਾਂ $4\cos x\,dx = dt$

ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x = 0$, $t = 3 + 4\sin(0) = 3 + 4(0) = 3$, $\because \sin(0) = 0$

ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x = \frac{1}{3}\pi$, $t = 3 + 4\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 3 + 4(\sqrt{3}/2) = 3 + 2\sqrt{3}$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3+4\sin x}\,dx = \frac{1}{4}\int_3^{(3+2\sqrt{3})} \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{4}[\log t]_3^{3+2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}[\log(3+2\sqrt{3}) - \log 3]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)\right].$$ ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :

$$\int x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int x\,(2\sin^2 x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x\,(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x\,dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x,$$ (ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ)

$$\therefore \qquad \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4}[\pi^2] - \frac{1}{4}[\pi \sin 2\pi] - \frac{1}{8}[\cos 2\pi] - \left[0 - 0 - \frac{1}{8}\cos 0\right]$$

$$= \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{4}[0] - \frac{1}{8}[1] + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\pi^2.$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 6. $\int_1^2 \frac{\log_e x}{x^2} dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int \frac{\log_e x}{x^2} dx = \int (\log_e x)(x^{-2}) \, dx$

$$= (\log_e x)(-x^{-1}) - \int (1/x)(-x^{-1}) \, dx,$$

ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$= -(\log_e x)(x^{-1}) + \int x^{-2} \, dx$$

$$= -\frac{\log_e x}{x} - \frac{1}{x} = -\left[\frac{\log_e x + 1}{x}\right]$$

$$\therefore \qquad \int_1^2 \frac{\log_e x}{x^2} dx = -\left[\frac{\log_e x + 1}{x}\right]_1^2$$

$$= -\left[\left(\frac{\log_e 2 + 1}{2}\right) - \left(\frac{\log_e 1 + 1}{1}\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{1}{2} - 1\right] \qquad [\because \ \log_e 1 = 0]$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\log_e 2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}[1 - \log_e 2].$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 7. $\int_0^{\lambda/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)} dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\sin x = t$ ਰੱਖ ਕੇ ਅੰਸ਼ਿਕ ਭਿੰਨ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)} = \left[\log\left(\frac{1+\sin x}{2+\sin x}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \log\left(\frac{1+\sin\frac{1}{2}\pi}{2+\sin\frac{1}{2}\pi}\right) - \log\left(\frac{1+\sin 0}{2+\sin 0}\right)$$

$$= \log\left(\frac{2}{3}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}\right) = \log\frac{4}{3}.$$

ਉੱਤਰ

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 8. $\int_0^{\text{À}/2} x \sin x \, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = \left[x(-\cos x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1.(-\cos x) \, dx$$

$$= \left[-x \cos x\right]_0^{\pi/2} + \left[\sin x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\left[x \cos x\right]_0^{\pi/2} + \left[\sin x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\left[\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\right] + \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= -0 + 1$$

$$= 1.$$

ਉੱਤਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.2

ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਨਿਮਨ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. $\int_1^3 \frac{\log x}{x} \, dx$
2. $\int_1^2 \frac{\cos(\log x)}{x} \, dx$
3. $\int_0^1 x \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) dx$
4. $\int_1^e \frac{e^x}{x}(1 + x \log x) \, dx$
5. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$
6. $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1 + x^2} \, dx$
7. $\int_0^1 \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$
8. $\int_0^\infty \frac{\sin \tan^{-1} x}{1 + x^2} \, dx$
9. $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}}$; $\beta > \alpha$
10. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$
11. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$
12. $\int_0^1 x \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} \, dx$
13. $\int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{1 + x^6}$
14. $\int_0^1 x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}} \, dx$
15. $\int_0^1 \frac{dx}{3 + 2x + x^2}$
16. $\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^4} \, dx$
17. $\int_0^2 \sqrt{\frac{2 + x}{2 - x}} \, dx.$

ਉੱਤਰ

1. $\frac{(\log 3)^2}{2}$
2. $\sin(\log 2)$
3. $\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\log\frac{3}{2}$

4. e^e	5. $\frac{1}{8}\pi^2$	6. $\frac{\pi^3}{192}$
7. 1	8. 1	9. π
10. 1	11. $\frac{\pi a^2}{4}$	12. $\frac{\pi-2}{4}$
13. $\frac{\pi}{12}$	14. $\frac{a^2(\pi-2)}{4}$	15. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$
16. $\frac{\pi}{4}$	17. $\pi+2$	

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਜਦੋਂ ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕਿਸੇ ਦੋ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ .... ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ .... ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਦੀ-ਕਦੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਚਰ ਨੂੰ ਬਦਲਨਾ .... ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਤੇ ਅਨੁਕਲਨ .... ਦਾ ਕੋਈ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।
5. ਸੰਖਿਆ a ਜਿਹੜੀ ਅਨੁਕਲਨ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਨਿੱਚੇ ਲਿਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ .... ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

15.4 ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਸਧਾਰਣ ਗੁਣ (General Properties of Definite Integrals)

ਗੁਣ 1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

ਪ੍ਰਮਾਣ (Proof): ਮੰਨ ਲਿਓ $\int f(x)\ dx = F(x)$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪੱਖ $= \int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

ਸੱਜਾ ਪੱਖ $= -\int_b^a f(x)\ dx = -[F(x)]_b^a$

$= -[F(a) - F(b)] = F(b) - F(a)$

$\therefore \int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$

ਗੁਣ 2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$

ਪ੍ਰਮਾਣ (Proof): ਖੱਬਾ ਪੱਖ $= \int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

ਸੱਜਾ ਪੱਖ $= \int_a^b f(t)\ dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

ਨੋਟ

$$\therefore \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt.$$

ਗੁਣ 3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$ **ਜਦੋਂਕਿ** $a < c < b$.

ਪ੍ਰਮਾਣ (Proof): ਮੰਨ ਲਿਓ $\int f(x)\, dx = F(x)$

ਉਦੋਂ, ਖੱਬਾ ਪੱਖ $= \int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪੱਖ $= \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

$$= [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b$$

$$[F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a)$$

ਇਸਨੂੰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਦੇਣ ਤੇ

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots.. + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx + \int_{c_n}^b f(x)\,dx$$

ਜਦੋਂ ਕਿ $a < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots..\ c_n < b.$

ਗੁਣ 4. $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$

ਪ੍ਰਮਾਣ (Proof): ਮੰਨ ਲਿਓ $a - x = t \quad \therefore \therefore \quad -dx = dt$ ਜਾਂ $dx = -dt$

ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x = 0$, ਉਦੋਂ $t = a$ ਅਤੇ ਜਦੋਂ $x = a$, ਉਦੋਂ $t = 0$

$\therefore$ ਸੱਜਾ ਪੱਖ $= \int_0^a f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(t)(-dt) = -\int_a^0 f(t)\,dt$

$= \int_0^a f(t)\,dt$ (ਗੁਣ 1 ਨਾਲ)

$= \int_0^a f(x)\,dx$ (ਗੁਣ 2 ਨਾਲ)

= ਖੱਬਾ ਪੱਖ।

ਗੁਣ 5. $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, **ਜੇਕਰ** $f(x), x$ **ਦਾ ਟਾਕ ਫਲਨ (odd function) ਹੈ।**

ਭਾਵ $f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

ਜੇਕਰ $f(x), x$ **ਦਾ ਜਿਸਤ ਫਲਨ (even function) ਹੈ ਭਾਵ** $f(-x) = f(x)$.

ਪ੍ਰਮਾਣ (Proof): $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$ ....(*i*)

$\because\ -a < 0 < a$

ਹੁਣ $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)(-dt),$ [$x = -t \Rightarrow dx = -dt$ ਰੱਖਣ ਤੇ]

$$= -\int_a^0 f(-t) - dt$$

ਨੋਟ

$$= \int_0^a f(-t)\, dt \qquad \text{(ਗੁਣ 1)}$$

$$= \int_0^a f(-x)\, dx \qquad \text{(ਗੁਣ 2)}$$

ਸਥਿਤੀ I: ਜੇਕਰ $f(x)$, x ਦਾ ਟਾਂਕ ਫਲਨ (odd function) ਹੈ।

ਉਦੋਂ $\quad f(-x) = -f(x)$ (ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਾਲ)

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_0^a f(x)\, dx$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਨਾਲ,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = 0.$$

ਸਥਿਤੀ II: ਜੇਕਰ $f(x)$, x ਦਾ ਜਿਸਤ ਫਲਨ (even function) ਹੈ।

ਉਦੋਂ $\quad f(-x) = f(x)$ (ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਾਲ)

$$\therefore \quad \int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (i) ਨਾਲ,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx$$

$$= 2\int_0^a f(x)\, dx.$$

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx.$$

$$\text{ਖੱਬਾ ਪੱਖ} = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi - \sin 0}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{....(1)}$$

$$\text{ਸੱਜਾ ਪੱਖਾ} = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{\sin\pi - \sin 0}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \qquad \text{....(2)}$$

$\therefore$ ਖੱਬਾ ਪੱਖ = ਸੱਜਾ ਪੱਖ।

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \, dx = 2\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

ਅਤੇ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x \, dx = 0.$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਫਲਨ $f(x) = x \sin x$

$\therefore \quad f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x = f(x)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਲਨ ਜਿਸਤ ਹੈ

$$\therefore \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \, dx = 2\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

ਜੇਕਰ $f(x) = x \cos x$

$\therefore \quad f(-x) = (-x) \cos(-x) = -x \cos x = -f(x)$

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਟਾਂਕ ਹੈ।

$$\therefore \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x \, dx = 0.$$

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \tan x \, dx = 0.$$

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \tan x \, dx$ ....(*i*)

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \log \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx, \text{ ਗੁਣ (4) ਨਾਲ}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin(\pi - 2x) \log \cot x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \cot x \, dx \qquad ....(ii)$$

ਸਮੀਕਰਣ (*i*) ਅਤੇ (*ii*) ਨੂੰ ਜੋੜ ਤੇ,

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\sin 2x \log \tan x + \sin 2x \log \cot x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, (\log \tan x + \log \cot x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x . \log (\tan x . \cot x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x . \log 1 \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2x . 0 \, dx = 0$$

$\therefore \quad I = 0$

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਸਿੱਧ ਕਰੋ– ਨੋਟ

$$\int_{À/8}^{3À/8} \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x} dx = \frac{À}{8}.$$

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ $I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x}$ ...(1)

$x = \frac{\pi}{2} - t$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਕਿਉਂਕਿ $a + b = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_{3\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cot^2 t}{\cot^2 t + \tan^2 t} (-dt)$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\cot^2 t}{\cot^2 t + \tan^2 t} dt$$

ਜਾਂ $I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\cot^2 t}{\cot^2 x + \tan^2 x} dx$ ...(2)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ

$$2I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} dx = [x]_{\pi/8}^{3\pi/8}$$

$$2I = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

ਜਾਂ $I = \frac{\pi}{8}.$ **ਉੱਤਰ**

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.3

ਵਿਸਥਾਰਪੂਰਣ ਉੱਤਰ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\int_0^{\pi/2} \log(\tan x)\, dx = 0$
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x}} = \frac{3}{2}.$
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}.$
4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}.$

15.5 ਅਨੰਤ ਸੀਮਾ ਵਾਲੇ ਅਨੁਕਲਨ (Integral of Infinity Limit)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਉੱਚ ਸੀਮਾ ∞ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$\int_a^\infty f(x)\, dx$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$

ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਸੀਮਾ ਕੋਈ ਪਰਿਮਿਤ (finite) ਰਾਸ਼ੀ ਹੋਵੇ।

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਨਿਮਨ ਸੀਮਾ $-\infty$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$

ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਇਏ ਹੈ ਕਿ ਸੀਮਾ ਕੋਈ ਪਰਿਮਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ।

ਨੋਟ

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] = 1.$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} x\right]_0^b$

$$= \lim_{b\to\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{2}\pi.$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 3: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ **ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ $I = \int_0^b \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।
ਮੰਨ ਲਿਓ $x = \tan\theta \quad \therefore \quad dx = \sec^2\theta\, d\theta$
ਹੁਣ θ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ $0, \tan^{-1} b$ ਹਨ।

$$I = \int_0^{\tan^{-1}b} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta} = \int_0^{\tan^{-1}b} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\tan^{-1}b} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\tan^{-1}b} = \frac{\tan^{-1} b}{2} + \frac{2b}{4(1+b^2)}.$$

$\therefore$ ਅਭੀਸ਼ਟ ਅਨੁਕਲਨ $= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\tan^{-1} b}{2} + \frac{\frac{1}{2b}}{1+\frac{1}{b^2}}\right] = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.$ **ਉੱਤਰ**

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.4

ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਨਿਮਨ ਅਨੁਕਲਨਾਂ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}.$
2. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}.$
3. $\int_0^{\infty} e^{-x/2}\, dx.$
4. $\int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx.$
5. $\int_0^{\infty} \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}.$
6. $\int_1^{\infty} \frac{(x^2+3)\, dx}{x^6(x^2+1)}.$

ਉੱਤਰ

1. $\frac{\pi}{2a}$
2. $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{a^2}\right)$
3. 2
4. 1
5. $\frac{\pi}{4}$
6. $\frac{1}{30}(58-15\pi)$

ਨੋਟ

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

2. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)-

6. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ-

(a) $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ (b) $\lim_{b\to\infty}\int_b^a f(x)\,dx$

(c) $\lim_{b\to 0}\int_a^b f(x)\,dx$ (d) $\lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

7. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਨਿਮਨ ਸੀਮਾ $-\infty$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ-

(a) $\lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ (b) $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

(c) $\lim_{a\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx$ (d) $\lim_{a\to 0}\int_a^b f(x)\,dx$

8. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ-

(a) 0 (b) ∞

(c) 1 (d) -1

15.6 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਜੇਕਰ ਸੁਤੰਤਰ ਚਰ x ਦੇ ਦੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਮਾਨਾਂ (values), ਮੰਨ ਲਿਓ, a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ $f(x)$ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ $F(x)$ ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ $F(b) - F(a)$, ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦਾ **ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ** (Definite Integral) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ (definite integral) ਦਾ ਮਾਨ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ (integral) ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਉਸਨੂੰ ਵੱਡੇ ਕੋਸ਼ਠ (bracket) ਵਿੱਚ ਰੱਖੋ ਅਤੇ ਕੋਸ਼ਠ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਲਿਖੋ। ਹੁਣ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿੱਚ ਚਰ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਉੱਚ ਸੀਮਾ ਰੱਖ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲ ਵਿੱਚੋਂ, ਉਸੀ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਸੀਮਾ ਰੱਖ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲ ਨੂੰ ਘਟਾ ਦਿਓ। ਹੱਲ ਕਰਨ ਅਭੀਸ਼ਟ ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।
- ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਦੀ-ਕਦੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਚਰ ਨੂੰ ਬਦਲਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਰਿਆ-ਵਿਧੀ ਸਰਲ ਬਣੀ ਰਹੇ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

15.7 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਫਲਨ (Function) – ਕਾਰਜ।
- ਨਿਮਨ ਸੀਮਾ (Lower limit) – ਨਿਊਨਤਮ ਸੀਮਾ।
- ਉੱਚ ਸੀਮਾ (Upper limit) – ਉੱਚਤਰ ਸੀਮਾ।

15.8 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $1-\frac{\pi}{4}$)

ਨੋਟ

2. $\int_0^a y^2\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ, ਜਿੱਥੇ $x^2 + y^2 = a^2$ (**ਉੱਤਰ :** $\frac{2}{3}a^2$)

3. $\int_0^\pi x \sin^2 x\, dx$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਰਿਕਲਿਤ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\frac{1}{4}\pi^2$)

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$

5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \tan x\, dx = 0$

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ	2. ਵਿਲੱਖਣ	3. ਜਰੂਰੀ	4. ਅਚਰ
5. ਨਿਮਨ ਸੀਮਾ	6. (*a*)	7. (*b*)	8. (*c*).

15.9 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
5. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਇਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*

ਇਕਾਈ–16: ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਆਰਥਿਕ ਪ੍ਰਯੋਗ (Economic Applications of Integration)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

ਸਮਤਲੀ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਖੇਤਰਫਲ ਕੱਢਣ ਵਿੱਚ।

ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕਲਨ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਸੰਬੰਧੀ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਅੱਜ–ਕੱਲ੍ਹ ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਿਆ ਹੈ। ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਇੱਕ ਯੋਗ ਸੀਮਾ ਹੈ। ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਤੱਥਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ–

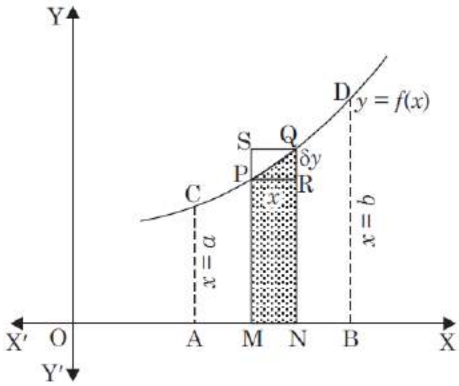
1. ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ, ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਕਿਉਂ ਜੋ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ $=\frac{d(c)}{dq}$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ $\frac{d(c)}{dq}.dq$
2. ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ : ਉਪਭੋਕਤਾ ਨੂੰ ਵੀ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

16.1 ਸਮਤਲੀ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਖੇਤਰਫਲ (Area Under Plane Curves)

ਮੰਨ ਲਿਓ $CPQD$ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $f(x)$, ਪ੍ਰਾਂਤ $[a, b]$ ਵਿੱਚ x ਦਾ ਕੋਈ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ ਜਿਵੇਂ x ਦਾ ਮਾਨ a ਤੋਂ b ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ y ਵੀ ਵੱਧਦਾ ਹੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ CA ਅਤੇ DB ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਉੱਤੇ ਕੋਟੀਆਂ ਹਨ।

ਵਕਰ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਲਿਓ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ PM ਉਸਦੀ ਕੋਟੀ ਹੈ। ਵਕਰ ਉੱਤੇ P ਦੇ ਨੇੜੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ ਲਿਓ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ QN ਇਸਦੀ ਕੋਟੀ ਹੈ।

QN ਅਤੇ MP ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ PR, QS ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਤਾਂ



$OM = x, ON = x + \delta x;$

$\therefore \quad MN = \delta x$

ਅਤੇ $PM = y,$

$QN = y + \delta y; \quad \therefore \quad QR = \delta y.$

ਜੇਕਰ *AMPC* ਅਤੇ *ANQC* ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਅਨੁਸਾਰ $S + \delta S$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ

δS = ਖੇਤਰਫਲ *ANQC* – ਖੇਤਰਫਲ *AMPC* = ਖੇਤਰਫਲ *MNQP*

ਹੁਣ *MNQP* ਖੇਤਰਫਲ ਨਤੀਜੇ ਵਿੱਚ *MNRP* ਅਤੇ *MNQS* ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਭਾਵ

$$y\delta x < \delta S\ (y + \delta y)\ \delta x$$

ਜਾਂ $$y < \frac{\delta S}{\delta x} < y + \delta y \quad (\delta x \text{ ਨਾਲ ਭਾਵ ਦੇ ਕੇ}) \qquad ....(1)$$

ਜਾਂ $$\frac{dS}{dx} = y = f(x), \qquad [\text{ਜਦੋਂ ਕਿ } \delta x \to 0 \text{ ਅਤੇ } dy \to 0]$$

ਇਸ ਲਈ $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{dS}{dx}.\,dx = \int_a^b dS = [S]_a^b$$

$$= (S \text{ ਦਾ ਮਾਨ } x = b) - (S \text{ ਦਾ ਮਾਨ ਜਦੋਂ } x = a)$$

$$= \text{ਖੇਤਰਫਲ } ABDC.$$

ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਇੱਕ ਯੋਗ ਸੀਮਾ (Limit) ਹੈ ਮੰਨ ਲਿਓ ਕੋਈ ਫਲਨ $f(x)$ ਕਿਸੀ ਅੰਤਰਾ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ (Continued) ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਆਲੇਖ ਇੱਕ ਵਕਰ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ *C* ਅਤੇ *D* ਕੋਈ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। *x*–ਅੱਖਰ ਉੱਤੇ *CA* ਅਤੇ *DB* ਲੰਬ ਹਨ। '*a*' ਅਤੇ '*b*' ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ *C* ਅਤੇ *D* ਦੇ ਭੂਜ ਹਨ। ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਭਾਵ *AB* ਨੂੰ, ਜਿਸਦਾ ਮਾਨ $(b - a)$ ਹੈ, *n* ਬਰਾਬਰ ਬਹੁਤ ਛੋਟੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਿਓ ਬਿੰਦੂ *P* ਤੇ *Q* ਜਿਹੜੇ ਵਕਰ ਉੱਤੇ ਹਨ, ਦੇ ਭੁਜ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $(a + rh)$ ਅਤੇ $(a + \overline{r+1}h)$ ਹਨ। *PM* ਤੇ *QN* ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੋਟੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $h \to 0$, *PRNM* ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਹੀ ਛੋਟਾ ਆਇਤ ਹੈ। ਇਸ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $f(a + rh) \times h$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਯੋਗ ਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ

$$\lim_{n \to \infty} h \cdot [f(a + h) + f(a + 2h) + ... + f(a + nh)]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} h\,.\,f(a + rh), \text{ਜਿੱਥੇ}\, b - a = nh$$

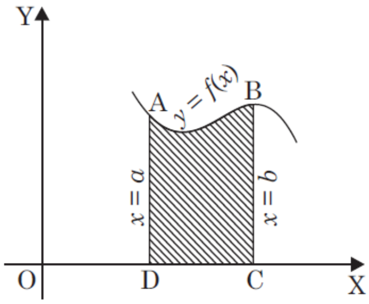
$$= \int_a^b f(x)\,dx \text{ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।}$$

ਨੋਟਸ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਉਹ ਪੂਰਣ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਵਕਰ $y = f(x)$, *x*–ਅਕਸ਼ ਅਤੇ $x = a$ ਤੋਂ $x = b$ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਅੰਦਰ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਓਕਰ $y = f(x)$, *x*–ਅਕਸ਼ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ *ABCD* ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਨਿਮਨ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

$$\boxed{A = \int_{x=a}^{x=b} y\, dx}$$

ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਸਿਰੇ D ਉੱਤੇ x ਦਾ ਮਾਨ $(x = a)$ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ ਨਿਮਨ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਸਿਰੇ C ਉੱਤੇ x ਦਾ ਮਾਨ $(x = b)$ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀ **ਉੱਚ ਸੀਮਾ** ਮੰਨੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।



ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਕਰ $x = f(y)$, y–ਅਕਸ਼ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = a$ ਅਤੇ $y = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਨਿਮਨ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ–

$$\boxed{A = \int_{y=a}^{y=b} x\, dy}$$

ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕਲਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ **ਨਿਚੇ ਤੋਂ ਉੱਪਰ** ਨੂੰ ਲਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ ਸਹਿਤ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 1. $y = mx$, x–ਅਕਸ਼ ਅਤੇ ਕੋਟੀ $x = 2$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$y = mx \qquad \text{....(1)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $y = 0$ ਰੱਖਣ ਤੇ $x = 0$ ($\because$ x–ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ $y = 0$)

$\therefore$ ਅਭੀਸ਼ਟ ਖੇਤਰਫਲ $= \int_0^2 y dx = \int_0^2 mx\, dx = m\int_0^2 x\, dx$

$$= m\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{m}{2}(4-0) = 2m \text{ ਵਰਗ ਇਕਾਈ।}$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਪਰਵਲ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ ਸਰਲ ਰੇਖਾ $x = 4$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਰਵਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

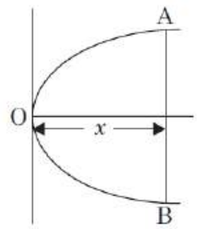
$$y^2 = 4x$$

ਰੇਖਾ $x = 4$ ਪਰਵਲ ਤੋਂ A ਅਤੇ B ਉੱਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।

ਅਭੀਸ਼ਟ ਖੇਤਰਫਲ $OBAO$ ਹੈ।

$$\text{ਖੇਤਰਫਲ} = 2\int_0^4 y\, dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{4x}\, dx = 4\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx$$



$$= 4 \times \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 0\right]$$

$$= \frac{8}{3}(8-0) = \frac{64}{3} \text{ ਵਰਗ ਇਕਾਈ।}$$

ਉੱਤਰ

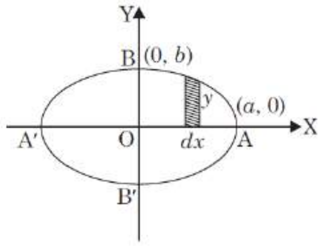
ਉਦਾਰਣ 3. ਦੀਰਘਗੋਲੇ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੀਰਘਗੋਲ $ABA'B'$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਚੌਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਭੀਸ਼ਟ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਹੋ ਜਾਇਗਾ

$$\because \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\therefore \quad y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$



ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਲਈ $x = 0$ ਅਤੇ A ਦੇ ਲਈ $y = 0$ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਬਿੰਦੂ B ਤੇ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ (a, b) ਤੇ $(a, 0)$ ਹੋਣਗੇ।

$$\therefore \quad \text{ਅਭੀਸ਼ਟ ਖੇਤਰਫਲ} = 4\int_0^a y\,dx$$

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 4\frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = \pi ab \text{ ਵਰਗ ਇਕਾਈ।}$$

ਉੱਤਰ

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਪਰਵਲ $y^2 = 4ax$ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਨਾਭੀਲੰਬ ਜੀਵਾ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਰਵਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

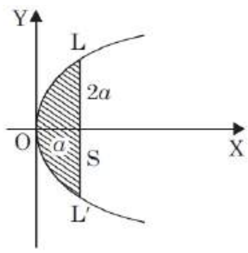
$$y^2 = 4ax$$

ਅਤੇ ਨਾਭੀਲੰਬ ਜੀਵਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x = a$

ਨਾਭੀਲੰਬ ਜੀਵਾ ਪਰਵਲ ਤੋਂ L ਅਤੇ L' ਬਿੰਦੂਆਂ ਉੱਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।

ਅਭੀਸ਼ਟ ਖੇਤਰਫਲ $OL'SLO$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ A ਖੇਤਰਫਲ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ



$$A = 2\int_0^a y\,dx$$

$$= 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 2\int_0^a 2a^{1/2}x^{1/2}\,dx = 2\times 2a^{1/2}\int_0^a x^{1/2}\,dx$$

$$= 4a^{1/2}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^a = \frac{2.4}{3}a^{1/2}\left[x^{3/2}\right]_0^a$$

$$= \frac{8}{3}a^2 \text{ ਵਰਗ ਇਕਾਈ।}$$ **ਉੱਤਰ**

ਟਾਸਕ ਪਰਵਲ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ ਸਰਲ ਰੇਖਾ $x = 4$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ:** $\frac{8}{3}a^2$ ਵਕਰ ਇਕਾਈ)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 16.1

ਲਘੂ ਉੱਤਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਨਿਮਨਲਿਚਤ ਵਕਰਾਂ, x–ਅਕਸ਼ ਅਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈਆਂ ਕੋਟੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ:

1. $y = e^x, x = 0$ ਤੋਂ $x = 2$ ਤੱਕ।
2. $y = x \sin x, x = 0$ ਤੋਂ 2π ਤੱਕ।

   [**ਸੰਕੇਤ:** ਅਭੀਸ਼ਟ ਖੇਤਰਫਲ $= \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} x \sin x\,dx = [-x\cos x + \sin x]_0^{2\pi}$ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ।]
3. $y = \left(1 + \frac{8}{x^2}\right), x = 2$ ਤੋਂ $x = 10$ ਤੱਕ।
4. $y = 5 + \frac{1}{10}x^2, x = 2$ ਤੋਂ $x = 10$ ਤੱਕ।
5. $xy = b^2, x = a$ ਤੋਂ $x = b$ ਤੱਕ।
6. $y = xe^{x^2}, x = 0$ ਤੋਂ $x = b$ ਤੱਕ।
7. ਸਰਲ ਰੇਖਾ $y = mx$, x–ਅਕਸ਼ ਅਤੇ ਕੋਟੀ $x = 3$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਸਰਲ ਰੇਖਾ $x = \frac{1}{2}a$ ਦੁਆਰਾ ਤਕਸੀਮ ਗੋਲਾ $x^2 + y^2 = a^2$ ਦੇ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   [**ਸੰਕੇਤ:** ਅਭੀਸ਼ਟ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਮੰਨ ਲਿਓ $x = a \sin\theta$].

$$= \int_{a/2}^{a} y\,dx : \int_{-a}^{a/2} y\,dx$$

$$= \int_{a/2}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx : \int_{-a}^{a/2} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

ਉੱਤਰ

1. $e^2 - 1$
2. 2π ਵਰਗ ਇਕਾਈ
3. $\frac{56}{5}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈ
4. $73\frac{1}{15}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈ
5. $b^2\left[\log\frac{b}{a}\right]$
6. $\frac{1}{2}\left[e^{b^2} - 1\right]$
7. $\frac{9}{2}m$ ਵਰਗ ਇਕਾਈ
8. $(4\pi - 3\sqrt{3}) : (8\pi + 3\sqrt{3})$

ਨੋਟ

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਅੱਜ-ਕੱਲ੍ਹ ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ .... ਨਾਲ ਵਧਿਆ ਹੈ।
2. ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਨੁਕਲਨ ਇੱਕ .... ਸੀਮਾ ਹੈ।
3. ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ .... ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

16.2 ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਉਪਯੋਗ (Use of Integration in Economics)

ਅੱਜ-ਕੱਲ੍ਹ ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਵਧਿਆ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਚਤ ਤੱਥਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

1. ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ, ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ

ਕਿਉਂ ਜੋ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ $= \dfrac{d(c)}{dq}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\text{ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ } = \int \frac{d(c)}{dq}.dq$$

ਇੱਥੇ, $\dfrac{d(c)}{dq} =$ ਸੀਮਾਂਤ, ਲਾਗਤ, $c =$ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ, $dq =$ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਕਿਸੀ ਫਰਮ ਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ = $3 + 150q - 9q^2$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਕੱਢੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਇਕਾਈ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ 300 ਰੁ: ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ,

$$TC = \int (3 + 150q - 9q^2)\, dq$$

$$= 3q + 150\frac{q^2}{2} - \frac{q^3}{3} + c$$

$$= 3q + 75q^2 - 3q^3 + c$$

ਅਤੇ ਔਸਤ ਲਾਗਤ, $$AC = \frac{TC}{Q} = 3 + 75q - 3q^2 + \frac{c}{Q}$$

ਕਿਉਂ ਜੋ $q = 3$ ਅਤੇ $TC = 300$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$300 = (3 \times 3) + 75\,(3)^2 - 3 \times 3 \times 3 + c$$

$$= 9 + (75 \times 9) - 27 + c$$

$$= 9 + 675 - 27 + c$$

ਜਾਂ $$c = -675 + 300 = -357$$

$$TC = 3q + 75q^2 - 3q^3 - 357$$

ਅਤੇ $$AC = 3 + 75q - 3q^2 - \frac{357}{q}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ 100 ਰੁ: ਹੈ ਅਤੇ ਸੀਮਾਂਤ ਫਲਨ $(6x + 3)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ = $\int$ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $TC = \int (6x+3)dx$

$$= \frac{6x^2}{2} + 3x + c$$

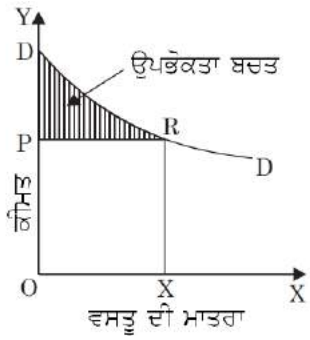
ਇੱਥੇ ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ = 100 ਰੁ: ਹੈ ਤਾਂ ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ ਜ਼ੀਰੋ (ਭਾਵ $x = 0$) ਹੋਣ ਤੇ ਵੀ ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ 100 ਰੁ: ਹੀ ਉਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੀ ਰਹੇਗੀ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਵੀ 100 ਰੁ: ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ

$$TC = (6 \times 0) + (3 \times 0) + c = 100$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਾਗਤ ਫਲਨ $3x^2 + 3x + 100$ ਹੋਵੇਗਾ।

2. ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ

ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ ਨੂੰ ਵੀ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ *DD* ਮੰਗ ਹੈ। ਉਪਭੋਕਤਾ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦੀ *OP* ਕੀਮਤ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨਿਆ ਉਹ *OX* ਕਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਖੇਤਰ *OXRD* ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਉਪਭੋਕਤਾ ਵਸਤੂ ਦੀ *OX* ਮਾਤਰਾ ਦੀ ਕੁੱਲ੍ਹ ਕੀਮਤ ਦੇਣ ਨੂੰ ਤਿਆਰ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਉਹ ਅਸਲ ਵਿੱਚ *OXRP* ਕੀਮਤ ਦੇਣ ਨੂੰ ਤਿਆਰ ਹੈ। ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ ਦੋਨੋਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ।



ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ = ਖੇਤਰਫਲ *OXRD* – ਖੇਤਰਫਲ *OXRP*

$$= \int_0^x \text{(ਮੰਗ ਵਕਰ)}\ dx - p.x$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਮੰਨਿਆ ਕੋਈ ਮੰਗ ਵਕਰ $p = 100 - 5x + 3x^2$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $x = 5$ ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਭੋਕਤਾ ਬਚਤ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਮੰਗ ਵਕਰ, $p = 100 - 5x + 3x^2$ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਗ ਦੀ ਮਾਤਰਾ $x = 5$ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਥੇ $p = 100 - (5 \times 3) + (3 \times 5 \times 5) = 100 - 90 = 10$

$$\text{ਉਪਭੋਕਤਾ} = \int_0^x \text{(ਮੰਗ ਵਕਰ)}\ dx - p.x$$

$$= \int_0^3 (100 - 5x + 3x^2)\, dx - (p \times 3)$$

$$= \left[100x - \frac{5x^2}{2} + \frac{3x^3}{3}\right]_0^3 - 30$$

$$= 100 \times 3 - \frac{5}{2}\,(3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) - 30$$

$$= 300 - 22.5 + 27 - 30 = 274.5.$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਮੰਗ ਫਲਨ: $p = 50 - 5x - x^2$ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਹੱਲ : ਮੰਗ ਫਲਨ; $p = 50 - 5x - x^2$

ਜੇਕਰ $p = 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$0 = 50 - 5x - x^2$$

ਜਾਂ $x^2 + 5x - 50 = 0$

ਨੋਟ $x^2 + 10x - 5x - 50 = 0$

ਜਾਂ $x(x - 10) - 5(x + 10) = 0$

ਜਾਂ $(x - 5)(x + 10) = 0$

$x - 5 = 0$ ਜਾਂ $x = 5$; ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $x + 10 = 0$ ਜਾਂ $x = -10$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $x = -10$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਜੋ $x < 0$, ਇਸ ਲਈ

$$\text{ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ} = \int_2^5 (50 - 5x + x^2)\,dx - p \times x$$

$$= \int_0^5 (50 - 5x + x^2)\,dx - 0 \times 5$$

$$= \left[50x - \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^5$$

$$= \left[50 \times 5 - \frac{5 \times 5 \times 5}{2} - \frac{5 \times 5 \times 5}{3}\right]$$

$$= 250 - \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{1500 - 375 - 250}{6}$$

$$= \frac{875}{6} = 145.82$$ **ਉੱਤਰ**

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 16.2

ਆਪਣੇ-ਆਪ ਹੱਲ ਕਰੋ

1. ਪਤਾ ਕਰੋ : $\int x^2 \cos x\, dx.$
2. ਅਨੁਕਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ : $\int (8 + 7x)^7\, dx.$
3. ਪਤਾ ਕਰੋ : $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 x\, dx.$
4. ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (*i*) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ (*ii*) $\int \frac{\sin x}{\sin(x - \alpha)}\, dx.$
5. ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (*i*) $\int 4x^2 \sqrt{x^3 + 3}$ (*ii*) $\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$

   (*iii*) $\int \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}\, dx$ (*iv*) $\int x^3 e^x\, dx$
6. ਅਨੁਕਲਨ ਕਰੋ :

   (*i*) $\frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}$ (*ii*) $\frac{3x}{(3x + 1)(x - 3)}$

   (*iii*) $x^3 \log x,$ (*iv*) $\sin(ax + b).$

7. ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ ਫਲਨ $f(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ x = ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ

(*i*) $3x^3 - 4x + 5$, $x = 0$ ਉੱਤੇ 100 ਰੁ: ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ

(*ii*) $\dfrac{100}{\sqrt{x}}$, $x = 0$ ਉੱਤੇ 100 ਰੁ: ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ

(*iii*) $6.75 - 0.0006x$, $x = 0$ ਉੱਤੇ 10,485 ਰੁ: ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ।

8. ਭਤਾ ਕਰੋ:

(*i*) $\int_1^5 x^3 x\, dx$ (*ii*) $\int_1^{14} \sqrt{x}\, dx$

(*iii*) $\int_1^3 (1 + 5x + x^3)\, dx$ (*iv*) $\int_1^3 (e^{2x} + e^x)\, dx$

9. ਜੇਕਰ ਮੰਗ ਫਲਨ ਵਕਰ $p = 33 - 3x - 2x^2$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $x = 3$ ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਮੰਗ ਫਲਨ $p = 100 - 2x^3$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $p = 5$ ਰੁ: ਉੱਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ? ਜੇਕਰ $p = 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਚਤ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

2. ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)–

4. ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ = ... ?

(*a*) $\int$ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ (*b*) $\int$ ਪੂਰਣ ਲਾਗਤ (*c*) $\int$ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ (*d*) $\int$ ਹਾਨੀ

5. ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ ਨੂੰ ਕਿਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ?

