Statistical Methods In Economics

DECO504

LOVELY
PROFESSIONAL
UNIVERSITY

LOVELY
PROFESSIONAL
UNIVERSITY

अर्थशास्त्र में सांख्यिकीय विधियाँ

STATISTICAL METHODS IN ECONOMICS

Produced & Printed by
USI PUBLICATIONS
2/31, Nehru Enclave, Kalkaji Extn.,
New Delhi-110019
for
Lovely Professional University
Phagwara

पाठ्यक्रम SYLLABUS

अर्थशास्त्र में सांख्यिकीय विधियाँ (Statistical Methods in Economics)

उद्देश्य: पाठ्यक्रम का उद्देश्य छात्रों को साँख्यिकीय उपकरण तथा अवधारणाओं से अवगत कराना है जिससे निर्णय-निर्धारण में सहायता मिले। व्यापार में उनके उपयोगों पर विशेष बल दिया गया है।

Objectives:

The course aims to equip the students with statistical tools and concepts that help in decision making. The emphasis is on their application in business.

Sr. No.	Content
1	Definition of Statistics: Importance and scope of statistics and its limitations, Types of data collection: Primary and Secondary: Methods of collecting Primary data, Classification and Tabulation of data: Frequency and cumulative frequency distribution
2	Central Tendency: Mean, Median and Mode and their Properties, Application of Mean, Median and Mode
3	Dispersion: Meaning and characteristics. Absolute and relative measures of dispersion including Range, Quartile deviation, Percentile, Mean deviation, Standard deviation, Skewness and Kurtosis: Karl Pearson, Bowley, Kelly's methods
4	Correlation: Definition, types and its application for Economists, Correlation: Scatter Diagram Method, Karl Pearson's coefficient of correlation, Rank correlation method
5	Linear Regression Analysis: Introduction and lines of Regression, Coefficient of regression method simple, Correlation analysis vs. Regression Analysis
6	Index number: Introduction and Use of index numbers and their types, Methods: Simple (unweighted) Aggregate Method, Weighted aggregate method, Methods: Simple (unweighted) Aggregate Method, Methods: Simple Average of Price Relatives, Methods: Weighted Average of Price Relatives, Test of consistency: Unit test, Time Reversal Test, Factor Reversal Test and Circular, Cost of Living index and its uses. Limitation of Index Numbers
7	Time Series Analysis: Introduction and components of time series, Time Series Methods: Graphic, method of semi-averages, Time Series Methods: Principle of Least Square and its application, Methods of Moving Averages
8	Theory of Probability: Introduction and uses, Additive and Multiplicative law of probability
9	Theory of Estimation: Point estimation, Unbiasedness, Consistency, Efficiency and Sufficiency, Method of point estimation and interval estimation
10	Types of Hypothesis: Null and Alternative, types of errors in testing hypothesis, Level of significance

विषय-सूची

इकाई (Units) **(CONTENTS)** **पृष्ठ संख्या (Page No.)**

नोट

इकाई—1: सांख्यिकी की परिभाषा: सांख्यिकी का महत्त्व, विस्तार तथा इसकी सीमाएँ (Definition of Statistics: Importance, Scope and Limitations)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- सांख्यिकी की परिभाषा को समझने में।
- सांख्यिकी के कार्य अथवा विस्तार क्षेत्र की व्याख्या करने में।
- सांख्यिकी के महत्त्व एवं सीमाओं का विश्लेषण करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

लार्ड केल्विन का कहना है कि "जिस विषय की बात आप कर रहे हैं यदि आप उसका माप कर सकते हैं और उसे संख्याओं के माध्यम से प्रकट कर सकते हैं तो आप उसके बारे में कुछ जानते हैं; लेकिन जब आप उस विषय का माप ही नहीं कर सकते और उसे संख्याओं में प्रकट नहीं कर सकते तो समझ लीजिए कि आपका ज्ञान अल्प है और वह भी असन्तोषजनक प्रकृति का है। निःसन्देह आज जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में तथा ज्ञान की प्रत्येक शाखा में तथ्यों का संख्यात्मक माप एवं उनकी गणना अपना एक विशेष महत्त्व रखती है। आज संसार के सभी विकासशील राष्ट्रों द्वारा आर्थिक एवं सामाजिक क्षेत्र से सम्बन्धित विषयों के बारे में संख्याओं के माध्यम से सूचनाएँ एकत्रित की

नोट

जाती हैं ताकि उनके आधार पर भावी विकास-नीति का निर्धारण किया जा सके। **मायर एवं वाल्डविन** (Meier and Baldwin) के मतानुसार "जो राष्ट्र अपनी वर्तमान स्थिति एवं विकास-युक्त गतिविधियों के बारे में कुछ नहीं जानते, वे प्रायः विश्व मानचित्रों में पिछड़े हुए राष्ट्र कहकर सम्बोधित किये जाते हैं।

1.1 सांख्यिकी का उद्‌गम एवं विकास (Evolution and Development of Statistic)

अंग्रेजी भाषा का शब्द 'Statistics' जर्मन भाषा के शब्द 'Statistik' और लैटिन भाषा के शब्द 'Status' से लिया गया है जिनका अर्थ है—राज्य अथवा सरकार। कवि सम्राट् **विलियम शेक्सपियर** (W. Shakespear) **जान मिल्टन** (John Milton) तथा **विलियम वर्ड्सवर्थ** (W. Wordsworth) आदि ने भी 'Statist' शब्द का प्रयोग एक ऐसे व्यक्ति के लिये किया था जो राज्य से सम्बन्धित लेखा-जोखा के कार्य में निपुण हो। वैसे 'Statistics' शब्द का सर्वप्रथम प्रयोग करने का श्रेय जर्मनी के प्रसिद्ध गणिताचार्य **गॉटफ्रायड एकेनवाल** (Golfried Achenwall), जिन्हें सांख्यिकी का जन्मदाता भी कहा जाता है, को प्राप्त है।

इस आधार पर यह कहा जा सकता है कि सांख्यिकी की उत्पत्ति, सही अर्थों में, **'राजाओं के विज्ञान'** (Science of Kings) के रूप में हुई है। प्राचीन इतिहास का अध्ययन करने पर पता चलता है कि ये शासक अपने राज्य से सम्बन्धित विभिन्न विषयों के सामयिक सर्वेक्षण कराते रहते थे ताकि उन्हें वास्तविक स्थिति का पता चलता रहे। हाँ, ध्यान रहे, इन सम्राटों द्वारा मुख्य रूप से जनशक्ति, धनशक्ति तथा सैन्य-शक्ति जैसी सूचनायें, एकत्रित की जाती थीं। उदाहरण के तौर पर 3050 ई. पू. विश्वविख्यात पिरामिडों के निर्माण हेतु मिश्र के सम्राट् द्वारा समंकों का संकलन कराया गया था। इसी प्रकार 1400 ई. पूर्व **सम्राट् रैमेसिस द्वितीय** ने भूमि-सम्बन्धी और **मूसा सम्राट्** ने जातियों की गणना करायी थी। **भारत** में कौटिल्य के अर्थशास्त्र, तुज्के-बावरी और आईन-ए-अकबरी जैसे ग्रन्थ समंक-संग्रहण की कला का जीता-जागता उदाहरण पेश करते हैं।

कालान्तर में धीरे-धीरे इस विज्ञान का प्रयोग अन्य क्षेत्रों में भी किया जाने लगा। उदाहरण के तौर पर सोलहवीं शताब्दी में **जॉन्स कैपलर** ने खगोलशास्त्र के क्षेत्र में, **सर टॉम्स ग्रेशम** ने आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र में, सत्रहवीं शताब्दी में **जीवन समंकों** के रूप में तथा अठारहवीं शताब्दी में गणितीय क्षेत्र में इस विज्ञान का प्रयोग शुरू कर दिया गया। इसी शताब्दी के दौरान पास्कल, फरमैट, बरनौली, लाप्लेस तथा गौस जैसे विद्वानों ने सम्भावना सिद्धांत, नियमितता सिद्धांत तथा प्रसामान्य सिद्धांत (Normal Law of Errors) का प्रतिपादन किया। उन्नीसवीं शताब्दी में इस विज्ञान को और अधिक विकसित करने का श्रेय क्यूटले, नैप, चार्लियर फ्रान्सिस गाल्टन तथा कार्ल पियर्सन महोदय को है। वर्तमान शताब्दी तो स्वयं में एक सांख्यिकीय युग है जिसमें मानव जाति से सम्बन्धित सभी विज्ञानों में इसका पूर्णरूपेण प्रयोग किया जाने लगा है। श्री **टिपेट** (Tippet) ने ठीक ही कहा है कि **"सांख्यिकी प्रत्येक व्यक्ति को प्रभावित करती है और मानव जीवन को अनेक बिन्दुओं पर स्पर्श करती है।"** हाँ! आज यह विज्ञान केवल शासकों एवं सम्राटों की ही बपौती नहीं, बल्कि आर्थिक, सामाजिक तथा भौतिक सभी शास्त्रों की आधारशिला है।

1.2 सांख्यिकी का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Statistics)

सांख्यिकी का मूल उद्देश्य अनुसन्धान कार्य की विभिन्न समस्याओं का अध्ययन, उनके कारण एवं परिणामों का विश्लेषण करना है। सांख्यिकी रीतियों के द्वारा ही किसी समस्या से सम्बन्धित भूतकाल के समंकों को एकत्र करके उनकी वर्तमान परिस्थितियों से सापेक्षिक तुलना की जाती है। इन्हीं संमकों के द्वारा घटनाओं में होने वाले परिवर्तनों के कारणों और उनके परिणामों का विश्लेषण किया जाता है। **बॉडिंगटन** के अनुसार, "सांख्यिकीय अन्वेषण का प्रमुख उद्देश्य भूतकालीन एवं वर्तमान तथ्यों की तुलना करके यह ज्ञात करना है कि जो परिवर्तन हुए हैं उनके क्या

नोट

कारण रहे हैं तथा उनके क्या परिणाम भविष्य में हो सकते हैं।" ("The ultimate end of statistical research is to enable comparison to be made between past and present results with a view to ascertaining the reasons for changes which have taken place and the effect of such changes on the future.") – **Boddington**

जॉनसन एवं **जैक्सन** के अनुसार, "सांख्यिकीय रीतियों का वास्तविक उद्देश्य तथ्यों एवं संख्याओं से उचित अर्थ निकालना अज्ञात घटनाओं के बारे में खोज करना और स्थिति पर प्रकाश डालना है।"

आज सांख्यिकी का महत्व इतना बढ़ चुका है कि यह मानव जीवन के प्रत्येक पहलू को प्रभावित करता है। **प्रो. वॉलिस** एवं **रॉबर्ट्स के अनुसार,** "Statistics is a tool which can be used in attacking problems that arise in almost every field of empirical inquiry." इसके महत्व को देखते हुए इसे मानव कल्याण का अंकगणित भी कहा जाता है। **रॉबर्ट डब्लू. बर्गेस** के अनुसार, "सांख्यिकी का मौलिक सिद्धान्त अज्ञान, पूर्वधारणा, निरंकुश सत्ता, निराधार एवं अपरिपक्व निर्णय, परम्पराएँ व रूढ़िवादी सिद्धान्तों के क्षेत्र को हटाकर ऐसे क्षेत्र की वृद्धि करना है जहाँ विश्लेषण किये गये परीक्षणात्मक तथ्यों के आधार पर निर्णय लिये जाते हैं और सिद्धान्त बनाए जाते हैं।

1.3 सांख्यिकी के कार्य अथवा विस्तार क्षेत्र (Functions or Scope of Statistics)

आधुनिक समय में सांख्यिकी की लगातार बढ़ती हुई महत्ता का मुख्य कारण उसके द्वारा विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के महत्वपूर्ण कार्य सम्पन्न होना है। किसी भी क्षेत्र में सांख्यिकी रीतियों द्वारा समंकों को एकत्रित करने तथा उनका विश्लेषण करके उचित निष्कर्ष निकालने वाले व्यक्ति को सांख्यिक (Statistician) कहते हैं। किसी भी सांख्यिक के तीन प्रमुख कर्तव्य होते हैं–

1. **समंकों का संग्रहण**–सर्वप्रथम सांख्यिक एक स्पष्ट योजना बनाकर प्राथमिक अथवा द्वितीयक ढंग से समंकों को संकलित करके उनका सम्पादन कर शुद्धता की जाँच करता है।
2. **विश्लेषण**–इसके अन्तर्गत वह समंकों को वर्गीकृत एवं उनका प्रस्तुतीकरण करता है। फिर वह समंकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति ज्ञात करने, उनकी तुलना करने तथा उनमें सम्बन्ध स्थापित करने के लिए माध्य, अपकिरण, विषमता, सह-सम्बन्ध आदि अनेक सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग करता है।
3. **निर्वचन** (Interpretation)–समंकों का संकलन व विश्लेषण करने के बाद सांख्यिक उनसे तर्कपूर्ण और निष्पक्ष निष्कर्ष निकालता है।

वास्तव में समंकों के आधार पर उचित परिणाम निकालना ही संकलन एवं विश्लेषण का मूलभूत उद्देश्य है।