(*a*) ਨਿਖੇੜਨ (*b*) ਨਿਖੇੜਕ

(*c*) ਅਨੁਕਲਨ (*d*) ਕ੍ਰੇਮਰ

6. ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ = ... ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(*a*) $\dfrac{d}{dq}$ (*b*) $\dfrac{dq}{d(c)}$

(*c*) $\dfrac{d(c)}{dq}$ (*d*) ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

16.3 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ *CPQD* ਵਕਰ $y = f(x)$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $f(x)$, ਪ੍ਰਾਂਤ $[a, b]$ ਵਿੱਚ x ਦਾ ਕੋਈ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਿਓ ਜਿਵੇਂ x ਦਾ ਮਾਨ a ਤੋਂ b ਤੱਕ ਵਧਦਾ ਹੈ y ਵੀ ਵਧਦਾ ਹੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ *CA* ਅਤੇ *DB* ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਉੱਤੇ ਕੋਟੀਆਂ ਹਨ।
- ਵਕਰ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਲਿਓ ਅਤੇ ਮਾਨ ਲਿਓ ਕਿ *PM* ਉਸਦੀ ਕੋਟੀ ਹੈ। ਵਕਰ ਉੱਤੇ P ਦੇ ਨੇੜੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ ਲਿਓ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ *QN* ਇਸਦੀ ਕੋਟੀ ਹੈ।
- ਅੱਜ–ਕੱਲ੍ਹ ਅਨੁਕਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਵਧਿਆ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤੱਥਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

1. ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ, ਔਸਤ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਲਾਗਤ

ਕਿਉਂਜੋ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ = $\dfrac{d(c)}{dq}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

ਨੋਟ

ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ = $\int \frac{d(c)}{dq} . dq$

- ਇੱਥੇ, $\frac{d(c)}{dq}$ = ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ, c = ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ, dq = ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ।
- ਉਪਭੋਕਤਾ ਬਚਤ ਨੂੰ ਵੀ ਅਨੁਕਲਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

16.4 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਪ੍ਰਯੋਗ (Applications) – ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ।
- ਕੋਟੀ (Ordinate) – ਭੁਜ।

16.5 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਦੀਰਘ ਗੋਲੇ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** πabਵਰਗ ਇਕਾਈ)
2. ਜੇਕਰ ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ 100 ਰੁ: ਹੈ ਅਤੇ ਸੀਮਾਂਤ ਫਲਨ $(6x + 3)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (**ਉੱਤਰ :** $3x^2 + 3x + 100$)
3. ਸਰਲ ਰੇਖਾ $y = mx$, x–ਅਕਸ਼ ਅਤੇ ਕੋਟੀ $x = 3$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(**ਉੱਤਰ :** $\frac{9}{2}m$ ਵਰਗ ਇਕਾਈ)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer : Self Assessment)

1. ਤੇਜੀ 2. ਯੋਗ 3 ਅਨੁਕਲਨ
4. (*a*) 5. (*c*) 6. (*c*)

16.6 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
2. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
7. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਉਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੁਕੇਸ਼ਨ*।

ਇਕਾਈ–17: ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਅਤੇ ਹੱਲ: ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਪ੍ਰਥਕਣੀ ਦਸ਼ਾ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ (Introduction to Differential Equations and Solutions: Variable Separable Case and Homogenous Equation)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋਣਗੇ।
- ਸਹੀ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਾਉਣਾ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਉਹ ਸਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਸ਼ਰਿਤ ਅਤੇ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਆਸ਼ਰਿਤ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਇੱਥ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਵਿਭਿੰਨ ਗੁਣਾਂਕ (derivatives) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (order) ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਵਿਭਿੰਨ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦਾ ਉੱਚਤਮ ਕ੍ਰਮ (highest order) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਰੇਖੀ ਕਹਾਏਗਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਆਸ਼ਰਿਤ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਹੋਣ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹ ਗੈਰ–ਰੇਖੀ ਕਹਾਉਣਗੇ।

ਫਲਨ $f(x)$ ਵਿਭਿੰਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਾਏਗਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸਨੂੰ ਕਿਸੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤਾਂ ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ (identy) ਤੱਕ ਘੱਟ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਹੱਲਾਂ ਦੇ ਕੱਢਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਾਏਗਾ।

ਸਧਾਰਣ ਹੱਲ: ਇੱਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੁਤੰਤਰ ਕਾਲਪਨਿਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਉਸਦਾ ਸਧਾਰਣ ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਹੱਲ (Particular Solution)**:** ਸਧਾਰਣ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ: $y = Ae^x + B/e^x$ ਵਕਰ ਨੂੰ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਮੁੱਲ $y = Ae^x + B/e^x$ ....(1)

ਨੋਟ

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ A ਅਤੇ B ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਦੋ ਬਾਰ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = Ae^{x} - Be^{-x} \qquad ....(2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{x} + Be^{-x}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਅਤੇ (3) ਵਿੱਚੋਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ–

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y$$

ਇਹੀ ਸਾਡਾ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋਵੇਗਾ।

17.1 ਪਹਿਲਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦਾ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ (Differential Equation of First Order and First Degree)

ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ–

$$M + N\,(dy/dx) = 0 \text{ ਜਾਂ } M\,dx + N\,dy = 0$$

ਇੱਥੇ M ਅਤੇ N ਸਥਿਰ ਹਨ ਅਤੇ x ਅਤੇ y ਦੇ ਕੁੱਝ ਫਲਨ ਹਨ। ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਫਿਰ ਵੀ ਜੇਕਰ ਉਹ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਸਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਪਲਬਧ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਕੁੱਝ ਉਚਿਤ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

17.1.1 ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਪ੍ਰਥਕੀਕਰਣ ਦਸ਼ਾ (Variable Separable Case)

ਜੇਕਰ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ–

$$f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$$

ਇੱਥੇ $f_1(x)$ ਅਤੇ $f_2(y)$ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ x ਅਤੇ y ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ।

ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਕੋਟੀ ਕਾਲਪਨਿਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਜੋੜ ਲੈਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ:

$$\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + c$$

ਨੋਟਸ

ਇੱਥੇ, c ਇੱਕ ਕਾਲਪਨਿਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\left[x/\sqrt{1+x^2}\right]dx = -\left[y/\sqrt{1+y^2}\right]dy$ ਦਾ ਹੱਲ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\int (1+x^2)^{-1/2}.\,x\,dx = -\int (1+y^2)^{-1/2}.\,y\,dy + c$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-1/2}.\,(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int (1+y^2)^{-1/2}.\,(2y)\,dy + c$$

ਜਾਂ $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$, ਇਹੀ ਸਾਡੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਣ 2. $(1 + e^x)\, y\, dy = (1 + y)\, e^x\, dx$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ-

$$\left(\frac{y}{1+y}\right) dy = \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਨਿਖੇੜਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\int \frac{y}{1+y}\, dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx + \text{constant}$$

ਜਾਂ $$y - \log(1 + y) = \log(1 + e^x) + \log c$$

ਜਾਂ $$y = \log[c\,(1 + y)\,(1 + e^x)]$$

ਜਾਂ $c\,(1 + y)\,(1 + e^x) = e^y$ ਇਹੀ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੋਏਗਾ।

17.1.2 ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ (Homogeneous Equations)

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ $f_1(x, y)$ ਅਤੇ $f_2(x, y)$; x ਅਤੇ y ਦੇ ਸਮਾਨ ਕੋਟੀ ਦੇ ਫਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ

$y = vx$ ਰੱਖ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਮੀਕਰਣ ਅੱਗੇ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ-

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

ਭਾਵ $$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

ਇੱਥੇ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਥਕ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ-

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \log x + c$$

ਇੱਥੇ, c ਇੱਕ ਕਾਲਪਨਿਕ ਸਥਿਰ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ v ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ y/x ਰੱਖ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹੀ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੋਏਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. $(x^3 - 3xy^2) = dx\,(y^3 - 3x^3 y)\, dy$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^3 - 3x^2 y} \qquad \text{....(1)}$$

$y = vx$ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

ਨੋਟ

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^3 - 3xv^2 x^2}{v^3 x^3 - 3x^2 vx} = \frac{x^3(1-3v^2)}{x^3(v^3-3v)} = \frac{1-3v^2}{v^3-3v}$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-3v^2}{v^3-3v} - v = \frac{1-3v^2-3v^4+3v^2}{v^3-3v} = \frac{1-v^4}{v^3-3v}$$

ਜਾਂ $$\frac{dx}{x} = \frac{v^3-3v}{1-v^4}dv = \left[\frac{1}{2(v+1)} + \frac{1}{2(v-1)} - \frac{2v}{v^2+1}\right]$$

(ਅੰਸ਼ਿਕ ਫਲਨ ਦੁਆਰਾ)
ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\log x + \log c = \frac{1}{2}\log(v+1) + \frac{1}{2}\log(v-1) - \log(v^2+1)$$

ਜਾਂ $$\log(cx) = \frac{1}{2}\log[(v+1)^{1/2}(v-1)^{1/2}/v^2+1]$$

ਜਾਂ $$cx = \frac{(v^2-1)^{1/2}}{v^2+1} \text{ ਜਾਂ } c^2x^2 = \frac{v^2-1}{(v^2+1)} \text{ ਯਾ } c^2x^2(v^2+1)^2 = (v^2-1)$$

ਜਾਂ $$c^2x^2[y^2/x^2+1]^2 = [y^2/x^2-1]$$ [$v = y/x$ ਰੱਖਣ ਤੇ]

$c^2(y^2+x^2) = (y^2-x^2)$ ਇਹੀ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

17.1.3 ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਹੜਾ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕੇ (Equations Changable to Homogeneous Form)

ਜੇਕਰ ਨਿਖੇੜਨ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ–

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}, \text{ ਜਿੱਥੇ } \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$$

ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ $x = x + h$ ਅਤੇ $y = y + k$ ਰੱਖਕੇ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। (ਇੱਥੇ h ਅਤੇ k ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹਨ) ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ $dy = dY$ ਅਤੇ $dx = dX$ ਰੱਖ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ–

$$\frac{DY}{DX} = \frac{a(x+h)+b(y+k)+c}{a_1(x+h)+b_1(y+k)+c_1}$$

$$= \frac{ax+by+(ah+bk+c)}{a_1x+b_1y+(a_1h+b_1k+c_1)}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਰੂਪ ਹੋਵੇਗੀ ਜੇਕਰ $ah + bk + c = 0$ ਅਤੇ $a_1h + b_1k + c_1 = 0$ ਹੋਣ,

$$\frac{DY}{DX} = \frac{ax+by}{a_1x+b_1y}$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਪਿਛਲੇ ਉਦਾਹਰਣ (ਅ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $Y = vX$ ਰੱਖਕੇ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ $X = x - h$ ਅਤੇ $y = y - k$ ਰੱਖਕੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਖੋਜ ਲਿਆ ਜਾਏਗਾ।

ਜੇਕਰ $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = m$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ–

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ $v = a_1x + b_1y$ ਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਨੋਟ

ਇੱਥੇ $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $x = X + h$ ਅਤੇ $y = Y + k$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\frac{DY}{DX} = \frac{(Y+k)-(X+h)+1}{(Y+k)-(X+h)+5} = \frac{Y-X+(k-h+1)}{Y-X+(k-h+5)} \quad ....(1)$$

$k - h + 1 = 0$ ਅਤੇ $k + h + 5 = 0$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ $k = -3, h = -2k$ ਅਤੇ h ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ–

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y-X}{Y+X}$$

$Y = vX$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{v-1}{v+1} \text{ ਜਾਂ } X\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v = \frac{-1-v^2}{v+1}$$

ਜਾਂ $$\frac{v+1}{v^2+1}dv = -\frac{dx}{X} \text{ ਜਾਂ } \frac{v}{v^2+1}dv + \frac{dv}{v^2+1} = -\frac{X}{dx}$$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ

ਜਾਂ $$\frac{2v}{v^2+1}dv + \frac{2v}{v^2+1}dv = \frac{-2X}{dx}$$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\log(v^2+1) = 2\tan^{-1} v = -2\log X + c$$

ਜਾਂ $$\log(v^2+1) + 2\log X = -2\tan^{-1} v + c$$

ਜਾਂ $$\log[(v^2+1)X^2] = -2\tan^{-1} v + c$$

v ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\log(Y^2 + X^2) = -2\tan^{-1}(Y/X) = c$$

Y ਅਤੇ X ਦਾ ਮਾਨ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\text{Log}[(y+3)^2 + (x+2)^2] + 2\tan^{-1}\{(y+3)/(x+2)\} = c$$

ਇਹੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਨੁਕਲਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

17.1.4 ਰੇਖੀ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ (Linear Differential Equation)

ਰੇਖੀ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ–

$$\frac{dy}{dx} + PY = Q$$

ਇੱਥੇ P ਅਤੇ Q ਕੇਵਲ x ਦੇ ਫਲਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ y ਇੱਕ ਆਸ਼ਰਿਤ ਚਲਰਾਸ਼ੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ $e^{\int p\,dx}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ

$$e^{\int p\,dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^{\int p\,dx} Py = e^{\int p\,dx}.Q$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left\{ye^{\int p\,dx}\right\} = Qe^{\int p\,dx}$$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ 'x' ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$ye^{\int p\,dx} = \int Q\,e^{\int p\,dx}\,dx + c$$

ਇਹੀ ਸਾਡੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੋਏਗਾ।

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ : $5\frac{dy}{dx}+2xy-e^{-x^2}$ ਦਾ ਹੱਲ ਕੱਢੋ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ $\frac{dy}{dx}+PY=Q$ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$P=2x, Q=e^{-x^2}$$

ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਥਕ-ਪ੍ਰਥਕ 'x' ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\int P\,dx = 2\int x\,dx, \int Q\,dx = \int e^{-x^2}$$

$$\int P\,dx = 2\int\frac{x^2}{2} = x^2$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int_e p\,dx = e^{x^2}$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੋਵੇਗਾ–

$$y(\text{I.F.}) = \int Q\,(\text{I.F.})\,dx + c \quad [\text{ਇੱਥੇ I.F. = Intergrating Factor}]$$

$$y\,e^{x^2} = \int e^{-x^2}\,e^{x^2}\,dx + c$$

ਜਾਂ $$y\,e^{x^2} = x + c$$

17.1.5 ਰੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ (Change in Linear Form)

ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਰੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਹੱਲ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

(I) ਬਰਨੋਲੀ ਸਮੀਕਰਣ: ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨ ਲਿਚਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ–

$$\frac{dy}{dx}+PY=Q\,y^n$$

ਤਾਂ ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ y^{-n} ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+PY^{-n+1}=Q \qquad \ldots(1)$$

ਅਸੀਂ $y^{-n+1}=v$ ਰੱਖ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ $\frac{dv}{dx}(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਰੂਪ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ–

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+pv=Q$$

ਜਾਂ $$\frac{dv}{dx}+(1-n)pv=(1-n)Q \qquad \ldots(2)$$

ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ v ਇੱਕ ਆਸ਼ਰਿਤ ਚਲਰਾਸ਼ੀ ਹੈ। ਇਸ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ 17.1.4 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

(II) ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨ ਲਿਚਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ–

$$\frac{dv}{dx}+P\,\phi(y)=Q\,f(y)$$

ਜਿੱਥੇ, P ਅਤੇ Q ਕੇਵਲ x ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ।

ਤਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ $f(y)$ ਦਾ ਭਾਵ ਦੇਣ ਤੇ ਨੋਟ

$$\frac{1}{f(y)}\frac{dv}{dx}+P\frac{\phi(y)}{f(y)}=Q$$

ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ $\frac{\phi(y)}{f(y)}=v$ ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ $\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\phi(y)}{f(y)}\right\}$

$$=k.\frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx},$$ ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

$$\frac{1}{k}\frac{dv}{dx}+Pv=Q$$

ਜਾਂ $\frac{dv}{dx}=k\,Pv=kQ$ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^2y^6$ ਦਾ ਹੱਲ ਕੱਢੋ।

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ y^6 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ

$$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}.\frac{1}{y^5}=x^2 \qquad \text{....(1)}$$

ਮੰਨਿਆ $\frac{1}{y^5}=v$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\frac{dv}{dx}=-\frac{5}{y^6}\frac{dy}{dx}$

ਜਾਂ $\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{5}\frac{dy}{dx}$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$-\frac{1}{5}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=x^2 \text{ ਜਾਂ } \frac{dv}{dx}-\frac{1}{5}v=-5x^2$$

ਇਹ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ v ਇੱਕ ਆਸ਼ਰਿਤ ਚਲਰਾਸ਼ੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $P=-5/x$ ਅਤੇ $Q=-5\,x^2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int Pdx=\int\left(-\frac{5}{x}\right)dx=-5\log x=\log x^5=\log\left(\frac{1}{x^5}\right)$

$$\therefore \quad \int_e P\,dx=e\log^{(1/5)}=\frac{1}{x^5}$$

$$v\,(\text{I.F})=\int Q\,(\text{I.F.})\,dx+c$$

ਜਾਂ $v(1/x^5)=\int -5x^2\,(1/x^5)\,dx+c=-5\int x^{-3}dx+c$

$$\left(\frac{1}{y^5}\right)\left(\frac{1}{x^5}\right)=-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)+c \qquad [\because\ v=1/y^5]$$

ਜਾਂ $\frac{1}{x^5y^5}+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)+c$

ਇਹੀ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

VED1
E\L-LOVELY-H\math17-1 IInd 6-8-11 IIrd 21-10-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12

17.2 ਸਹੀ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ (Exact Differential Equations)

ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ $M\,dx + N\,dy = 0$ ਸਹੀ (exact) ਹੋਵੇਗੀ ਜੇਕਰ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ਹੋਣ। ਜੇਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਮੀਕਰਣ ਸਹੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਕਦਮ ਉਠਾਵਾਂਗੇ–

(i) M ਨੂੰ x ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ y ਸਥਿਰ ਹੋਣ।

(ii) N ਨੂੰ ਕੇਵਲ y ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਹੀ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਨਾ ਹੋਣ।

(iii) ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਹਾਂ ਅਨੁਲਨਾਂ ਦਾ ਯੋਗ ਕਰ ਲਵਾਂਗੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ $M\,dx + N\,dy = 0$ ਸਹੀ (exact) ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਹੱਲ ਨਿਮਨ ਲਿਚਤ ਹੋਵੇਗਾ–

$\int M\,dx$ (y ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ) + $\int M\,dy$ (ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਦੋ ਦਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਨਾ ਹੋਵੇ) $= c$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋ: $(x^2 - ay)\,dx - (ax - y^2)\,dy = 0$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਇੱਥੇ, $M = x^2 - ay$ ਅਤੇ $N = (ax - y^2)$ ਹਨ।

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -a \text{ ਅਤੇ } \frac{\partial N}{\partial x} = -a$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਸਹੀ (exact) ਹੈ।

ਹੁਣ $\int M\,dx$ (y ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ) $= \int (x^2 - ay)\,dx = \dfrac{1}{3}x^3 - ay\,x$ ...(1)

ਅਤੇ $\int N\,dy$ (ਕੇਵਲ ਉਹ ਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਨਾ ਹੋਣ) $= \int y^2 dy) = \dfrac{1}{3}y^3$

$\therefore$ ਸਾਨੂੰ ਉਪਲਬਧ ਹੋਵੇਗਾ–

$(i) + (ii) = c$ (ਕਾਲਪਨਿਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ)

ਜਾਂ $\dfrac{1}{3}x^3 - ayx + \dfrac{1}{3}y^3 = c$

ਜਾਂ $x^3 - 3\,ayx + y^3 = 3c.$

ਟਾਸਕ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = x^2y^6$ ਦਾ ਹੱਲ ਕੱਢੋ। (ਉੱਤਰ : $\dfrac{1}{x^5y^5} + \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + c$)

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

1. **ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ** (Fill in the blanks)–

   1. ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਉਹ ਸਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ .... ਅਤੇ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   2. ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਰੇਖੀ ਕਹਾਏਗਾ ਜਦੋਂਕਿ ਆਸ਼ਰਿਤ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ .... ਪਹਿਲੇ ਕੋਟੀ ਦੇ ਹੋਣ।

3. ਇੱਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੁਤੰਤਰ ਕਾਲਪਨਿਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਉਸਦਾ .... ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. ਸਧਾਰਣ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਜੇਕਰ ਕੋਟੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ .... ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
5. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ .... ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

17.3 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਉਹ ਸਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਸ਼ਰਿਤ ਅਤੇ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਆਸ਼ਰਿਤ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿੱਚ ਵਿਭਿੰਨ ਗੁਣਾਂਕ (derivatives) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (order) ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਵਿਭਿੰਨ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਉੱਚਤਰ ਕ੍ਰਮ (highest order) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਰੇਖੀ ਕਹਾਏਗਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਆਸ਼ਰਿਤ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਹੋਣ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹ ਗੈਰ-ਰੇਖੀ ਕਹਾਉਣਗੇ।
- **ਸਧਾਰਣ ਹੱਲ :** ਇੱਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੁਤੰਤਰ ਕਾਲਪਨਿਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਸਧਾਰਣ ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- **ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਹੱਲ** (Particular Solution)**:** ਸਧਾਰਣ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾ ਉਹ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ-

  $$f_1(x)\, dx = f_2(y)\, dy$$

  ਇੱਥੇ $f_1(x)$ ਅਤੇ $f_2(y)$ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ x ਅਤੇ y ਦੇ ਫਲਨ ਹਨ।
- ਅਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਅਨੁਕਲਨ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਕੋਈ ਕਾਲਪਨਿਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਜੋੜ ਲੈਂਦੇ ਹਨ।

17.4 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਸਮਰੂਪ (Homogeneous) – ਸਮਾਂਗੀ।
- ਪ੍ਰਥਕੀਕਰਣ (Separable) – ਵੱਖ-ਵੱਖ।

17.5 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. $y = A e^x + B/e^x$ ਵਕਰ ਨੂੰ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੂਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਨਿਖੇੜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (**ਉੱਤਰ :** $\frac{d^2y}{dx^2} = y$)

2. $\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]dx = -1\left[\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right]dy$ ਦਾ ਹੱਲ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$)

3. $\frac{dy}{dx} + 2xy - e^{-x2}$ ਦਾ ਹੱਲ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $ye^{x2} = x + c$)

ਨੋਟ

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਆਸ਼ਰਿਤ
2. ਗੁਣਾਂਕ
3. ਸਧਾਰਣ
4. ਵਿਸ਼ੇਸ਼
5. ਸਮਰੂਪ।

17.6 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
4. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
7. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।

ਇਕਾਈ–18: ਵਯੂਹ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ) : ਅਰਥ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Matrices : Meaning and Types)

ਨੋਟ

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਸੰਕੇਤਨ ਨੂੰ ਸਿੱਖਣ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਵਯੂਹ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਮੁੱਖ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਵਯੂਹਾਂ ਦਾ ਯੋਗ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਸੰਬੰਧੀ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਇੱਕ ਆਇਤਕਾਰ ਅੰਕਾਇਤ (Rectangular Arromy), ਜਿਸਨੂੰ ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਵਸਥਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ, ਵਯੂਹ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

m ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) ਅਤੇ n ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਵਿੱਚ mn ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ-ਪਰਿਵਰਤਨ (Permutation) ਨੂੰ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}$$

ਨੋਟ

ਨੋਟਸ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a_{11}, a_{12}, ... ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਘਟਕ ਜਾਂ ਸੰਘਟਕ (Elements or Constituents) ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਖਿਤਿਜ (Horizontal) ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੁਆਰਾ ਪੰਕਤੀ (Row) ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੇਂ (Vertical) ਸੰਘਟਕਾਂ ਨਾਲ ਸਤੰਭ (Column) ਬਣਦੇ ਹਨ। ਜਿਸਨੂੰ–

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਵਿਨਯਾਸ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 2 ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ 3 ਸਤੰਭ ਹਨ ਅਤੇ $2 \times 3 = 6$ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆ ਹਨ।

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਵਿਨਯਾਸ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 3 ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ 1 ਸਤੰਭ ਹੈ ਅਤੇ

ਪ੍ਰਵੇਸ਼ਾਂ (Entries) ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $3 \times 1 = 3$ ਹਨ।

18.1 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਜਾਂ ਵਿਮਾਵਾਂ (Order of Matrix)

ਜਿਵੇਂ ਆਇਤਾਕਾਰ (Rectangle) ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਿਮਾਵਾਂ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਉਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਵਿਮਾਵਾਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ A, B, C ਆਦਿ ਨਾਲ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ $A_{m \times n}$. $B_{2\times 3}$. $C_{1\times 3}$ ਆਦਿ।

18.2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸੰਕੇਤਨ (Notation of a Matrix)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ m ਅਤੇ n ਹੋਣ, ਤਾਂ ਆਇਤਾਕਾਰ ਵਿਨਯਾਸ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ੍ਹ $m \times n$ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ i^{th} ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ j^{th} ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ a_{ij} ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ–

$$A_{m\times n} = A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

ਜਿੱਥੇ, $i = 1, 2, 3, ..., m$ ਅਤੇ $j = 1, 2, 3, ..., n$ ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਇੱਥੇ ਇਹ ਉਲੇਖਯੋਗ ਹੈ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਆਇਤਾਕਾਰ ਵਿਨਯਾਸ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੰਗਠਤ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਹੋਏ) ਮਾਤਰ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

18.3 ਵਯੂਹ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Kinds of Matrix)

[I] ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Square Matrix)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਮਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਉਦੋਂ ਉਸਨੂੰ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ $m = n$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅੰਕ ਆਇਤ ਨੂੰ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਵਯੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਹੋਰ ਵਯੂਹ ਜਿੱਥੇ ਹੋਣ ਉਹ ਆਇਤਾਕਾਰ ਵਯੂਹ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

ਨੋਟ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨੋਂ ਵਯੂਹ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ (2×2) ਅਤੇ (3×3) ਹਨ।

[II] ਪੰਕਤੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Row Matrix)

ਜੇਕਰ $m = 1$, ਉਦੋਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪੰਕਤੀ ਰਹੇਗੀ, ਇਸਨੂੰ ਪੰਕਤੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਂਗੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–

$$A = [2\ 3]_{1\times 2}$$

$$B = [-5\ 2\ 0]_{1\times 3}$$

$$C = [1\ 3\ 0\ -7]_{1\times 4}$$

[III] ਸਤੰਭ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Column Matrix)

ਜੇਕਰ $n = 1$, ਉਦੋਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਤੰਭ ਰਹੇਗਾ ਅਤੇ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਈ, ਇਸਨੂੰ ਸਤੰਭ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਂਗੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times 1}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

[IV] ਜ਼ੀਰੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Null Matrix or Zero Matrix)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਹ ਜ਼ੀਰੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = [0\,0], B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ ਜ਼ੀਰੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਜ਼ੀਰੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ O ਵੱਡੇ (Capital) ਅੱਖਰ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। O ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਹ ਕੇਵਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸੰਕੇਤ ਹੈ।

[V] ਤਤਸਮਕ ਜਾਂ ਇਕਾਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Identity or Unit Matrix)

ਇਹ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਕਰਣ ਸੰਘਟਕ (Diagonal Elements) ਇਕਾਈ ਹਨ ਅਤੇ ਹੋਰ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ ਤਤਸਮਕ ਜਾਂ ਇਕਾਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[VI] ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Diagonal Matrix)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਵਿਕਰਣ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਸੰਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਕੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਜ਼ੀਰੋ ਹਨ, ਉਦੋਂ ਉਸਨੂੰ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਇਸਨੂੰ ਵਿਕਰਣ $[d_1, d_2, d_3, d_4]$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

[VII] ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Scalar Matrix)

ਉਹ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਕਰਣ ਸੰਘਟਕ ਸਮਾਨ ਹੋਣ, ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A = [a_{ij}]$ ਸਕੇਲਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $a_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ ਕਿ $i \neq j$; $a_{ij} = 2$ ਜਦੋਂ $i = j$

$$B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$B = [a_{ij}]_{3\times3}$, ਜਿੱਥੇ $a_{ij} = 0$ ਜਦੋਂ $i \neq j$; $a_{ij} = k$, ਜਦੋਂ $i = j$ ਉਦੋਂ B ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

[VIII] ਅਧੋਤਿਕੋਣੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Lower Triangular Matrix)

ਉਹ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਜਿਸਦੇ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣ, ਅਧੋਤਿਕੋਣੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Lower Triangular Matrix) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ ਇੱਥੇ } a_{ij} = 0; \text{ ਜਦੋਂ } i < j$$

ਟਾਸਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲਿਖੋ।

[IX] ਉਪਰੀਤਿਕੋਣੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Upper Triangular Matrix)

ਉਹ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਿਸਦੇ ਪ੍ਰਧਾਨ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਭ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਪਰੀਤਿਕੋਣੀ (Upper Triangular) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A (ਕ੍ਰਮ $n \times n$);ਜਿੱਥੇ ਸੰਘਟਕ $a_{ij} = 0$ ਜਦੋਂ $i < j$

[X] ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਕਰਣ ਯੋਗ (Trace of a Matrix)

ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਪ੍ਰਧਾਨ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਕਰਣ ਯੋਗ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਵਯੂਹ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਕਰਣ ਯੋਗ $= a + b + c$ ਹੈ। ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਕ੍ਰਮ, $n \times n$ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਕਰਣ ਯੋਗ $= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ, $j = i$ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ Tr ਲਿਖਦੇ ਹਨ।

[XI] ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Symmetric Matrix)

ਉਹ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A (ਕ੍ਰਮ $n \times n$), ਜਿਸਦੇ ਹਰੇਕ $(i - j)^{th}$ ਘਟਕ (ਸੰਘਟਕ) ਦੇ ਲਈ $a_{ij} = a_{ji}$ ਹੋਵੇ, ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $a_{ij} = a_{ji}$ *i.e.* $a_{21} = h = a_{12}$; $a_{32} = f = a_{23}$; $a_{22} = b = a_{22}$

[XII] ਟਾਂਕ-ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Skew-Symmetric Matrix)

ਉਹ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A (ਕ੍ਰਮ $n \times n$), ਜਿਸਦੇ ਹਰੇਕ $(i - j)^{th}$ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਰਚਕ ਦੇ ਲਈ $a_{ji} = a_{ij}$ ਹੋਵੇ, ਟਾਂਕ-ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -h & f \\ -g & 0 \end{bmatrix}$$

ਵਿਕਰਣ ਸੰਘਟਕਾਂ $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots, a_{ij}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ $a_{ij} = -a_{ji}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ।

$\therefore \quad 2a_{ij} = 0$ or $-a_{ij} = 0$

ਇਸ ਲਈ ਟਾਂਕ-ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਕਰਣ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਅੰਕ ਆਇਤ, ਜਿਸਨੂੰ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਵਸਥਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ .... ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
2. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ m ਅਤੇ n ਹੋਣ, ਤਾਂ ਆਇਤਕਾਰ ਅਭਿਆਸ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ .... ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ।
3. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ .... ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
4. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਹ .... ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
5. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਵਿਕਰਣ ਉੱਤੇ ਸਥਿਰ ਸੰਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਰੀ ਸਭ ਜ਼ੀਰੋ ਹਨ, ਉਦੋਂ ਉਸਨੂੰ .... ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

18.4 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਮੁੱਖ ਗੁਣ (Important Properties of Matrices)

1. ਵਯੂਹਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ (Equality of Matrix)

ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ ਤੁਲ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ ਦੋਹਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ (Order) ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ ਭਾਵ $m = p$; $n = q$ ਅਤੇ $a_{ij} = b_{ij}$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

2. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਸਮਤੁਲ ਸੰਬੰਧ (Equivalence Relations of Matrices)

ਜੇਕਰ A, B, C ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਨੁਕੂਲਨ (Conformable) ਹਨ ਭਾਵ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ (Order) ਹੈ; ਤਾਂ

(*i*) $A = A$; ਸਮਤੁਲ ਸੰਬੰਧ (Reflexive Relation)

(*ii*) $A = B \Leftrightarrow B = A \Rightarrow$ ਸਮਮਿਤ ਸੰਬੰਧ (Symmetric Relations)

(*iii*) $A = B$ ਅਤੇ $B = C \Rightarrow A = C$; ਸੰਕ੍ਰਾਮਕ ਸੰਬੰਧ (Transitive Relation)

ਜਿੱਥੇ, ਸੰਕੇਤ (Notation) $\Rightarrow$ ਜੇਕਰ .... ਤਾਂ (If....then) ਅਤੇ $\Leftrightarrow$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ (iff = if and only if)

(ੳ) $A = A$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ $a_{ij} = a_{ij}$ ਜਿੱਥੇ $i = 1, 2, 3, ...m$ ਅਤੇ $j = 1, 2, 3, ..., n$. ਇੱਕ ਸਵੈਤੁਲ ਸੰਬੰਧ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(ਅ) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ਹਨ ਤਾਂ $A = B$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ $a_{ij} = b_{ij}$ ਜਾਂ $b_{ij} = a_{ij}$. ਇਸ ਲਈ ਲਈ $B = A$.

$\therefore$ $A = B \Rightarrow B = A$ ਇਸਨੂੰ ਸਮਮਿਤ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(ੲ) ਜੇਕਰ $A = B$, ਇਸਨੂੰ $B= C$ ਸਮਮਿਤ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ–

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ ਅਤੇ } b_{ij} = c_{ij}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $a_{ij} = c_{ij} \quad \therefore \quad A = C$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A, B, C ਵਿੱਚ ਉਹ ਸੰਬੰਧ ਹੈ, ਜਿਹੜੇ ਸਵੈਤੁਲ, ਸਮਮਿਤ ਅਤੇ ਸੰਕ੍ਰਾਮਕ ਹੋਵੇ, ਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–

ਤੁਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ x, y ਅਤੇ z ਦਾ ਮਾਨ $\begin{bmatrix} x+3 & 2y+x \\ z-1 & 4a-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 3 & 2a \end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਤੁਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸੰਘਟਕ ਤੁਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

$\therefore$ $x + 3 = 0; 2y + x = -7; z - 1 = 3$ ਅਤੇ $4a - 6 = 2a$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ $x = -3; y = -2; z = 4$ ਅਤੇ $a = 3$.