सांख्यिकी (Statistics) के प्रमुख कार्य निम्न हैं–

1. **तथ्यों को संख्यात्मक बनाना** (Statistics express facts in numbers)–सांख्यिकी का प्रथम कार्य तथ्यों को संख्यात्मक रूप देना होता है ताकि उनका विश्लेषण एवं निर्वचन हो सके।
2. **जटिल तथ्यों को सरल बनाना** (Simplification of complexities)–सामान्य व्यक्ति जटिल एवं बिखरे हुए समंकों को न तो सरलता से समझ सकता है और न ही कोई निष्कर्ष निकाल सकता है। सांख्यिकी के अन्तर्गत विभिन्न जटिल समंकों को वर्गीकरण, सारणीयन, चित्रमय व बिन्दुरेखीय प्रदर्शन आदि सांख्यिकीय रीतियों के द्वारा सरल बनाया जाता है। **डॉ. ए. एल. बाउले** के अनुसार, "एक जटिल समूह के सांख्यिकीय अनुमान का उद्देश्य एक ऐसा चित्र प्रस्तुत करना होता है जिससे मस्तिष्क साधारण प्रयत्न से ही समस्त समूह के महत्व को समझ सके।"
3. **तथ्यों की तुलना कर सम्बन्ध स्थापित करना** (Comparison and establishment of relationship)–तुलनात्मक अध्ययन सांख्यिकी का एक प्रमुख कार्य है। **डॉ. बाउले** के अनुसार, "सांख्यिकी का मुख्य व्यावहारिक उपयोग सापेक्षिक महत्व, जिसे किसी व्यक्ति द्वारा गलत समझने की

नोट

सम्भावना रहती है, प्रकट करना होता है। समंक प्राय: सदैव ही तुलनात्मक होते हैं।"

सह-सम्बन्ध और गुण-साहचर्य की रीतियों द्वारा विभिन्न घटनाओं जैसे मुद्रा की मात्रा और सामान्य मूल्य स्तर, वर्षा की मात्रा और कृषि उत्पादन आदि में पाये जाने वाले सम्बन्ध को स्पष्ट किया जा सकता है।

क्या आप जानते हैं सांख्यिकी में विभिन्न तथ्यों की तुलना करने के लिए माध्य, सूचकांक, गुणांक आदि का प्रयोग किया जाता है।

4. **नीति-निर्धारण करना** (Formulation of policies)—सांख्यिकी सामाजिक, आर्थिक, व्यापारिक तथा अन्य क्षेत्रों की नीति-निर्धारण करने में सहायक होती है। संकलित किये गये समंकों का विश्लेषण करके ही देश की आयात व निर्यात नीतियाँ, मूल्य नीति, उत्पादन नीतियाँ, मद्य-निषेध नीति आदि का निर्धारण किया जाता है। इसके साथ ही वर्तमान मूल्य नीति, खाद्य नीति, मौद्रिक नीति, करारोपण, मुद्रा एवं बैंकिंग नीतियों के परिणामों का मूल्यांकन भी सांख्यिकी द्वारा किया जाता है। इस प्रकार नीति, निर्धारित करना एवं पहले से निर्धारित नीतियों के प्रभावों का मूल्यांकन करना सांख्यिकी का प्रमुख कार्य है।
5. **व्यक्तिगत ज्ञान एवं अनुभव में वृद्धि** (Statistics enlarges individual knowledge and experience)—**डॉ. बउले** के अनुसार, "सांख्यिकी का उचित कार्य वास्तव में व्यक्तिगत अनुभव में वृद्धि करना है।" सांख्यिकी की सहायता से मनुष्य अपनी सोचने-समझने की शक्ति एवं योग्यता को अधिक विकसित कर सकता है। इसके अध्ययन से विचारों को स्पष्टता एवं निश्चयात्मकता मिलती है। समंकों के विश्लेषण व निर्वचन से मनुष्य की तार्किक शक्ति में वृद्धि होती है और प्रत्येक समस्या के समाधान के लिए उचित दृष्टिकोण विकसित हो जाता है। सांख्यिकीय रीतियों के उचित प्रयोग के बिना मानव ज्ञान अपूर्ण और अपर्याप्त है। सांख्यिकी व्यक्ति की ज्ञान परिधि का विस्तार करने में सहायता करती है। **ह्विपिल** के अनुसार, "सांख्यिकी व्यक्ति के क्षितिज का विस्तार करने में सहायक होती है।" ("Statistics enables one to enlarge his horizon."–*Whipple*)
6. **पूर्वानुमान लगाना** (Forecasting for the future)—यह कार्य आन्तरगणन, बाह्यगणन तथा पूर्वानुमान आदि क्रियाओं द्वारा किया जाता है। आर्थिक विकास की सभी योजनाएँ भावी अनुमानों के आधार पर ही बनाई जाती हैं। **डॉ. बाउले** के अनुसार, "एक सांख्यिकीय अनुमान अच्छा हो या बुरा, ठीक हो या गलत, परन्तु प्राय: प्रत्येक दशा में वह एक आकस्मिक प्रेक्षक के अनुमान से अधिक ठीक होगा और उसकी प्रकृति केवल सांख्यिकीय रीतियों के द्वारा ही गलत सिद्ध की जा सकती है।"

नोट्स सांख्यिकी के अन्तर्गत विभिन्न रीतियों के द्वारा केवल वर्तमान तथ्यों का विश्लेषण ही नहीं किया जाता अपितु भविष्य के अनुमान भी लगाये जाते हैं।

7. **वैज्ञानिक नियमों की सत्यता की जाँच** (Statistics tests the law of other sciences)—सभी विज्ञानों के नियम अधिकांशत: निगमन प्रणाली (Deduction method) द्वारा विकसित किये गये हैं। सांख्यिकीय रीतियों के द्वारा पुराने नियमों के परीक्षण और नये नियमों के निर्माण में सहायता मिलती है। बहुत से नियम जो निगमन विधि द्वारा प्रतिपादित नहीं किये जा सके, उनको बनाने के लिए सांख्यिकी का सहारा लिया जाता है। समंकों के आधार पर ही माल्थस जनसंख्या सिद्धान्त, द्रव्य के परिमाण सिद्धान्त में अनेक संशोधन किये गये हैं। सांख्यिकीय विश्लेषण के आधार पर निर्मित नियम बहुत ही स्थिर एवं सार्वभौमिक प्रकृति के होते हैं।

नोट

8. **तथ्यों को निश्चयात्मक रूप देना** (Statistics provides definiteness to the facts)—सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग के बिना निष्कर्ष तो निकाले जा सकते है, परन्तु उनका प्रत्येक कसौटी पर खरा उतरना असम्भव होता है। अर्थात् यदि किसी समस्या के समाधान या समस्या को यथार्थ रूप नहीं दिया जाता है तो उसमें अनिश्चितता बनी रहती है जबकि सांख्यिकी रीति द्वारा निकाले गये निष्कर्ष तुलनात्मक रूप से शुद्ध एवं सत्यता के निकट होते हैं।
9. **परिकल्पना और उसकी जाँच में सहायक** (Helps in formulating and testing hypothesis)—सांख्यिकीय रीतियाँ परिकल्पना करने उनकी जाँच करने एवं नये सिद्धान्त विकसित करने में सहायक होती हैं। उदाहरण के लिए—ब्याज-दरें कम करने से बाजार में पूँजी तरलता बढ़ेगी।
10. **विस्तार का आभास कराना**—सांख्यिकी की सहायता से किसी घटना की वास्तविक महत्ता का उचित आभास हो जाता है। समंकों के रूप में दिये विवरण अधिक स्पष्ट और प्रभावशाली होते हैं। 1961 से 1971 तक भारत की जनसंख्या तीव्र गति से बढ़ी है परन्तु इससे समस्या की गम्भीरता का उचित आभास नहीं होता परन्तु यदि कहा जाए कि 21 व्यक्ति प्रति मिनट की दर से बढ़े हैं तो समस्या का आकार अधिक स्पष्ट हो जाएगा जो कि सांख्यिकीय रीतियों से सम्भव है।