18.5 ਵਯੂਹਾਂ ਦਾ ਯੋਗ ਅਤੇ ਅੰਤਰ (Addition and Subtraction of Matrices)

ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਦੋ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਉਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ $A + B$ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $C = [c_{ij}]$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਜਿੱਥੇ $c_{ij} = b_{ij}, i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ।

ਇੱਥੇ ਇਹ ਉਲਖਯੋਗ ਹੈ ਕਿ **ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਹੀਂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ।**

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਮਾਨ ਕੱਢੋ (Evaluate)–

(*i*) [1 2 3] + [4 5 6];

(*ii*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ **ਅਤੇ** $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$; **ਤਾਂ $A + B$ ਕੱਢੋ।**

ਹੱਲ: (*i*) ਇੱਥੇ $A = [1\ 2\ 3]; B = [4\ 5\ 6]$

$\therefore$ $A + B = [1 + 4\ 2 + 5\ 3 + 6] = [5\ 7\ 9]$

(*ii*) ਇੱਥੇ $A + B = C$; ਜਿੱਥੇ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\therefore \quad C = \begin{bmatrix} 1+7 & 2+3 & 4+2 \\ 0+5 & 5+1 & 3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

ਵਯੂਹ ਯੋਗ ਦੇ ਖੇਤਰੀ ਗੁਣ (Field properties of Matrix Addition)

ਨੋਟ

(i) ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇੱਕ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਦੇ (Order) ਜਾਂ ਅਨੁਕਲਨ (Conformable) ਹਨ ਤਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵੀ ਇਸੀ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$A + B = C \quad \Rightarrow \quad [a_{ij}\ b_{ij}]_{m \times n}$; ਯੋਗ ਦਾ ਸੰਚਰਣ ਗੁਣ (Closure Law)

(ii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਨੁਕਲਨ (ਸਮਾਨ-ਕ੍ਰਮ ਦੇ) ਹਨ, ਤਾਂ

$A + B = B + A$ ਯੋਗ ਦਾ ਕ੍ਰਮ-ਵਿਨਿਮੇਤਾ ਗੁਣ (Commutative Law for Addition)

$A + B = [a_{ij}\ b_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = B + A$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਨੁਕਲਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਯੋਗ, ਕ੍ਰਮ ਵਿਨਿਮੇ ਗੁਣ ਦਾ ਪਾਲਣ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, B, C ਅਨੁਕਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ

$(A + B) + C = A + (B + C)$ ਯੋਗ ਦਾ ਸਹਿਚਰ ਗੁਣ (Associative Low for Addition)

ਇੱਥੇ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{m \times n}$; $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ਹਨ ਤਾਂ

$\therefore (A + B) + C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n}$

ਅਤੇ $(A + B) + C = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n}$

$\therefore (A + B) + C = A + (B + C)$

(iv) ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 0 (ਜ਼ੀਰੋ) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵੀ ਉਸੀ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $A + 0 = A$ ਜਿੱਥੇ, 0 (ਜ਼ੀਰੋ) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਯੋਗ ਤਤਸਮਕ ਸੰਘਟਕ (Identity Element) ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $A + (-A) = 0$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $-A$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਯੋਗ ਵਯੁਤਕ੍ਰਮ (Additive Inverse) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ (Subtraction of Two Matrices)

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ਤਾਂ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ $A - B$, ਉਹ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ C ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ਜੇਕਰ $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$

ਭਾਵ $c_{ij} = a_{ij} + (-b_{ij})$

ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ; A ਅਤੇ B ਦੇ ਯੋਜਨਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤੀਲੋਮ (Additive Inverse) ਭਾਵ $A - B$ ਜੋੜਨ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$; ਤਾਂ $A - B$ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ: $A - B = \begin{bmatrix} 1-7 & 2-3 & 4-2 \\ 0-5 & 5-1 & 3-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

18.6 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ (Matrix Multiplication)

ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $B = [b_{ik}]$, $n \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ $AB = C$; ਜਿੱਥੇ, $C = [c_{ik}]$, $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਅਨੁਕਲਨ ਹੋਣ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ A ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ B ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਦੋਹਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਗੁਣਨ ਨੂੰ AB ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ AB ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਪਦ c_{ik} ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ–

A ਦੀ iਵੀਂ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ B ਦੇ kਵੇਂ ਸਤੰਭ ਦੇ ਸੰਗਤ ਰਚਕਾਂ (ਸੰਘਟਕਾਂ) ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ ਲੈਣਾ। ਇਸਨੂੰ ਪੰਕਤੀ ਗੁਣਿਤ ਸਤੰਭ ਵਿਧੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨਿਆ $A = [a_{i1}, a_{i2}....a_{in}]$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ AB ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੋਵੇਗਾ–

$$[a_{i1}, a_{i2}....a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ c_{ik} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

ਜਿੱਥੇ $c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}b_{2k}.....+a_{ij}b_{ik} + ... + a_{in}b_{nk}$

ਇਹ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਯੋਗ ਹੈ ਕਿ **ਗੁਣਨ AB ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ B ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਯ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਗੁਣਨ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਪੰਕਤੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਸਤੰਭ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਰਚਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।**

ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, $1 \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ B, $n \times 1$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ ਉਦੋਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ $A\,.\,B$, 1×1 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ ਪਰੰਤੂ B ਅਤੇ A ਵਯੂਹ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $n \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ।

$$A\,.\,B = [a_1, a_2....a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1b_1 + a_2b_2 + ...+ a_nb_n]$$

$$B\,.\,A = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{1\times n} [a_1a_2....a_n]_{1\times n} = \begin{vmatrix} b_1a_1 & b_1a_2..... & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2..... & b_2a_n \\ ..... & .... & ..... \\ ..... & .... & ..... \\ b_na_1 & b_na_2..... & b_na_n \end{vmatrix}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ਅਤੇ $B = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}_{3\times 3}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ AB ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ-

ਹੱਲ: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2.4 + 1.3 + 3.2 & 2.1 + (-1) + 3.3 & 2.2 + 1.5 + 3.1 \\ (-1)4 + 3.3 + 1.2 & (-1)\,.\,1 + 3(-1) + 1.3 & (-1)2 + 3.5 + 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 10 & 22 \\ 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਨੋਟ–ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਉਦੋਂ AB ਅਤੇ BA ਦੋਨੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਰਹਿਣਗੇ ਅਤੇ ਦੋਨੋਂ ਉਸੀ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣਗੇ, ਫਿਰ ਵੀ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ (in general) $AB \neq BA$, ਭਾਵ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਕ੍ਰਮ ਵਿਨਿਮੇ (Commutative) ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$ **ਅਤੇ** $B=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$

ਹੋਵੇ, ਤਾਂ AB **ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ।**

ਹੱਲ : $$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $A \neq 0$ ਅਤੇ $B \neq 0$

ਵਯੂਹ ਗੁਣਨ ਦਾ ਸਹਿਚਰ ਨਿਯਮ

(*i*) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਦਾ ਸਹਿਚਰ ਨਿਯਮ (Associative Law of Matrix Multiplication)

ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ, $B = [b_{ik}]$, $n \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $C = [c_{ik}]$, $p \times q$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ, ਉਦੋਂ $A\,(B\,.\,C) = (A\,.\,B)\,.\,C,$ ਦੋਨੋਂ ਪੱਖ $m \times q$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਭਾਵ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਸਹਿਚਾਰੀ ਹਨ।

ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਿਓ ਜਿੱਥੇ $B.\,C = [d_{ji}]$, ਜਿੱਥੇ

$$d_{ji} = b_{ji}\,c_{i1} + b_{j2}c_{2i} + \dots + b_{ip}C\pi = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{ki}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A\,.\,(B\,.\,C) = [c_{ij}]$, ਜਿੱਥੇ $c_{ji} = a_{i1}d_{1i} + \dots a_{in}d_{ni}$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}d_{ji} = \sum_{j=1}^{n} n_{ij} \sum_{k=1}^{P} B_{jk}c_{ki}$$

ਕਿਉਂਜੋ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮਿਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਯੋਗ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਪਰਿਵਰਤਨ ਤੇ

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum a_{ji}b_{jk}\right)c_{ki} = (A.B)\,.\,C$$

(*ii*) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਦੀ ਵੰਡ ਨਿਯਮ (Distributive Law of Matrix Multiplication)

ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ $B = [b_{ik}]$, $C = [c_{jk}]$, $n \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਨ,

ਉਦੋਂ

$$A\,(B + C) = AB + AC$$

ਕਿਉਂਜੋ $$B + C = [b_{ij}] + [c_{jk}] = [b_{jk}] + [c_{jk}]$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A(B + C) = [d_{ik}],$$

ਜਿੱਥੇ $$d_{ik} = a_{i1}\,(b_{1k} + c_{1k}) + \dots + a_{in}\,(b_{nk} + c_{nk})$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}b_{jk} + a_{jj}c_{jk}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$[d_{ik}] = AB + AC$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A\,(B + C) = AB + AC$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $B = [b_{ik}]$, $C = [c_{jk}]$, $n \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $A = [a_{ij}]$, $p \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ, ਉਦੋਂ $(B + C)$ $A = BA + CA.$

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ: $AB \neq BA$.

ਹੱਲ:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times0+2\times2+3\times-1 & 0\times0+1\times2+1\times-1 & 1\times0+-1\times2+0\times-1 \\ 1\times1+2\times1+3\times0 & 0\times1+1\times1+1\times0 & 1\times1+-1\times1+0\times0 \\ 1\times2+2\times-1+3\times1 & 0\times2+1\times-1+1\times1 & 1\times2+-1\times-1+0\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\times1+1\times0+2\times1 & 2\times1+1\times0+-1-1\times1 & -1\times1+0\times0+1\times1 \\ 0\times2+1\times1+2\times-1 & 2\times2+1\times1+-1\times-1 & -1\times2+0\times1+1\times-1 \\ 0\times3+1\times1+2\times0 & 2\times3+1\times1+-1\times0 & -1\times3+0\times1+1\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -3 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $AB \neq BA$.

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ AB ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0\times0+1\times2 & 1\times0+0\times2 & 0\times0+1\times2 \\ 0\times1+1\times1 & 1\times1+0\times1 & 0\times1+1\times1 \\ 0\times2+1\times0 & 1\times2+0\times0 & 0\times2+1\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਅ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ

(State whether the following statements are True or False) –

6. $A = A$; ਸਵੈਤੁਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜਦੋਂ A ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਨੁਕਲਨ ਹੈ।
7. $A = B \Leftrightarrow B = A$ ਸਮਮਿਤ ਸੰਬੰਧ ਹੈ, ਜਦੋਂ A, B ਅਨੁਕਲਨ ਹੈ।
8. ਜਦੋਂ A, B, C ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਨੁਕਲਨ ਹਨ ਤਾਂ $A = B$ ਅਤੇ $B = C \Rightarrow A = C$ ਸਵੈਤੁਲ ਸੰਬੰਧ ਦਿਖਾਉਂਦਾ ਹੈ।

9. ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, B, C ਅਨੁਕਲਨ ਹਨ ਤਾਂ $(A + B) + C = A + (B + C)$ ਯੋਗ ਦਾ ਸਹਿਚਰ ਗੁਣ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।
10. ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ; A ਅਤੇ B ਦੇ ਯੋਜਨਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤੀਲੋਮ ਭਾਵ $A + B$ ਜੋੜਨ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

18.7 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਅੰਕਆਇਤ (Rectangular Arromy), ਜਿਸਨੂੰ ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਵਸਥਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ, ਵਯੂਹ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- m ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) ਅਤੇ n ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਵਿੱਚ mn ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਨਯਾਸ (Permutation) ਨੂੰ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਜਿਵੇਂ ਆਇਤ (Rectangle) ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਿਮਾਵਾਂ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਹਨ ਅਤੇ ਉਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਵਿਮਾਵਾਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ × ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ A, B, C ਆਦਿ ਦੁਆਰਾ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ $A_{m \times n}.\ B_{2 \times 3}.C_{1 \times 3}$ ਆਦਿ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ m ਅਤੇ n ਹੋਣ, ਤਾਂ ਆਇਤਾਕਾਰ ਅਭਿਆਸ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ੍ਹ $m \times n$ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਉਦੋਂ ਉਸਨੂੰ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ $n = 1$, ਉਦੋਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਤੰਭ ਰਹੇਗਾ ਅਤੇ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਈ, ਇਸਨੂੰ ਸਤੰਭ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਂਗੇ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਹ ਜ਼ੀਰੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਇਹ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਕਰਣ ਸੰਘਟਕ (Diagonal Elements) ਇਕਾਈ ਹਨ ਅਤੇ ਹੋਰ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ ਤਤਸਮਕ ਜਾਂ ਇਕਾਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਵਿਕਰਣ ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਸੰਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਸਭ ਜ਼ੀਰੋ ਹਨ, ਉਦੋਂ ਉਸਨੂੰ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਉਹ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਕਰਣ ਸੰਘਟਕ ਸਮਾਨ ਹੋਣ, ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਉਹ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਜਿਸਦੇ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣ, ਅਧੋਤਿਕੋਣੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Lower Triangular Matrix) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਉਹ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਿਸਦੇ ਪ੍ਰਧਾਨ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉੱਪਰੀਤਿਕੋਣੀ (Upper Triangular) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਪ੍ਰਧਾਨ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ੍ਹ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਕਰਣ ਯੋਗ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਉਹ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A (ਕ੍ਰਮ $n \times n$), ਜਿਸਦੇ ਹਰੇਕ $(i - j)^{th}$ ਘਟਕ (ਸੰਘਟਕ) ਦੇ ਲਈ $a_{ij} = a_{ji}$ ਹੋਣ, ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਉਹ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A (ਕ੍ਰਮ $n \times n$), ਜਿਸਦੇ ਹਰੇਕ $(i - j)^{th}$ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਰਚਕ ਦੇ ਲਈ $a_{ji} = a_{ij}$ ਹੋਣ, ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

18.8 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix) – ਵਯੂਹ, ਆਯਤਾਕਾਰ।
- ਸੰਘਟਕ (Elements) – ਤੱਤ।

ਨੋਟ

18.9 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 5 & 3\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}7 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 9\end{bmatrix}$; ਤਾਂ $A+B$ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\begin{bmatrix}8 & 5 & 6\\ 5 & 6 & 12\end{bmatrix}$)

2. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$; ਤਾਂ $A+B$ ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢੋ।

   (**ਉੱਤਰ :** $\begin{bmatrix}3 & 7 & 11\\ 5 & 9 & 13\end{bmatrix}$)

3. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$; ਤਾਂ $A-B$ ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$)

4. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ AB ਕੱਢੋ।

   (**ਉੱਤਰ :** $\begin{bmatrix}17 & 10 & 22\\ 7 & 1 & 14\end{bmatrix}_{2\times 3}$)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਵਯੂਹ	2. $m \times n$	3. ਵਰਗ	4. ਜ਼ੀਰੋ	5. ਵਿਕਰਣ
6. ਸੱਚ	7. ਸੱਚ	8. ਝੂਠ	9. ਸੱਚ	10. ਝੂਠ

18.10 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
6. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਉਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।

ਇਕਾਈ–19: ਪਰਿਵਰਤ ਅਤੇ ਵਿਪਰੀਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Transpose and Inverse of Matrix)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਪਰਿਵਰਤ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੇ ਪਰਿਵਰਤ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।
- ਨਿਯਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟ ਜਾਂ ਵਿਪਰੀਤ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਮਿਲੇਗੀ।
- ਲੰਬਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸੰਬੰਧੀ ਗੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਸੰਬੰਧੀ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਪ੍ਰਸਤੂਤ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਪਰਿਵਰਤ ਅਤੇ ਵਿਪਰੀਤ ਦੀ ਚਰਚਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ $m\times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ ਇਸ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਜਿਹੜਾ $n\times m$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਏਗਾ, ਉਸਨੂੰ A ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ ਕਹਾਂਗੇ।

ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਗੁਣਨ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ AB ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ ਉਤਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।

19.1 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ (Transpose of a Matrix)

ਜੇਕਰ A ਅਤੇ $m\times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ ਇਸ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਜਿਹੜਾ $n\times m$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ, ਉਸਨੂੰ A ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ ਕਹਾਂਗੇ ਅਤੇ A' ਜਾਂ A^t ਜਾਂ A^T ਨਾਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਜੇਕਰ

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\5 & 2 & 4\end{bmatrix} \text{ ਉਦੋਂ } A'=\begin{bmatrix}1 & 5\\3 & 2\\7 & 4\end{bmatrix}$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਸੰਘਟਕ A_{ij}, ਜਿਹੜੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੀ iਵੀਂ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ jਵੇਂ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਸੀ, ਪਰਿਵਰਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A' ਦੀ jਵੀਂ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ iਵੇਂ ਸਤੰਭ ਉੱਤੇ ਰਹੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ

$$A=[a_{ij}] \text{ ਅਤੇ } A' = [a_{ij}] \Rightarrow a_{ij}' = a_{ij}$$

ਨੋਟ–ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ A' ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ ਲਵਾਂਗੇ, ਤਾਂ ਫਿਰ ਤੋਂ A ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਏਗਾ।

$\therefore \qquad (A')' = (A^T)^T = [A^t]^t = A$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $[KA]' = KA'$; ਇੱਥੇ K ਇੱਕ ਆਦਿਸ਼ ਰਾਸ਼ੀ (Scalar) ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1– ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋਨੋਂ $m\times n$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਉਦੋਂ

$$(A+B)' = A' + B'$$

ਉਪੱਤੀ–ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਯੋਗ ਦੇ ਅਨੁਕਲਨ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਕ੍ਰਮ $m\times n$ ਦੇ ਹੋਣ। ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਿਓ।

$A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਉਦੋਂ, $C = A + B = [c_{ij}]$, ਜਿੱਥੇ, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$

ਹੁਣ $A' = [a_{ji}] = B' = [b_{ji}]$, ਜਿੱਥੇ $a_{ji} = a_{ij}$ ਅਤੇ $b_{ji} = b_{ij}$

$$(A+B)' = C' = [c_{ji}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = A' + B'.$$

19.2 ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੇ ਪਰਿਵਰਤ (Transpose of Product of Two Matrices)

ਪ੍ਰਮੇਯ 2–ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਗੁਣਨ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ AB ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ ਉਤਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਏਗਾ ਭਾਵ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $m\times n$ ਅਤੇ $n\times p$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਨ, ਉਦੋਂ $(AB)' = B'A'$

ਉਪੱਤੀ–AB ਦਾ ਕ੍ਰਮ $m\times p$ ਹੈ, ਤਾਂ $(AB)'$ ਕ੍ਰਮ $p\times m$ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, B' ਦਾ ਕ੍ਰਮ $p\times n$ ਅਤੇ A' ਦਾ ਕ੍ਰਮ $n\times m$ ਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $B'A'$, $p\times m$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੋਏਗਾ। ਭਾਵ ਦੋਨੋਂ $(AB)'$ ਅਤੇ $B'.A'$ ਬਰਾਬਰ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਿਓ ਉਦੋਂ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$, ਉਦੋਂ

$(AB)'$ ਦਾ $(k-i)$ਵਾਂ ਸੰਘਟਕ = (AB) ਦਾ $(i-k)$ਵਾਂ ਸੰਘਟਕ

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$(B)' = (b_{kj})A' = (a_{ji})$ ਜਿੱਥੇ $b_{jk}' = b_{jk}', a_{ji}' = a_{ij}'$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $B'A'$ ਦਾ $(k-i)$ਵਾਂ ਸੰਘਟਕ $= \sum_{j=1}^{n} a_{jk}b_{ij}$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{jk}b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

ਭਾਵ $B'A$ ਦਾ $(k-i)$ਵਾਂ ਸੰਘਟਕ = $(AB)'$ ਦਾ $(k-i)$ਵਾਂ ਸੰਘਟਕ

$\therefore \qquad (AB)' = B'.A'$

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਅਨੁਕਲਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਕਿਸੀ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਤੱਕ ਵਿਆਪਕ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $(ABC.......LM)' = M'L'......C'B'A'$

ਨੋਟਸ ਜੇਕਰ $A = B$ ਉਦੋਂ $(A^2)' = A'.A' = (A')^2$ ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਪੂਰਣ ਅੰਕ (Positive Integer) ਘਾਤ ਲੈਣ ਤੇ $(A^k)' = (A')^k$.

19.3 ਨਿਯਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Regular Matrix)

ੳਰਗ–ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਨੂੰ ਨਿਯਮਿਤ ਕਹਾਂਗੇ ਜੇਕਰ B ਅਜਿਹੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਸਤਿਤਵ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਦੋਂ $BA = I$, ਜਿੱਥੇ I ਉਸੀ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਤਤਸਮਕਾਰੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਜਿਹੜਾ ਵਰਗ–ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਯਮਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਉਸਨੂੰ ਵਿਚਿਤਰ (Singular) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਚਹਾਂਗੇ ਕਿ ਜੇਕਰ $BA = I$ ਹੈ, $AB = I$ ਵੀ ਹੋਏਗਾ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ–ਗੁਣਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੋਏਗਾ ਕਿ ਜੇਕਰ

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \delta_{up};\ i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

ਉਦੋਂ
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ij} = \delta_{ij};\ i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਨਾ ਕੇਵਲ ਸੱਚ ਹੈ ਬਲਕਿ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ।

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਗੁਣਨ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ AB ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ ਉਤਕ੍ਰਮ ਪਰਿਵਰਤਾਂ ਦੇ .... ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਵਰਗ–ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਨੂੰ ਨਿਯਮਿਤ ਕਹਾਂਗੇ ਜੇਕਰ B ਅਜਿਹੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਸਤਿਤਵ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਦੋਂ $BA =$ I, ਜਿੱਥੇ I ਉਸੀ ਕ੍ਰਮ ਦਾ .... ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
3. ਕਿਸੀ ਉਲਟੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ .... ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
4. ਜੇਕਰ A .... ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ $AB = 0 \Rightarrow B = 0$
5. ਜੇਕਰ $AA' = \mathrm{I}$ ਤਾਂ A ਨੂੰ .... ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

19.4 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟ ਜਾਂ ਵਿਪਰੀਤ (Inverse or Opposite of Matrix)

ਜੇਕਰ ਵਰਗ–ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਨਿਯਮਿਤ ਹੈ ਉਦੋਂ ਅਜਿਹੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦਾ ਅਸਤਿਤਵ ਹੈ ਕਿ $BA = AB = I$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਯਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਨੂੰ ਉਲਟ (Invertible) ਕਹਾਂਗੇ ਅਤੇ B ਨੂੰ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਕਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ A^{-1} ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵਯੂਹ ਦਾ ਉਲਟ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ–

ਨੋਟ (*i*) ਵਯੂਹ A ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ a_{ij} ਦੇ ਸਹਿ-ਖੰਡਾ (co-factors) c_{ji} ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਵਯੂਹ ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ (Transpose) ਬਣਾ ਲੈਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਵਯੂਹ ਨੂੰ A ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ (Adjoint) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਕਿ

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21}\cdots\cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22}\cdots\cdots & c_{n2} \\ \vdots & & \\ c_{1n} & c_{2n}\cdots\cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

(*ii*) Adj. (A) ਨੂੰ A ਦੇ ਸਾਰਣਿਕ $|A|$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। (ਜੇਕਰ $|A| \neq 0$)

$$\frac{\text{Adj}\,(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}}{|A|} & \frac{c_{21}}{|A|}\cdots & \frac{c_{n1}}{|A|} \\ \frac{c_{12}}{|A|} & \frac{c_{22}}{|A|}\cdots & \frac{c_{n2}}{|A|} \\ \vdots & & \\ \frac{c_{1n}}{|A|} & \frac{c_{2n}}{|A|}\cdots & \frac{c_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj.} \left| \frac{(A)}{|A|} \right|$$ ਹੀ A^{-1} ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{12} \end{bmatrix}$ **ਹੋਣ ਤਾਂ** A^{-1} **ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj.}A}{|A|}$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਯੂਹ ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ (Transpose of Matrix) ਬਣਾਉਣ ਤੇ

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

ਸਹਿਖੰਡ (Adjoint) ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਵਯੂਹ $A\,(a_{ij})$ ਦੇ ਸਹਿਖੰਡ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਢਾਂਗੇ–

ਸਹਿਖੰਡ $1 = +\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} = 36 - 25 = 11$

ਸਹਿਖੰਡ $2 = -\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = (24 - 15) = -9$

ਸਹਿਖੰਡ $3 = +\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 10 - 9 = 1$

ਸਹਿਖੰਡ $2 = -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} = 24 - 15 = -9$

ਸਹਿਖੰਡ $3 = +\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = 12 - 9 = 3$

ਸਹਿਖੰਡ $5 = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -(5 - 6) = -(-1) = +1$

ਸਹਿਖੰਡ $3 = +\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = (10-9) = 1$

ਸਹਿਖੰਡ $5 = -\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = -(5-6) = +1$

ਸਹਿਖੰਡ $12 = +\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (3-4) = -1$

$$Adj.\, A = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 1\,(36-25) - 2\,(24-15) + 3\,(10-9)$$

$$= (1 \times 11) - (2 \times 9) + (3 \times 1) = 11 - 18 + 3 = -4$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\, A}{|A|} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

ਉਲਟ ਵਯੂਹ ਦੇ ਗੁਣਧਰਮ (Properties of Inverse Matrices)

ਕਿਸੀ ਉਲਟੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ (Inverse) ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵਿਲੱਖਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ–ਜੇਕਰ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ B ਹੈ, ਤਾਂ B ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਦੂਜਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਪੱਤੀ–ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੈ, ਤਾਂ ਮੰਨ ਲਿਓ B ਅਤੇ C ਦੋਨੋਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਵਿਪਰੀਤ ਹਨ। ਉਦੋਂ

$$A\,B = BA = I$$

ਅਤੇ $AC = CA = I$

$$AB = AC \quad \Rightarrow \quad B(AB) = B(AC)$$

$\Rightarrow \quad (BA)B = (BA)C$

$\Rightarrow \quad IB = IC$

$\Rightarrow \quad B = C$

(*ii*) ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ n ਹੈ, ਉਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ AB ਵੀ ਉਲਟ ਹੈ ਅਤੇ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

ਉਪੱਤੀ–ਕਿਉਂਜੋ A ਅਤੇ B ਉਲਟ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ A^{-1} ਅਤੇ B^{-1} ਦਾ ਅਸਤਿਤਵ ਹੈ; ਨਤੀਜੇ ਵਜੋ:

$(B^{-1} A^{-1})\,(AB) = B^{-1}\,(A^{-1} A)\,B \;\therefore$ ਗੁਣਨ ਸਹਿਚਾਰੀ ਹੈ।

$$= B^{-1}\,(IB)\,A^{-1} A = 1$$

$$= B^{-1} B = I$$

ਦੁਬਾਰਾ $(AB)\,(B^{-1} A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1}$

$$= A\,(IA^{-1})$$

$$= AA^{-1} = I$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AC ਉਲਟ ਹੈ ਅਤੇ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

ਨੋਟ

ਟਿੱਪਣੀ-(*i*) ਜੇਕਰ $A, B, C, \ldots, AM$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਉਦੋਂ $(A.B.C.\ldots.M) = M^{-1} \ldots C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

(*ii*) ਜੇਕਰ A ਨਿਯਮਿਤ ਵਰਗ-ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ $AB = 0 \Rightarrow B = 0$;

ਜੇਕਰ B ਨਿਯਮਿਤ ਵਰਗ-ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ $AB = 0 \Rightarrow A = 0$

(*iii*) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤ ਅਤੇ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਕ੍ਰਮ ਵਿਨਿਮੇਯ (Commutative) ਹੈ।

$$(A')^{-1} = (A^{-1})^{1}.$$

19.5 ਲੰਬਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Orthogonal Matrix)

ਜੇਕਰ $AA' = I$ ਤਾਂ A ਨੂੰ ਲੰਬਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਸਵੈਇਛੁੱਕ Involuntary ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ

ਜੇਕਰ A ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $A^2 = I$ (ਤਤਸਮਕ ਜਾਂ ਇਕਾਈ), ਤਾਂ A ਨੂੰ ਅਸਵੈਇਛੁੱਕ (Involuntary) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ : ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਨਿਮਨਲਿਚਤ ਰੂਪ ਦੇ 2 × 2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਲਈ ਗੁਣਨ ਕ੍ਰਮ-ਵਿਨਿਮੇਯ ਹਨ-

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ
$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax - by & ay + bx \\ -bx - ay & -by + ax \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ
$$BA = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa - yb & xb + ya \\ -ya - xb & -yb + xa \end{bmatrix}.$$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ

(State whether the following statements are True or False)-

6. ਵਯੂਹ A ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ a_{ij} ਦੇ ਸਹਿ-ਖੰਡਾਂ C_{ji} ਨਾਲ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਵਯੂਹ ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ ਬਣਾ ਲੈਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਵਯੂਹ ਨੂੰ A ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
7. ਕਿਸੀ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਵਿਲੱਖਣ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
8. ਜੇਕਰ B ਨਿਯਮਿਤ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ $AB = 0 \Rightarrow A = 0$
9. ਜੇਕਰ $AA' = \mathrm{I}$ ਤਾਂ A ਨੂੰ ਜ਼ੀਰੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
10. ਜੇਕਰ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਹੈ ਅਤੇ $A^2 = \mathrm{I}$, ਤਾਂ A ਨੂੰ ਅਸਵੈਇਛੁੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

19.6 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਜੇਕਰ A ਇੱਕ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ ਇਸਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਜਿਹੜੇ $n \times m$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ, ਉਸਨੂੰ A ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ ਕਹਾਂਗੇ ਅਤੇ A' ਜਾਂ A^t ਜਾਂ A^T ਨਾਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਗੁਣਨ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ AB ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ ਉਤਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ $m \times n$ ਅਤੇ $n \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਨ, ਉਦੋਂ $(AB)' = B'.A'$.

- ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਨੂੰ ਨਿਯਮਿਤ ਕਹਾਂਗੇ ਜੇਕਰ B ਅਜਿਹੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਸਤਿਤਵ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਦੋਂ $BA = I$, ਜਿੱਥੇ I ਉਸੀ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਤਤਸਮਕਾਰੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਅਸੀਂ ਨਿਯਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਨੂੰ ਉਲਟ (Invertible) ਕਹਾਂਗੇ ਅਤੇ B ਨੂੰ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਕਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ A^{-1} ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।
- ਕਿਸੀ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ (Inverse) ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵਿਲੱਖਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ–ਜੇਕਰ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ B ਹੈ, ਤਾਂ B ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਦੂਜਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ n ਹੈ, ਉਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ AB ਵੀ ਉਲਟ ਹੈ ਅਤੇ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- ਜੇਕਰ $A, B, C,....,AM$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਉਦੋਂ $(A.B.C....M) = M^{-1}....C^{-1} B^{-1} A^{-1}$ ਜੇਕਰ A ਨਿਯਮਿਤ ਵਰਗ-ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ $AB = 0 \Rightarrow B = 0$;
- ਜੇਕਰ B ਨਿਯਮਿਤ ਵਰਗ-ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਉਦੋਂ $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤ ਅਤੇ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਕ੍ਰਮ-ਵਿਨਿਮੇਯ (Commutative) ਹੈ।
- ਜੇਕਰ $AA' = I$ ਤਾਂ A ਨੂੰ ਲੰਬਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ A ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $A^2 = I$ (ਤਤਸਮਕ ਜਾਂ ਇਕਾਈ), ਤਾਂ A ਨੂੰ ਅਸਵੈਇਛੁੱਕ (Involuntary) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

19.7 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਅਦਿਸ਼ (Scalar) – ਜਿਸਦਾ ਨਤੀਜਾ ਹੋਵੇ, ਪਰੰਤੂ ਦਿਸ਼ਾ ਨਹੀਂ।
- ਉਲਟ (Inverse) – ਵਿਪਰੀਤ।

19.8 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(A+B)' = A' + B'$.
2. ਸਾਬਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)' = B'.A'$.
3. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ ਹੋਣ ਤਾਂ A^{-1} ਕੱਢੋ। (**ਉੱਤਰ :** $\begin{bmatrix} \frac{-11}{4} & \frac{9}{4} & \frac{-10}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਗੁਣਨ	2. ਤਤਸਮਕਾਰੀ	3. ਵਿਲੱਖਣ	4. ਨਿਯਮਿਤ	5. ਲੰਬਕ
6. ਸੱਚ	7. ਝੂਠ	8. ਸੱਚ	9. ਝੂਠ	10. ਸੱਚ

19.9 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ।*

ਨੋਟ

2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
3. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–20: ਕ੍ਰੇਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ (Cramer's Rule)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਨ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸਿੱਖ ਸਕਣਗੇ।
- ਕ੍ਰੇਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋਣਗੇ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਕ੍ਰੇਮਰ ਨੇ ਯੁਗਪਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਨ ਕਰਨ ਦੀ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ ਜਿਸਨੂੰ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿਧੀ ਦਾ ਨਾਂਵ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

20.1 ਯੁਗਪਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੱਲ (ਕ੍ਰੇਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ) [Solution to Simultaneous Equations (Cramer's Rule)]

ਯੁਗਪਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਸਾਰਣਿਕ ਦੁਆਰਾ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–
ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਰਾਂ ਦੇ ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ–

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad ....(i)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad ....(ii)$$

ਚਰਾਂ (x ਅਤੇ y) ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਸਾਰਣਿਕ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ਹਨ, x ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸਤੰਭ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਅਚਰਾਂ ਦਾ ਸਤੰਭ ਲਿਖ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣਿਕ $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ਹੋ ਜਾਏਗਾ।

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ y ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ y ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸਤੰਭ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਅਚਰਾਂ ਦਾ ਸਤੰਭ ਲਿਖ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ–

$$\frac{x}{\text{(ਸਾਰਣਿਕ ਜਿਸ ਵਿੱਚ } x \text{ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸਤੰਭ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਅਚਰਾਂ ਦਾ ਸਤੰਭ ਹੈ)}} = \frac{y}{\text{(ਸਾਰਣਿਕ ਜਿਸ ਵਿੱਚ } y \text{ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸਤੰਭ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਅਚਰਾਂ ਦਾ ਸਤੰਭ ਹੈ)}} = \frac{1}{(x, y \text{ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਸਾਰਣਿਕ)}}$$

ਨੋਟ ਇੱਥੇ ਉਲੇਖਯੋਗ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਅਚਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (=) ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਲਿਖ ਲੈਂਦੇ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ ਕ੍ਰੇਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$x = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}, y = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$$ ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

$$\frac{x}{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{y}{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਚਰਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$3x + 4y = 5$$
$$3x - 4y = 2$$

ਹੱਲ : ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਸਾਰਣਿਕ $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਅਤੇ ਅਚਰਾਂ ਦਾ ਸਤੰਭ $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{x}{\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}} = \frac{y}{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}}$$

ਅਤੇ $$\frac{x}{(-20-8)} = \frac{y}{(6-15)} = \frac{1}{(-12-12)}$$

ਜਾਂ $$\frac{x}{-28} = \frac{y}{-9} = \frac{1}{-24}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$x = \frac{-28}{-24} = \frac{7}{6}$$

$$y = \frac{-9}{-24} = \frac{3}{8}.$$

ਟਾਸਕ ਦੋ ਚਰਾਂ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ।

ਆਓ, ਹੁਣ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਸਮੂੱਚ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ–

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰੇਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ (Cramer's Rule) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਯੂਹ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$AX = z \qquad ....(i)$$

ਇੱਥੇ, A = ਗੁਣਾਂਕ a_{ij} ਦਾ ਵਯੂਹ ਹੈ

ਨੋਟ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

X = ਚਰਾਂ ਦਾ ਸਤੰਭ ਸਦਿਸ਼

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } C = \text{ਅਚਰਾਂ ਦਾ ਸਤੰਭ ਸਦਿਸ਼}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

ਸਮੀਕਰਣ (i) ਨੂੰ A^{-1} ਨਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਗੁਣਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$A^{-1} AX = A^{-1} Z$$

ਜਾਂ $$X = A^{-1} Z \qquad [\because AA^{-1} = I]$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

ਇੱਥੇ $C_{ij} a_{ij}$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਖੰਡ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$X = \frac{z_1 c_{11} + z_2 c_{21} + z_3 c_{31}}{|A|}$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, x_2 ਅਤੇ x_3 ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਵਯੂਹ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰੋ–

$$\mathbf{4x + 2y = 2} \qquad ....(i)$$

$$\mathbf{3x + 5y = 21} \qquad ....(ii)$$

ਹੱਲ : ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਵਯੂਹ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ

$$AX = Z$$

ਇੱਥੇ $$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \text{ ਅਤੇ } Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 21 \end{bmatrix}$$

ਕ੍ਰੇਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$X = A^{-1} Z$$

$$= \frac{\text{Adjoint } A}{|A|} . Z$$

A^{-1} ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਯੂਹ ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ (Transpose) ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ–

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjoint } A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

ਨੋਟ

ਸਹਿਖੰਡ 4 = + 5

ਸਹਿਖੰਡ 3 = − 2

ਸਹਿਖੰਡ 2 = − 3

ਸਹਿਖੰਡ 5 = + 4

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{-2}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{-2}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{14}\times 2\right) + \left(\frac{-2}{14}\times 21\right) \\ \left(\frac{-3}{14}\times 2\right) + \left(\frac{4}{14}\times 21\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} - 3 \\ \frac{-3}{7} + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-16}{7} \\ \frac{39}{7} \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = \frac{-16}{7}$ ਅਤੇ $y = \frac{39}{7}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰੋ–

$$\mathbf{x - 2y + 3z = 1} \qquad .....(i)$$

$$\mathbf{3x - y + 4z = 3} \qquad ....(ii)$$

$$\mathbf{2x + y - 2z = -1} \qquad ....(iii)$$

ਹੱਲ : ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਵਯੂਹ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ਕ੍ਰੇਮਰ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } 1 = +\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = +(-2-4) = -6$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } 3 = -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -(-4-3) = -1$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } 2 = +\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = +(-8+3) = -5$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } -2 = -\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = -(-6-8) = +14$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } -1 = +\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = +(-2-6) = -8$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } 1 = -\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -(4-9) = +5$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } 3 = +\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = +(3+2) = +5$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } 4 = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -(1+4) = -5$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡ } -2 = +\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = +(-1+6) = +5$$

$$\text{Adjoint } A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -5 \\ +14 & -8 & +5 \\ +5 & -5 & +5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \times (2-4) + 2(-6-8) + 3(3+2)$$

$$= -2b - 28 = 15 = -15$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj.}A}{|A|} = \frac{1}{-15}\begin{bmatrix} -6 & -1 & -5 \\ 14 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-6}{-15} & \frac{1}{15} & \frac{5}{15} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{5}{15} \\ -\frac{5}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{5}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\times 1 + \frac{3}{15} - \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} + \frac{24}{15} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{15} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ਨੋਟ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $x = -\frac{8}{15}, y = 1, z = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ।

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)-

1. ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੱਲ .... ਦੁਆਰਾ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
2. $\frac{x}{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{y}{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}} = ...$
3. A^{-1} ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਯੂਹ ਦਾ .... ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

20.2 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਸਾਰਣਿਕ ਦੁਆਰਾ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ-

ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਰਾਂ ਦੇ ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ-

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

ਚਰਾਂ (x ਅਤੇ y) ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਸਾਰਣਿਕ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ਹਨ, x ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸਤੰਭ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਅਚਰਾਂ ਦਾ ਸਤੰਭ ਲਿਖ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

20.3 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਯੁਗਮਤ (Simultaneous) - ਨਾਲ-ਨਾਲ।

20.4 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ-

   (*i*) $4x + 2y = 2;\ 3x - 5y = 21$

   (*ii*) $2x - 3y + 4z = 8$

   $3x - 4y + 5z = -4$

   $4x - 5y + 6z = 12$ (**ਉੱਤਰ**:(*i*) $x = 2, y = 3$ (*ii*) $x = 1, y = 2, z = 3$)

2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿ

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = a + b + c.$$

3. ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ-

$$3x + 4y = 5$$

$$3x - 4y = 2$$

(**ਉੱਤਰ**:$x = \frac{7}{6}, y = \frac{3}{8}$)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਸਾਰਣਿਕ 2. $\dfrac{1}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$ 3. ਪਰਿਵਰਤ

20.5 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
2. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
6. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ-21: ਸਾਰਣਿਕ : ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਤੇ ਗੁਣ-ਧਰਮ (Determinant : Types and Properties)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ।
- ਸਾਰਣਿਕ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਰੂਪ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਸੰਘਟਕ ਸੰਬੰਧੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।
- ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਸਹਿ-ਖੰਡ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣ-ਧਰਮ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋਣਗੇ।
- ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿੰਨੇ ਚਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਨੇ ਹੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਅਸਾਨ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਬੀਜਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਸਾਰਣਿਕ (Determinant) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

21.1 ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Definition of Determinant)

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੋ ਇੱਕਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ–

$$a_1x + b_1y = 0 \qquad ....(i)$$

$$a_2x + b_2y = 0 \qquad ....(ii)$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ x ਅਤੇ y ਦਾ ਵਿਲੀਅਨ (Elimination) ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਨੂੰ a_2 ਦੁਆਰਾ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (ii) ਨੂੰ a_1 ਕਰਕੇ ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$$(b_1a_2 - b_2a_1)\, y = 0$$

ਜਾਂ $$b_1a_2 - b_2a_1 = 0$$

ਜਾਂ $$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

ਵਿਅੰਜਕ $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ–

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ਜਿਸਨੂੰ **ਸਾਰਣਿਕ** (Determinant) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

$$\therefore \qquad a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ਵਿਅੰਜਕ $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ਨੂੰ ਇਸ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ **ਪ੍ਰਸਾਰ** (Expansion) ਜਾਂ **ਮਾਨ** (Value) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ ਦੋ **ਪੰਕਤੀਆਂ** (Rows) ਅਤੇ ਦੋ **ਸਤੰਭ** (Columns) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣਿਕ, **ਦੂਜੀ ਕੋਟੀ** ਜਾਂ **ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ** (Second Order) ਦਾ ਸਾਰਣਿਕ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। **ਵਿਅੰਜਕ** $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ਨੂੰ ਇਸ **ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ** (Expansion) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। a_1, a_2, b_1, b_2 ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ **ਸੰਘਟਕ** (Constituents) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ a_1, b_2 ਅਤੇ a_2, b_1 ਇਸਦੇ ਅੰਗ (Elements) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਇੱਕਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ–

$$a_1 + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2 + b_2y + c_2z = 0$$

$$a_3 + b_3y + c_3z = 0$$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਤਿੰਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ x, y, z ਦਾ ਵਿਲੋਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ–

$$a_1\,(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1\,(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1\,(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

ਜਾਂ

$$a_1\,(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਫਲ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ–

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ਜਿਸਨੂੰ **ਤਿੱਜੀ ਕੋਟੀ** (Third Order) ਦਾ ਸਾਰਣਿਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਤਿੱਜੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ **ਤਿੰਨ ਪੰਕਤੀਆਂ** (Rows) ਅਤੇ **ਤਿੰਨ ਸਤੰਭ** (Columns) ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟਸ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ **ਪ੍ਰਸਾਰ** (Expansion) ਜਾਂ **ਮਾਨ** (Value) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

21.2 ਸਾਰਣਿਕ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭ (Rows and Columns of a Determinant)

ਕਿਸੀ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ, ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਨਿੱਚੇ ਵੱਲ **ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾਵਾਂ** ਉਸਦੀ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤਿੱਜੀ **ਪੰਕਤੀਆਂ** (Rows) ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ R_1, R_2, R_3,....ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ **ਉਰਧਵਾਧਰ** ਰੇਖਾਵਾਂ ਉਸਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤਿੱਜੇ....**ਸਤੰਭ** (Columns) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ C_1, C_2, C_3....ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

21.3 ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਰੂਪ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਸੰਘਟਕ (Shape and Constituents of a Determinant)

ਹਰੇਕ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਰੂਪ ਵਰਗਾਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਸਾਰਣਿਕ ਜਿੰਨੇ ਕੋਟੀ (Order) ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ ਉਸ ਵਿੱਚ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੀ ਉਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–ਤਿੱਜੀ ਕੋਟੀ (Third Order) ਦੀ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ 3 ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ 3 ਸਤੰਭ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 3^2 ਭਾਵ 9 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ n ਕੋਟੀ ਦੇ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ n ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ n ਸਤੰਭ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ n^2 ਹੋਵੇਗੀ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $(\text{ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਕੋਟੀ})^2$

21.4 ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ (Expansion of a Determinant)

ਦੂਜੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਕਰਦੇ ਹਨ–

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \\ & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & b_1 \\ a_2 & \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋ– $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & \\ & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & 2 \\ -3 & \end{vmatrix}$

$$= (4 \times 5) - (-2 \times -3) = 20 - 6 = 14$$

ਤਿੱਜੀ ਕੋਟੀ (Third Order) ਦੇ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ

ਮੰਨ ਲਿਓ ਤਿੱਜੀ ਕੋਟੀ ਦਾ ਸਾਰਣਿਕ ਹੈ–

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ (Row) ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂਦੇ ਸਾਪੇਖ ਜਾਂ ਪਹਿਲੇ ਸਤੰਭ (Column) ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(*i*) ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ($a_1\ b_1\ c_1$) ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ (Expansion in Terms of First Row)–

ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ ਕਿ $\Delta = a_1A - b_1B + c_1C$ ....(1)

ਜਿੱਥੇ A, B, C ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ– ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ +, –, +, –, ... ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

A, B, C ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ–

$A = a_1$ ਜਿਸ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੇ ਹੈ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਾਰਣਿਕ

ਨੋਟ

$B = b_1$ ਜਿਸ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਾਰਣਿਕ

$C = c_1$ ਜਿਸ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਾਰਣਿਕ

ਇੱਥੇ, a_1 ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ; ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਾਰਣਿਕ

$$|A| = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, b_1 ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਾਰਣਿਕ

$$|B| = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ਅਤੇ c_1 ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਤਿੱਜੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਾਰਣਿਕ

$$|C| = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੁਆਰਾ, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ–

$$a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1\,(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1\,(a_1c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_1c_3 - b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3$$

ਟਾਸਕ ਤਿੱਜੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ?