1.4 सांख्यिकी का महत्त्व (Importance of Statistics)

प्राचीनकाल में सांख्यिकी को राज्य के अंकगणित के रूप में जाना जाता था क्योंकि उस समय यह केवल शासकीय कार्यों तक ही सीमित था। परन्तु सामाजिक विकास, सभ्यता विकास एवं आर्थिक जागरण के कारण इस विज्ञान का क्षेत्र अत्यधिक बढ़ गया है। अब सांख्यिकी विज्ञानों की विभिन्न समस्याओं को तार्किक विश्लेषण के द्वारा हल करने में सहायता देती है। **वालिस** एवं **रॉबर्ट्स** के अनुसार, "सांख्यिकी एक ऐसा साधन है जो प्रयोगसिद्ध अनुसन्धान के लगभग प्रत्येक क्षेत्र में उत्पन्न होने वाली समस्याओं का समाधान करने में **प्रयोग किया जाता है।**"

1. शासन प्रबन्ध में महत्व (Importance in Administration)—सांख्यिकी का उद्‌गम एवं विकास राज्य विज्ञान के रूप में हुआ था। राज्य की शासन व्यवस्था में सांख्यिकी के द्वारा राजकीय आय, व्यय जनसंख्या, सैन्य-शक्ति तथा भूमि-सम्बन्धी समंकों का संकलन किया जाता था। वर्तमान युग में राज्य की प्रत्येक नीति का निर्धारण सांख्यिकी के सहयोग से ही हो पाता है। वित्तमंत्री द्वारा बजट तैयार करते समय करारोपण में वृद्धि या कमी, आय-व्यय का पूर्वानुमान, प्रशासन, प्रतिरक्षा, स्वास्थ्य, शिक्षा आदि पर व्यय धनराशि एवं नई योजनाओं आदि का अध्ययन सांख्यिकी की सहायता से ही किया जाता है। नये कानून बनाने एवं पुरलोकानूनों में संशोधन करने के लिए भी सांख्यिकी की आवश्यकता पड़ती है। सरकार द्वारा नियुक्त विभिन्न समितियों तथा आयोगों की रिपोर्ट आवश्यक समंकों पर ही आधारित होती है। युद्ध नीति, व्यूह रचना, अस्त्र-शस्त्र व अन्य साज-सामान की आवश्यकता, प्रशिक्षण, खरीदी हुई सामग्री के प्रतिदर्श निरीक्षण आदि की सफलता उपयुक्त समंकों पर निर्भर होती है।

2. आर्थिक नियोजन में महत्व (Importance in Economic Planning)—वर्तमान युग में प्रत्येक देश अपने विकास और अर्थिक प्रगति के लिए आर्थिक नियोजन करता है। देश की आर्थिक योजना को उपलब्ध साधनों, मुख्य समस्याओं और आवश्यकता से सम्बन्धित उचित सांख्यिकीय साम्रगी के आधार पर तैयार किया जाता है।

टिप्पेट के अनुसार, "नियोजन आज का व्यवस्थित क्रम है और समंकों के बिना नियोजन की कल्पना भी नहीं की जा सकती।" पर्याप्त एवं विश्वसनीय समंकों के आधार पर ही देश के योजना-निर्माता प्राकृतिक एवं मानवीय संसाधनों, पूँजी, आय आदि की जानकारी प्राप्त करते हैं। योजनाएँ लागू करने के पश्चात् उनकी प्रगति का मूल्यांकन भी सांख्यिकीय रीतियों द्वारा ही किया जाता है। समंकों के आधार पर ही देश यह जान पाता है कि किस क्षेत्र में विकास धीमी गति से या तीव्र गति से हो रहा है अर्थात् "समंकों के बिना आर्थिक नियोजन एक दिशासूचक यन्त्र रहित जहाज के समान है।" अत: समंकों के बिना आर्थिक योजनाओं के निर्धारित लक्ष्यों की प्राप्ति असम्भव है। भारतीय

नोट

आर्थिक नियोजन करने वाले योजना आयोग के अनुसार, "देश के आर्थिक विकास के लिए, विशेषकर नियोजन के उद्देश्यों की पूर्ति करने और नीति व प्रशासन सम्बन्धी निर्णय लेने के लिए निरन्तर अधिकाधिक मात्रा में उपयुक्त समंकों की आवश्यकता होती है।" इसी प्रकार यदि अपर्याप्त और अशुद्ध समंकों के आधार पर किया जाने वाला नियोजन, नियोजित अर्थव्यवस्था के न होने से भी बुरा है। भारतीय नियोजन के आधार समंकों में सुधार के लिए कई उपाय किये गये जिनमें विशेष रूप से निम्न उल्लेखनीय हैं—केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (Central Statistical Organisation), राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (National Sample Survey), स्थायी जनगणना संगठन आदि की स्थापना करना, समंक संकलन अधिनियम की व्यवस्था एवं जनसंख्या, राष्ट्रीय आय, उद्योग, कृषि आदि के समंकों को एकत्रित करने की विधियों में व्यापक सुधार करना। इस प्रकार राष्ट्रीय आयोग आर्थिक नियोजन में सांख्यिकी का व्यापक प्रयोग करता है जिसके बिना नियोजन असम्भव सा है।

टास्क प्राचीन काल में सांख्यिकी का प्रयोग किस रूप में किया जाता था?