(*ii*) ਪਹਿਲੇ ਸਤੰਭ ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ($a_1a_2a_3$) ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ (Expansion in Terms of First Column)–

ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ ਕਿ $\Delta = a_1P - a_2\,Q + a_3R$ ....(2)

ਜਿੱਥੇ P, Q, R ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

a_1, a_2 ਅਤੇ a_3 ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੇ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ, ਉੱਪਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਣ ਤੇ–

$$P = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Q = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, R = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੁਆਰਾ

$$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\,(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3 + a_2c_1b_3 + a_3b_1c_2 - a_3c_1b_2$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨੋਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਉਲੇਖਯੋਗ ਹੈ ਕਿ **ਹਰੇਕ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਉਸਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

ਨੋਟ

ਕਿਸੀ ਸੰਘਟਕ ਦਾ ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ

ਮੰਨਿਆ ਸਾਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਤਿੱਜੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਸੰਘਟਕ c_2 ਦਾ ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਤਾਂ c_2 ਜਿਸ ਪੰਕਤੀ (Row) ਅਤੇ ਸਤੰਭ (Column) ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਉਸਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੇ ਜਿਹੜਾ ਸਾਰਣਿਕ ਬਾਕੀ ਬਚੇਗਾ ਉਹੀ ਸੰਘਟਕ c_2 ਦਾ ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ c_2 ਦਾ ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ–

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੇ ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਰੱਖਿਓ ਕਿ ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਕੱਢਦੇ ਸਮੇਂ **ਚਿੰਨ੍ਹ** ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਧਨਾਤਮਕ (+) ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)**–**

1. .... ਕੋਟੀ ਦੇ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਸਤੰਭ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
2. ਕਿਸੀ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਨਿੱਚੇ ਵੱਲ .... ਰੇਖਾਵਾਂ ਉਸੀਆਂ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤਿੱਜੀ ਪੰਕਤੀਆਂ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।
3. ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ .... ਰੇਖਾਵਾਂ ਉਸਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤਿੱਜੇ ਸਤੰਭ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।
4. ਹਰ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਰੂਪ .... ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਹਰ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਇੱਕ .... ਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਉਸਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

21.5 ਸਹਿ–ਖੰਡ (Cofactors)

ਜਿਵੇਂ ਉੱਪਰ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਸੰਘਟਕ ਦਾ ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੇ ਉਪਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਉੱਤੇ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤੇ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੇ **ਸਹਿ–ਖੰਡ** (Cofactors) ਬਣ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਵੱਡ ਅੱਖਰਾਂ C_1, C_2, C_3 ...... ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਯਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ **ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਅਤੇ ਸਖਿ–ਖੰਡ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਮਾਨ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।**

ਸਹਿ–ਖੰਡ ਦੀ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ–

$$\textbf{ਸੰਘਟਕ } a_{ij} \textbf{ ਦਾ ਸਹਿ–ਖੰਡ } = (-1)^{+} \times A_{ij}$$

ਜਿੱਥੇ a_{ij} ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ i ਵੀਂ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ j ਵੇਂ ਸਤੰਭ ਦਾ ਸੰਘਟਕ ਹੈ ਅਤੇ A_{ij}, ਸੰਘਟਕ a_{ij} ਦਾ ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਹੈ।

$$a_1 \text{ ਦਾ Cofactor} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = C_1$$

$$a_2 \text{ ਦਾ Cofactor} = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = C_2$$

$$a_3 \text{ ਦਾ Cofactor} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = C_3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (i) ਦੁਆਰਾ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਾਰਣਿਕ $= a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3$

21.6 ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣ–ਧਰਮ (Properties of Determinants)

ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਗੁਣ–ਧਰਮ ਨਿੱਖੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਾਰਣਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਗੁਣ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ–

1. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਜੇਕਰ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਜਾਂ ਨੇੜਲੀਆਂ (Adjacent) ਪੰਕਤੀਆਂ ਜਾਂ ਸਤੰਭਾਂ ਨੂੰ ਪਰਸਪਰ ਬਦਲ ਦਿੱਤੇ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮਾਨ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀਆਂ ਕੋਈ ਦੋ ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) ਜਾਂ ਸਤੰਭ (Columns) ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕ (Elements) ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਗੁਣਨ (Multiple) ਹੋਣ ਤਾਂ ਮੂਲ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
4. ਇਸ ਗੁਣਾ ਸੰਬੰਧਤ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਦੋ ਨਿਯਮ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਯੋਗ ਹਨ–
   (*i*) ਜੇਕਰ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਹੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਸਤੰਭ ਕੋਈ ਰਾਸ਼ੀ ਆਮ (Common) ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਇੱਕ ਗੁਣਲਖੰਡ (Factor) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਾਰਣਿਕ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਲੈਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਾਰਣ ਵਜੋਂ–

$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

   (*i*) ਜੇਕਰ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਹੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਸਤੰਭ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰੇ ਸਾਰਣਿਕ ਨੂੰ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. ਜੇਕਰ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਸਤੰਭ ਦਾ ਹਰ ਸੰਘਟਕ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਸਾਰਣਿਕ ਨੂੰ ਉਸੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਦੋ ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ–

$$\begin{vmatrix} a_1+p & b_1 & c_1 \\ a_2+q & b_2 & c_2 \\ a_3+r & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. ਜੇਕਰ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਕਿਸੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਸਤੰਭ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰਾਸ਼ੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਸਤੰਭ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸੰਘਟਕਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਜਾਂ ਘਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਮਾਨ ਅਪਰਿਵਰਤਿਤ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ– $\Delta' = \Delta$, ਜਦੋਂਕਿ

$$\begin{vmatrix} a_1+mb_1-nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2-nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3-nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ ਅਤੇ } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੁਣ ਦਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਹੱਤਵ ਹੈ। ਇਸ ਗੁਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸੰਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਹੀ ਗੁਣਾ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂ ਘਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹੀ ਕਿਰਿਆ ਸਤੰਭਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਨੋਟ

21.7 ਦੋ ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ (Multiplication of Two Determinants)

ਦੋ ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਕੇਵਲ ਉਸੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ ਦੋਨੋਂ **ਸਮਾਨ ਕੋਟੀ** (Same Order) ਦੇ ਹੋਣ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਨਹੀਂ।

$$\text{ਮੰਨਿਆ } A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ਤਿੱਜੀ ਕੋਟੀ (Third Order) ਦੇ ਦੋ ਸਾਰਣਿਕ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ, ਜਿਹੜਾ AB ਦੁਆਰ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਤਿੱਜੀ ਕੋਟੀ ਦਾ ਹੀ ਸਾਰਣਿਕ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਸਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ–

ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਰਣਿਕ A ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ $(a_1b_1c_1)$ ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਰੱਖ ਕੇ ਇਸਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੀ, ਦੂਜੇ ਸਾਰਣਿਕ B ਦੀ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ ਅਤੇ ਤਿੱਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸੰਘਟਕਾਂ ਤੋਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਯੋਗਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਵੇਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ–

$$\begin{array}{lccc} & (a_1\, b_1c_1) & (a_1\, b_1c_1) & (a_1\, b_1c_1) \\ & \times & \times & \times \\ & (x_1\, y_1z_1) & (x_2\, y_2z_2) & (x_3\, y_3z_3) \\ \text{ਜੋੜ} = & a_1x_1 + b_1\, y_1 + c_1z_1 & a_1x_2+b_1y_2 + c_1z_2 & a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3 \end{array}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਤਿੰਨੋਂ ਜੋੜਫਲ ਸਾਰਣਿਕ AB ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤਿੱਜੇ ਸੰਘਟਕ ਹੋਣਗੇ।

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਾਰਣਿਕ A ਦੀ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ $(a_2b_2c_2)$ ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਰੱਖਕੇ, ਦੂਜੇ ਸਾਰਣਿਕ B ਦੀਆਂ ਤਿੰਨੋਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸੰਘਟਕਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਯੋਗਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜੇ ਸਾਰਣਿਕ AB ਦੀਆਂ ਦੂਜੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੇ ਸੰਘਟਕ ਹੋਣਗੇ।

ਇਹੀ ਕਿਰਿਆ A ਦੀ ਤਿੱਜੀ ਪੰਕਤੀ $(a_3b_3c_3)$ ਅਤੇ B ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ = AB

$$= \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 & a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 & a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 & a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 & a_2x_3 + b_2y_3 + c_2z_3 \\ a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 & a_3x_2 + b_3y_2 + c_3z_2 & a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 \end{vmatrix}$$

ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ (Working Rule)

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਕਿਸੀ ਵੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਇੱਕ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ **'ਜ਼ੀਰੋ'** ਬਣਾਓ ਅਤੇ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਉਸੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਸਤੰਭ ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤਿੱਜੀ,.......ਆਦਿ ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ R_1, R_2, R_3, ...ਆਦਿ ਨਾਲ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤਿੱਜੇ,......., ਆਦਿ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ C_1, C_2, C_3,......ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਤੰਭਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਜੋ ਵੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਸਨੂੰ ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਲਿਖ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਾਰਣ 1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{16} & \mathbf{19} \\ \mathbf{14} & \mathbf{17} & \mathbf{20} \\ \mathbf{14} & \mathbf{18} & \mathbf{21} \end{vmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

ਹੱਲ : ਮੰਨਿਆ ਸਾਰਣਿਕ = Δ

ਨੋਟ

$$\therefore \ \Delta \begin{vmatrix} 13 & 16 & 3 \\ 14 & 17 & 3 \\ 14 & 18 & 3 \end{vmatrix} (C_3 - C_2) \text{ ਨਾਲ } = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \end{vmatrix} (C_2 - C_1) \text{ ਨਾਲ} = 0 \qquad (\because \ C_2 - C_3)$$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{23} & \mathbf{12} & \mathbf{11} \\ \mathbf{36} & \mathbf{10} & \mathbf{26} \\ \mathbf{63} & \mathbf{26} & \mathbf{37} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਾਰਣਿਕ

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 26 & 10 & 26 \\ 37 & 26 & 37 \end{vmatrix} \ (C_1 \text{ ਵਿੱਚੋਂ } C_2 \text{ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ ਤੇ})$$

$$= 0, \quad \therefore \ C_1 \text{ ਅਤੇ } C_3 \text{ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{18} & \mathbf{23} \\ \mathbf{14} & \mathbf{19} & \mathbf{24} \\ \mathbf{14} & \mathbf{20} & \mathbf{25} \end{vmatrix}.$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਾਰਣਿਕ

$$= \begin{vmatrix} 13 & 18 & 5 \\ 14 & 19 & 5 \\ 14 & 20 & 5 \end{vmatrix} (C_3 - C_2) \text{ ਨਾਲ}$$

$$= \begin{vmatrix} 13 & 5 & 5 \\ 14 & 5 & 5 \\ 14 & 5 & 5 \end{vmatrix} (C_3 - C_2) \text{ ਨਾਲ } = 0 \ \therefore \qquad C_2 \text{ ਅਤੇ } C_3 \text{ ਸਮਾਨ ਹਨ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{29} & \mathbf{26} & \mathbf{22} \\ \mathbf{25} & \mathbf{31} & \mathbf{27} \\ \mathbf{65} & \mathbf{54} & \mathbf{46} \end{vmatrix}.$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਾਰਣਿਕ

$$= \begin{vmatrix} 3 & 26 & 22 \\ -6 & 31 & 27 \\ 9 & 54 & 46 \end{vmatrix} (C_1 - C_2) \text{ ਨਾਲ } = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 22 \\ -6 & 4 & 27 \\ 9 & 8 & 46 \end{vmatrix} (C_2 - C_3) \text{ ਨਾਲ}$$

$$= 3 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 22 \\ -2 & 1 & 27 \\ 3 & 2 & 46 \end{vmatrix} \quad \therefore \qquad C_1 \text{ ਤੋਂ 3 ਅਤੇ } C_2 \text{ ਤੋਂ 4 ਨੇੜਲਾ ਹੈ।}$$

ਨੋਟ

$$= 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 22 \\ 0 & 3 & 71 \\ 0 & -1 & -20 \end{vmatrix}$$

R_2 ਵਿੱਚ $2R_1$ ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਤੇ R_3 ਵਿੱਚ $3R_1$ ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$= 12\ [13(-20) - 71\ (-1)] = 12\ [-60 + 71]$

$= 12 \times 11 = 132.$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+y)}}\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x^2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \boldsymbol{y^2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}.$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਾਰਣਿਕ

$$\frac{1}{(x+y)}\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ y^2 & 1 \end{vmatrix}$$

ਭਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{(x+y)}.(x^2 - y^2) = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)} = x - y$$

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y+z} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z+x} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x+y} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

ਹੱਲ : ਸਾਰਣਿਕ $= \begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & x+y+z \\ 1 & z & x+y+z \end{vmatrix}$

C_2 ਨੂੰ C_3 ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ ਤੇ

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix}$$

$= (x+y+z) \times 0$

$= 0$ $\qquad [\therefore \quad C_1 = C_3 \quad \therefore \quad \Delta = 0]$

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{c^2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}, \; C_2 - C_1 \text{ ਅਤੇ } C_3 - C_1 \text{ ਨਾਲ}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}, \; (R_1 \text{ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ})$$

$$= (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2)$$

$$= (b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)]$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

(R_1 ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ)

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a^2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b^2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c^2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

ਸੰਕੇਤ–ਉਦਾਹਰਣ 6 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ $R_2 - R_1$ ਅਤੇ $R_3 - R_1$ ਲਗਾਓ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{c^2} \\ \boldsymbol{a^3} & \boldsymbol{b^3} & \boldsymbol{c^3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{abc(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

ਹੱਲ : C_1 ਵਿੱਚ a, C_2 ਵਿੱਚ b ਅਤੇ C_3 ਵਿੱਚ c ਨੇੜਲਾ ਹੈ,

$$\therefore \qquad \text{ਸਾਰਣਿਕ } = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

ਅੱਗੇ ਉਦਾਹਰਣ 7 ਦਾ ਹੱਲ ਦੇਖੋ

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^3} & \boldsymbol{b^3} & \boldsymbol{c^3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}.$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਾਰਣਿਕ

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-a^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix}, \; (C_1 - C_2) \text{ ਤੇ } (C_2 - C_3) \text{ ਨਾਲ}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 \end{vmatrix}, (R_1 \text{ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ})$$

ਨੋਟ

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)[(b^2+bc+c^2)-(a^2+ab+b^2)]$$

$$= (a-b)(b-c)[bc+c^2-a^2-ab]$$

$$= (a-b)(b-c)[b(c-a)+(c-a)(c+a)]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0 \text{ ਜਾਂ } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix} = 0.$$

ਹੱਲ :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 0 & b-a & b^2-a^2-ca+bc \\ 0 & c-a & c^2-a^2-ab+bc \end{vmatrix}, (R_2-R_1 \text{ ਅਤੇ } R_3-R_1 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(a+b+c) \\ c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}, (C_1 \text{ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ})$$

$$= (b-a)(c-a)(a+b+c)-(b-a)(c-a)(a+b+c)$$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਾਰਣਿਕ

$$= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix}, (C_1 \text{ ਵਿੱਚ } C_2 \text{ ਤੇ } C_3 \text{ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

C_1 ਵਿੱਚੋਂ $2(a+b+c)$ ਨੂੰ common ਲੈਣ ਤੇ

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix} (R_2-R_1 \text{ ਅਤੇ } R_3-R_1 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} b+c+a & 0 \\ 0 & c+a+b \end{vmatrix} \; C_1 \text{ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ}$$

$$= 2(a+b+c)[(b+c+a)(c+a+b)-0] = 2(a+b+c)^3.$$

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

$$\begin{vmatrix} y+z & x & x \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = 4xyz.$$

ਹੱਲ : $R_1 - (R_2 + R_3)$ ਨਾਲ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਾਰਣਿਕ

$$= \begin{vmatrix} (y+z)-(y+z) & x-(x+2z) & x-(x+2y) \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2z & -2y \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = 2z\begin{vmatrix} y & y \\ z & x+y \end{vmatrix} - 2y\begin{vmatrix} y & z+x \\ z & z \end{vmatrix},$$

R_1 ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ

$$= 2z\,[y(x+y) - yz] - 2y\,[yz - z(z+x)]$$
$$= 2yz\,[(x+y-z)] - 2yz\,(y-z-x)$$
$$= 2yz\,(x+y-z-y+z-x) = 4xyz.$$

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ

(State whether the following statements are True or False) –

6. ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਅਤੇ ਸਹਿ–ਖੰਡ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੋਹਾਂ ਦੇ ਮਾਨ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
7. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਸਤੰਭਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
8. ਜੇਕਰ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਜਾਂ ਨੇੜਲੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਜਾਂ ਸਤੰਭਾਂ ਨੂੰ ਪਰਸਪਰ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮਾਨ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
9. ਜੇਕਰ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਹੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਸਤੰਭ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਪੂਰੇ ਸਾਰਣਿਕ ਨੂੰ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
10. ਦੋ ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਕੇਵਲ ਉਸੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ ਦੋਨੋਂ ਸਮਾਨ ਕੋਟੀ ਦੇ ਹੋਣ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਨਹੀਂ।

21.8 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿੰਨੇ ਚਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਨੇ ਹੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਅਸਾਨ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਬੀਜਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਸਾਰਣਿਕ (Determinant) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਵਿਅੰਜਕ $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ਨੂੰ ਇਸ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ **ਪ੍ਰਸਾਰ** (Expansion) ਜਾਂ **ਮਾਨ** (Value) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਕਿਸੀ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ, ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਨਿੱਚੇ ਵੱਲ **ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾਵਾਂ** ਉਸਦੀ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤਿੱਜੀ **ਪੰਕਤੀਆਂ** (Rows) ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ R_1, R_2, R_3,....ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ **ਉਰਧਵਾਧਰ** ਰੇਖਾਵਾਂ ਉਸਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਤਿੱਜੇ.....**ਸਤੰਭ** (Columns) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ C_1, C_2, C_3....ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

- ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ (Row) ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਜਾਂ ਪਹਿਲੇ ਸਤੰਭ (Column) ਦੇ ਸੰਘਟਕਾਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਹਰੇਕ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਉਸਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਉਪਸਾਰਣਿਕ ਅਤੇ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੋਹਾਂ ਦੇ ਮਾਨ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਸਾਰਣਿਕ ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਜਾਂ ਨੇੜਲੇ (Adjacent) ਪੰਕਤੀਆਂ ਜਾਂ ਸਤੰਭਾਂ ਨੂੰ ਪਰਸਪਰ ਬਦਲ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ, ਤਾਂ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮਾਨ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀਆਂ ਕੋਈ ਦੋ ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) ਜਾਂ ਸਤੰਭ (Columns) ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਘਟਕ (Elements) ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਗੁਣਨ (Multiple) ਹੋਣ ਤਾਂ ਮੂਲ ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
- ਦੋ ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਕੇਵਲ ਉਸੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ ਦੋਨੋਂ **ਸਮਾਨ ਕੋਟੀ** (Same Order) ਦੇ ਹੋਣ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਨਹੀਂ।

21.9 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਵਿਸਥਾਰ (Expansion) – ਵਿਸਤਾਰ।
- ਮਾਨ (value) – ਮੁੱਲ।

21.10 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਸਾਰਣਿਕ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਸਹਿਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿਓ।
2. ਸਾਰਣਿਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣ-ਧਰਮ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।
3. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ–

(a) $\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 65 & 54 & 46 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

(**ਉੱਤਰ : 132**) (**ਉੱਤਰ :** $(a-b)(b-c)(c-a)$)

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b).$$

5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\begin{vmatrix} 23 & 12 & 11 \\ 36 & 10 & 26 \\ 63 & 26 & 37 \end{vmatrix} = 0$$

ਨੋਟ

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਤਿੱਜਾ 2. ਖਿਤਿਜ 3. ਉਰਧਵਾਧਰ 4. ਵਰਗਾਕਾਰ 5. ਨਿਸ਼ਚਿਤ
6. ਸੱਚ 7. ਝੂਠ 8. ਸੱਚ 9. ਝੂਠ 10. ਸੱਚ

21.11 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
4. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
5. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।

ਇਕਾਈ–22: ਆਵਯੂਹ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ) ਦੀ ਰੈਂਕ (Rank of Matrix)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਰੈਂਕ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋਣਗੇ।
- ਰੈਂਕ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣ ਸਹਿਤ ਸਮਝਣਗੇ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਰੱਖਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਰੈਂਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿੱਚ n ਸਤੰਭ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ m ਘਟਕ ਹੈ, ਤਾਂ ਰੇਖਕ ਸੁਤੰਤਰ ਸੈਟ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਤੰਭ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਉਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰੈਂਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਇਸਨੂੰ $r(A)$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੁਤੰਤਰ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰੈਂਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਇੱਕ $An \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੈਰ ਇੱਕਵਚਨੀ (non-singuler) ਉਦੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੀ ਰੈਂਕ n ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ।

22.1 ਰੈਂਦ ਦੇ ਗੁਣ (Characteristics of Rank)

- ਕੇਵਲ ਜ਼ੀਰੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਹੀ ਜ਼ੀਰੋ ਰੈਂਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- rank $(A) \le \min(m, n)$ {ਰੈਂਕ $(A) \le$ ਨਿਊਨਤਮ (m, n)}
- ਜੇਕਰ A ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ $(m = n)$ ਤਾਂ A ਤਾਂ ਹੀ ਪਰਿਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ A ਦੀ ਰੈਂਕ n ਹੋਵੇਗੀ।
- ਰੈਂਕ $(AB) \le$ ਨਿਊਨਤਮ (ਰੈਂਕ A, ਰੈਂਕ B)
- ਰੈਂਕ (A) + ਰੈਂਕ $(B) - n \le$ ਰੈਂਕ (AB)
- ਰੈਂਕ (CA) = ਰੈਂਕ (A) {C ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹੈ}

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ

ਸੁਤੰਤਰ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਆਵਯੂਹ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ) ਦੀ ਰੈਂਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰੈਂਕ ਕੱਢੋ ਨੋਟ

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

ਪੰਕਤੀ ਆਪਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \xrightarrow{R_{21}(1-2),\, R_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2(-1),\, R_3(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{12}(-2)]{R_3(1/2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{2-3}(-1),\, R_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ਇਂੱਥੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਤਿੰਨ ਗੈਰ-ਜ਼ੀਰੋ ਪੰਕਤੀਆਂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ ਰੈਂਕ $(A) = 3$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਜੇਕਰ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰੈਂਕ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to -R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \end{matrix}$$

ਇੱਥੇ non-zero ਪੰਕਤੀਆਂ 2 ਹਨ ਭਾਵ ਰੈਂਕ $(A) = 2$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 5-x & 2 & 1 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{bmatrix}$ ਤਾਂ x ਦੀ ਹਰ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ ਰੈਂਕ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 5-x & 2 & 1 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{bmatrix}$

ਨੋਟ

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਤਿੱਜੇ ਕਾਲਮ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ

$= x(x-1)(x-6)\ |A| = 1\{(0-1(1-x)\} - 0\{0-2\} + (1-x)\{(5-x)(1-x)-4\}$

ਭਾਵ, ਜੇਕਰ $x \neq 0,\ 1$ ਅਤੇ 6 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੀ ਰੈਂਕ 3 ਹੋਵੇਗੀ

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x = 0, 1, 6$ ਤਾਂ $\begin{bmatrix} 5-x & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0,$ ਰੈਂਕ 2 ਹੋਵੇਗੀ।

ਰੇਖੀ ਨਿਰਭਰਤਾ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰੈਂਕ (Linear Dependance and Rank of Matrix): ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ (ਕਾਲਮ) ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਹੀ ਰੇਖੀ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦੇਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਪੰਕਤੀਆਂ (ਕਾਲਮ) ਦਾ ਰੇਖੀ ਸੰਯੋਜਨ ਜ਼ੀਰੋ ਵੇਕਟਰ (vector) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਭਾਵ;

ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ਤਾਂ

$$K_1 a_{11} + K_2 a_{12} + K_3 a_{13} = 0$$
$$K_1 a_{12} + K_2 a_{22} + K_3 a_{32} = 0$$
$$K_1 a_{13} + K_2 a_{23} + K_3 a_{33} = 0$$

ਇੱਥੇ K_1, K_2 ਅਤੇ K_3 ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਨਿੱਚੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰੇਖੀ ਸੁਤੰਤਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਅਤੇ ਰੈਂਕ ਕੱਢੋ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

ਹੱਲ : ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ Row 1 (R_1) ਅਤੇ $2(R_2)$ ਵਿੱਚ −1 ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਤੇ $3(R_3)$] ਤਾਂ

$$-1R_1 - 1\,R_2 + R_3 = 0 \qquad (1)$$
$$-2\,R_1 + R_2 = 0 \qquad (2)$$
$$-3\,R_1 + R_3 = 0 \qquad (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $R_1, R_2,$ ਅਤੇ R_3 ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸੁਤੰਤਰਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਸਮੀਕਰਣ (2) $R_1,$ ਅਤੇ R_2 ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (3) R_1 ਅਤੇ R_3 ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦਰਸਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਰੈਂਕ ਦੇ ਲਈ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ਭਾਵ ਰੈਂਕ $(A) = 1$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ -10 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਰੇਖੀ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਣ ਕਰੋ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (A) ਦੀ ਰੈਂਕ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : $C_1R_1 + C_2R_2 + C_3R_3 = 0$

$$6C_1 - 10C_2 + 5C_3 = 0 \qquad (1)$$
$$3C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0 \qquad (2)$$
$$5C_1 + 8C_2 + 3C_3 = 0 \qquad (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਨੋਟ

$C_1 = -10$, C_2 1 ਅਤੇ $C_3 = 14$

ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖੀ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦੇਖੀ ਜਾਵੇਗੀ,

ਭਾਵ R_1 R_2 ਅਤੇ R_3 ਰੇਖੀ ਨਿਰਭਰਤਾ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਰੇਖੀ ਸੰਯੋਗ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ ਹੈ ਭਾਵ ਰੈਂਕ $(A) = 2$ ਹੋਵੇਗੀ।

22.2 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਕੇਵਲ ਜ਼ੀਰੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਹੀ ਜ਼ੀਰੋ ਰੈਂਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- rank $(A) \le \min(m, n)$ {ਰੈਂਕ $(A) \le$ ਨਿਊਨਤਮ (m, n)}
- ਜੇਕਰ A ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ $(m = n)$ ਤਾਂ A ਤਾਂ ਹੀ ਪਰਿਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਦੋਂ A ਦੀ ਰੈਂਕ n ਹੋਵੇਗੀ।
- ਰੈਂਕ $(AB) \le$ ਨਿਊਨਤਮ (ਰੈਂਕ A, ਰੈਂਕ B)
- ਰੈਂਕ (A) + ਰੈਂਕ $(B) - n \le$ ਰੈਂਕ (AB)
- ਰੈਂਕ (A) = ਰੈਂਕ (A) {C ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹਨ}

22.3 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੈਂਕ (Matrix) – ਸੁਤੰਤਰ ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਖਿਆ।

22.4 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰੈਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. ਰੇਖੀ ਸੁਤੰਤਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

22.5 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
2. ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
3. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.*।
4. ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
5. ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
6. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
8. ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–23: ਆਵਯੂਹ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ) ਦੇ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਅਣੁਪ੍ਰਯੋਗ (Application of Matrices in Economics)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਆਵਯੂਹ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ) ਦੇ ਅਣੁਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਆਵਯੂਹ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਗਣਿਤਕ ਤਕਨੀਕ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਕਈ ਆਰਣਿਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਵਿਆਪਕ ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆ, ਰੇਖੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਨ੍ਹਾਂਸਾਰੀਆਂ ਦਾ ਹੱਲ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰੇਮਰ ਨਿਯਮ, ਇਨਵਰਸ (A^{-1}) ਵਿਧੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਉਤਪਾਦਨ, ਮੰਗ, ਪੂਰਤੀ, ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ ਅਤੇ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਆਮਦਨ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਆਦਿ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਨ।

23.1 ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਆਵਯੂਹ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ) ਦੇ ਅਣੁਪ੍ਰਯੋਗ (Application of Matrices in Economics)

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਮੰਨਿਆ ਇੱਕ ਤਿੰਨ–ਖੇਤਰੀ ਵਰਿਹਤ ਆਰਥਿਕ ਮਾਡਲ ਨਿਮਨ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ–

$$Y = C + A_0$$
$$C = a + b\,(Y - T)$$
$$T = d + ty$$

ਜਿੱਥੇ $Y \to$ ਆਮਦਨ, $C \to$ ਉਪਭੋਗ

$T \to$ ਕਰ ਰਾਜਸਵ, $t \to$ ਕਰ ਦੀ ਦਰ

A_0, a, b ਅਤੇ c ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਾਚਲ ਹੈ ਤਾਂ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਆਮਦਨ, ਉਪਯੋਗ ਅਤੇ ਕਰ ਰਾਜਸਵ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਰੋ;

ਹੱਲ: ਦਿੱਤਾ ਹੈ $Y = C + A_0$

or $y - C = A_0$ (1)

$-by + c + bT = a$ (2)

$-ty + T = d$ (3)

ਸਮੀਕਰਣ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੇਠਲੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ; ਨੋਟ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ a \\ d \end{bmatrix}$$

ਜਿੱਥੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}$

or $|A| = 1\,(1+0) + 1\,(-b+tb) = 1 - b + tb = 1 - b[1-t]$

ਕ੍ਰੇਮਰ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ,

$$Y = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} A_0 & -1 & 0 \\ a & 1 & b \\ d & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{A_0(1) + 1(a - bd)}{1 - b(1-t)} = \frac{a - bd + A_0}{1 - b\,[1-t]}$$

$$C = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & A_0 & 0 \\ -b & a & b \\ -t & d & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a - bd - A_0(-b+bt)}{1 - b(1-t)}$$

$$T = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & A_0 \\ -b & 1 & a \\ -t & 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{d + (a - bd) + A_0\,(t)}{1 - b(1-t)}$$ **ਉੱਤਰ**

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{vmatrix}$ ਤਾਂ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਯੂਹ ਦਾ ਪਰਿਵਰਤ (Transpose of Matrix) ਬਣਾਉਣ ਤੇ

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

ਸਹਿਖੰਡਕ (Adjoint) ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਵਯੂਹ A (aij) ਦੇ ਸਹਿਖੰਡਕ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਢਾਂਗੇ–

ਸਹਿਖੰਡਕ $1 = +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 36 - 25 = 11$

ਨੋਟ

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 2 = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = (24-15) = -9$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 3 = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10-9 = 1$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 2 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 24-15 = -9$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 3 = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 12-9 = 13$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 5 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5-6) = (-1) = +1$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 3 = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(10-9) = 1$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 5 = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(5-6) = 1$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 12 = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3-4) = -1$$

$$Adj.\,A = \begin{vmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(36-25) - 2(24-15) + 3(10-9)$$

$$= (1\times 11) - (2\times 9) + (3\times 1) = 11 - 18 + 3 = -4$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\,A}{|A|} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{11}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤ ਨਾਲ x, y ਅਤੇ z ਦੇ ਅਨੁਕਲ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$x - 2y + 3z = 1 \qquad .....(i)$$

$$3x - y + 4z = 3 \qquad .....(ii)$$

$$2x + y - 2z = -1 \qquad .....(iii)$$

ਹੱਲ : ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਵਯੂਹ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ

ਨੋਟ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ਕ੍ਰਮੇਰ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Transpose of } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 1 = +\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = +(-2-4) = -6$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 3 = -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -(4-3) = -1$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 2 = +\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = +(-8+3) = -5$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } -2 = -\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = +(-6-8) = +14$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } -1 = +\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = +(-2-6) = -8$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 1 = -\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -(4-9) = +5$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 3 = +\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = +(3+2) = +5$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } 4 = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -(1+4) = -5$$

$$\text{ਸਹਿਖੰਡਕ } -2 = +\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = +(-1-6) = +5$$

$$\text{Adjoint } A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -5 \\ +14 & -8 & +5 \\ +5 & -5 & +5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ਨੋਟ

$$= 1 \times (2-4) + 2(-6-8) + 3(3+2)$$
$$= -2b - 28 = 15 = -15$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$A^{-1} = \frac{Adj.\,A}{|A|} = \frac{1}{-15}\begin{bmatrix} -6 & -1 & -5 \\ 14 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-6}{-15} & \frac{1}{15} & \frac{5}{15} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{5}{15} \\ -\frac{5}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{5}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\times 1 & +\frac{3}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & +\frac{24}{15} & +\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & +\frac{3}{3} & +\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{15} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $x = -\frac{8}{15}, y = 1, z = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ।

23.2 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਜਿੰਨੀ ਵੀ ਵਿਆਪਕ ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆ, ਰੇਖੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਦਾ ਹੱਨ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰੇਮਰ ਨਿਯਮ, ਇਨਵਰਸ (A^{-1}) ਵਿਧੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਉਤਪਾਦਨ, ਮੰਗ, ਪੂਰਤੀ, ਆਗਤ ਨਿਰਗਤ ਅਤੇ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਆਮਦਨ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਆਦਿ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

23.3 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix) – ਸੰਰਚਨ, ਢਾਂਚਾ, ਬਣਾਵਟ, ਕ੍ਰਮਬੱਧਤਾ।

23.4 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਜੇਕਰ $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 13 \end{vmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਨੋਟ

2. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ a, b, c ਦਾ ਅਨੁਕੂਲ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$a + 2b + 6c = 1$$
$$3a - 4b - 2c = 6$$
$$2a - b - 5c = -2$$

23.5 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
2. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
7. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।

ਇਕਾਈ-24: ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ (Input-Output Analysis)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ।
- ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦਾ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਸਮੁੱਚ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੰਬੰਧੀ।
- ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਦੂਜੇ ਸਮੁੱਚ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੰਬੰਧੀ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਜਾਣਨਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਆਗਤ ਅਤੇ ਨਿਰਗਤ ਦਾ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ? ਆਗਤ (Input) ਦਾ ਭਾਵ ਉਤਪਾਦਕ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੱਗਰੀ (Material) ਦੀ ਮੰਗ ਕਰਨ ਤੋਂ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਿਰਗਤ (Output) ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਭਾਵ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਯਤਨ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਫਲ ਤੋਂ ਹੈ। **ਪ੍ਰੋ. ਜੇ.ਆਰ. ਹਿਕਸ** (J.R. Hicks) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਾਗਤ ਦਾ ਮਤਲਬ ਉਸ ਸਮੱਗਰੀ ਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਉਤਪਾਦਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਕਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਨਿਰਗਤ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਉਤਪਾਦਕ ਜਿਸਦਾ ਵਿਕਰੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਹਿਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਆਗਤ ਫਰਮ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਲਾਗਤ ਹੈ ਅਤੇ ਨਿਰਗਤ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਹੈ।

ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਉਦਯੋਗ ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਪੂਰੀ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਨੂੰ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਨਿਰਭਰਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰਗਤ ਦੂਜੇ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਲਈ ਆਗਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਜੇ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰਗਤ ਪਹਿਲੇ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਲਈ ਆਗਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਕੋਲਾ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰਗਤ ਇਸਪਾਤ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਆਗਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟਸ ਇਸਪਾਤ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰਗਤ ਕੋਲਾ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਲਈ ਆਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

24.1 ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ (Assumptions of Input-Output Analysis)

ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ-

(1) ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਪੂਰਣ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(2) ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ-ਅੰਤ ਉਦਯੋਗ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਅਖੀਰਲਾ ਮੰਗ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਹਰ ਖੇਤਰ ਦੀ ਉਪ-ਵੰਡ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(3) ਹਰ ਉਦਯੋਗ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਸੰਯੁਕਤ ਉਤਪਾਦਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(4) ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਆਗਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(5) ਉਤਪਾਦਨ ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਤੀਫਲ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(6) ਤਕਨੀਕੀ ਪ੍ਰਗਤੀ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ, ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਆਗਤ ਗੁਣਾਂਕ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(7) ਇੱਥੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਾਹਰੀ ਮਿਤਵਤਾਵਾਂ ਜਾਂ ਅਮਿਤਵਤਾਵਾਂ ਉਤਪੰਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

24.1.1 ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦਾ ਸਟੈਟਿਕ ਆਗਤ-ਆਦਰਸ਼-ਖੁੱਲਾ ਆਦਰਸ਼ (Leontief's Static Input-Output Model—Open Model)

ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦਾ ਸਟੈਟਿਕ ਆਗਤ-ਨਿਰਤ ਆਦਰਸ਼ ਉਪਰੋਕਤ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦਾ ਸਟੈਟਿਕ ਆਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨਿਆ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਤਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਖੇਤੀ ਅਤੇ ਉਦਯੋਗ ਅੰਤ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਖੇਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਆਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨੋਂ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਨਿਰਗਤ (Output), ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) (ਖਿਤਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ) ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਆਗਤ (Input), ਸਤੰਭਾਂ (Columns) (ਲੰਬਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ) ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਯੋਗ 300 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ ਜੋ ਖੇਤੀ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਨਿਰਗਤ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ 50 ਇਕਾਈਆਂ ਖੇਤੀ ਆਪਣੇ-ਆਪ, 200 ਇਕਾਈਆਂ ਉਦਯੋਗ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 50 ਇਕਾਈਆਂ ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਆਗਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਉਦਯੋਗ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ੍ਹ 150 ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਉਤਪਾਦਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 55 ਇਕਾਈਆਂ ਖੇਤੀ, 25 ਇਕਾਈਆਂ ਆਪਣੇ-ਆਪ ਉਦਯੋਗ ਅਤੇ 70 ਇਕਾਈਆਂ ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ ਤਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਖੇਤਰਾਂ ਦੀ ਲਾਗਤ ਨੂੰ ਦੱਸਦੇ ਹਨ। ਪਹਿਲੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਖੇਤੀ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ 300 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ 125 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਲਾਗਤ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 50 ਇਕਾਈਆਂ ਆਪਣੇ-ਆਪ ਖੇਤੀ, 55 ਇਕਾਈਆਂ ਉਦਯੋਗ ਅਤੇ 20 ਇਕਾਈਆਂ ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ ਦੁਆਰਾ ਆਗਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਦੂਜੇ ਸਤੰਭ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਦਯੋਗ ਦੀਆਂ 150 ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ 255 ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲਾਗਤ ਲਗਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 200 ਇਕਾਈਆਂ ਖੇਤੀ, 25 ਇਕਾਈਆਂ ਆਪਣੇ-ਆਪ ਉਦਯੋਗ ਅਤੇ 30 ਇਕਾਈਆਂ ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਤਿੱਜੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਜ਼ੀਰੋ ਇਹ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ ਉਪਭੋਗ ਖੇਤਰ ਹੈ ਜੋ ਕੁੱਝ ਵੀ ਵਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ–24.1 ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ

	ਖਰੀਦ ਖੇਤਰ →				ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਜਾਂ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ
	ਖੇਤਰ	**ਖੇਤੀ (1)**	**ਉਦਯੋਗ (2)**	**ਆਖਰੀ ਮੰਗ (3)**	
ਵਿਕਰੀ ਖੇਤਰ ↑	(1) ਖੇਤੀ	50	200	50	300
	(2) ਉਦਯੋਗ	55	25	70	150
	(3) ਘਰੇਲੂ	20	30	0	50
	ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਜਾਂ ਕੁੱਲ ਆਗਤ	125	255	120	500

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਧਾਰਣ ਪ੍ਰਦੇਯ ਵਯੂਹ (Transaction Matrix) ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ–24.2 ਪ੍ਰਦੇਯ ਵਯੂਹ

	ਖਰੀਦ ਖੇਤਰ				ਕੁੱਲ ਨਿਰਗਤ
	ਖੇਤਰ	**ਖੇਤੀ** (1)	**ਉਦਯੋਗ** (2)	**ਆਖਰੀ ਮੰਗ** (3)	
ਵਿਕਰੀ ਖੇਤਰ ↑	(1) ਖੇਤੀ	x_{11}	x_{12}	D_1	X_1
	(2) ਉਦਯੋਗ	x_{21}	x_{22}	D_2	X_2
	(3) ਘਰੇਲੂ	x_{31}	x_{32}	D_0	X_3

ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਸਤੰਭਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਹੇਠਲੇ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ–

$$X_1 = f_1\,(x_{11}, x_{21}, x_{31}) \text{ ਜਾਂ } 300 = f_1\,(50, 55, 20)$$

$$X_2 = f_2\,(x_{12}, x_{22}, x_{33}) \text{ ਜਾਂ } 150 = f_2\,(200, 25, 30)$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਵਿਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। (ਪੰਕਤੀ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਭਾਗ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ)

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + D_1$$

$$X_2 = x_{21} + x_{22} + D_2$$

$$X_3 = x_{31} + x_{32}$$

ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ i ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ n ਉਦਯੋਗਾਂ ਦੁਆਰਾ ਆਗਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਓ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ,

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{in} + D_1$$

ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਨੇ ਸਥਿਰ ਗੁਣਾਂਕ ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਦਾ ਵੀ ਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ (Technological Coefficient) ਹੋਵੇਗਾ–

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

ਇੱਥੇ, $x_{11} = i$ਵਾਂ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਜੋ ਕਿ jਵੇਂ ਉਦਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$X_1 = j$ਵੇਂ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ-1 ਵਿੱਚ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਹੇਠਲੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ-

ਸਾਰਣੀ 24.3 ਤਕਨੀਕੀ ਵਯੂਹ

(ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਗੁਣਾਂਕ)

		ਕਾਰਜ ਖੇਤਰ		ਆਖਰੀ ਮੰਗ (3)	ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ
		ਖੇਤੀ (1)	ਉਦਯੋਗ (2)		
ਵਿਕਰੀ ਖੇਤਰ	ਖੇਤੀ	0.16	1.33	50	600
	ਉਦਯੋਗ	0.18	0.16	70	150
	ਵਿਕਰੀ ਖੇਤਰ	0.06	0.20	0	50

ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਕੱਢਣ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਖੇਤਰ ਦੇ ਆਗਤ ਵਿੱਚ ਉਸ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ, ਖੇਤੀ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ 300 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਖੇਤੀ ਦਾ ਆਗਤ 50, 55 ਅਤੇ 20 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ, ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾਂਕ $\frac{50}{300} = 0.16$, $\frac{55}{300} = 0.18$ ਅਤੇ $\frac{20}{300} = 0.06$ ਹੋਣਗੇ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਜੇ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਵਯੂਹ ਬੀਜਗਣਿਤ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

ਮੰਨਿਆ ਸਾਡਾ ਸਧਾਰਣ ਆਦਰਸ਼ ਹੇਠ ਹੈ–

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots x_{in} + D_1 \qquad \ldots(24.1)$$

ਇੱਥੇ $X_1 = i$ਵੇਂ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ, ਜਿੱਥੇ $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$

$x_{ij} = i$ਵੇਂ ਖੇਤਰ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਉਹ ਹਿੱਸਾ ਜਿਹੜਾ jਵੇਂ ਖੇਤਰ ਦੁਆਰਾ ਆਗਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਦਰਸ਼ (24.1) ਨੂੰ n ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + D_1$$
$$X_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + D_2$$
$$X_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + D_n$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਕਨੀਕੀ ਸਥਿਰ ਅੰਕ

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$ ਇੱਥੇ $x_i = j$ਵੇਂ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ

Or $x_{ij} = a_{ij}X_j$

ਨੋਟ

ਜੇਕਰ $x_{11} = a_{11} X_1, X_{12} = a_{12} X_2$ ਆਦਿ।

ਹੁਣ ਸਾਡੇ ਯੁਗਮਪਦ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋਣਗੇ–

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n + D_1$$
$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n + D_2$$
$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n + D_n$$

ਸਧਾਰਣ ਆਦਰਸ਼ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$X_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + D_n$$

ਜਾਂ $X = AX + D$ .....(24.2)

ਇੱਥੇ $$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{12} & ---- & a_{1n} \\ a_{n1} & ---- & a_{nn} \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

ਸਮੀਕਰਣ (24.2) ਨਾਲ

$$D = X - AX = (I - A)\, X$$

ਇੱਥੇ I ਸਤਸਮਕਾਰੀ ਵਯੂਹ (Idently Matrix) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$X = (I - A)^{-1}\, D \qquad ....(24.3)$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਇੱਥੇ $(I - A)$ ਇੱਕ ਵਿਪਰੀਤ ਵਯੂਹ (Inverse Matrix) ਹੈ।

24.1.2 ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations of Input-Output Model)

ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਆਰਥਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਸਦੀ ਆਪਣੀਆਂ ਕੁੱਝ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹੜੀਆਂ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਹਨ–

1. ਪੂਰਵ–ਧਾਰਣਾਵਾਂ ਦੀ ਅਵਿਵਹਾਰਿਕਤਾ (Impracticability of the Assumptions)–ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਆਦਰਸ਼ ਦੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਅਵਿਵਹਾਰਿਕ ਹਨ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ (Technological Coefficient) ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਤਕਨੀਕੀ ਸਥਿਰਤਾ ਜਾਂ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੁਆਰਾ ਲਗਾਏ ਗਏ ਸਾਧਨਾਂ ਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਦਰਸ਼ ਇਹ ਵੀ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਖੇਤਰਾਂ ਦੀ ਪੂੰਜੀ ਸੰਰਚਨਾ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਹਰੇਕ ਖੇਤਰ ਦੀ ਪੂੰਜੀ ਦੀ ਮੰਗ ਭਿੰਨ–ਭਿੰਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਪੂੰਜੀ ਸੰਰਚਨਾ ਵੀ ਹਰੇਕ ਖੇਤਰ ਦੇ ਲਈ ਭਿੰਨ–ਭਿੰਨ ਹੋਵੇਗੀ।

2. ਕੁੱਝ ਸਾਧਨਾਂ ਦੀ ਉਪੇਖਿਆ (Neglecting Certain Factors)–ਇਸ ਨਾਲ ਆਦਰਸ਼ ਦੀ ਦ੍ਰਿੜ੍ਹ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ (Rigid Nature) ਦੇ ਕਾਰਨ ਵੱਧਦੀ ਹੋਈ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਨਿਵਾਰਣ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਇੱਕ ਪੱਖੀ ਸਿਧਾਂਤ (One Sided Analysis)–ਇਹ ਸਿਧਾਂਤ ਇੱਕ ਪੱਖੀ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਕੇਵਲ ਉਤਪਾਦਕ ਖੇਤਰ (Productive Sector) ਨੂੰ ਹੀ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਤਪਾਦਕ ਖੇਤਰ ਦੀ ਬਿਲਕੁਲ ਉਪੇਖਿਆ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

4. ਸਾਧਨ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀ ਉਪੇਖਿਆ (Neglecting Factors of Substitution)–ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਦੀ ਸਥਿਰਤਾ ਦੀ ਮਾਨਤਾ ਸਾਧਨ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦੀ ਉਪੇਖਿਆ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅਸਲੀਅਤ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਅਜਿਹੀ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਅਲਪਕਾਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਬਹੁਤ ਵੱਧ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

5. ਖੇਤਰੀ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਲੋਪ (Absence of Linear Relations)-ਇਸ ਆਦਰਸ਼ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਖੇਤਰ ਦਾ ਆਗਤ ਦੂਜੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਨਿਰਗਤ ਹੈ ਭਾਵ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸੰਬੰਧੀ ਦੇਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਧਨਾਂ ਦੀ ਅਣਵੰਡਤਾ ਦੇ ਕਾਰਨ ਨਿਰਗਤ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਆਗਤ ਵਾਧੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

6. ਭੌਤਿਕ ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ (Use of Physical Units)-ਵਿਵਹਾਰ ਵਿੱਚ ਵਸਤੂਆਂ ਅਤੇ ਸੇਵਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਮੁਦਰਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੀ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਭੌਤਿਕ ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆਗਤ- ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦਾ ਸਮੁਚਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਵਿਭਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ ਅਤੇ ਸੇਵਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਭੌਤਿਕ ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਮਾਪ ਭਿੰਨ- ਭਿੰਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਸਾਰਣੀ ਅਤੇ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਕਰਨਾ ਪਏਗਾ।

7. ਜਟਿਲਤਾ (Complexity)-ਇਸ ਵਿਸ਼ਲੇਬਣ ਵਿੱਚ ਕਈ ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਅਤੇ ਗਣਿਤਕ ਤਕਨੀਕੀਆਂ ਦਾ ਸਹਾਰਾ ਲੈਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉੱਚ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਸੰਖਿਅਕ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਜਰੂਰੀ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਰਨ ਇਹ ਤਕਨੀਕੀ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਜਟਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਟਾਸਕ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀਆਂ ਕਿਸੇ ਤਿੰਨ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

24.2 ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦਾ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ (Leontief's Input-Output Closed Model)

ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਖੁੱਲੇ ਆਦਰਸ਼ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਖੇਤਰ (ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ) ਨੂੰ ਪ੍ਰਥਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਮੰਨਿਆ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਵੀ ਆਰਣਿਕ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਖੇਤਰ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਰਹੇਗਾ ਜਿਸਦਾ ਸੰਬੰਧ ਬਾਹਰੀ ਖੇਤਰ ਨਾਲ ਹੋਵੇ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਸਤੂ ਮੱਧਮਿਕ ਵਸਤੂਆਂ (Intermediate Goods) ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ $(n + 1)$ ਉਦਯੋਗ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਤ ਨਿਰਗਤਾਂ ਨੂੰ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਨਿਰਗਤਾਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਨੂੰ ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ (Closed Model) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪੂਰੀ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਪੂਰੀ ਪ੍ਰਤੀਯੋਗਤਾ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸਰਕਾਰੀ ਦਖਲਅੰਦਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ $(n + 1)$ ਉਦਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਭਿੰਨ ਨਿਰਗਤ x_i $(i = 1, 2 ..... n + 1)$ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਆਖਰੀ ਖੇਤਰ ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਨਿਰਗਤ X_{n+1} ਹੈ। ਮੰਨਿਆ $x_{ij} = i$ਵੇਂ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰਗਤ, ਜੋ ਕਿ jਵੇਂ ਉਦਯੋਗ ਨੂੰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)-

1. ਆਗਤ ਦਾ ਭਾਵ ਉਤਪਾਦਕ ਦਾ .... ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੱਗਰੀ ਦੀ ਮੰਗ ਕਰਨ ਤੋਂ ਹੈ।
2. .... ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਅਰਥ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਯਤਨ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਫਲ ਤੋਂ ਹੈ।
3. ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਉਦਯੋਗ ਦੇ .... ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. .... ਆਦਰਸ਼ ਦੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਅਵਿਵਹਾਰਿਕ ਹਨ।
5. ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅੰਤ ਉਦਯੋਗ ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਪੂਰੀ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਨੂੰ ਅੰਤ .... ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਨੋਟ

24.3 ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਸਮੁੱਚ (First Set for Equilibrium Equation of Closed Model)

ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ

$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} \qquad .....(24.4)$$

$(i = 1, 2, ... n + 1)$

ਸਥਿਰ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਦੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ,

$$x_{ij} = a_{ij}X_i \qquad .....(24.5)$$

ਸਮੀਕਰਣ (24.5) ਦਾ ਮਾਨ ਸਮੀਕਰਣ (24.6) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_j$$

ਜਾਂ

$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_j = 0 \qquad .....(24.6)$$

ਸਮੀਕਰਣ (24.6) ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਸਮੁੱਚ ਹੈ।

24.4 ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਦੂਜਾ ਸਮੁੱਚ (The Second Set of Equilibrium Equation of Closed Model)

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮੁੱਲਾਂ P_i $(i = 1, 2 .... n + 1)$ ਉੱਤੇ ਧਿਆਨ ਕੇਂਦਰਿਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ P_i ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ ਦੀ ਮਿਹਨਤ ਦਰ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇਹ ਮੰਨਕੇ ਕਿ ਉਦਯੋਗ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤੀਆਂ (Receipts) ਅਤੇ ਲਾਗਤਾਂ (Costs) ਸਮਾਨ ਹਨ, ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਵਯੁਤ ਉਤਪਾਦਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

iਵੇਂ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਲਈ,

$$\text{ਪ੍ਰਾਪਤੀਆਂ} = X_iP_i$$

ਅਤੇ

$$\text{ਲਾਗਤ} = \sum_{j=1}^{n+1} P_i X_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i P_i$$

ਜਿੱਥੇ, $x_{ij} = a_{ij} X_i$

ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ,

$$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i P_i$$

ਜਾਂ

$$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i P_i$$

ਜਾਂ

$$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i P_i = 0 \qquad .....(24.7)$$

$i = 1, 2, ... n$

ਸਮੀਕਰਣ (24.7) ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਦੂਜਾ ਸਮੁੱਚ ਹੈ।

ਨੋਟ

24.4.1 ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦੇ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਆਦਰਸ਼ ਉੱਤੇ ਸੰਖੇਪ ਟਿੱਪਣੀ (Short note on Leontief's Dynamic Model)

ਸਥਿਤਕ ਆਦਰਸ਼ ਵਿੱਚ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪਰਸਪਰ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਗੁਣਾਂਕ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਸਟਾਕ (Stock) ਦੀ ਅਸਲ ਜਰੂਰਤ ਉੱਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਨਹੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹ, ਇਹ ਵੀ ਦੱਸਣ ਵਿੱਚ ਅਸਮਰੱਥ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਸਾਧਨ ਦੀ ਉਹ ਮਾਤਰਾ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਉਦਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਖਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨੀ ਪੂੰਜੀ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਪੂੰਜੀ ਦੀ ਮੰਗ ਸਥਿਰ ਪੂੰਜੀ ਵਿਨਿਯੋਗ ਜਿਵੇਂ ਨਿਰਮਾਣ, ਮਸ਼ੀਨ ਆਦਿ ਜਾਂ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦਾ ਸਟਾਕ ਬਣਾਏ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਥਿਰਕ ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ (ਖੁੱਲਾ ਆਦਰਸ਼) ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਪੂੰਜੀ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਵੇ, ਉਦੋਂ ਇਹ ਵਿਵਸਥਾ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪੂੰਜੀ ਨਿਵੇਸ਼ ਇਸ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ ਦਾ ਇੱਕ ਅਭੀਨਵ ਲੱਛਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ ਸਥਿਤਕ ਆਦਰਸ਼ (ਖੁੱਲਾ ਆਦਰਸ਼) ਵਿੱਚ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਸਹਾਰਾ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਖੇਤਰ ਦੇ ਲਈ ਜਰੂਰੀ ਪੂੰਜੀ ਸਮੇਂ ਅੰਤਰਾਲ ਸਹਿਤ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਆਦਰਸ਼ ਸਥਿਤਕ ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ (ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਖੁੱਲਾ ਆਦਰਸ਼) ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੀ ਹੈ।

ਮਾਨਤਾਵਾਂ (Assumptions)

ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਆਦਰਸ਼ ਸਥਿਤਕ ਆਦਰਸ਼ ਦਾ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸਦੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਜਿਵੇਂ–(1) ਹਰੇਕ ਉਦਯੋਗ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮਰੂਪ ਵਸਤੂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ (2) ਹਰੇਕ ਵਸਤੂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਤਕਨੀਕੀ ਉਪਲਬਧ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ਉਤਪਤੀ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਗ ਸਥਿਰ ਹੈ।

ਮੰਨਿਆ $C_i(t)$ ਚਾਲੂ ਸਾਲ ਦਾ ਉਪਭੋਗ ਹੈ ਜਿਹੜਾ iਵੇਂ ਉਦਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਉਤਪਾਦਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। $X_i(t)$ iਵੇਂ ਉਦਯੋਗ t ਸਮੇਂ ਅਵਧੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਤਿੰਨ ਉਦੇਸ਼ਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ–(*i*) ਅਗਲੀ ਅਵਧੀ ਦੇ ਉਪਭੋਗ $\{C_i\,(t+1)\}$, (*ii*) n ਉਦਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂੰਜੀ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਸ਼ੁੱਧ ਸਟਾਕ $S_i\,(t+1) - S_i\,(t)$ ਅਤੇ (*iii*) ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਉਦਯੋਗਿਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਚਾਲੂ ਪ੍ਰਵਾਹ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋਵੇਗਾ–

$$X_i(t) = C_i\,(t+1) + S_i\,(t+1) - S_i(t) + x_{11}\,(t) + x_{12}\,(t)$$

(ਇੱਥੇ $i = 1, 2$)

ਹੁਣ ਸਵਾਲ ਇਹ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚਾਲੂ ਉਤਪਾਦਨ $X_1\,(t)$ ਅਤੇ $X_2\,(t)$ ਕਿਵੇਂ ਉਤਪਾਦਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਦਾ ਫਲਨ ਹੋਵੇਗਾ–(*i*) ਚਾਲੂ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚਾ ਮਾਲ ਅਤੇ (*ii*) ਪੂੰਜੀ ਸੰਬੰਧੀ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਸਟਾਕ–

$$X_1\,(t) = f[x_{11}\,(t), x_{21}\,(t), S_{11}(t), S_{21}(t)]$$

$$X_2\,(t) = f[x_{12}\,(t), x_{22}\,(t), S_{12}(t), S_{22}(t)]$$

ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ੍ਹ ਪੂੰਜੀ ਸਟਾਕ ਸਾਰੇ ਉਦਯੋਗਾਂ ਦੇ ਪੂੰਜੀ ਸਟਾਕ ਦਾ ਜੋੜ੍ਹ ਹੋਵੇਗਾ–

$$S_i\,(t) = S_{i1}\,(t) + S_{i2}\,(t)$$

ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ ਸਟਾਕ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ–

$$\bullet\, S_i\,(t) = S_i\,(t+1) - S_i\,(t)$$

ਪੂੰਜੀ ਸਟਾਕ ਗੁਣਾਂਕ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਵਯੂਹ ਉਤਪੰਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$b_{ij} = \frac{S_{ij}}{X_j}$$

ਇੱਥੇ b_{ij} = ਪੂੰਜੀ ਸਟਾਕ ਗੁਣਾਂਕ, $x_i = j$ਵੇਂ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਅਤੇ $S_{ij} = j$ਵੇਂ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ iਵੇਂ ਉਦਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸ਼ੋਧ।

ਨੋਟ

24.4.2 ਇੱਕ ਆਯੋਜਿਤ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਲਈ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਮਹੱਤਵ (The Importance of Input-output Models for a Planned Economy)

ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਭੂਮਿਕਾ ਨਿਭਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਆਰਥਿਕ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਵਿਚਾਰ, ਰਾਸ਼ਟਰੀ-ਲੇਖਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ, ਆਰਥਿਕ ਯੋਜਨਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ, ਉਦਯੋਗਾਂ ਦਾ ਪਰਸਪਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਅਤੇ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਨਾ, ਵਪਾਰ ਚਕਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਆਦੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਖੇਤਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਵਰਤਮਾਨ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਕਨੀਕੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣ ਲੱਗਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਵਰਤਮਾਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਕਨੀਕੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਨਿਯੋਜਿਤ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਜਿਆਦਾ ਵੱਧਦਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਵਰਤਮਾਨ ਵਿੱਚ ਕਈ ਸਮਾਜਵਾਦੀ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੇਸ਼ਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਆਰਥਿਕ ਵਿਕਾਸ ਵਿੱਚ ਕਾਰਜਕਰਮਾਂ ਨੂੰ ਸੰਪੰਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਤਕਨੀਕੀ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਧਾਰਣਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਪਣਾਇਆ ਹੈ। ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਸਮਾਜਵਾਦੀ ਅਤੇ ਸਾਮਵਾਦੀ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦਾ ਇਹ ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਵਿਚਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪੂਰੀ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੁਗਮ ਸਮਨਵਿਤ ਏਕੀਕ੍ਰਤ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਢਾਲਿਆ ਜਾਵੇ। ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਯੋਗਿਕ ਇਕਾਈਆਂ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਨਿਯੋਜਨ ਸੰਸਥਾ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਨਿਯੰਤਰਣ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਕੇਂਦਰੀ ਸੰਸਥਾ ਦਾ ਇਹ ਕਰਤੱਬ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੀਆਂ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਦਾ ਜਾਇਜ਼ਾ ਲੈਣ ਅਤੇ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਭਿੰਨ ਉਤਪਾਦਕ ਸਾਧਨਾਂ ਨੂੰ ਉਪਲਬਧ ਕਰਾਉਣ ਤਾਂ ਕਿ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਮਾਜਿਕ ਕਲਿਆਣ ਦੇ ਉਦੇਸ਼ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਉਦਯੋਗਿਕ ਗਤੀਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਯੋਜਨਾਬੱਧ ਢੰਗ ਨਾਲ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਦੇਣ।

ਇਸ ਤਕਨੀਕੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਹ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਕਿੰਨਾ ਭਾਗ ਦੂਜੇ ਉਦਯੋਗ ਵਿੱਚ ਆਗਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਯੂਹ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਦੁਆਰਾ ਅੰਕੜਾ-ਵਿਗਿਆਨੀ (Statisticians) ਅਤੇ ਯੋਜਨਾ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਨੂੰ ਅਦਾ-ਪ੍ਰਦਾ ਸੰਬੰਧ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।

ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਸੰਬੰਧਾ ਦਾ ਗਿਆਨ ਕਰਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੀ ਅੰਦਰੂਨੀ ਸੰਰਚਨਾ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਨਿਯੋਜਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ। ਅਨਿਯੋਜਿਤ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ 'ਪ੍ਰੀਖਣ ਅਤੇ ਤਰੁੱਟੀ' ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਨਿਯੋਜਿਤ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਤਰੁੱਟੀਆਂ ਦੇ ਨਿਵਾਰਣ ਦਾ ਇਸ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੁਆਰਾ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਯੋਗ ਤੱਥ ਹੈ ਕਿ ਰਾਸ਼ਟੀ ਆਰਥਿਕ ਆਯੋਜਨ ਵਿੱਚ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਸਥਿਤਕ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਦੀ ਅਪੇਖਿਆ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਆਰਥਿਕ ਵਿਕਾ ਵਿੱਚ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੀ ਸੰਰਚਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਵਾਹ ਸਥਿਰ ਨਹੀਂ ਰਹਿ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਇਹ ਤਕਨੀਕੀ ਅਰਧਵਿਕਸਿਤ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਆਰਥਿਕ ਆਯੋਜਨ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਕਾਰਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖੀ ਸਮਰੂਪ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ ਸਥਿਰ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਲੋਕਪ੍ਰੀਯ ਸਮੰਕਾਂ ਦੀ ਅਣਉਪਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾ ਕੇਵਲ ਵਿਭਿੰਨ ਉਤਪਾਦਨ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਸਪਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਬਲਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਉਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਸੰਬੰਧੀ ਵੀ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਵਦੇਸ਼ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੇਸ਼ਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਾਸਨਿਕ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਅਧਿਅਨ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਇਸ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਆਦਰਸ਼ ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਅਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਦੇਸ਼ਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਸਰਲ ਅਧਿਅਨ ਲਈ ਇੱਕ ਯੋਜਨਾ (Scheme) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ[1]।

ਇਸ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰੇਲਵੇ ਭਾੜਾ (Freeght) ਵਪਾਰ ਦੇ ਅਧਿਅਨ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਰੇਲਵੇ ਵਪਾਰ ਸਾਰਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਸਹਿਯੋਗ ਵਿਭਿੰਨ ਰੇਲਵੇ ਸਟੇਸ਼ਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਾਲਾਂ ਤੋਂ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। 'ਅੰਤਰ ਖੇਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ' ਨੂੰ 'ਟਨਾਂ ਵਿੱਚ ਭਾਗ' ਨਾਲ ਸਥਾਪਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਇੱਕ ਸਟੇਸ਼ਨ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਸਟੇਸ਼ਨ ਨੂੰ ਭੇਜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1. Oskar Lang: Introduction to Economics (1959).

ਉਪਰੋਕਤ ਵਰਣਨ ਤੋਂ ਸਪਟਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਯੂਹ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਆਰਥਿਕ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਵਰਣਨ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀਆਂ ਸਾਰਣੀਆਂ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਰਥਮਿਤੀ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਉਦਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਸਪਰ ਸੰਬੰਧੀ ਅਤੇ ਨਿਰਭਰਤਾ, ਵਿਭਿੰਨ ਦੇਸ਼ਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਮਾਜਵਾਦੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਯੋਜਨਾਵਾਂ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਸਮੰਜਸ ਦੇ ਅਨਵੇਸ਼ਣ ਸੰਬੰਧੀ ਇੱਕ ਜਰੂਰੀ ਉਪਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਅੰਤਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਸਹਿ-ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਖਰੀਦਾਰੀ ਖੇਤਰ→ / ਉਤਪਾਦਨ ਖੇਤਰ ↓	**ਖੇਤੀ**	**ਉਦਯੋਗ**	**ਆਖਰੀ ਮੰਗ**	**ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ**
ਖੇਤੀ	300	600	100	1000
ਉਦਯੋਗ	400	1200	400	2000

ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੰਗ ਬਦਲਦੀ ਹੈ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ 200 ਅਤੇ 800, ਤੋਂ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜੀ ਨਵੀਂ ਮੰਗ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ (Solution): ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ,

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

ਇੱਥੇ a_{ij} = ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ,

X_i = jਵੇਂ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ,

x_{ij} = jਵੇਂ ਖੇਤਰ ਦਾ ਉਹ ਉਤਪਾਦਨ ਜਿਹੜਾ iਵੇਂ ਖੇਤਰ ਦੁਆਰਾ ਕੰਮ ਵਿੱਚ (ਅਵਸ਼ੋਸ਼ਣ) ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸਾਰਣੀ

ਖੇਤਰ (Sector)	**ਖੇਤੀ (Agriculture)**	**ਉਦਯੋਗ (Industry)**	**ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ (Total Output)**
ਖੇਤੀ (Agriculture)	$\frac{300}{1000} = 0.3$	$\frac{600}{2000} = 0.3$	1000
ਉਦਯੋਗ (Industry)	$\frac{400}{1000} = 0.4$	$\frac{1200}{2000} = 0.6$	2000

ਜੇਕਰ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਖੇਤੀ ਅਤੇ ਉਦਯੋਗ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ 200 ਅਤੇ 800 ਹੋ ਜਾਵੇ ਉਦੋਂ-

ਖੇਤਰ	**ਖੇਤੀ**	**ਉਦਯੋਗ**	**ਆਖਰੀ ਮੰਗ**	**ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ**
ਖੇਤੀ	300	600	200	1100
ਉਦਯੋਗ	400	1200	800	2400

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ (Gross Output) = 1100 + 2400 = 3500.

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਾਰਣੀ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਤਿੰਨ ਸੈਕਟਰਾਂ S_1, S_2 ਅਤੇ S_3 ਦੇ ਨਾਲ ਕਰੋੜਾਂ ਰੁਪਏ ਦੇ ਅੰਤਰ-ਉਦਯੋਗਿਕ ਲੈਣ-ਦੇਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ-

	S_1	S_2	S_3	**ਆਖਰੀ ਮੰਗ**	**ਕੁੱਲ੍ਹ ਨਿਰਗਤ**
S_1	50	25	25	100	200
S_2	40	50	10	200	300
S_3	100	50	150	300	600

ਸਹਿਗੁਣਾਂਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਗੁਣਨ ਕਰੋ

ਹੱਲ (Solution): ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\left[\text{ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ} = a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}\right]$$

ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸਾਰਣੀ

	S_1	S_2	S_3	**ਕੁੱਲ੍ਹ ਉਤਪਾਦਨ (Total Output)**
S_1	$\frac{50}{200}=0.25$	$\frac{25}{300}=0.08$	$\frac{25}{600}=0.04$	200
S_2	$\frac{40}{200}=0.20$	$\frac{50}{300}=0.16$	$\frac{10}{600}=0.016$	300
S_3	$\frac{100}{200}=0.50$	$\frac{50}{300}=0.16$	$\frac{150}{600}=0.25$	600

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ ਵਿੱਚ ਤਕਨੀਕੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ-

	ਖੇਤਰ I	**ਖੇਤਰ II**	**ਆਖਰੀ ਮੰਗ**
Sector I	0.1	0.3	F_1
Sector II	0	0.2	F_2
Labour	0.9	0.8	–

ਜੇਕਰ ਆਖਰੀ ਮੰਗ $F_3 = 0.5y + 100$

$F_2 = 0.3y + 204$

ਤਾਂ ਆਮਦਨ ਦਾ ਸੰਤੁਲਨ ਅਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਸੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਨਿਰਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਿੱਟਿਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $F_1 = 100$, $F_2 = 200$ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ,

$$F_1 = F_2$$

$\therefore$ $0.5y + 100 = 0.3y + 200$

ਜਾਂ $5y + 1000 = 3y + 2000$

ਨੋਟ

ਜਾਂ $2y = 1000$

ਜਾਂ $y = 500$

ਦੁਬਾਰਾ $F_1 = 0.5y + 100 = (.5 \times 500) + 100 = 350$

$F_2 = 0.3y + 200 = (0.3 \times 500) + 200 = 350$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ–

$$X = AX + D$$

ਜਾਂ $X = (I - A)^{-1} D$

ਇੱਥੇ X = ਖੇਤਰ ਅਤੇ I ਖੇਤਰ II ਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਹੈ।

I = ਇਕਾਈ ਵਯੂਹ

D = ਆਖਰੀ ਮੰਗ

A = ਵਯੂਹ ਗੁਣਾਂਕ (Coefficient of Matrix)

ਹੁਣ
$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{\text{Adjoint}}{\text{Determinant}}$$

$$\text{Det. of } (I - A) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= 0.72$$

ਪੱਖੀ ਵਯੂਹ $(I - A) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ਸ ਹਿਖੰਡ of } 0.9 = 0.8 \\ \text{ਸ ਹਿਖੰਡ of } 0.3 = 0 \\ \text{ਸ ਹਿਖੰਡ } 0 \ = 0.3 \\ \text{ਸ ਹਿਖੰਡ } 0.8 = 0.9 \end{array}\right\} \qquad \begin{bmatrix} \therefore (-1)^{i+j} \\ \text{for cofactor sign} \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjoint of } (I - A) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.72}\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{0.8}{0.72} & \frac{0.3}{0.72} \\ 0 & \frac{0.9}{0.72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.41 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ
$$(I - A)^{-1} D = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.41 \\ 0 & 1.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 532.0 \\ 437.5 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ = 532 ਇਕਾਈਆਂ

ਨੋਟ

ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ = 437.5 ਇਕਾਈਆਂ

(*iii*) ਜੇਕਰ $F_1 = 100$ ਅਤੇ $F_0 = 200$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$X(I-A)^{-1}D = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.41 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 192 \\ 250 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ = 192 ਇਕਾਈਆਂ

ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ = 250 ਇਕਾਈਆਂ।

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ

(State whether the following statements are True or False) –

6. $X_i = \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij}$

7. $X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i P_i = 0$ ਸਮੀਕਰਣ, ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਦੂਜੇ ਸਮੁੱਚ ਹੈ।

8. ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਭੂਮਿਕਾ ਨਹੀਂ ਨਿਭਾਉਂਦੀ ਹੈ।

9. ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਸੰਬੰਧਾ ਦਾ ਗਿਆਨ ਨਹੀਂ ਕਰਾਉਂਦੀ ਹੈ।

10. ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$.