3. व्यवसाय एवं वाणिज्य में महत्व (Importance in Business and Commerce)—व्यापार, उद्योग, उत्पादन एवं वाणिज्य के प्रत्येक क्षेत्र में सांख्यिकी का अत्यधिक महत्व है। एक कुशल व्यापारी या उत्पादक समंकों के आधार पर माँग के प्रति जागरूक रहता है और अपनी व्यापारिक नीतियों का निर्धारण करता है। वस्तु की माँग का पूर्वानुमान लगाने के लिए व्यापारी मौसम परिवर्तनों, व्यापार चक्रों जीवन-स्तर, रस्मो-रिवाज, ग्राहकों की रुचि, क्रय-शक्ति आदि के उपलब्ध समंकों को आधार बनाता है। माँग के अतिरिक्त कच्चे माल के क्रय, उत्पाद के विक्रय, यातायात लागत, विज्ञापन, वित्तीय साधन, मजदूरी, मूल्य निर्धारित नीतियों का निर्धारण भी समंकों के विश्लेषण द्वारा करता है। **बॉडिंगटन** के अनुसार, "एक सफल व्यापारी वही है जिसका अनुमान यथार्थता के अत्यधिक निकट होता है।" ("The successful businessman is the one whose estimate most closely approaches accuracy." —*A. L. Boddington*) अनुमान के गलत साबित होने पर व्यापारी को वस्तु के स्टॉक एवं माँग में असन्तुलन होने के कारण या तो हानि होगी या उसका लाभ कम हो जाएगा। समंकों के उचित प्रयोग से व्यापारी अपनी भूतकालीन गलत नीतियों को सुधारकर भावी उचित नीतियों का निर्माण करता है जिससे उसे अधिकाधिक लाभ हो। नये उद्योग के प्रवर्तन की विभिन्न समस्याओं के समाधान में भी समंक सहायक होते हैं।

प्रबन्ध लेखांकन एवं व्यवसायिक लेखाकर्म के क्षेत्र में भी सांख्यिकी और उसके समंकों का बहुत महत्व है। समंकों की सहायता से एक व्यवसायी वस्तु की प्रति इकाई लागत, कार्यक्षमता का सही मापन, अपव्ययों, आर्थिक मितव्ययिताओं एवं वस्तु या सेवा का मूल्य-निर्धारण करता है। इन्हीं समंकों के आधार पर व्यावसायिक खाते तैयार किये जाते हैं जिनके आधार पर व्यवसाय की भावी नीतियाँ तैयार की जाती हैं। इन्हीं समंकों के आधार पर बाजार अनुसन्धान, श्रमिकों की नियुक्ति व प्रशिक्षण, विक्रय व्यवस्था व नियन्त्रण तथा विनियोग नीति को विश्लेषित किया जाता है।

वाणिज्य के अन्य क्षेत्रों; जैसे—बैंकिंग, स्कन्ध विपणि (Stock Exchange), उपज विपणि (Produce Exchange) तथा बीमा व्यवसाय (Insurance) आदि में सांख्यिकी एवं समंकों की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। बैंक अपनी नीतियों (ऋण नीति, साख नीति एवं विनियोग नीति) का निर्धारण व्यापार चक्रों, मुद्रा बाजार की स्थिति, केन्द्रीय बैंक की नीति एवं द्रव्य की मौसमी माँग आदि से सम्बन्धित समंकों के आधार पर करता है।

स्कन्ध विपणि एवं उपज विपणि का क्षेत्र भी समंकों पर ही आधारित है। सट्टेबाज व दलालों को भी अंशों (Shares) और वस्तुओं के पिछले मूल्य समंकों व माँग-पूर्ति की वर्तमान स्थिति के आधार पर पूर्वानुमान लगाने पड़ते हैं जो कि समंकों व सांख्यिकी द्वारा सम्भव एवं सरल है। विशेषत: वर्तमान युग में अग्रिम व्यापार (advance trading) करने वालों (वायदा व्यापार) के लिए समंकों का प्रयोग अपरिहार्य है। **प्रो. ब्लेयर** के अनुसार, "यदि समाचार-पत्रों, पत्रिकाओं, रेडियो, मीडिया और तार की रिपोर्टों से प्राप्त मूल्य समंक एक दिन के लिए हटा लिये जाये तो व्यावसायिक जगत् शक्तिहीन हो जाएगा। यदि वर्तमान युग से कुल उपलब्ध समंक संसार से एक वर्ष के लिए हटा

नोट

दिये जायें तो इसका परिणाम होगा—आर्थिक अव्यवस्था एवं विनाश।"

बीमा व्यवसाय में भी प्रीमियम दरों का निर्धारण करते समय जीवन प्रत्याशा, जीवन सारणियाँ, प्रायिकता सिद्धान्त तथा जनसंख्या सम्बन्धी आँकड़ों का प्रयोग करना पड़ता है। सांख्यिकीय विश्लेषण द्वारा ही ये अनुमान लगाते जाते हैं कि निश्चित आयु पर औसत व्यक्ति की कितने समय तक जीने की आशा है। बीमा संस्थाओं में विशेष मूल्यांकन सांख्यिकीय रीतियों से किया जाता है। इसी प्रकार रेल, सड़क एवं वायु यातायात के क्षेत्र में भी समंकों का प्रयोग होता है। रेलवे की संचालन कुशलता का माप, किराये-भाड़े का निर्धारण और बजट का निर्माण सांख्यिकीय तथ्यों पर आधारित है।

अत: व्यावसायिक प्रबन्ध एवं प्रशासन में समंक अत्यन्त उपयोगी होते हैं। बड़ी-बड़ी व्यापारिक एवं औद्योगिक संस्थाओं में समंकों के संकलन, विश्लेषण और निर्वचन के लिए अलग सांख्यिकीय विभाग होता है जो प्रबन्धकों को उपयुक्त परामर्श देता रहता है।

4. अर्थशास्त्र में महत्व (Importance in Economic Field)—वर्तमान में अर्थशास्त्र सांख्यिकी के बिना अधूरा होता है। **या-लुन चाऊ** के अनुसार, "अर्थशास्त्री, आर्थिक समूहों जैसे सकल राष्ट्रीय उत्पाद, उपभोग, बचत, विनियोग, व्यय और मुद्रा के मूल्य में होने वाले परिवर्तनों के मापन के लिए समंकों पर निर्भर रहते हैं। वे आर्थिक सिद्धान्तों का सत्यापन करने तथा परिकल्पनाओं की जाँच करने के लिए भी सांख्यिकीय विधि का ही प्रयोग करते हैं।" अर्थशास्त्र की किसी भी समस्या का समाधान सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग के बिना अत्यन्त कठिन है। अर्थशास्त्र के सभी क्षेत्रों के नियमों एवं सिद्धान्तों को सांख्यिकी के द्वारा ही विश्लेषित एवं निर्वचित किया जाता है।

अर्थशास्त्र के प्रथम क्षेत्र उपभोग के समंकों से विभिन्न व्यक्तियों के जीवन-स्तर विभिन्न मदों पर उनके व्यय, इच्छाओं की सापेक्षता एवं माँग की लोच आदि की उचित जानकारी मिलती है।

द्वितीय क्षेत्र उत्पादन के समंकों से राष्ट्रीय सम्पत्ति की मात्रा, राष्ट्रीय लाभांश का अनुमान, पूँजी-निर्माण, उत्पादन नीतियों का निर्धारण एवं उसमें होने वाले परिवर्तनों एवं कारणों का पता चलता है।

तृतीय क्षेत्र विनिमय के समंकों से देश की व्यावसायिक प्रगति, आयात-निर्यात, भुगतान सन्तुलन, व्यापारिक ढाँचा एवं देश की मुद्रा की मात्रा में होने वाले परिवर्तनों के सम्बन्ध में उपयोगी सूचना मिलती है।