24.5 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਆਗਤ (Input) ਦਾ ਭਾਵ ਉਤਪਾਦਕ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੱਗਰੀ (Material) ਦੀ ਮੰਗ ਕਰਨ ਤੋਂ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਿਰਗਤ (Output) ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਭਾਵ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਯਤਨ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਫਲ ਤੋਂ ਹੈ।
- ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਬਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅੰਦਰੂਨੀ ਉਦਯੋਗ ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਪੂਰੀ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਨਿਰਭਰਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰਗਤ ਦੂਜੇ ਉਦਯੋਗ ਦੇ ਲਈ ਆਗਤ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।
- ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦਾ ਸਥਿਤਕ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ ਉਪਰੋਕਤ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦਾ ਸਥਿਤਕ ਆਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਆਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨੋਂ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਨਿਰਗਤ (Output), ਪੰਕਤੀਆਂ (Rows) (ਖਿਤਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ) ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਆਗਤ (Input), ਸਤੰਭਾਂ (Columns) (ਲੰਬਵਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ) ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।
- ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਕੱਢਣ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜਰੂਰੀ ਖੇਤਰ ਦੇ ਆਗਤ ਵਿੱਚ ਉਸ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

- ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਆਦਰਸ਼ ਦੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਅਵਿਵਹਾਰਿਕ ਹਨ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ (Technological Coefficient) ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਤਕਨੀਕੀ ਸਥਿਰਤਾ ਜਾਂ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਾਲ ਲਗਾਏ ਗਏ ਸਾਧਨਾਂ ਦੀ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਵੇਗਾ।
- ਵਿਵਹਾਰ ਵਿੱਚ ਵਸਤੂਆਂ ਅਤੇ ਸੇਵਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਮੁਦਰਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੀ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਭੌਤਿਕ ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦਾ ਉਚਿਤ ਰੂਪ ਵੱਚ ਪੂਰਵ-ਅਨੁਮਾਨ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਖੁੱਲੇ ਆਦਰਸ਼ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਖੇਤਰ (ਘਰੇਲੂ ਖੇਤਰ) ਨੂੰ ਪ੍ਰਥਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਮੰਨਿਆ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਵੀ ਆਰਥਿਕ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਖੇਤਰ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਰਹੇਗਾ ਜਿਸਦਾ ਸੰਬੰਧ ਬਾਹਰੀ ਖੇਤਰ ਨਾਲ ਹੋਵੇ।
- ਸਥਿਤਕ ਆਦਰਸ਼ ਵਿੱਚ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਤਕਨੀਕੀਕ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਦੁਆਰਾ ਪਰਸਪਰ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਦੇ ਹਨ।
- ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਆਦਰਸ਼ ਸਥਿਤਕ ਆਦਰਸ਼ ਦਾ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਸਥਿਤਕ ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਣਗੀਆਂ।
- ਆਰਥਿਕ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਭੂਮਿਕਾ ਨਿਭਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਆਰਥਿਕ ਸਧਿਾਂਤ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ, ਰਾਸ਼ਟਰੀ-ਲੇਖਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ, ਆਰਥਿਕ ਯੋਜਨਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨ, ਉਦਯੋਗਾਂ ਦਾ ਪਰਸਪਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਅਤੇ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਨਾ, ਵਪਾਰ ਚਕਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਆਦਿ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੋਇਆ ਹੈ।
- ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਗਿਆਨ ਕਰਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੀ ਅੰਦਰੂਨੀ ਸੰਰਚਨਾ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਨਿਯੋਜਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ।

24.6 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਆਗਤ (Input) - ਪ੍ਰਾਪਤ।
- ਨਿਰਗਤ (Output) - ਨਿਕਲਣਾ।

24.7 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਸਮੁੱਚ ਦੀ ਗਣਿਤਕ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।
2. ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦਾ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ?
3. ਲਿਯੋਂਟਿਫ ਦੇ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਆਦਰਸ਼ ਉੱਤੇ ਸੰਖੇਪ ਟਿੱਪਣੀ ਲਿਖੋ।
4. ਇੱਕ ਆਯੋਜਿਤ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਲਈ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਆਦਰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਸਮਝਾਓ।
5. ਬੰਦ ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਦੂਜੇ ਸਮੁੱਚ ਦੀ ਗਣਿਤਕ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਉਤਪਾਦਨ	2. ਨਿਰਗਤ	3. ਆਗਤ	4. ਲਿਯੋਂਟਿਫ	5. ਨਿਰਭਰਤਾ।
6. ਸੱਚ	7. ਸੱਚ	8. ਝੂਠ	9. ਝੂਠ	10. ਸੱਚ।

ਨੋਟ

24.8 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
3. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
5. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।

ਇਕਾਈ–25: ਹੌਕਿਨਸ–ਸਿਮੋਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ (Conditions of Hawkins and Simon)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਹੌਕਿਨਸ–ਸਿਮੋਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋਣ ਵਿੱਚ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾ ਕੱਢਣ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਕਦੀ–ਕਦੀ ਆਗਤ–ਨਿਰਗਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਹੱਲ, ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਾਡਾ ਨਿਰਗਤ, ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਿਰਗਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਨਿਰਗਤ ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਗਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਇੱਕ ਅਵਾਸਤਵਿਕ ਸਥਿਤੀ ਹੈ। ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਜਿਹਾ System Viable ਨਹੀਂ ਹੈ।

25.1 ਹੌਕਿਨਸ ਅਤੇ ਸਿਮੋਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ (Conditions of Hawkins and Simon)

Hawkins-Simon ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਨਿਜਾਤ ਦਿਵਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਾਡਾ ਪਹਿਲਾ ਸਮੀਕਰਣ $X = (I - A)^{-1} F$ ਹੈ, ਤਾਂ $(I - A)$ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$\begin{vmatrix} (1-a_{11}) & -a_{+2} & -a_{+3} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & (1-a_{nn}) \end{vmatrix}$$

ਤਾਂ H.S. ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ–

(1) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਾਰਣਿਕ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ

(2) ਵਿਕਰਣ ਤੱਤ *i.e*, $(1 - a_{11})$, $(1 - a_{22})$, $(1 - a_{33})$ .... $(1 - a_{nn})$, ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ ਭਾਵ a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... a_{nn} ਹਮੇਸ਼ਾਂ 1 ਤੋਂ ਘਟ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨੋਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਹੀ Hawkins-Simon ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ: ਜੇਕਰ $(A)=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.9 & 0.7\end{bmatrix}$

$$\therefore \qquad (I-A)=\begin{bmatrix}0.2 & -0.2\\-0.9 & 0.3\end{bmatrix}$$

ਅਤੇ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਮਾਨ $(I-A)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ, 0.06 – 0.18 = (–) 8.12 ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

ਇੱਥੇ H.S. Condition ਸੰਤੁਸ਼ਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਤਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਾਸਕ ਹੋਕਿਨਸ-ਸਿਮੋਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

ਉਦਾਹਰਣ: ਸਾਲ 1990 ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਲੈਣ-ਦੇਣ ਨਿਰਧਾਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ-

ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਅੰਤਰ-ਉਦਯੋਗਿਕ ਲੈਣ-ਦੇਣ ਸਾਰਣੀ ਸਾਲ 1990 ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਲਈ ਬਣਾਈ ਗਈ ਹੈ।

ਉਦਯੋਗ	*1*	*2*	*ਆਖਰੀ ਉਪਭੋਗ*	*ਕੁੱਲ*
1	500	1,600	400	2,500
2	1,750	1,600	4,650	8,000
ਮਿਹਨਤ	250	4,800	–	5,050
ਕੁੱਲ	2,500	8,000	5,050	15,500

25.2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾ ਕੱਢਣਾ (To Find the Technical Multiplication of Matrix)

ਪ੍ਰਤੱਖ ਜਰੂਰਤ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਤਕਨੀਕੀ ਸਹਿਗੁਣਾਂਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬਣਾਓ। ਕੀ ਇਸ ਪੱਧਤੀ ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਹੈ?

ਹਰੇਕ ਆਗਤ ਨੂੰ ਸੈਕਟਰ ਦੇ ਕੁੱਲ ਨਿਰਗਤ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਕੇ, ਨਿਰਗਤ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ (ਰੁਪਏ) ਦੀ ਪ੍ਰਤੱਖ ਜਰੂਰਤ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਤਕਨੀਕੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ,

ਉੱਤਰ-

$$a_{11}=\frac{500}{2,500}=0.20\left(=\frac{X_{11}}{X_1}\right)$$

$$a_{12}=\frac{1,600}{8,000}=0.20\left(=\frac{X_{12}}{X_2}\right)$$

$$a_{21} = \frac{1,750}{2,500} = 0.70\left(= \frac{X_{21}}{X_1}\right)$$

$$a_{22} = \frac{1,600}{8,000} = 0.20\left(= \frac{X_{22}}{X_2}\right)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਤਕਨੀਕੀ ਮੈਟ੍ਰਿਸ

$\therefore$ $A =$

ਉਦਯੋਗ	1	2
1	0.20	0.20
2	0.70	0.20
ਮਿਹਨਤ	0.10	0.60

and
$$(I-A) = \begin{pmatrix} 1 & -0.20 & -0.20 \\ & -0.70 & 1-0.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.80 & -.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{pmatrix}$$

$\therefore$
$$(I-A) = \begin{vmatrix} 0.80 & -0.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{vmatrix}$$

$$= 0.80 \times 0.80 - 0.20 \times 0.70 = 0.50$$

ਕਿਉਂਕਿ $|I-A|$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ $(I-A)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਗੇ, ਇਸ ਲਈ ਹੌਕਿਨਸ ਅਤੇ ਸਿਮੋਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਪੂਰਣ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਕ ਪੱਧਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ: ਦਿੱਤਾ ਹੈ;

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਮੰਗ F_1, F_2 and F_3 ਹੈ output ਦਾ ਸਤਰ ਕੱਢੋ

ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਹਨ F_1, F_2 ਅਤੇ F_3. ਆਦਰਸ਼ ਦੀ ਨਿਯਮਿਤਤਾ ਦੇ ਨਾਲ ਨਿਰਗਤ ਸਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਨਿਰਗਤ ਸਤਰ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $F_1 = 20, F_2 = 0$ ਅਤੇ $F_3 = 100$ ਹੋਵੇ?

ਉੱਤਰ–
$$= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = (I-A)^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ,
$$(I-A) = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.1 \\ 0 & 0.8 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{vmatrix}$$

ਸਹਿਭਾਜਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.56$$

$$A_{13} = -\begin{vmatrix} 0 & -0.2 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0$$

ਨੋਟ

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -0.8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.21$$

$$A_{22} = -\begin{vmatrix} -0.9 & -0.1 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.63$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -0.9 & -0.3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = -\begin{vmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0.8 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.14$$

$$A_{33} = -\begin{vmatrix} -0.9 & -0.1 \\ 0 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.18$$

$$A_{33} = -\begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 \\ 0 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.72$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣਿਕ ਦਾ ਮਾਨ ਹੈ, $0.9 \times 0.56 = 0.504$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.504}\begin{bmatrix} 0.56 & 0.21 & 0.14 \\ 0 & 0.63 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0.72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.11 & 0.42 & 0.28 \\ 0 & 1.25 & 0.36 \\ 0 & 0 & 1.43 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.42 & 0.28 \\ 0 & 1.25 & 0.36 \\ 0 & 0 & 1.43 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.11F_1 + 0.42F_2 + 0.28F_2 \\ 0 + 1.25F_2 + 0.36F_3 \\ 0 + 0 + 1.43F_3 \end{bmatrix}$$

F_1, F_2 ਅਤੇ F_3 ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮਾਨ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$X_1 = 1.11F_1 + 0.42F_2 + 0.28F_3$$
$$= 1.11 \times 20 + 0 + 0.28 \times 100$$
$$=50.2$$
$$X_2 = 1.25F_2 + 0.36F_3$$

$0 + 0.36 \times 100 = 36$ ਅਤੇ

$$X_3 = 1.43F_3 = 143$$

ਨੋਟਸ ਇਹ ਨੋਟ ਕਰਨ ਯੋਗ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤਕਨੀਕੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਉੱਚ ਤਿਕੋਣੀ (ਜੋ ਕਿ), ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਜ਼ੀਰੋ ਹਨ ਜਾਂ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਨੇੜੇ ਹਨ, ਤਾਂ $(I - A)^{-1}$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤਿਕੋਣੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ X_3 ਨਿਰਗਤ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸੈਕਟਰ 3 ਦੀ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗਾ ਅਤੇ X_3 ਸੈਕਟਰ 2 ਅਤੇ 3 ਦੀ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ: ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਵਿੱਚ 10, 10, 10 ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਿਰਗਤ ਵਿੱਚ ਕੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਵੇਗਾ।

In the above example, if final demands change by 10, 10, 10 then what will be the change in sector outputs?

We have $X = (I - A)^{-1} F$

$\therefore$ $\Delta X = (I - A)^{-1} \Delta F$

ਜਿੱਥੇ, ΔX ਅਤੇ ΔF ਨਿਰਗਤ ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਵਿੱਚ ਆਏ ਹੇਠਲੇ ਬਦਲਾਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਵਾਹਕ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.42 & 0.28 \\ 0 & 1.25 & 0.36 \\ 0 & 0 & 1.43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X_1 = 1.11 \times 10 + 0.42 \times 28 \times 10 = 18.1$$

$$\Delta X_2 = 0 + 1.25 \times 10 + 0.36 \times 10 = 16.1$$

$$\Delta X_3 = 14.3$$

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਕਦੀ-ਕਦੀ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਹੱਲ .... ਸੰਖਿਆ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. ਜੇਕਰ ਸਾਡਾ ਹੱਲ ਨਿਰਗਤ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਨਿਰਗਤ ਤੋਂ ਵੱਧ .... ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ।
3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਾਰਣਿਕ ਹਮੇਸ਼ਾਂ .... ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

25.3 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਕਦੀ-ਕਦੀ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਹੱਲ, ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਾਲਾ ਹੱਲ ਨਿਰਗਤ, ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਿਰਗਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਨਿਰਗਤ ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਗਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਵਾਸਤਵਿਕ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।
- ਸਾਡੀ ਪਹਿਲੀ ਸਮੀਕਰਣ $X = (I - A)^{-1} F$ ਹੈ ਤਾਂ $(I - A)$ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{+2} & -a_{+3} & a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} & a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) & a_{3n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & (1-a_{nn}) \end{bmatrix}$$

ਨੋਟ

25.4 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਸ਼ਰਤ (Condition) – ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ।

25.5 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਨਿਮਨ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ (*A*) ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਉਤਪਾਦਨ (output) ਪਤਾ ਕਰੋ

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}_3 \quad F = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$$

2. ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਕੱਢੋ–

ਕਰ ਖੇਤਰ → / ↓ ਉਤਪਾਦਕ ਖੇਤਰ	ਖੇਤੀ	ਉਦਯੋਗ	ਆਖਰੀ ਮੰਗ	ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ
(1) ਖੇਤੀ	500	1000	200	1700
(2) ਉਦਯੋਗ	700	1500	600	2800

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਰਿਣਾਤਮਕ 2. ਆਗਤ 3. ਧਨਾਤਮਕ

25.6 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ।*
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਉਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ।*
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ।*
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ।*
5. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ।*
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ।*
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ।*
9. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ. ।*

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ-26: ਬੰਦ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ : ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਮਾਡਲ (Closed Economy : Input-Output Model)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੇ ਮੁੱਖ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਵਿੱਚ;
- ਬੰਦ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਮਾਡਲ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਆਗਤ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਭਾਵ ਉਤਪਾਦਕ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੱਗਰੀ ਦੀ ਮੰਗ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਗਤ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਅਰਥ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਫਲ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਹੈ। ਲਾਗਤ ਦਾ ਮਤਲ ਉਸ ਸਮੱਗਰੀ ਤੋਂ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਉਤਪਾਦਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਕਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਨਿਰਗਤ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਅਰਥ ਉਸ ਤੋਂ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਉਤਪਾਦਕ ਵਿਕਰੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਗਤ ਕਿਸੀ ਫਰਮ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗਤ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਿਰਗਤ ਪ੍ਰਾਪਤੀ।

ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੀ ਖੋਜ ਸੰਨ੍ਹ 1951 ਵਿੱਚ W.W. Leontief ਦੀ ਸੀ। ਇਹ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਤਕਨੀਕ ਉੱਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਕਿੰਨਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਜਿਹੜਾ ਉਪਭੋਗ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਉਪਭੋਕਤਾ ਅਤੇ ਉਦਯੋਗਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਇੱਥੇ ਸੰਤੁਸ਼ਟੀ ਦਾ ਸਤਰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

26.1 ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੇ ਮੁੱਖ ਤੱਤ (Prime Elements of Input-Output Analysis)

- ਇਹ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਸੰਤੁਲਿਤ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਉੱਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਇਹ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਉਤਪਾਦਨ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਤਕਨੀਕੀ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਟਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।
- ਇਹ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਸਰਵਭੌਮਿਕ ਖੋਜਾਂ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਮਾਡਲ :

ਇਸਦੀ ਤਕਨੀਕੀ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (A) ਤੁਲਨਾਤਮਕ ਸਮੀਕਰਣ: ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਉਦਯੋਗ ਦਾ ਸੰਪੂਰਣ ਉਤਪਾਦਨ ਜਾਂ

ਨੋਟ

ਤਾਂ ਆਪਣੇ-ਆਪ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਖਪਤ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਦੂਜੇ ਉਦਯੋਗਾਂ ਜਾਂ ਬਾਹਰੀ ਖੇਤਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਖਪਤ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨਿਆ ਬਾਹਰੀ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਦਯੋਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ n ਹੈ ਅਤੇ ਉਦਯੋਗ i ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ x_i ਹੈ। ਤਾਂ ਨਿਮਨ ਤੁਲਨਾਤਮਕ ਸਾਰੀ ਹੋਵੇਗੀ;

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + X_{13} + ... + X_{1n} + \mathrm{F}_1$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + X_{23} + ... + X_{2n} + \mathrm{F}_2$$

$$\therefore \quad X_i = X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} + ... + X_{in} + \mathrm{F}_i$$

ਜਿੱਥੇ $F \Rightarrow$ ਬਾਹਰੀ ਖੇਤਰ ਦੀ ਮੰਗ

(B) ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਸਮੀਕਰਣ: ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਲਈ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਦਾ ਸਹਾਰਾ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨਿਆ i ਅਤੇ j ਦੇ ਦੋ ਉਦਯੋਗ ਹਨ:

ਉਦਯੋਗ 'j' ਵਿੱਚ 'i' ਦਾ ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ

$$j = \frac{\text{ਉਦਯੋਗ '}j\text{' ਵਿੱਚ ਉਦਯੋਗ '}i\text{' ਦੇ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਖਪਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਮਾਤਰਾ}}{\text{ਉਦਯੋਗ '}i\text{' ਦਾ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ}}$$

ਭਾਵ $$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

Or $$X_{iy} = a_{ij} \times X_j \qquad .....(A)$$

ਇੱਥੇ a_{ij} ਤਕਨੀਕੀ ਗੁਣਾਂਕ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ (A) ਸਮੀਕਰਣ ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ; ਤੁਲਨਾਤਮਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ ਤੇ,

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{in}X_n + F_1$$
$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2n}X_n + F_2$$
$$..$$
$$..$$
$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + ... + a_{in}X_n + F_i$$
$$..$$
$$..$$
$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + ... + a_{nn}X_n + F_n$$

ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_i \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ : \\ X_i \\ : \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ : \\ F_i \\ : \\ F_n \end{bmatrix}$$

or $$X = AX + F \qquad ....(I)$$

ਇਹ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਮਾਡਲ ਦਾ ਸਧਾਰਣ ਸਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

26.2 ਬੰਦ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਮੋਡਲ (Closed Input-Output Model)

ਜੇਕਰ ਬਾਹਰੀ ਖੇਤਰ ਦੀ ਮੰਗ ਭਾਵ F, ਅੰਦਰੂਨੀ ਖੇਤਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਾਰਜ ਕਰੇ ਤਾਂ ਉਹ ਮੋਡਲ ਬੰਦ ਆਦਾ-ਪ੍ਰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਖਰੀ ਉਪਭੋਗ ਖੇਤਰ, ਹੋਰ ਉਦਯੋਗਾਂ ਨੂੰ ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ

ਉਦਯੋਗ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਾਰਜ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਉਦਯੋਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $(n + 1)$ ਹੋ ਜਾਏਗੀ, ਜੇਕਰ ਬਾਹਰੀ ਖੇਤਰ ਨੂੰ X_0 ਉਦਯੋਗ ਨਾਲ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ ਤਾਂ, ਨੋਟ

$$X_0 = a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 + \ldots\ldots + a_{0n}X_n$$
$$X_1 = a_{10}X_0 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = a_{n0}X_0 + a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots\ldots + a_{nn}X_n$$

or $X = AX$

or $X - AX = 0$

or $[I - A]X = 0$, ਇੱਥੇ $I \Rightarrow$ Identity ਆਵਯੂਹ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ: ਉਪਭੋਗ ਫਲਨ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ (ਬੰਦ ਮੋਡਲ) ਮੰਨਿਆ ਦੋ ਉਦਯੋਗ ਅਤੇ ਇੱਕ ਆਖਰੀ ਮੰਗ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ।

–	1	2	Final Demand
1	0.1	0.3	F_1
2	0	0.2	F_2
ਮਜ਼ਦੂਰੀ (L)	0.9	0.5	–

ਹੁਣ ਮੰਨਿਆ Final demand ਵੀ ਉਦਯੋਗ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਾਰਜ ਕਰ ਰਹੀ ਹੈ ਤਾਂ

$$F_1 = 0.5y + \overline{C_1}$$

$$F_2 = 0.3y + \overline{C_2}$$

ਇੱਥੇ 0.5 and 0.3 MPC ਹੈ ਅਤੇ $\overline{C_1}$ and $\overline{C_2}$ ਸਵਾਯਕਤ ਉਪਯੋਗ ਹੈ।

ਤਾਂ ਗੁਣਕ $$k = \frac{1}{1-(0.5+0.3)} = \frac{1}{0.2} = 5$$

ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਆਗਤ–ਨਿਰਵਤ ਮੋਡਲ;

$$X_1 = 0.1X_1 + 0.3X_2 + 0.5y + \overline{C_1}$$

$$X_2 = 0.0X_1 + 0.2X_2 + 0.3y + \overline{C_2}$$

ਅਤੇ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਦਰ 0.9 ਅਤੇ 0.5 ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਤਾਂ $.9x_1 + 0.5x_2 = y$

ਤਾਂ

$$X_1\,(1 - 0.1) - 0.3\,X_2 - 0.5y = \overline{C_1}$$

$$-0.0X_1 + X_2\,(1 - 0.2) - 0.3\,y = \overline{C_2}$$

$$0.9X_1 + 0.5X_2 + y = 0$$

ਤਾਂ ਸਾਰਣਿਕ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ;

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{0.144}\begin{bmatrix} 0.65 & 0.55 & 0.49 \\ 0.27 & 0.45 & 0.27 \\ 0.72 & 0.72 & 0.72 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Or $$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.51 & 3.82 & 3.34 \\ 1.87 & 3.12 & 1.87 \\ 5.0 & 5.0 & 5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ਤਾਂ ਸੰਤੁਲਿਤ ਆਮਦਨ $y = 5X\overline{C_1} + 5X\,\overline{C_2} = 5\,(\overline{C_1} - \overline{C_2})$ **Ans.**

ਨੋਟ

26.3 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਆਗਤ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਭਾਵ ਉਤਪਾਦਕ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੱਗਰੀ ਦੀ ਮੰਗ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਗਤ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਅਰਥ ਉਤਪਾਦਕਤਾ ਦੇ ਫਲ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਹੈ। ਲਾਗਤ ਦਾ ਮਤਲਬ ਉਸੀ ਸਮੱਗਰੀ ਤੋਂ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਉਤਪਾਦਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਕਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਨਿਰਗਤ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਅਰਥ ਉਸ ਤੋਂ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਉਤਪਾਦਕ ਵਿਕਰੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਗਤ ਕਿਸੀ ਫਰਮ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗਤ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਿਰਗਤ ਪ੍ਰਾਪਤੀ।

26.4 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

1. ਆਗਤ – ਕਿਸੀ ਫਰਮ ਦੇ ਲਈ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਸਮੱਗਰੀ।

26.5 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਬੰਦ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਮੋਡਲ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
2. ਕਿਸੀ ਫਰਮ ਦੀ ਲਾਗਤ ਵਧਣ ਤੇ ਉਤਪਾਦਨ ਉੱਤੇ ਕੀ ਅਸਰ ਪਏਗਾ?

26.6 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਉਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
5. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
9. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*

ਇਕਾਈ–27: ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ (Linear Programming)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਅਰਥ, ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਤੇ ਸਧਾਰਨੀਕਰਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।
- ਫਰਮ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਉੱਤੇ ਉਪਯੋਗ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ।
- ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਗਣਿਤ-ਵਿਗਿਆਨੀ ਜਾਰਜ ਡੈਨਜਿਗ (George Dantzig) ਨੇ, ਸੇਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਤੀ ਪਹੁੰਚਾਉਣ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਅਮਰੀਕਾ ਦੀ ਹਵਾਈ ਸੇਨਾ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਕਾਰਜਾਂ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, 1947 ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਫਰਮ ਦੇ ਆਰਥਿਕ ਸਿਧਾਂਤ, ਪ੍ਰਬੰਧਾਤਮਕ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਅੰਦਰੂਨੀ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਿਕ ਵਪਾਰ, ਸਧਾਰਣ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ, ਕਲਿਆਣ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਅਤੇ ਵਿਕਾਸ ਆਯੋਜਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਇਸਦਾ ਵਿਕਾਸ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਏ ਵਿੱਚ ਫਰਮ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ।

27.1 ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦਾ ਅਰਥ (Meaning of Linear Programming)

ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀਕਰਣ (optimisation) ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਜਿਹੜੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਅਪਣਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਰੇਖੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (constraints) ਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋਏ, ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਨਿਰਣਿਆਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਤਕਨੀਕ ਹੈ। ਗਣਿਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਉੱਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ, ਕੁੱਝ ਚਰਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਵਿਵਸਥਾ ਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋਏ ਅਧਿਕੀਕਰਣ (maximisation) ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ (minimisation) ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y,

ਨੋਟ

ਦੋ ਚਰ (variables), z ਦੇ ਫਲਨ (function) ਹੋਣ, ਤਾਂ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਸ ਸਮੇਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦੋਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕਿਸੀ ਵੀ ਗਤੀ ਦੁਆਰਾ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਵੇ। z ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਸ ਸਮੇਂ ਨਿਊਨਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਿਸੀ ਵੀ ਗਤੀ ਨਾਲ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਜਦੋਂ ਨਿਰਗਤ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਕੀਮਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵ ਰੇਖੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਨਿਰਗਤ ਦੇ ਨਾਲ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਤਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਰੇਖੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਉਹ ਵਿਧੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਨਿਰਗਤ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਸੰਯੋਗ ਜਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪਲਾਂਟ ਅਤੇ ਉਪਕਰਣ ਨਾਲ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਵਸਤੂ ਦੇ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਸੰਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਤਕਨੀਕੀ ਵੱਖਰੇਪਣ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

27.2 ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਤੇ ਸਧਾਰਨੀਕਰਣ (Conditions and Generalisation)

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੁੱਝ ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਤੇ ਸਧਾਰਨੀਕਰਣ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਪਹਿਲਾ, ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਉਦੇਸ਼ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਉਦੇਸ਼ ਲਾਭ ਜਾਂ ਆਮਦਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਨਾਉਣਾ ਜਾਂ ਲਾਗਤਾਂ ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮ ਕਰਨਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ **ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ** (objective function) ਜਾਂ **ਕਸੌਟੀ ਫਲਨ** (tenterion function) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮਾਤਰਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਣਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮਾਤਰਾ ਨਿਊਨਤਮ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਦੋਹਰੇ (dual) ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਮੁੱਲ ਸਮੱਸਿਆ ਪ੍ਰਮੁੱਖ (primal) ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਦੋਹਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਨਾਲ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਦੋਹਰੀ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਨਾਲ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਵਿਪਰੀਤ ਵੀ।

ਦੂਜੇ, ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਲਪਿਕ ਉਤਪਾਦਨ ਕਿਰਿਆਵਾਂ (processes) ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਕਿਰਿਆ ਜਾਂ ਕਿਰਿਆਸ਼ੀਲਤਾ (activity) ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ। ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ "ਕਿਸੀ ਆਰਥਿਕ ਕੰਮ ਨੂੰ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਵਿਧੀ ਹੈ।" ਇਹ "ਕਿਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਭੌਤਿਕੀ ਕਿਰਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦਾ ਉਪਭੋਗ ਕਰਨਾ, ਕਿਸੀ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਕਰਨਾ, ਕਿਸੀ ਦਾ ਕਰ ਕਰਨਾ, ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਸੁੱਟ ਦੇਣਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਢੰਗ ਨਾਲ ਕਿਸੀ ਵਸਤੂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨਾ।"

ਨੋਟਸ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਤਕਨੀਕ ਨਿਰਣਾ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਏਜੰਸੀ ਦੀ ਇਸ ਗੱਲ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮਰੱਥ ਅਤੇ ਮਿਤਰਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਚੁਣ ਸਕਣ।

ਤਿੱਜੇ, ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਕੁੱਝ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (constraints) ਜਾਂ ਅਵਰੋਧਕ (restraints) ਵੀ ਜਰੂਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਹ ਸਮੱਸਿਆ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਜਾਂ ਰੁਕਾਵਟਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹੜੀਆਂ ਇਹ ਦੱਸਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਕੀ-ਕੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੀ-ਕੀ ਕਰਨਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (inequalities) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਉਹ ਭੂਮੀ, ਮਿਹਨਤ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ ਦੀਆਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮਰੱਥਾ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਚੌਥੇ, 'ਚੋਣ ਚਰ' (choice variables) ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਉਹ ਸੰਸਥਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਕਿ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕੇ ਅਤੇ ਸਭ ਰੁਕਾਵਟਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

ਆਖਰੀ, ਸੰਭਾਵਕ (feasible) ਅਤੇ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ (optimal) ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੀ ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹੋਣ ਤੇ, ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਸਭ ਸੰਭਵ ਸੰਯੋਗ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਇਹ ਸੰਭਾਵਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਖਰੀਦ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਪਭੋਕਤਾ ਦੇ ਲਈ, ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਨ ਉਹ ਸਭ ਸੰਯੋਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਹੜੇ ਬਜਟ ਰੇਖਾ ਤੇ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਮਲਾਗਤ ਰੇਖਾ (isocost line) ਤੇ ਉਹ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਸ ਤੇ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਉਹ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਸਭ ਰੁਕਾਵਟਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇ। ਸਭ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਉੱਚ ਹੱਲ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ (optimum solution) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਭਾਵਕ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਭ ਸੰਭਵ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ ਖੋਜਣ ਦਾ ਉੱਚਤਰ ਉਪਲਬਧ ਤਰੀਕਾ ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ (simplex method) ਹੈ। ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ ਨਾਮ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਇਹ ਤਰੀਕਾ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਗਣਿਤਕ ਅਤੇ ਤਕਨੀਕੀ ਹੈ। ਜਿਹੜਾ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦਾ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਟੀਚਾ ਆਸ਼ਾਵਾਦ ਹੱਲਾਂ ਨੂੰ ਖੋਜਣਾ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਟਾਸਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਕੀ ਹੈ?