चतुर्थ क्षेत्र वितरण के समंकों की सहायता से राष्ट्रीय सम्पत्ति के वितरण का आधार राष्ट्रीय लाभांश का उत्पादन के विभिन्न साधनों में भाग, विभिन्न तबकों की आर्थिक स्थिति, प्रति व्यक्ति आय आदि का ज्ञान होता है।

सांख्यिकी की सार्वभौमिक उपयोगिता (Universal Utility of Statistics)—सांख्यिकी एक ऐसा विज्ञान है जिसका प्रयोग दिनोंदिन जीवन एवं विज्ञान के प्रत्येक क्षेत्र में बढ़ता जा रहा है। समाजशास्त्र, अर्थशास्त्र, भौतिकी, रसायन व जीवन शास्त्र, शिक्षा, राज्य, मौसम, नक्षत्र विज्ञान, चिकित्साशास्त्र आदि सभी विज्ञानों में सांख्यिकीय विवेचन अति आवश्यक है। **टिप्पेट** के अनुसार, "सांख्यिकी प्रत्येक व्यक्ति को प्रभावित करती है और जीवन को अनेक बिन्दुओं पर स्पर्श करती है।" **एडवर्ड केने** के अनुसार, "आजकल सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग ज्ञान एवं अनुसन्धान की प्रत्येक शाखा, आरेखीय कलाओं से लेकर नक्षत्र भौतिकी तक और लगभग प्रत्येक प्रकार के व्यावहारिक उपयोग—संगीत रचना से लेकर प्रक्षेपणास्त्र निर्देशन तक में किया जाता है।" वर्तमान में सांख्यिकी का ज्ञान अत्यन्त उपयोगी ज्ञान है जो जीवन के प्रत्येक क्षण काम आता है। **डॉ. बाउले** के अनुसार, "सांख्यिकी का ज्ञान विदेशी भाषा या बीजगणित के समान है जो किसी भी समय, किसी भी परिस्थिति में उपयोगी सिद्ध हो सकता है।" अत: अन्त में यह कहा जा सकता है कि वर्तमान युग सांख्यिकी का युग है।

1.5 सांख्यिकी की सीमाएँ (Limitations of Statistics)

आज सांख्यिकी एक महत्वपूर्ण विज्ञान माना जाता है परन्तु प्रत्येक विज्ञान शाखा के समान ही इसकी कुछ सीमाएँ होती हैं। यदि संकलित समंकों का विश्लेषण एवं निर्वचन करते समय इन सीमाओं का ध्यान न रखा जाए तो निकाले

नोट

गये निष्कर्ष अनिश्चित एवं भ्रमात्मक हो सकते हैं। इन सीमाओं एवं भ्रमात्मक निष्कर्षों के कारण सांख्यिकी की आलोचनाएँ भी होती हैं परन्तु सीमाएँ प्रत्येक विज्ञान की होती हैं चाहे वह अर्थशास्त्र हो भौतिक या रसायनशास्त्र। सांख्यिकी की सीमाओं में रहते हुए यदि विश्लेषण एवं निर्वचन किया जाए तो सीमाओं के कारण उत्पन्न दोषों को समाप्त किया जा सकता है। **प्रो. न्यूजहोम** के अनुसार, "सांख्यिकी को अनुसन्धान का एक अत्यन्त मूल्यवान साधन समझना चाहिए, परन्तु इसकी कुछ गम्भीर सीमाएँ हैं जिन्हें दूर किया जाना तो सम्भव नहीं है और इसलिए इन पर हमें सावधानी से विचार करना चाहिए।"

सांख्यिकी की निम्न सीमाएँ हैं–

1. सांख्यिकी केवल संख्यात्मक तथ्यों का ही अध्ययन करती है, गुणात्मक तथ्यों का नहीं (Statistics studies quantitative phenomena and not qualitative)–सांख्यिकी की प्रमुख सीमा यह है कि यह केवल संख्यात्मक रूप से व्यक्त किये गये तथ्यों या समस्याओं का विश्लेषण करता है गुणात्मक का नहीं। सांख्यिकी के अन्तर्गत संख्यात्मक रूप में वर्णित तथ्य; जैसे–आयु, ऊँचाई, उत्पादन, मूल्य, आय, जनसंख्या, बजट आदि का प्रत्यक्ष विश्लेषण किया जा सकता है परन्तु गुणात्मक रूप में व्यक्त तथ्य; जैसे–बौद्धिक स्तर, चरित्र, सुन्दरता, स्वास्थ्य, गरीबी, व्यवहार आदि का सांख्यिकीय विश्लेषण नहीं किया जा सकता है। इन समस्याओं का अध्ययन सांख्यिकी में परोक्ष रूप से किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, बौद्धिक स्तर का अनुमान परीक्षा में प्राप्त प्राप्तांकों के आध ार पर, स्वास्थ्य सम्बन्धी जानकारी जन्मदर एवं मृत्युदर के विश्लेषण के द्वारा प्राप्त की जा सकती है।

2. सांख्यिकी समूहों का अध्ययन करती है, व्यक्तिगत इकाइयों का नहीं (Statistics deals with aggregates but not with individuals)–सांख्यिकी में किसी भी क्षेत्र की सामूहिक विशेषताओं का अध्ययन किया जाता है व्यक्तिगत इकाई का नहीं। यद्यपि अध्ययन करते समय व्यक्तिगत इकाइयों को ही माध्यम बनाया जाता है परन्तु निकाले गये निष्कर्ष एक औसत एवं समूह की प्रकृति दर्शाते हैं। उदाहरण के लिए, किसी देश की प्रति व्यक्ति आय सामूहिक विशेषताओं पर प्रकाश डालती है। यह समाज के अलग-अलग वर्गों; जैसे–अमीर, गरीब, भिखारी, करोड़पति आदि की व्यक्तिगत आय नहीं बताती है। **प्रो. नीज बैंगर** के अनुसार, "सांख्यिकी के निष्कर्ष समूह के सामूहिक व्यवहार का अनुमान लगाने में सहायक होते हैं उस समूह की व्यक्तिगत इकाइयों का नहीं।" उदाहरण के लिए, सांख्यिकी के द्वारा यह तो ज्ञात हो जाता है कि प्रति व्यक्ति चावल या गेहूँ की खपत एक दिन मे कितनी है परन्तु यह ज्ञात नहीं होता कि गरीबों में चावल या गेहूँ की कितनी कमी है।