27.3 ਫਰਮ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਉੱਤੇ ਉਪਯੋਗ (Application to the Theory of the Firm)

ਫਰਮ ਦਾ ਨਵਕਲਾਸਿਕੀ ਸਿਧਾਂਤ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਜਾਂ ਦੋ ਚਰਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਨਿਰਣ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਉਤਪਾਦਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ ਆਰਥਿਕ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੀਮਿਤ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰੇ ਚਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਉਤਪਾਦਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਜਿਹੜੀਆਂ ਵਿਭਿੰਨ ਸਮਰੱਥਾ ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਤੇ ਰੁਕਾਵਟਾਂ ਉਤਪੰਨ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਲਾਗਤਾਂ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਲਾਭਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਵਿਭਿੰਨ ਜਟਿਲ ਉਤਪਾਦਕੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਚੋਣ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਮਾਨਤਾਵਾਂ (Assumptions): ਫਰਮ ਦਾ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ:

(*i*) ਨਿਰਣਾ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਸੰਸਥਾ ਨੂੰ ਕੁੱਝ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (constraints) ਜਾਂ ਸਾਧਨ ਰੁਕਾਵਟਾਂ (restrictions) ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਉਧਾਰ, ਕੱਚਾ ਮਾਲ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਕਾਰਜਕਲਾਪਾਂ ਉੱਤੇ ਸਥਾਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (space constraints) ਹੋਣ। ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸਮੱਸਿਆ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਰੂਪ ਤੋਂ ਉਹ ਉਤਪਾਦਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਸਥਿਤਰ ਸਾਧਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(*ii*) ਇਹ ਵੈਕਲਪਿਕ ਉਤਪਾਦਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਮੰਨਕੇ ਚੱਲਦਾ ਹੈ।

(*iii*) ਇਸਦੀ ਇੱਕ ਮਾਨਤਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਚਰਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ **ਅਨੁਪਾਤਕਤਾ** ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(*iv*) ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਕੀਮਤਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਤੇ ਸਥਿਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪਤਾ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(*v*) ਯੋਗਸ਼ੀਲਤਾ (additivity) ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਵੀ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਮੂਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਸਭ ਫਰਮਾਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੁੱਲ ਸਾਧਨ ਹਰੇਕ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਫਰਮ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(*vi*) ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਤਕਨੀਕਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਅਤੇ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚ ਨਿਰੰਤਰਤਾ ਅਤੇ ਵਿਭਾਜਕਤਾ ਨੂੰ ਵੀ ਮੰਨਦੀਆਂ ਹਨ।

(*vii*) ਸੰਸਥਾਨਿਕ ਸਾਧਨ ਵੀ ਸਥਿਰ ਮੰਨ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

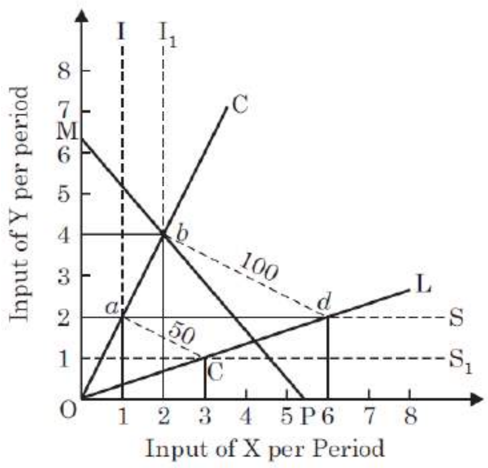
(*viii*) ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਮਾਂ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੁਵਿਧਾ ਅਤੇ ਵੱਧ ਸਹੀ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸਮਾਂ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਅਪੇਖਿਆ ਵਜੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮੇਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਖਤਮ ਨਹੀਂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ।

ਇਹ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹੋਣ ਤੇ ਫਰਮ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਉੱਤੇ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ

(1) ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਅਧਿਕੀਕਰਣ (Maximisation of Output)

ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਫਰਮ *X* ਅਤੇ *Y* ਆਗਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਸਤੂ *Z* ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਣਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਹੈ ਕਿ **ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ** ਬਣਾਏ। ਇਸਦੇ ਕੋਲ ਦੋ ਵੈਕਲਪਿਕ ਉਤਪਾਦਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆਵਾਂ *C* (ਪੂੰਜੀ-ਗਹਿਨ) ਅਤੇ *L* (ਮਿਹਨਤ-ਗਹਿਨ) ਹੈ। ਰੁਕਾਵਟ, ਲਾਗਤ-ਖਰਜ *MP* ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 27.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਤਕਨੀਕ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ (ਉੱਪਰ ਦੱਸੀ ਗਈ) ਬਾਕੀ ਸਾਰੀਆਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 27.1 ਦੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਮੱਸਿਆ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਥਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 27.1

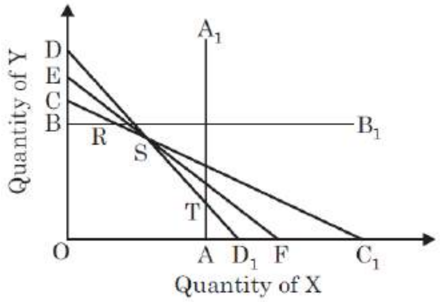
ਕੀਮਤ (ਸਾਧਨ) *Y* ਦੀ ਇਕਾਈਆਂ ਪ੍ਰਤੀ ਅਵਧੀ ਅਨੁਲੰਬ ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਆਗਤ *X* ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਪ੍ਰਤੀ ਅਵਧੀ ਸਮਾਂਤਰ ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਦਿਖਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ *C* ਨੂੰ *X* ਆਗਤ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਦੇ ਨਾਲ *Y* ਦੀਆਂ 2 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਵਸਤੂ *Z* ਦੀਆਂ 50 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰੇਗੀ। ਅਤੇ *X* ਅਤੇ *Y* ਆਇਤਾਂ ਨੂੰ ਦੋਗੁਣਾ ਕਰਕੇ *X* ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ *Y* ਦੀਆਂ 4 ਇਕਾਈਆਂ ਕਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾਣ ਤਾਂ ਨਿਰਗਤ ਵੀ ਦੋਗੁਣੀ ਹੋ ਕੇ *Z* ਦੀਆਂ 100 ਇਕਾਈਆਂ ਹੋ ਜਾਣਗੀਆਂ। *a* ਅਤੇ *b* ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤੇ ਗਏ *X* ਅਤੇ *Y* ਦੇ ਇਹ ਸੰਯੋਗ **ਪੂੰਜੀ-ਗਹਿਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ** ਰੇਖਾ *OC* ਉੱਤੇ ਉਤਪਾਦਨ ਪੈਮਾਨਾ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ, ਵਸਤੂ *Z* ਦੀ ਮੁੱਲ ਹੀ ਇਕਾਈਆਂ (50) ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ *L* ਦੁਆਰਾ *X* ਅਤੇ *Y* ਦੀ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਸੰਯੋਗ ਨਾਲ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ *Z* ਦੀਆਂ 100 ਇਕਾਈਆਂ *X* ਅਤੇ *Y* ਨੂੰ ਦੋਗੁਣਾ ਕਰਕੇ *X* ਦੀਆਂ 2 ਅਤੇ *Y* ਦੀਆਂ 6 ਇਕਾਈਆਂ ਨਾਲ ਉਤਪਾਦਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਉਤਪਾਦਨ ਪੈਮਾਨੇ ਮਿਹਨਤ-ਗਹਿਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਰੇਖਾ *OL* ਉੱਤੇ ਸਥਾਪਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇ *c* ਅਤੇ *d* ਸੰਯੋਗ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਮਾਤਰਾ ਵਕਰ (isoquant) ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ (ਜਿਸਨੂੰ ਬਿੰਦੂ ਰਾਹੀਂ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।) 100-ਇਕਾਈ ਉਤਪਾਦਨ ਸਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਮਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ *t, bdS* ਹੈ। ਲਾਗਤ-ਖਰਚ ਰੁਕਾਵਟ ਨੂੰ ਸਮਲਾਗਤ ਵਕਰ *MP* ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਫਰਮ ਦੀ ਉਤਪਾਦਨ ਸਮਰੱਥਾ ਦੀ ਇੱਕ ਸੀਮਰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ *Obd* ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤੇ ਗਏ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਫਰਮ ਦੋਨੋਂ ਉਪਲਬਧ *C* ਅਤੇ *L* ਤਕਨੀਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੀ ਵੀ ਇੱਕ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ "ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰ" ਦੇ ਬਾਹਰ ਫਰਮ ਉਤਪਾਦਨ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕੇਗੀ। ਫਰਮ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲਾ "ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ" ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿੱਥੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਸਮਮਾਤਰਾ ਵਕਰ ਨੂੰ ਸਮਲਾਗਤ ਵਕਰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਸਮਲਾਗਤ ਵਕਰ *MP* ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਿਰਣ (process ray) *OC* ਦੇ ਬਿੰਦੂ *b* ਉੱਤੇ ਸਮਮਾਤਰਾ I_1bdS ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਰਮ ਆਗਤ *Y* ਦੀਆਂ 4 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ ਲਾਗਤ *X* ਦੀਆਂ 2 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪੂੰਜੀ-ਗਹਿਨ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੇਗੀ ਅਤੇ *Z* ਵਸਤੂ ਦੀਆਂ 100 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰੇਗੀ।

(2) ਆਗਤ ਦਾ ਅਧਿਕੀਕਰਣ (Maximisation of Revenue)

ਦੂਜੀ ਫਰਮ ਨੂੰ ਲਿਓ ਜਿਸਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਸੀਮਿਤ ਸਮਰੱਥਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹੋਏ, ਉਸਦੇ ਆਗਮ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਣਾਉਣਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਿਓ ਪਰਿਯੋਜਨਾ *X* ਅਤੇ *Y*, ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਚਾਰ ਵਿਭਾਗ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਸਮਰੱਥਾ ਸਥਿਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਚਾਰਾਂ ਵਿਭਾਗਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਵਸਤੂ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ, ਸੰਗ੍ਰਹਿ, ਪਾਲਿਸ਼ਿੰਗ ਅਤੇ ਪੈਕਿੰਗ ਨਾਲ ਹੈ ਅਸੀਂ *A, B, C, D* ਨਾਮ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 27.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਨੋਟ

A, B, C, D ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋਏ *X* ਅਤੇ *Y* ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ *A* ਵਸਤੂ *X* ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ *OA* ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ *B* ਵਸਤੂ *Y* ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ *OB* ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ *C* ਦੋਨੋਂ ਵਸਤੂਆਂ, *X* ਅਤੇ *Y,* ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ OC_1 ਅਤੇ *OC* ਤੱਕ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ *D* ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੇ ਉਦਾਪਦਨ ਨੂੰ OD_1 ਅਤੇ *OD* ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। *OATSRB* ਖੇਤਰ *X* ਅਤੇ *Y* ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਸੰਯੋਗਾਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ, ਕਿਸੀ ਵੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਦਾ ਅਤਿਕ੍ਰਮਣ (violation) ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ, ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਭਾਵਕ ਉਤਪਾਦਨ (feasible production) ਦਾ ਖੇਤਰ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਅੰਦਰ *X* ਅਤੇ *Y* ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਖੇਤਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਕਿਸੀ ਸੰਯੋਗ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।



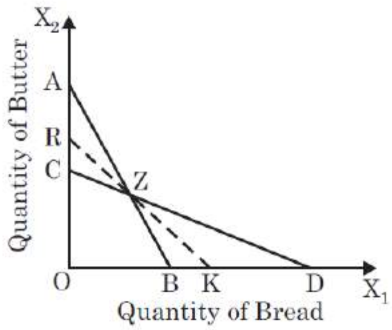
ਚਿੱਤਰ 27.2

ਸੰਭਾਵਕਤਾ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਸਮਲਾਭ ਰੇਖਾ (isoprofit line) ਲੈ ਕੇ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ (optimum solution) ਖੋਜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਮਲਾਭ ਰੇਖਾ *X* ਅਤੇ *Y* ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਸੰਯੋਗਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਫਰਮ ਦੇ ਸਮਾਨ ਲਾਭ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ ਬਹੁਭੁਜ *OATSRB* ਦੇ ਅੰਦਰ ਉੱਚਤਰ ਸਮਲਾਪ ਰੇਖਾ *EF* ਦੇ ਬਿੰਦੂ *S* ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। *S* ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਸੰਭਾਵਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(3) ਲਾਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ (Minimisation of Cost)

ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਪਹਿਲੀ ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਸੀ ਜਿਸਦਾ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ ਇੱਕ ਉਪਭੋਕਤਾ ਮਾਰਕਿਟ ਕੀਮਤਾਂ ਉੱਤੇ ਬ੍ਰੈਂਡ ਅਤੇ ਮੱਖਣ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਸਮੱਸਿਆ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਖਾਦ-ਪਦਾਰਥਾਂ ਦੀਆਂ ਵਿਭਿੰਨ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਲ੍ਹ ਪੋਸ਼ਕ ਦਰਵ (nutrients) ਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਦੀ ਲਾਗਤ ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮ ਬਣਾਇਆ ਜਾਵੇ।

ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਵਾ ਬਿੰਦੂਰੇਖੀ ਹੱਲ ਚਿੱਤਰ 27.3 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਬ੍ਰੈਂਡ (x_2) ਅਤੇ ਮੱਖਣ (x_2) ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਦੋਹਾਂ ਅੱਖਰਾਂ ਉੱਤੇ ਮਾਪੇ ਗਏ ਹਨ। *AB* ਰੇਖਾ ਘੱਟ ਬ੍ਰੈਂਡ ਅਤੇ ਵੱਧ ਮੱਖਣ ਦੇ ਸੰਯੋਗ ਨੂੰ, ਅਤੇ *CD* ਰੇਖਾ ਵੱਧ ਬ੍ਰੈਂਡ ਅਤੇ ਘੱਟ ਮੱਖਣ ਦੇ ਸੰਯੋਗ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ (feasible solution) ਗਹਿਰੀ ਰੇਖਾ *AZD* ਉੱਤੇ, ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ *Z* ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ਸਮਲਾਗਤ (ਬਿੰਦੂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ) ਰੇਖਾ *RK* ਹੈ, ਜਿਹੜੀ *AB* ਅਤੇ *CD* ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕੱਟਣ ਤੇ ਬਿੰਦੂ *Z* ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਬ੍ਰੈਂਡ ਮਹਿੰਗੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸੰਭਵਕ ਹੱਲ *A* ਉੱਤੇ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਮੱਖਣ ਅਪੇਖਿਆ ਵਜੋਂ ਮਹਿੰਗਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ *D* ਉੱਤੇ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਇਹ ਹੱਲ *Z* ਉੱਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਥੇ ਹੀ ਲਾਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 27.3

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦਾ ਵਿਕਾਸ .... ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ।
2. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਜਨਕ .... ਸੀ।
3. ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ .... ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
4. ਸੰਭਾਵਕ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਤਰ .... ਰੇਖਾ ਲੈ ਕੇ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ ਖੋਜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
5. ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਪਹਿਲੀ ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਸੀ ਜਿਸਦਾ .... ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਨਿਊਤਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ।

27.4 ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations of Linear Programming)

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਹੀ ਲਾਭਦਾਇਕ ਸਾਧਨ ਸਿੱਧ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਦੀਆਂ ਆਪਣੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਅਸਲ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਤਕਨੀਕ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ। **ਪਹਿਲੀ,** ਇੱਕ ਵਿਸ਼ਿਸ਼ਟ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। **ਦੂਜੇ,** ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਉਦੇਸ਼ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਦੇ ਮਾਰਗ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਚੱਲਤ ਵਿਭਿੰਨ ਸਮਾਜਿਕ, ਸੰਸਥਾਨਿਕ ਵਿੱਤੀ ਅਤੇ ਹੋਰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਜਾਣਨਾ ਕੋਈ ਅਸਾਨ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਹੈ। **ਤਿੱਜੇ,** ਇੱਕ ਵਿਸ਼ਿਸ਼ਟ ਉਦੇਸ਼ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦਾ ਸੈਟ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਤੇ, ਇਹ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੱਖ ਰੂਪ ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਨਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਣ। **ਚੌਥੇ,** ਜੇਕਰ ਵਰਣਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਪਾਰ ਕਰਨ ਯੋਗ ਵੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿਭਿੰਨ ਸਥਿਰ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਆਗਣਨ ਦੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਜਿਵੇਂ ਕੀਮਤਾਂ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵੇਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ। **ਪੰਜਵੇਂ** ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦੀ ਮੁੱਖ ਕਮੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਆਗਤਾਂ ਅਤੇ ਨਿਰਗਤਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਸਥਾਪਨਾ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਆਗਤਾਂ ਅਤੇ ਨਿਰਗਤਾਂ ਵਿੱਚ ਯੋਗ, ਗੁਣਨ ਅਤੇ ਵਿਭਾਜਕਤਾ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਪਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਹਰੇਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਕਿਉਂਕਿ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਰੇਖੀ (non-linear) ਸੰਬੰਧ ਪਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। **ਛੇਵੇਂ**, ਤਕਨੀਕ ਵਸਤੂ ਅਤੇ ਸਾਧਨ ਬਾਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤਿਯੋਗਤਾ ਦੀ ਮਾਨਤਾ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਣ ਪ੍ਰਤਿਯੋਗਤਾ ਦੀ ਅਵਸਥਾ ਨਹੀਂ ਦੇਖੀ ਜਾਂਦੀ। **ਸੱਤਵੇਂ,** ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਅਰਥਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਫਲਾਂ ਦੀ ਮਾਨਤਾ ਲੈਕੇ ਚੱਲਦੀ ਹੈ, ਪਰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਫਲ ਘਟਦੇ ਹੋਏ ਜਾਂ ਵਧਦੇ ਹੋਏ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। **ਆਖਰੀ**, ਇਹ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਗਣਿਤਕ ਅਤੇ ਜਟਿਲ ਤਕਨੀਕ ਹੈ। ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਨਾਲ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਇੱਕ ਸਪਸ਼ਟ ਆਦਰਸ਼ ਚਰ ਦੇ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੀ ਅਪੇਖਿਆ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ (simplex method) ਜਿਹੇ ਜਟਿਲ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਗਣਿਤਕ ਪਰਿਗਣਨ ਕਰਨ ਪੈਂਦੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਗਣਨ-ਤਕਨੀਕ (computational technique) ਜਿਵੇਂ ਬਿਜਲਈ ਗਣਕ (electric computer) ਜਾਂ ਡੇਸਕ ਗਣਕ (desk calculator) ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੇ ਗਣਕ ਕੇਵਲ ਮਹਿੰਗੇ ਹੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਬਲਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਚਲਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ੱਗਾਂ ਦੀ ਵੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਮਾਡਲ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ 'ਪ੍ਰੀਖਣ ਅਤੇ ਚੂਕ' ਹੱਲ (trial and error solutions) ਪੇਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਵਿਭਿੰਨ ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ ਖੋਜਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

27.5 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਜਾਰਕ ਡੈਨਜਿਗ (George Dantzig) ਨੇ, ਸੇਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਤੀ ਪਹੁੰਚਾਉਣ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਅਮਰੀਕਾ ਦੀ ਹਵਾਈ ਸੇਨਾ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਕਾਰਜ-ਕਲਾਪਾਂ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, 1947 ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਫਰਮ ਦੇ ਆਰਥਿਕ ਸਿਧਾਂਤ, ਪ੍ਰਬੰਧਾਤਮਕ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਅੰਦਰੂਨੀ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਿਕ ਵਪਾਰ, ਸਧਾਰਣ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ, ਕਲਿਆਣ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਅਤੇ ਵਿਕਾਸ ਯੋਜਨਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਇਸਦਾ ਵਿਕਾਸ ਹੋਇਆ ਹੈ।
- ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ (optimisation) ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਜਿਹੜੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਅਪਣਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਨੋਟ

27.6 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ (Optimise) – ਇੱਛਾਵਾਦੀ।
- ਪ੍ਰਮੁੱਖ (Primal) – ਮੁੱਖ।

27.7 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਕੀ ਹੈ? ਇਸਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।
2. ਫਰਮ ਦਾ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਿੱਨ੍ਹਾਂ ਮਾਨਤਾਵਾਂ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ?
3. ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

ਉੱਤਰ: ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. 1947 2. ਜਾਰਜ ਡੈਨਜਿਗ 3. ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ 4. ਸਮਲਾਭ
5. ਰੇਖੀ

27.8 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
5. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.*।
6. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।

ਇਕਾਈ–28: ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀ ਰਚਨਾ (Formulation of Linear Programming)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀ ਰਚਨਾ ਨੂੰ ਜਾਣਨ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਜਿਹੜੀ ਤਕਨੀਕ ਅਪਣਾਉਂਦੇ ਹਨ ਉਸਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਜਾਰਜ ਡੇਨਜਿੰਗ ਨੇ 1947 ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਨਿਰਬੱਧ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਤੇ, ਕਿਸੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਤਕਨੀਕ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੂਜਾ ਨਿਰਬੱਧ (Condition) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

28.1 ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀ ਰਚਨਾ (Linear Programming Formulation)

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ (Formulation) ਦੇ ਚਰਣਾਂ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ LPP (Linear Programming Problem) ਦੇ ਤਿੰਨ ਪਾਰਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

- ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ (Objective function) : ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਕਰਦੇ ਹਨ।
- ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਨਿਰਬੱਧ (Structural constrants)
- ਗੈਰ–ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਿਰਬੱਧ (Non-Negativity constraints)

ਉਦਾਹਾਰਣ ਵਜੋਂ ਮੰਨਿਆ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ X ਅਤੇ Y ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕੀਮਤ ₹2 ਅਤੇ ₹5 ਹੈ ਤਾਂ, ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ

$$\text{Max} : f = 2x + 5y \qquad \text{(A)}$$

ਅਤੇ ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਨਿਰਬੱਧ :

$$\begin{aligned} X + 4y &\le 24 \\ 3X + y &\le 21 \qquad \text{(B)} \\ X + y &\le 9 \end{aligned}$$

ਅਤੇ ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਿਰਬੱਧ : ਨੋਟ

$$X \geq 0 \text{ (C)}$$

ਅਤੇ $y \geq 0$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ A ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਕਰਨ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ B ਇਹ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਗਾਂ ਨਾਲ X ਅਤੇ y ਦਾ ਕਿੰਨਾ ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਇਹ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਬੱਧ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ C ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਿਰਬੱਧ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ Formulation of Linear programming ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : ਹੇਠਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰੋ।

ਵਿਟਾਮਿਨ (ਪ੍ਰਕਾਰ)	*ਪ੍ਰਤੀ kg ਖਾਦ ਪਦਾਰਥ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ*		*ਨਿਊਨਤਮ ਦੈਨਿਕ ਵਿਟਾਮਿਨ ਜਰੂਰਤ*
	I	*II*	
A_1	10	4	20
A_2	5	5	20
A_3	2	6	12
ਖਾਦ ਪਦਾਰਥ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ kg ਕੀਮਤ	₹ 0.60	₹ 1.00	

ਹੱਲ: $\text{Min } f = 0.6x_1 + 1$

$$x_2 = 0.6x_1 + x_2$$

ਨਿਰਬੱਧ $10x_1 + 4x_2 \geq 20$

$$5x_1 + 5x_2 \geq 20$$

$$2x_1 + 6x_2 \geq 12$$

ਅਤੇ $x_1 \geq 0$

$$x_2 \geq 0$$

ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਿਰਬੱਧ

28.2 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਅਧਿਕੀਕਰਣ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮਕੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਜਿਹੜੇ ਤਕਨੀਕ ਅਪਣਾਉਂਦੇ ਹਨ ਉਸਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਵਿਕਾਸ ਇੱਕ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਜਾਰਜ ਡੇਨਜਿੰਗ ਨੇ 1947 ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਹੈ।

28.3 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

1. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ-ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਵਿਧੀ।

ਨੋਟ

28.4 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੂਚੀ ਨੂੰ ਰੇਖੀ-ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ (ਪ੍ਰਕਾਰ)	*ਪ੍ਰਤੀ kg ਖਾਦ ਪਦਾਰਥ ਵਿੱਚ ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ*		*ਦੈਨਿਕ ਕੈਸ਼ੀਅਮ ਜਰੂਰਤ (ਨਿਊਨਤਮ)*
	I	***II***	
Z_1	20	8	40
Z_2	10	5	40
Z_3	4	6	24
ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਤੀ kg	₹ 1.20	₹ 2.00	

28.5 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
3. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
5. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।

ਨੋਟ

ਇਕਾਈ–29: ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਵਿਧੀ (Graphic Method)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਹੱਲ ਨੂੰ ਜਾਣਨਗੇ;
- ਆਗਮ ਦੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸਮਝਣਗੇ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਇੱਕ ਫਰਮ ਲਿਓ ਜਿਹੜੀ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਕੀਮਤਾਂ 12₹ ਅਤੇ 15₹ ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ *X* ਅਤੇ *Y* ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਉਤਪਾਦਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਵਸਤੂ *X* ਉਤਪਾਦਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਫਰਮ ਨੂੰ *A* ਆਗਤ ਦੀਆਂ 12 ਇਕਾਈਆਂ, *B* ਆਗਤ ਦੀਆਂ 6 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ *C* ਆਗਤ ਦੀਆਂ 14 ਇਕਾਈਆਂ ਚਾਹੀਅਦੀਆਂ ਹਨ। ਵਸਤੂ *Y* ਦੇ ਲਈ *A* ਆਗਤ ਦੀਆਂ 4 ਇਕਾਈਆਂ, *B* ਆਗਤ ਦੀਆਂ 12 ਇਕਾਈਆਂ *C* ਆਗਤ ਦੀਆਂ 12 ਇਕਾਈਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ। ਕੁੱਲ ਉਪਲਬਧ *A* ਦੀਆਂ 48 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ, *R* ਦੀਆਂ 72 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ *C* ਦੀਆਂ 84 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਸੂਚੀ 29.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸੂਚੀ 29.1 : ਆਗਤ-ਨਿਰਗਤ ਅੰਕੜੇ

ਆਗਤ	ਵਸਤੂ ਦੀ ਇਕਾਈ ਉਤਪਾਦਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਆਗਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ		ਕੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਲਾਗਤਾਂ ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ
	X ਵਸਤੂ	*Y* ਵਸਤੂ	
A	12	4	48
B	6	12	72
C	14	12	84
ਕੀਮਤ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ	₹ 12	₹ 15	–

ਨੋਟ

ਹਰੇਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਤਿੰਨ ਭਾਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉੱਪਰ ਲਿਖੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਉਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ।

(*i*) **ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ** (Objective Function):ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ X ਅਤੇ Y ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਰੁ. 12 ਅਤੇ ਰੁ. 15 ਆਗਮ ਲਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਉਤਪਾਦਤ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਕਿ ਫਰਮ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਗਮ ਜਾਂ ਆਮਦਨ ਅਰਜਿਤ ਕਰ ਸਕੇ। ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$\text{Maximise } R = 12X + 15Y$$

(*ii*) **ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ** (The Constraints):ਉੱਤੇ ਦੀ ਸੂਚੀ ਨੂੰ ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫਰਮ ਕਾਰਜ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (structural constraints) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਆਗਮ A ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਆਗਤ A ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾ 48 ਇਕਾਈ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਦੋਹਾਂ ਵਸਤੂਆਂ X ਅਤੇ Y ਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ 48 ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਕਿਉਂਕਿ $12X + 4Y$ ਇਕਾਈ 48 ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ, ਇਸ ਲਈ ਆਗਤ A ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੋਵੇਗਾ : $12X + 4Y \leq 48$। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤਰਕ ਦੁਆਰਾ B ਅਤੇ C ਆਗਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਤਿੰਨ ਸੰਰਚਨਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹਨ–

$$12X + 4Y \leq 48 \qquad .....(1)$$

$$6X + 12Y \leq 72 \qquad .....(2)$$

$$14X + 12Y \leq 84 \qquad .....(3)$$

(*iii*) **ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ** (Non-negative Constraints): ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਇਸ ਮਾਨਤਾ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹਨ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਚਰਾਂ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ X ਅਤੇ Y ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਜ਼ੀਰੋ ਜਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹਨ $X \geq 0$ ਅਤੇ $Y \geq 0$.

29.1 ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਹੱਲ (The Graphic Solution of the Problem)

ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਵਰਣਤ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ:

Maximise $R = 12X + 15Y$

Subject to (*i*) $12X + 4Y \leq 48$ .....(1)

$6X + 12Y \leq 72$ .....(2)

$14X + 12Y \leq 84$ .....(3)

(*ii*) $X \geq 0, Y \geq 0$

ਹਰੇਕ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਰੇਖਾਚਿੱਤਰ ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਤਿੰਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ($\leq$) ਨੂੰ ਛੱਡਕੇ ਬਰਾਬਰ (=) ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਚਦੇ ਹਾਂ:

$$12X + 4Y = 48.$$

ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਕਿ ਵਸਤੂ X ਕੇਵਲ ਆਗਤ A ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ 48 ਇਕਾਈਆਂ ਦੁਆਰਾ ਉਤਪਾਦਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਵਸਤੂ Y ਬਿਲਕੁਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ:

$$12X + 0 = 48 \text{ (at the maximum)}$$

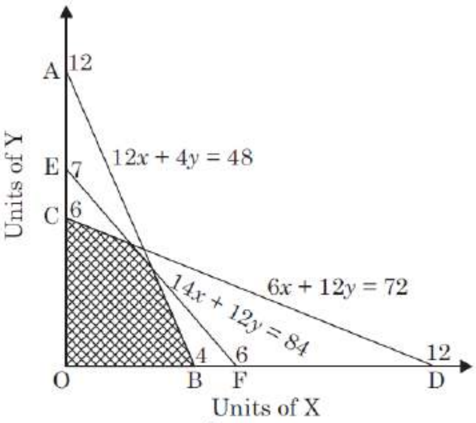
ਜਾਂ $X = 4$ (ਜਦੋਂ $Y = 0$)

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ 48 ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਕੇਵਲ Y ਵਸਤੂ ਹੀ ਉਤਪਾਦਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ:

$$0 + 4Y = 48$$

ਜਾਂ $Y = 12$ (ਜਦੋਂ $X = 0$)

ਸਮੀਕਰਣ $12X + 4Y = 48$ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 29.1 ਵਿੱਚ AB ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $OA = Y$ ਅਤੇ $OB = 4X$. ਰੇਖਾ AB ਉੱਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਜਿਵੇਂ T ਸਮੀਕਰਣ $12X + 4Y = 48$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਰੇਖਾ AB ਦੇ ਨਿੱਚੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਖੇਤਰ ਅਸਮਾਨਤਾ $12X + 4Y \le 48$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 29.1

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ $6X + 12Y = 72$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $X = 12$ ਅਤੇ $Y = 6$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 29.1 ਵਿੱਚ CD ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $OC = 6Y$ ਅਤੇ $OD = 12X$ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ $14X + 12Y = 84$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $X = 6$ ਅਤੇ $Y = 7$ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 29.1 ਵਿੱਚ EF ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $OE = 7Y$ ਅਤੇ $OF = 6X$.

ਸੰਭਾਵਕ ਖੇਤਰ (Feasible Region)–ਚਿੱਤਰ 29.1 ਇਹ ਦਿਖਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਰਛਾਵੇਂ ਵਾਲੇ (shaded) ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ ਜਿਹੜੇ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਤਿੰਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰੇ ਹੋਏ ਹਨ ਹਰੇਕ ਤਿੰਨੋਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਣਗੇ। ਬਿੰਦੂ S ਉੱਤੇ EF ਰੇਖਾ CD ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ T ਉੱਤੇ CD ਰੇਖਾ AB ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $OBTSC$ ਖੇਤਰ ਜਿਹੜੇ ਤਿੰਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਣ ਵਾਲੇ S ਅਤੇ T ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਨਿੱਚੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਿੰਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਪਰਛਾਵੇਂ ਵਾਲਾ (shaded) ਖੇਤਰ ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਸੰਭਾਵਕ ਖੇਤਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਜਿਹੜਾ ਇਸ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਜਾਂ ਇਸਦੀ ਸੀਮਜ ਉੱਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਹੱਲ (Optimum Solution)–ਵਿਭਿੰਨ ਬਿੰਦੂ B, T, S, C ਜਿਹੜੇ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਫਰਮ ਦੇ ਆਗਮ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਰੇਗਾ? ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੁਆਰਾ ਕਿਵੇਂ ਜਾਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ?

ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੁਆਰਾ ਬਿੰਦੂ B ਅਤੇ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼-ਅੰਕਾਂ (coordinates) ਨੂੰ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $OB = 4X$ ਅਤੇ $OC = 6Y$. ਬਿੰਦੂ T ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼-ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। (ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ EF ਬਿੰਦੂ T ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ) ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਨ:

$$12X + 4Y = 48 \quad .....(1)$$

$$14X + 12Y = 84 \quad .....(3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਨੂੰ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਕੇ:

$$36X + 12Y = 144$$

$$14X + 12Y = 84$$

$$22X = 60$$

$$X = 2.73$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $X = 2.73$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਲਗਾਕੇ,

$$12X\ 2.73 + 4Y = 48$$

$$32.76 + 4Y = 48$$

$$4Y = 48 - 32.76$$

ਜਾਂ $$4Y = 15.24$$

$$Y = 3.81$$

ਨੋਟ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ T ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼-ਅੰਕ $X = 2.73$, ਅਤੇ $Y = 3.81$ ਹਨ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ S ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼-ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (3) ਅਤੇ (2)* ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $X = 1.5$ ਅਤੇ $Y = 5.25$

X ਅਤੇ Y ਦੇ ਆਸ਼ਾਵਾਦੀ ਸੰਯੋਗ ਖੋਜਣ ਦੇ ਲਈ X ਅਤੇ Y ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ (ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ 12₹ ਅਤੇ 15₹) ਨੂੰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨਿਰਦੇਸ਼-ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜੋ ਉੱਪਰ ਕੱਢੇ ਗਏ ਹਨ ਸਥਾਨਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਬਿੰਦੂ B ਉੱਤੇ $X = 4$ ਅਤੇ $Y = 0$. ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ (₹) $f = 12X + 15Y$ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨਾਪਨ ਕਰਨ ਨਾਲ:

$$(₹\ 12)(4) + (₹\ 15)(0) = ₹\ 48 \quad .....(4)$$

ਬਿੰਦੂ T ਉੱਤੇ $X = 2.73$ ਅਤੇ $Y = 3.81$ ਹੋਣ ਤੇ, ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ

$$(₹\ 12)(2.73) + (₹\ 15)(3.81) = ₹\ 89.91 \quad ....(5)$$

ਬਿੰਦੂ S ਉੱਤੇ $X = 1.5$ ਅਤੇ $Y = 5.25$ ਹੋਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$(₹\ 12)(1.5) + (₹\ 15)(5.25) = 96.75 \quad .....(6)$$

ਬਿੰਦੂ C ਉੱਤੇ $X = 0$ ਅਤੇ $Y = 6$ ਹੋਣ ਤੇ

$$(₹\ 12)(0) + (₹\ 15)(6) = ₹\ 90 \quad .....(7)$$

$$14X + 12Y = 84$$

$$6X + 12Y = 72$$

	ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਸਮੱਸਿਆ (Primal Problem)		ਦੁਪੱਖੀ ਸਮੱਸਿਆ (Dual Problem)
Maximise Revenue	$R = 12X + 15Y$	Minimise Cost	$C = 48A + 72B + 84C$
Object to	$12X + 4Y \le 48$	Subject to	$12A + 6B + 14C \ge 12$
	$6X + 12Y \le 72$		$4A + 12B + 12C \ge 15$
	$14X + 12Y \le 84$		$A \ge 0, B \ge 0, C \ge 0$
	$X \ge 0,\ Y \ge 0.$		

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਦੁਪੱਖੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਹੱਲ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਪਣੇ- ਆਪ ਕਰਨ।

29.2 ਆਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ : ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ (Minimisation of Cost : Solution of the Food Problem)

ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਪਹਿਲੀ ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਸੀ ਜਿਸਦਾ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਲਾਗਦ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ ਇੱਕ ਉਪਭੋਕਤਾ ਕੀਮਤਾਂ ਉੱਤੇ ਬ੍ਰੈੱਡ ਅਤੇ ਮੱਖਣ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਸਮੱਸਿਆ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀਆਂ ਵਿਭਿੰਨ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕੁੱਲ੍ਹ ਪਦਾਰਥਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਦੀ ਲਾਗਤ ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮ ਬਣਾਇਆ ਜਾਵੇ।

ਸੂਚੀ 29.2: ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਅੰਕੜੇ

ਪੋਸ਼ਕ ਆਹਾਰ-ਤੱਤ	ਪੋਸ਼ਕ-ਦਰਵ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ		ਨਿਊਨਤਮ ਆਦਰਸ਼
	ਬ੍ਰੈੱਡ x_1	ਮੱਖਣ x_2	
ਕੈਲੋਰੀ (1,000)	1	2	3
ਪ੍ਰੋਟੀਨ (25 ਗ੍ਰਾਮ)	2	8	8
ਕੀਮਤ (₹ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ)	2	6	(?)

ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ x_1 ਅਤੇ x_2 ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਬ੍ਰੈੱਡ ਅਤੇ ਮੱਖਣ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਕੈਲੋਰੀ (calories) ਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਦੇ ਗ੍ਰਾਮ ਸੂਚੀ 29.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਬ੍ਰੈੱਡ ਦੇ ਪੋਸ਼ਕ

ਦਰਵ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ 1000 ਕੈਲੋਰੀ ਅਤੇ ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਦੀ 50 ਗ੍ਰਾਮ ਮਾਤਰਾ ਹੈ; ਅਤੇ ਮੱਖਣ ਦੇ 2000 ਕੈਲੋਰੀ ਅਤੇ 200 ਗ੍ਰਾਮ ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਪ੍ਰਤੀ ਅੱਧਾ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਹੈ। ਆਦਰਸ਼ ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ 3000 ਕੈਲੋਰੀ ਅਤੇ 200 ਗ੍ਰਾਮ ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। 500 ਗ੍ਰਾਮ ਬ੍ਰੈੱਡ ਦੀ ਮਾਰਕਿਟ ਕੀਮਤ ਰੁ. 2 ਅਤੇ ਮੱਖਣ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ 500 ਗ੍ਰਾਮ ਕੀਮਤ ਰੁ. 6 ਹੈ।

ਸਮੱਸਿਆ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉੱਪਰ ਸੂਚੀ ਦੇ ਆਖਰੀ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਨਿਊਨਤਮ ਪੋਸ਼ਕ-ਆਹਾਰ-ਆਦਰਸ਼ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਭ ਤੋਂ ਉੱਚ ਆਹਾਰ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਚਿੰਨ੍ਹ (?) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤੀ ਗਈ ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੋਣਗੇ।

ਆਹਾਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ

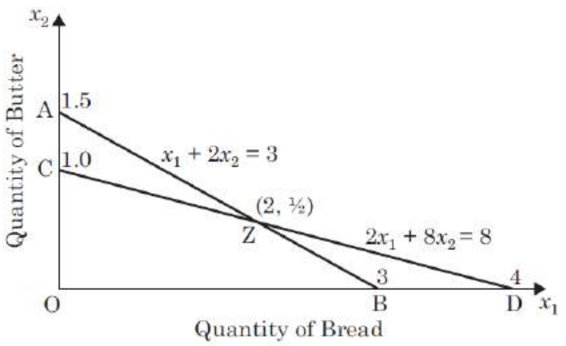
Minimise

Subject
$$\left.\begin{array}{l} C = 2x_1 = 6x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \qquad .....(1)$$

ਅਤੇ

ਨਿਊਨਤਮ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਲਾਗਤ C ਹੈ, ਜਿਹੜੀ ਦੋਨੋਂ x_1 ਅਤੇ x_2 ਚਰਾਂ ਦਾ ਰੇਖੀ ਫਲਨ (linear function) ਹੈ। ਪਾਰਸ਼ਵ ਸੰਬੰਧ 3 ਅਤੇ 8 ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹੜੀਆਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਆਹਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਨਿਊਨਤਮ ਪੋਸ਼ਕ ਆਹਾਰ ਆਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹਨ। ਸਮੱਸਿਆ ਰੇਖੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋਏ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਚਰ (non-negative veriables) ਨਿਊਨਤਮ ਬਣਾਉਣੇ ਹਨ। ਤਿੰਨੋਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਸਿਥਤੀਆਂ ਨਾਲ ਹੱਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਪਾਰਸ਼ਵ ਸੰਬੰਧ (side relation) ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹੋਏ ਲਾਗਤ C ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ: $x_1 + 2x_2 = 3$ ਇਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ: $x_1 = 3$ ਅਤੇ $x_2 = 3/2 = 1.5$ ਚਿੱਤਰ 29.2 ਵਿੱਚ ਇਸਨੂੰ AB ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਜਿੱਥੇ $OA = 1.5x_2$ ਅਤੇ $OB = 3x_1$.