3. सांख्यिकीय रीति किसी समस्या के अध्ययन की एकमात्र रीति नहीं है (Statistics is not only a single method used for study of any problem)–सामान्य जीवन में किसी भी समस्या के समाधान की अनेक रीतियाँ होती हैं जिनमें से सांख्यिकी एक रीति है। सांख्यिकीय विश्लेषण के द्वारा प्राप्त निष्कर्षों को तभी अन्तिम सत्य मानना चाहिए जब वे अन्य रीतियों; जैसे–प्रयोग, अन्तरावलोकन, निगमन तथा अन्य प्रमाणों द्वारा पूर्णतया जाँच लिये जाएँ। **क्रॉक्सटन** एवं **काउडेन** के अनुसार, "यह नहीं मान लेना चाहिए कि सांख्यिकीय रीति ही अनुसन्धान कार्य में प्रयोग की जाने वाली एकमात्र रीति है, न ही इस रीति को प्रत्येक प्रकार की समस्या का सर्वोत्तम हल समझना चाहिए।" लेकिन फिर भी सांख्यिकी एक उपयोगी शस्त्र है क्योंकि यथार्थता एवं शुद्धता के बहुत निकट होता है। **डॉ. बाउले** के अनुसार, "सांख्यिकीय माप किसी समस्या के समाधान के लिए उतना ही आवश्यक है जितना एक भवन-निर्माण के लिए यथार्थ माप।"

4. सांख्यिकी के निष्कर्ष असत्य व भ्रमात्मक हो सकते हैं यदि उनका विश्लेषण बिना सन्दर्भ के किया जाए (Statistical results may be misleading and ambiguous if analysed without proper context of the problem)–सांख्यिकी के निष्कर्षों को समझने के लिए समस्या के हर पहलू से वाकिफ होना आवश्यक है अन्यथा वे भ्रामक हो सकते हैं। समस्या की प्रत्येक परिस्थिति एवं सन्दर्भ को जानने के पश्चात् निकाले गये निष्कर्ष ही वास्तविक रूप से सत्य होते हैं अन्यथा बिना समस्या को समझे निकाले गये निष्कर्ष वास्तविक दिखाई तो देते हैं परन्तु वास्तविक होते नहीं हैं। उदाहरण के लिए, किन्हीं दो उद्योगों के पिछले पाँच वर्ष का औसत लाभ

नोट

समान है तो यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि दोनों ही उद्योग सामान्य व एक ही प्रकृति के हैं परन्तु यदि उनसे सम्बन्धित सभी समंकों (अर्थात् प्रत्येक वर्ष के लाभ समंक) का अध्ययन किया जाए तो यह निष्कर्ष निकाल सकता है कि एक उद्योग का लाभ बढ़ रहा है अर्थात् उन्नति की ओर अग्रसर है और दूसरे उद्योग का लाभ घट रहा है अर्थात् अवनति की ओर अग्रसर है। **डॉ. बाउले** के अनुसार, "जो विद्यार्थी समंकों का उपयोग करता है उसे अनुसन्धान के निष्कर्षों को प्रमाणित मानकर सन्तुष्ट नहीं हो जाना चाहिए, परन्तु उस विधि के समस्त अंगों का पर्याप्त ज्ञान प्राप्त करना चाहिए।"

5. सांख्यिकीय नियम केवल औसत रूप से और दीर्घकाल में ही सत्य होते हैं (Statistical laws are true in the long run and on the average)—सांख्यिकी के नियम प्राकृतिक विज्ञान के नियमों की तरह पूर्ण सत्य नहीं होते हैं अर्थात् सभी परिस्थितियों में लागू नहीं होते हैं अर्थात् ये केवल दीर्घकाल में औसत रूप से सामूहिक रूप में ही खरे उतरते हैं। उदाहरण के लिए, भौतिक मे गुरुत्वीय नियम के अनुसार, ऊपर से गिराई गई वस्तु सदैव पृथ्वी पर ही आती है या रसायन में सोडियम के टुकड़े को पानी में डालने से आग लग जाती है या जीवशास्त्र में मादा एनाफिलीज मच्छर के काटे बिना मलेरिया नहीं हो सकता सभी परिस्थितियों में पूर्णरूप से सत्य हैं। परन्तु यदि सांख्यिकी के प्रायिकता या सम्भावना सिद्धान्त (Theory of Probability) इन नियमों की तरह दृढ़, पूर्ण और सत्य नहीं हैं। उदाहरण के लिए, यदि एक थैले में रखी काली, सफेद गेंदों को बाहर निकालने की सम्भावना आधी-आधी अर्थात् 50 प्रतिशत होती है यह तभी सत्य होगा जब एक से अधिक बार गेंद निकाली जाए। दस बार गेंद निकालने पर हो सकता है 7 बार काली गेंद एवं 3 बार सफेद गेंद आये जबकि सम्भावना 5-5 गेंदों की थी। गेंद निकालने की संख्या बढ़ाते जाने पर यह सम्भावना के निकट आता जाता है। अत: यह नियम किसी निश्चित एक दृढ़ आधार को प्रस्तुत नहीं करता है। अत: सांख्यिकीय नियम केवल दीर्घकाल में औसत रूप से ही सत्य होते हैं।

6. समंकों में एकरूपता एवं सजातीयता होनी चाहिए (Statistical data should be uniform and homogeneous)—शुद्ध एवं सत्य सांख्यिकीय निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि प्रयोग किये गये समंक एकरूप एवं सजातीय हों। अगर समंक विभिन्न तरीकों से एकत्रित किये गये भिन्न प्रकृति के हैं तो इन विजातीय समंकों से निकाले गये निष्कर्ष हमेशा भ्रमात्मक होंगे। उदाहरण के लिए, जनसंख्या एवं प्रचलित मुद्रा नीति से सम्बन्धित समंकों में कोई सह सम्बन्ध नहीं है। इसी प्रकार व्यक्ति की ऊँचाई एवं प्रति व्यक्ति आय के समंक भी विजातीय हैं और इनमें सम्बन्ध स्थापित करना पूर्ण रूप से भ्रामक होगा।

7. सांख्यिकी का प्रयोग केवल विशेषज्ञ ही कर सकते हैं (Statistics can be used only by a perfect statistician)—यह सांख्यिकी की सबसे प्रमुख सीमा है जिसके अनुसार सांख्यिकी का प्रयोग केवल वही व्यक्ति कर सकता है जो सांख्यिकीय रीतियों का विशेष ज्ञान रखता हो। अर्थात् समंकों का उचित रूप से संकलन, विश्लेषण एवं निर्वचन वही व्यक्ति कर सकता है जो सांख्यिकी का पूर्ण ज्ञाता एवं सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग मे दक्ष हो। अयोग्य या अनभिज्ञ व्यक्ति संकलित समंकों से गलत एवं भ्रामक निष्कर्ष निकालेंगे। ये निष्कर्ष असत्य एवं अशुद्धियों से परिपूर्ण होंगे। **यूल** और **केन्डाल** के अनुसार, "अयोग्य व्यक्तियों के हाथ में सांख्यिकीय रीतियाँ अत्यन्त खतरनाक औजार हैं।" इसी प्रकार कहा जाता है कि "Statistics, like medicine in the hands of quacks are liable of easily being misused by ignorant or the inexperts." अर्थात् जैसे एक अयोग्य चिकित्सक के हाथ में दवा जहर का काम करती है, उसी प्रकार अयोग्य व्यक्ति समंकों का दुरुपयोग करके उनसे गलत परिणाम निकाल सकता है। **डॉ. बाउले** के अनुसार, "समंक केवल एक आवश्यक किन्तु अपूर्ण औजार प्रदान करते हैं जो उन लोगों के हाथों में खतरनाक हैं जो उनकी प्रयोग विधि और कमियों से परिचित नहीं हैं।"