ਦੂਜਾ ਪਾਰਸ਼ਵ ਸੰਬੰਧੀ ਹੈ: $2x_1 + 8x_2 = 8$ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, $x_1 = 4$ ਅਤੇ $x_2 = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 29.2 ਵਿੱਚ CD ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $OC = 1x_2$ ਅਤੇ $OD = 4x_1$.



ਚਿੱਤਰ 29.2

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ x_1 (ਬ੍ਰੈੱਡ) ਸਮਾਂਤਰ ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਅਤੇ x_2 (ਮੱਖਣ) ਅਨੁਲੰਬ ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ ਮਾਪੇ ਗਏ ਹਨ। AB ਰੇਖਾ ਸਮੀਕਰਣ $x_1 + 2x_2 = 3$ ਅਤੇ CD ਰੇਖਾ ਸਮੀਕਰਣ $2x_1 + 8x_2 = 8$ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਮੋਟੀ ਰੇਖਾ AZD ਉੱਤੇ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਉੱਪਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਹ ਸਾਡੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ Z ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਦੋਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ Z ਉੱਤੇ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ A ਜਾਂ D ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ, ਅਸੀਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਯੁਗਮਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਨ:

$$x_1 + 2x_2 = 3 \qquad .....(1)$$

$$2x_1 + 8x_2 = 8 \qquad .....(2)$$

ਉਦਾਹਰਣ : ਮੰਨਿਆ ਇੱਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (Constraints) ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਆਪਣਾ ਆਗਮ (Revenue) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨਿਆ ਇੱਕ ਫਰਮ ਦੋ ਉਤਪਾਦ X_1 ਅਤੇ X_2 ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਲਈ ਉਸਦੇ ਕੋਲ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿੰਨ ਸਾਧਨ a, b ਅਤੇ c ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ–

$$a = 40, b = 50, c = 42$$

ਨੋਟ

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਮੰਨ ਲਿਆ X_1 ਦੀ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਰੇਕ ਸਾਧਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ–

$$a = 4, b = 10, c = 6$$

ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਮੰਨ ਲਿਓ ਕਿ X_2 ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਰੇਕ ਸਾਧਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ–

$$a = 10, b = 5, c = 7$$

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਮੰਨ ਲਿਆ ਕਿ X_1 ਅਤੇ X_2 ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਕੀਮਤ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾ 5 ਰੁਪਏ ਅਤੇ 7 ਰੁਪਏ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਉਤਪਾਦਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਾਧਨਾਂ ਉੱਤੇ ਆਪਣੀ ਕੁੱਲ੍ਹ ਆਮਦਨ (Total Revenue) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੇਗਾ। ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ–

$$\text{Max } TR = 5X_1 + 7X_2 = Z$$

ਫਰਮ ਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ ਅਤੇ ਫਰਮ ਉਹਨਾਂ ਸਾਧਨਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗੀ–

$$4X_1 + 10X_2 \leq 40 \qquad ....(i)$$

$$10X_1 + 5X_1 \leq 50 \qquad .....(ii)$$

$$6X_1 + 7X_2 \leq 42 \qquad .....(iii)$$

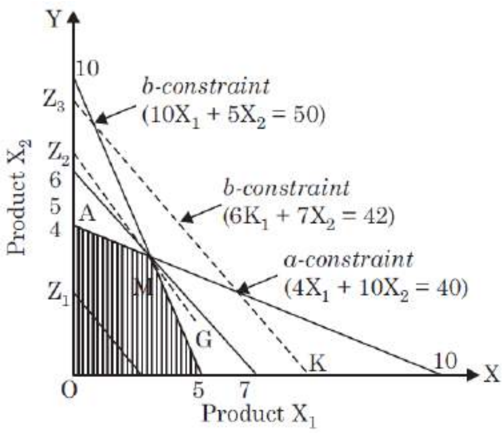
ਇੱਥੇ, $X_1, X_2 \leq 0$

ਫਰਮ ਦੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

ਪਹਿਲਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ *a* ਸਾਧਨ ਜਿਹੜਾ ਕਿ X_1 ਅਤੇ X_2 ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਸਾਧਨ '*a*' ਦੀ ਕੁੱਲ੍ਹ ਪੂਰਤੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਹ ਸਾਧਨ ਪੂਰਤੀ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਵੱਧ ਨਹੀਂ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹੋਰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਯੋਜਨ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ X_1 ਅਤੇ X_2 ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਅੰਕ ਕੱਢਾਂਗੇ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਰਬੱਧ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (Inequalities) ਹਟਾ ਦਿਆਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ ਤਕਨੀਕੀਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਅੰਕ (10, 4), (5, 10) ਅਤੇ (7, 6) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ। ਇਹੀ ਤਕਨੀਕੀਆਂ ਪ੍ਰਯੋਜਨ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਸੰਭਾਵਤ ਹੱਲ (Feasible Solution) ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨਗੀਆਂ। ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ *X*-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ X_1 ਉਤਪਾਦ ਅਤੇ *Y*-ਅਕਸ਼ ਉੱਤੇ X_2 ਉਤਪਾਦ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਫਰਮ ਦੁਆਰਾ ਅਪਣਾਏ ਗਏ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਦੁਆਰਾ ਗ੍ਰਾਫ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। Z_1–ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ (Objective Function) ਹੈ।

ਮੰਨਿਆ ਉਤਪਾਦਕ *a* ਅਤੇ *b* ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਿਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਫਰਮ ਦੇ ਲਈ *OAMG* ਖੇਤਰ ਸੰਭਾਵਤ ਖੇਤਰ (Feasible Zone) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਉਹ *a* ਅਤੇ *c* ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਖੇਤਰ *OATK* ਸੰਭਾਵਤ ਖੇਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਫਰਮ *b* ਅਤੇ *c* ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਿਆਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਖੇਤਰ *OLNG* ਸੰਭਾਵਤ ਖੇਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਤਿੰਨੋਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ *a*, *b* ਅਤੇ *c* ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਖੇਤਰ *OAMG* ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਤ ਖੇਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਫਰਮ ਦਾ ਸੰਪਾਵਤ ਹੱਲ ਇਸ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ।



ਚਿੱਤਰ 29.3: ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਯੋਜਨਾ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਚਿੱਤਰਕ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ

ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਕ ਖੇਤਰ *OAMG* ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਪਰਛਾਵੇਂ ਵਾਲੇ ਖੇਤਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਵਿੱਚ X_1 ਅਤੇ X_2 ਉਤਪਾਦ ਦਾ ਸੰਭਾਵਤ ਹੱਲ ਯੋਜਨਾ ਚਾਹੇਗਾ ਤਾਂ ਉਹ ਠੀਕ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿਉਂਕਿ ਉਸਨੂੰ ਹਰੇਕ ਤਕਨੀਕੀ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਾਵਤ ਹੱਲ (Feasible Solution) ਖੇਤਰ *OAMG* ਦੀ ਸੀਮਾ ਉੱਤੇ ਹੋਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਸਵਾਲ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਉਹ ਸੰਭਾਵਤ ਖੇਤਰ ਦੀ ਸੀਮਾ ਉੱਤੇ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ X_1 ਅਤੇ X_2 ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਣ ਹੱਲ (Optimum Solution) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਫਰਮ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਬਿੰਦੂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ X_1 ਅਤੇ X_2 ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਹੱਲ ਦੇਵੇਗਾ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਕੋਨੇ ਦਾ ਹੱਲ (Corner Solution) ਖੋਜਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਫਰਮ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ Z_1 ਨੂੰ ਸਮਾਂਤਰ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰੇਗੀ। ਸੰਭਾਵਤ ਹੱਲ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਨੇ ਦੇ ਜਿਸ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਸਪਰਸ਼ ਕਰ ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਉਹ X_1 ਅਤੇ X_2 ਦਾ ਇੱਕ ਅਨੁਕਲਣ ਹੱਲ ਕਰੇਗਾ। ਇੱਥੇ ਚਿੱਤਰ–29.6 ਵਿੱਚ *M* ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ X_1 ਅਤੇ X_2 ਉਤਪਾਦ ਦਾ ਅਨੁਕਲਣ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

ਸਵੈ–ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਬਹੁਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Multiple Choice Questions)–

1. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਕਿਸ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਹੀ ਲਾਭਦਾਇਕ ਸਿੱਧ ਹੋਇਆ ਹੈ?

   (*a*) ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ (*b*) ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ (*c*) ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ (*d*) ਰਾਜਨੀਤੀ ਵਿੱਚ।

2. ਕਈ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਅਸਲ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਕਿਸ ਤਕਨੀਕ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ?

   (*a*) ਨਿਖੇੜਨ (*b*) ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ (*c*) ਅਨੁਕਲਨ (*d*) ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

3. ਕਿਹੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਪਹਿਲੀ ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਸੀ ਜਿਸਦਾ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ?

   (*a*) ਧੰਨ (*b*) ਨਿਵਾਸ (*c*) ਆਹਾਰ (*d*) ਪਾਣੀ

29.3 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਫਰਮ ਦਾ ਨਵਕਲਾਸਿਕੀ ਸਿਧਾਂਤ ਤੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਜਾਂ ਦੋ ਚਰਾਂ ਨੂੰ ਲੈਕੇ ਨਿਰਣੇ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਉਤਪਾਦਨ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਪਹਿਲੀ ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਸੀ ਜਿਸਦਾ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ।
- ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਹੀ ਲਾਭਦਾਇਕ ਸਾਧਨ ਸਿੱਧ ਹੋਇਆ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਸਦੀਆਂ ਆਪਣੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਕਈ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਅਸਲ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਤਕਨੀਕ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ।

29.4 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਇਸ਼ਟ (Optimise): ਅਭਿਲਾਸ਼ਿਤ।
- ਪ੍ਰਮੁੱਖ (Primal): ਮੁੱਖ।

29.5 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਲਾਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।
2. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਲਿਖੋ।
3. ਆਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ–ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਪੇਸ਼ ਕਰੋ।

ਨੋਟ

ਉੱਤਰ: ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. (*a*) 2. (*b*) 3. (*c*).

29.6 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
2. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਊਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
6. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।
7. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੌਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.।*
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।

VED1
E\L-LOVELY-H\math30-1 IInd 21-10-11 IIIrd 24-1-12 IVth 21-4-12 Vth 20-8-12 VIth 10-9-12

ਇਕਾਈ–30: ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ (Simplex Method)

ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ (Contents)

ਉਦੇਸ਼ (Objectives)

ਇਸ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਯੋਗ ਹੋਣਗੇ:

- ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ।
- ਵਿਧੀ ਦੇ ਚਰਣ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਸੰਬੰਧੀ।

ਪ੍ਰਸਤਾਵਨਾ (Introduction)

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਗ੍ਰਾਫਿਕ ਵਿਧੀ ਵੱਧ ਜਟਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋ ਜਾਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਯੋਗਮਪਦ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

30.1 ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ (Simplex Method)

ਮੰਨ ਲਿਓ ਇੱਕ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੇਠਾਂ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਕਰਨਾ ਹੈ–

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots. + c_nx_n$$

ਇੱਥੇ ਸਾਰੇ ਸਥਿਰਾਂ (C_i) ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਇਹ ਵੀ ਮੰਨਕੇ ਚੱਲ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ m ਰੇਖੀ ਅਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ n ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (Constraints) ਹੇਠਾਂ ਹਨ–

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots.\ a_{in}x_n \{\leq = \geq\}\ b_i,\ i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..,\ m \qquad (30.1)$$

ਨੋਟਸ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸੰਕੇਤ ($\leq = \geq$) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਦੇ ਲਈ ਹੋਵੇਗਾ। ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ, ਭਾਵ $x_i \geq 0, j = 1, 2 \ldots.. n.$

x_j ਦਾ ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਜਿਹੜਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਹੱਲ (Solution) ਕਹਾਏਗਾ। ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਜਿਹੜਾ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (Non-negativity Restrictions) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ (Feasible Solution) ਕਹਾਏਗਾ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਜਿਹੜਾ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ (Objective Function) $\boldsymbol{Z}$ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਅਨੁਕਲਣ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ (Optimal Feasible Solution) ਕਹਾਏਗਾ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਅਨੁਕਲਣ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਖੋਜਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਣਗੇ। ਅਨੁਕਲਣ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਨੂੰ ਪਾਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ (Feasible Solution) ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਫਿਰ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਹੀ ਸਾਡਾ ਅਨੁਕਲਣ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਹੋਵੇਗਾ। ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧਦੀ ਜਾਵੇਗੀ, ਉਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧਦੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਜੇਕਰ ਸਾਡੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ 6 ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $|\underline{6}|\,|\underline{3}|\,|\underline{3} = \mathbf{20}$ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿੱਥੇ ਤਿੰਨ ਯੁਗਮਪਦ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋਣ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਹੀ ਅਗਿਆਤ ਮੁੱਲ ਹੋਣ।

ਟਾਸਕ ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ ਕੀ ਹੈ?

ਸਮੀਕਰਣ (29.1) ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ)

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ

$$\sum_{j=1}^{n} a_i x_j = b_j$$

$i = 1, 2 \,..........\, m$

$j = 1, 2 \,..........\, n$ (ਇੱਥੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਬਣਾਉਦੇ ਹੋਏ)

$j = 1$

ਉਪਰੋਕਤ ਅਨੁਸਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਚਤ ਅਧਾਰਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਜਰੂਰੀ ਹੈ–

(1) ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਯੋਜਨਾ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਸੰਭਾਵਤ ਹੱਲ ਇੱਕ ਸਦਿਸ਼ (Vector) $X = [x_1, x_2, \,.....\, x_n]$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (29.1) ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। x_j ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਸਦਿਸ਼ a_j ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$a_j = [a_{1j} a_{2j} \,...........\, a_{mj}]$$

(2) ਰਾਸ਼ੀਆਂ $b_1\ b_2 \,........\, b_m$ ਇੱਕ ਸਤੰਭ ਸਦਿਸ਼ b ਦੇ ਸੰਘਟਕ ਹਨ ਜਿਸਨੂੰ ਅਪੇਖਿਅਤ ਸਦਿਸ਼ (Requirement Vector) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix}$$ ਅਤੇ $b \geq 0$, ਇੱਥੇ 0 ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਸਦਿਸ਼ ਹੈ।

(3) ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਗੁਣਾਂਕ $C_1\ C_2 \,..........\, C_n$ ਨੂੰ ਚਰਾਂ $x_1, x_2 \,..........\, x_n$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਭਾਰ (Prices Associated) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਬਣੇ ਸਦਿਸ਼ ਨੂੰ ਮੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ (Price Vector) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ C ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$C = [c_1, c_2, \,..........\, c_n]$$

ਨੋਟ

(4) x_1, x_2 ..... x_n ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਸਮੁੱਚ (Set) ਜਿਹੜਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (30.2) ਅਤੇ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਸ਼ਰਤ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ, ਉਸਨੂੰ ਸੰਭਾਵਤ ਹੱਲ (Feasible Solution) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(5) ਉਹ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ (30.1) ਨੂੰ ਅਨੁਕਲਣ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਸਨੂੰ ਅਨਕੁਲਣ ਹੱਲ (Optimal Solution) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਦੋਂ ਉਹ ਨਿਊਨਤਮ ਸਾਧਕ ਹੱਲ (Minimum Feasible Solution) ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਰਦਾ ਹੈ ਉਦੋਂ ਉਹ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(6) ਜੇਕਰ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ m ਤੋਂ ਵੱਧ ਧਨਾਤਮਕ x_i ਨਹੀਂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਮੁੱਲ ਸਾਧਕ ਹੱਲ (Basic Feasible Solution) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਨੂੰ ਮੁੱਲ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਏ ਤਾਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ $(n - m)$ ਚਰਾਂ ਦਾ ਲੁਪਤ (Vanish) ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

(7) ਜਿਸ ਮੁੱਲ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਠੀਕ m ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਅਵਿਕਰਿਤ ਮੁੱਲ ਸਾਧਕ ਹੱਲ (Non-Degenerate Basic Feasible Solution) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਜ਼ੀਰੋ (Non-Zero) ਚਰਾਂ ਨੂੰ ਮੁੱਲ ਚਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਮੁੱਲ ਚਰ ਲੁਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੁੱਲ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਨੂੰ ਵਿਕਰਿਤ ਮੁੱਲ ਸਾਧਕ ਹੱਲ (Degenerate Basic Feasible Solution) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(8) ਉਹ ਹੱਲ ਜਿਹੜਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (30.1) ਅਤੇ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਸ਼ਰਤ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਨਾ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਅਸਾਧਕ ਹੱਲ (Non-feasible Solution) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(9) ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਵਿੱਚ ਚਿੰਨ੍ਹ $(\leq)$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਸੰਤੁਲਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਚਰਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਲੈਕ ਚਰ (Slack-Variable) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ

ਉਹ ਚਰ ਜਿਹੜਾ ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ (ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ $\geq$) ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਧੂ ਚਰ (Surplus Variable) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਰਾਂ ਨੂੰ ਸੰਯੁਕਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੁਕਚਰ (Dummy Variable) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਲਗਭਗ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਚਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

30.2 ਵਿਧੀ ਦੇ ਗਿਣਤੀ ਸੰਬੰਧੀ ਚਰਣ (Calculating Steps of Method)

(1) ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਦੇ ਲਈ ਜਰੂਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸਲੈਕ ਜਾਂ ਵਾਧੂ ਚਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਜਰੂਰੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਕਲੀ ਚਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ $AX = b$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $b \geq 0$ ਹੋਣ। ਜੇਕਰ ਕੋਈ b_i ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨੂੰ (-1) ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਧਨਾਤਮਕ ਬਣਾ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(3) ਅਰੰਭਕ ਮੁੱਲ ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਕੇ X_j ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਲੈਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $Z_j - C_j$ ਦਾ ਮਾਨ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਸਤੰਭ ਦੇ ਲਈ ਪਤਾ ਕਰ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(4) ਅਧਿਕਾਰਤ ਸਮੀਕਰਣ ਲਈ ਹਰੇਕ $Z_j - C_j \geq 0$, ਤਾਂ ਇਹੀ ਦੁਹਰਾਉ (Iteration) ਅਨੁਕਲਣ ਹੱਲ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਜੇਕਰ $Z_j - C_j > 0$, (ਹਰੇਕ ਅਨਾਧਾਰ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਲਈ) ਉਦੋਂ ਉਚਿਤ ਹੱਲ ਵਿਲੱਖਣ (Unique) ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਵੈਕਲਪਿਕ ਹੱਲ ਵੀ ਮਿਲ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(5) ਆਗਤ ਸਦਿਸ਼ (Entering Vector) ਅਤੇ ਚਲਿਤ ਸਦਿਸ਼ (Departing Vector) ਦੀ ਚੋਣ ਕਰ ਲੈਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

(6) ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਨਕਲੀ ਚਰਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਥਕ ਕਰ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਨਿਮਨ ਨੂੰ ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰੋ–

ਨਿਊਨਤਮ $Z = 2X_1 - 3X_2 + 7X_2$ .....(1)

ਜਿਹੜਾ ਕਿ $3X_1 - 4X_2 - 6X_3 \leq 2$ .....(2)

ਨੋਟ

$$2X_1 - X_2 - 2X_3 \geq 11 \quad .....(3)$$

$$X_1 - 3X_2 - 3X_3 \leq 5 \quad .....(4)$$

ਜਿਸ ਨਾਲ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਲੈਕ (Slack) ਅਤੇ ਵਾਧੂ (Surplus) ਚਰਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ। ਕਿਉਂਜੋ ਇੱਥੇ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਿੰਨ ਸਲੈਕ ਅਤੇ ਵਾਧੂ ਚਰਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ X_4, X_5 ਅਤੇ X_6 ਦਾ ਸਮਾਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ–

$$2X_1 - 3X_2 + 6X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 \quad .....(5)$$

ਜਦੋਂ ਕਿ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ–

$$3X_1 - 4X_2 - 6X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 2 \quad .....(6)$$

$$2X_1 - X_2 + 2X_3 + 0X_4 - X_5 + 0X_6 = 11 \quad .....(7)$$

$$X_1 + 3X_2 - 2X_4 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = 5 \quad .....(8)$$

ਸਾਧਕ ਹੱਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਲੇ ਵਯੂਹ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ–

$$AX = b$$

ਇੱਥੇ $A = [a_{ij}] = [P_{ij}]$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_6 \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } b = P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

ਕਿਉਂਜੋ ਅਧਾਰ ਵਯੂਹ ਇਕਾਈ ਵਯੂਹ (Unit Matrix) ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਪਰੰਤੂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤੱਥਾਂ ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਨਵੀਨ ਸਦਿਸ਼ (Vector)P_7 ਦਾ ਸਮਾਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਰੰਭਕ ਅਧਾਰ P_4, P_7 ਅਤੇ P_6 ਹੋਇਆ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਲਿਖਣ ਤੇ

ਪਹਿਲੀ ਸਾਰਣੀ (First Table)

ਅਧਾਰ ਸਦਿਸ਼ (Basis Vector)	$\downarrow C_j$	$C_j \rightarrow$ P_0	2 P_1	–3 P_2	6 P_3	0 P_4	0 P_5	0 P_6	0 P_7
P_4	0	2	3	–4	–6	1	0	0	0
P_7	0	11	2	–1	2	0	–1	0	1
P_6	0	5	1	3	–2	0	0	1	0
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$			–2	+3	–6	0	0	0	0

1. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਯੋਜਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦੇਖੋ–

(*i*) Linear Programming by Gass.

(*ii*) Economic Theory and Operation Analysis by William J. Baumol.

ਨੋਟ

ਇੱਥੇ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ

$$Z_j = Z_o = 0$$

ਪਰੰਤੂ ਇਸਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਦਿਸ਼ P_2 ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ $Z_j - C_j > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P_2 ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ θ ਚਾਲ (θ trick) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ–

$$P_o = 2P_4 + 11P_7 + 5p_6 \qquad \text{....}(i)$$

$$P_2 = -4P_4 + P_7 - 3P_6 \qquad \text{....}(ii)$$

ਸਮੀਕਰਣ (ii) ਨੂੰ θ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ

$$\theta P_2 = -4\theta\, P_4 + 5P_7 = 3\theta\, P_6 \qquad \text{....}(iii)$$

ਸਮੀਕਰਣ (iii) ਨੂੰ (i) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$$P_o = \theta P_2 + (2 - 4\theta)\, P_4 + (11 - \theta)\, P_7 + (5 - 3\theta)\, P_6 \qquad \text{.....}(iv)$$

θ ਦੇ ਤਿੰਨ ਮਾਨਾਂ $\frac{1}{2}$, 11 ਅਤੇ $\frac{5}{3}$ ਵਿੱਚੋਂ $\theta = \frac{1}{2}$ ਸੰਬੰਧ ਮਾਨ ਹਨ, ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ (iv) ਵਿੱਚ $\theta = \frac{1}{2}$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$p_0 = \frac{1}{2}P_2 + 0P_4 + \frac{21}{2}P_7 + \frac{7}{2}P_6$$

$$= \frac{1}{2}P_2 = \frac{21}{2}P_7 + \frac{7}{2}P_6 \qquad \text{.....}(v)$$

ਸਮੀਕਰਣ (v) ਨਵੀਨ ਅਧਾਰ 11 ਹੋਇਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ P_2, P_7 ਅਤੇ P_6 ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ P_4 ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ P_2 ਦਾ ਸਮਾਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਤੇ ਅੱਗੇ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

ਇੱਥੇ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $Z_j = Z_o = -\frac{3}{2}$

ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਮੰਨਿਆ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $Z_j - C_j < 0$

$$j = 1, 2, \text{..........}\ 7$$

ਦੂਜੀ ਸਾਰਣੀ (Second Table)

ਅਧਾਰ ਸਦਿਸ਼ (Basis Vector)	↓C_j	$C_j \rightarrow$	2	–3	6	0	0	0	0
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_2	–3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{6}{3}$	0	0	0	0
P_7	0	$\frac{21}{3}$	5	0	8	0	–3	0	1
P_6	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{12}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0
Z_j		$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	–3	$-\frac{9}{4}$	0	0	0	0
$Z_j - C_j$			$-\frac{7}{8}$	0	$-\frac{33}{4}$	0	0	0	0

ਨੋਟ

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ–

ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ $Z = 5X_1 + 4X_2$

ਜਿਹੜਾ ਕਿ $X_1 + 2X_2 \leq 8000$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 9000$$

ਜਿਸ ਨਾਲ $X_1, X_2 > 0$

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਲੈਕ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਸਮਾਵੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਦੂਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

$$X_1 + 2X_2 + 0X_3 = 8000$$
$$3X_2 + 2X_2 + 0X_4 = 9000$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਈ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਵਾਂਗੇ–

			Cost	**5**	**4**	**0**	**0**	
C_β	Solution	X_β	β	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	$\theta = \frac{\text{Sol.}}{Y_k}$
0	8000	X_3	Y_3	1	2	1	0	8000
0	9000	X_4	Y_4	3	2	1	0	$\frac{9000}{3} = 3000$
$\sum Z_j - C_j = \sum C_\beta (Y_j - C_j)$				–5	–4	0	0	

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਰਸਾਏ Y_k ਦਾ ਸਮਾਵੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸਦੇ ਲਈ 0 ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। θ ਦਾ ਮਾਨ ਪਹਿਲਾਂ Y_k ਦੀ ਸੰਬੰਧਤ ਮੁੱਲ ਭਾਗ ਦੇਕੇ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

$$\theta = \frac{8000}{1} = 8000$$

ਅਤੇ
$$0 = \frac{9000}{3} = 3000$$

ਫਿਰ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪੰਕਤੀ (Row) ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮਾਵੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ *l*ਵੀਂ ਪੰਕਤੀ (ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ) ਨੂੰ *k*ਵਾਂ ਸਦਿਸ਼ ਹੱਲ (ਭਾਵ 3) ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਹਟਾਵਾਂਗੇ।

ਦੂਜੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ *k*ਵੀਂ ਪੰਕਤੀ (ਪਹਿਲੇ ਦੀ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ) ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ Pivot ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਕੇ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਬਾਕੀ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੂਜੀ ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਨਵੀਂ ਪੰਕਤੀ (ਜਿਹੜੀ ਕਿ Pivot ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ) ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦੇਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਉਸਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਸਾਰਣੀ *i*ਵੀਂ ਪੰਕਤੀ ਨਾਲੋਂ ਘਟਾ ਦਿਆਂਗੇ। ਇਹ ਦੂਜੀ ਸਾਰਣੀ ਦੀ *i*ਵੀਂ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣਗੇ। ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਦੁਹਰਾਉਣਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ $Z_j - C_j$ ਦਾ ਮਾਨ ਧਨਾਤਮਕ ਆ ਜਾਵੇ।

			Cost	**5**	**4**	**0**	**0**	
C_β	Solution	X_β	β	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	θ
0	00	X_3	Y_3	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{15000}{4}$
0	3000	X_1	Y_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{9000}{2}$
	$Z_j - C_j$			$5 - 5 = 0$	$\frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	

ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਲਈ

ਨੋਟ

8000	1	2	1	0
–3000	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
5000	0	$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ ਘਟਾਉਣ ਤੇ		

ਇਹ ਵਿਧੀ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਦੁਹਰਾਉਂਦੇ ਜਾਵਾਂਗੇ ਜਦੋਂ $Z_j - C_j$ ਦਾ ਮਾਨ ਰਿਣਾਤਮਕ ਆ ਜਾਣ। ਕਿਉਂਜੋ β ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ ਜਦੋਂ $Z_j - C_j$; Y_2 ਦੇ ਲਈ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਹਟਾ ਦਿਆਂਗੇ। ਇੱਥੇ Pivot ਦਾ ਮਾਨ 4/3 ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉਂਦੇ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ–

			Cost	**5**	**4**	**0**	**0**	
C_β	Solution	X_β	β	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	θ
4	$\frac{15000}{4}$	X_2	Y_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	
5		X_1	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
		$Z_j - C_j$		0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਲਈ

3000	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2500	1	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
500	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

ਘਟਾਉਣ ਤੇ

ਕਿਉਂਜੋ ਇੱਥੇ $Z_j - C_j$ ਦਾ ਮਾਨ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ। ਹੱਲ ਦਾ ਸਤੰਭ (Column) $X_2 = \frac{15000}{4}$ ਅਤੇ $X_1 = 500$ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ 2 ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ–

$$2 = 5X_1 + 4X_2 = (5\times 500) + \frac{4\times 15000}{5}$$

$$= \quad 2500 \; + \; 15000 \; = \; 17500$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਲਾਭ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਰੋ $Z = 4X + 3Y$

ਜਿਹੜਾ ਕਿ $x + \frac{7}{2}y \le 9$

$$2x + y \le 8$$

$$x + y \le 6$$

ਜਿਵੇਂ ਕਿ $x \leq 0, y \le 0$

ਨੋਟ

ਹੱਲ (Solution): ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਲਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ (Slack variables) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। Slack variables ਜਿਵੇਂ ਕਿ s_1, s_2, s_3 ਆਦਿ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਚਲਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ ਜ਼ੀਰੋ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹਾਂ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਤਾਂ ਕੇਵਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸੰਤੁਲਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਜੋੜ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ–

$$Z = 4x + 3y + os_1 = os_2 + os_3 = R$$

ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਅਰੰਭਕ ਸਾਰਣੀ

Table I

	$C_j \rightarrow$ ↓		4	3	0	0	0	
	Profit	Qty	x	y	s_1	s_2	s_3	Ratio
0	s_1	9	1	$\frac{7}{2}$	1	0	0	9
0	s_2	8	2	1	0	1	0	←4
0	s_3	6	1	1	0	0	1	6
	Z_j		0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$		4	3	0	0	0	

Key Column ↑ ਇੱਥੇ Key Factor = 4

ਨੋਟ : Key factor = 4 ਹੋਵੇਗਾ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

Subject to $\quad x + \frac{7}{2} y + s_1 + os_2 + os_3 = 9$

$$2x + y + os_1 + s_2 + os_3 = 8$$

$$x + y + os_1 + os_2 + s_3 = 6$$

Table II

	$C_j \rightarrow$ ↓		4	3	0	0	0	
	Profit	Qty	x	y	s_1	s_2	s_3	Ratio
4	x	4	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	8
0	s_1	5	0	3	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{3}$
0	s_3	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	4
	Z_j	16	4	2	0	2		
	$C_j - Z_j$			0	1	0	–2	

ਹਾਲੇ $C_j - Z_j$ ਦੀ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਤਾਂ ਧਨਾਤਮਕ (Positive) ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਘੱਟ। ਅਸੀਂ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਨਵੀਂ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉਣ ਰਹਾਂਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ $C_j - Z_j$ ਕਰਕੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਤਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ (Negative) ਵਿੱਚ ਜਾਂ ਜ਼ੀਰੋ ਵਿੱਚ ਨਾ ਆ ਜਾਣ।

ਨੋਟ

Table III

	$C_j \rightarrow$ ↓		*4*	*3*	*0*	*0*	*0*	
	Profit	**Qty**	x	y	s_1	s_2	s_3	**Ratio**
3	y	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	
4	x	$\frac{19}{6}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	0	
0	s_3	$\frac{7}{6}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	0	
	Z_j	$\frac{53}{3}$	4	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{6}$	0	
	$C_j - Z_j$		0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{6}$	0	

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ $C_j - Z_j$ ਦੀ ਸਾਰੀ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਤਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ (Negative) ਜਾਂ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ

$$x = 19/6$$

$$y = 5/3$$

$$s_3 = 7/6$$

Working Notes

Table No. IV

	Qty	x	y	s_1	s_2	s_3
O.V.s_1	9	1	$\frac{7}{2}$	1	0	0
N.T. × 1	–4	–1	$-\frac{1}{2}$	–0	$-\frac{1}{2}$	–0
	5	0	3	1	$-\frac{1}{2}$	0
D.V.s_3	6	1	1	0	0	1
N.T. × 1	–4	–1	$-\frac{1}{2}$	–0	$-\frac{1}{2}$	–0
	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1

ਨੋਟ

Table V

O.V.	4	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
N.T. $\times \frac{1}{2}$	$+\frac{5}{6}$	+0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	0
	–1	–1	–1	–1	+1	+1
	19/6	1	0	–1/6	7/12	0
O.V.s_3	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
N.T. $\times \frac{1}{2}$	+5/6	+0	+1/2	+1/6	–1/12	–0
	7/6	–0	0	–1/6	5/12	1
	5	0	3	1	$-\frac{1}{2}$	0
	38/3	4	0	–2/3	7/3	0
Z_j	53/3	4	3	1/2	+11/6	0

ਨੋਟ: O.V. = Original value,

N.T. = New table value.

ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Self Assessment)

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਕਰੋ (Fill in the blanks)–

1. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਯੋਜਨਾ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ .... ਵਿਧੀ ਵੱਧ ਜਟਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
2. ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਜਿਹੜਾ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ .... ਹੱਲ ਕਹਾਏਗਾ।
3. ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਜਿਹੜਾ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਹ .... ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਕਹਾਏਗਾ।
4. ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਦੇ ਲਈ ਜਰੂਰਤ ਅਨੁਸਾਰ .... ਜਾਂ ਵਾਧੂ ਚਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
5. ਉਹ ਹੱਲ ਜਿਹੜਾ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਸ਼ਰਤ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਨਾ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਹ .... ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

30.3 ਸਾਰਾਂਸ਼ (Summary)

- ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਯੋਜਨਾ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਗ੍ਰਾਫੀ ਵਿਧੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਜਟਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋ ਜਾਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਯੁਗਮਪਦ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਵਿਧੀ ਕਿਹਾ ਜਾਦਾ ਹੈ।

30.4 ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ (Keywords)

- ਰੇਖੀ (Linear) – ਰੇਖਕ।
- ਵਿਧੀ (Method) – ਨਿਯਮ।

30.5 ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Review Questions)

1. ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਅਤੇ ਅਨੁਕਲਣ ਸੰਭਾਵਕ ਹੱਲ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਮਝਦੇ ਹੋ?
2. ਵਿਧੀ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਗਿਣਤੀ ਸੰਬੰਧੀ ਚਰਣਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।
3. ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ–

   ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ $z = 5X_1 + 4X_2$

   ਵਿਸ਼ਾ $X_1 + 2X_2 \leq 8000$

   $3X_1 + 2X_2 \leq 9000$

   ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $X_1, X_2 > 0$ (ਉੱਤਰ: ਵੱਧ ਤੋਂ ਮਾਨ: 17500)

ਉੱਤਰ : ਸਵੈ-ਮੁਲਾਂਕਣ (Answer: Self Assessment)

1. ਗ੍ਰਾਫਕ 2. ਸੰਭਾਵਕ 3. ਅਨੁਕਲਣ 4. ਸਲੈਕ 5. ਅਸਾਧਕ।

30.6 ਸੰਦਰਭ ਪੁਸਤਕਾਂ (Further Readings)

ਬੁਕਸ

1. ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਗਣਿਤ – *ਮਾਈਕਲ ਹੈਰੀਸਨ, ਪੈਟ੍ਰਿਕ ਵਾਲਡਰਨ*।
2. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਰਲ ਪੀ. ਸਿਮੋਨ, ਲੋਰੇਂਸ ਬਲੂਮ*।
3. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ ਐਂਡ ਫਾਈਨਾਂਸ – *ਮਾਰਟਿਨ ਨਾਰਮਨ*।
4. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਮਾਲਕੋਮ, ਨਿਕੋਲਸ, ਯੂ.ਸੀ. ਲੰਦਨ*।
5. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਯਾਮਾਨੇ, *ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਇੰਡੀਆ*।
6. ਏਸੇਂਸ਼ਿਅਲ ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਨੋਟ ਸੇਡੇਸਟਰ, ਪੀਟਰ ਹਾਮੰਡ, ਪ੍ਰੈਂਟਿਸ ਹਾਲ ਪਬਲਿ.*।
7. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕਸ – *ਕਾਉਂਸਿਲ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਕ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ*।
8. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਮੇਹਤਾ ਅਤੇ ਮਦਨਾਨੀ, *ਸੁਲਤਾਨ ਚੰਦ ਐਂਡ ਸੰਸ*।
9. ਮੈਥੇਮੇਟਿਕਸ ਫਾਰ ਇਕੋਨੋਮਿਸਟ – ਸਿਮੋਨ ਅਤੇ ਬਲੂਮ, *ਵੀਵਾ ਪਬਲਿਕੇਸ਼ਨ*।

LOVELY PROFESSIONAL UNIVERSITY
Jalandhar-Delhi G.T. Road (NH-1)
Phagwara, Punjab (India)-144411
For Enquiry: +91-1824-300360
Fax.: +91-1824-506111
Email: odl@lpu.co.in