अन्त में यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग करते समय सीमाओं का ध्यान रखना चाहिए, यदि इन सीमाओं की उपेक्षा की जायेगी तो प्राप्त निष्कर्ष भ्रामक एवं असत्य होंगे जिसके कारण सांख्यिकी को सन्देह की दृष्टि से देखा जाता है।

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. आधुनिक परिवेश में .... का प्रयोग व्यापक रूप से समाज के प्रत्येक घटक द्वारा जाता है।
2. आज सांख्यिकी का महत्त्व इतना बढ़ चुका है कि यह .... जीवन के प्रत्येक पहलू को प्रभावित करता है।
3. किसी भी क्षेत्र में सांख्यिकीय रीतियों द्वारा समंकों को एकत्रित करने तथा उनका विश्लेषण करके उचित निष्कर्ष निकालने वाले व्यक्ति को .... कहते हैं।
4. वास्तव में समंकों के आधार पर उचित परिणाम निकालना ही .... एवं .... का मूलभूत उद्देश्य है।
5. सांख्यिकी का प्रथम कार्य तथ्यों को .... रूप देना होता है ताकि उनका विश्लेषण एवं निर्वचन हो सके।

1.6 सारांश (Summary)

- सांख्यिकी का मूल उद्देश्य अनुसन्धान कार्य की विभिन्न समस्याओं का अध्ययन, उनके कारण एवं परिणामों का विश्लेषण करना है। सांख्यिकी रीतियों के द्वारा ही किसी समस्या से सम्बन्धित भूतकाल के समंकों को एकत्र करके उनकी वर्तमान परिस्थितियों से सापेक्षिक तुलना की जाती है। इन्हीं संमकों के द्वारा घटनाओं में होने वाले परिवर्तनों के कारणों और उनके परिणामों का विश्लेषण किया जाता है।
- आधुनिक समय में सांख्यिकी की लगातार बढ़ती हुई महत्ता का मुख्य कारण उसके द्वारा विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के महत्वपूर्ण कार्य सम्पन्न होना है। किसी भी क्षेत्र में सांख्यिकी रीतियों द्वारा समंकों को एकत्रित करने तथा उनका विश्लेषण करके उचित निष्कर्ष निकालने वाले व्यक्ति को सांख्यिक (Statistician) कहते हैं।
- "सांख्यिकी का मुख्य व्यावहारिक उपयोग सापेक्षिक महत्व, जिसे किसी व्यक्ति द्वारा गलत समझने की सम्भावना रहती है, प्रकट करना होता है। समंक प्राय: सदैव ही तुलनात्मक होते हैं।"
- सांख्यिकी सामाजिक, आर्थिक, व्यापारिक तथा अन्य क्षेत्रों की नीति-निर्धारण करने में सहायक होती है। संकलित किये गये समंकों का विश्लेषण करके ही देश की आयात व निर्यात नीतियाँ, मूल्य नीति, उत्पादन नीतियाँ, मद्य-निषेध नीति आदि का निर्धारण किया जाता है। इसके साथ ही वर्तमान मूल्य नीति, खाद्य नीति, मौद्रिक नीति, करारोपण, मुद्रा एवं बैंकिंग नीतियों के परिणामों का मूल्यांकन भी सांख्यिकी द्वारा किया जाता है। इस प्रकार नीति, निर्धारित करना एवं पहले से निर्धारित नीतियों के प्रभावों का मूल्यांकन करना सांख्यिकी का प्रमुख कार्य है।
- इसके अध्ययन से विचारों को स्पष्टता एवं निश्चयात्मकता मिलती है। समंकों के विश्लेषण व निर्वचन से मनुष्य की तार्किक शक्ति में वृद्धि होती है और प्रत्येक समस्या के समाधान के लिए उचित दृष्टिकोण विकसित हो जाता है।
- सांख्यिकीय विश्लेषण के आधार पर निर्मित नियम बहुत ही स्थिर एवं सार्वभौमिक प्रकृति के होते हैं।
- सांख्यिकी का उद्‌गम एवं विकास राज्य विज्ञान के रूप में हुआ था। राज्य की शासन व्यवस्था में सांख्यिकी के द्वारा राजकीय आय, व्यय जनसंख्या, सैन्य-शक्ति तथा भूमि-सम्बन्धी समंकों का संकलन किया जाता था। वर्तमान युग में राज्य की प्रत्येक नीति का निर्धारण सांख्यिकी के सहयोग से ही हो पाता है। वित्तमंत्री द्वारा बजट तैयार करते समय करारोपण में वृद्धि या कमी, आय-व्यय का पूर्वानुमान, प्रशासन, प्रतिरक्षा, स्वास्थ्य, शिक्षा आदि पर व्यय धनराशि एवं नई योजनाओं आदि का अध्ययन सांख्यिकी की सहायता से ही

नोट

किया जाता है।

- वस्तु की माँग का पूर्वानुमान लगाने के लिए व्यापारी मौसम परिवर्तनों, व्यापार चक्रों जीवन-स्तर, रस्मो-रिवाज, ग्राहकों की रुचि, क्रय-शक्ति आदि के उपलब्ध समंकों को आधार बनाता है। माँग के अतिरिक्त कच्चे माल के क्रय, उत्पाद के विक्रय, यातायात लागत, विज्ञापन, वित्तीय साधन, मजदूरी, मूल्य निर्धारित नीतियों का निर्धारण भी समंकों के विश्लेषण द्वारा करता है।
- वाणिज्य के अन्य क्षेत्रों; जैसे—बैकिंग, स्कन्ध विपणि (Stock Exchange), उपज विपणि (Produce Exchange) तथा बीमा व्यवसाय (Insurance) आदि में सांख्यिकी एवं समंकों की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। बैंक अपनी नीतियों (ऋण नीति, साख नीति एवं विनियोग नीति) का निर्धारण व्यापार चक्रों, मुद्रा बाजार की स्थिति, केन्द्रीय बैंक की नीति एवं द्रव्य की मौसमी माँग आदि से सम्बन्धित समंकों के आधार पर करता है।
- अत: व्यावसायिक प्रबन्ध एवं प्रशासन में समंक अत्यन्त उपयोगी होते हैं। बड़ी-बड़ी व्यापारिक एवं औद्योगिक संस्थाओं में समंकों के संकलन, विश्लेषण और निर्वचन के लिए अलग सांख्यिकीय विभाग होता है जो प्रबन्धकों को उपयुक्त परामर्श देता रहता है।
- आज सांख्यिकी एक महत्त्वपूर्ण विज्ञान माना जाता है परन्तु प्रत्येक विज्ञान शाखा के समान ही इसकी कुछ सीमाएँ होती हैं। यदि संकलित समंकों का विश्लेषण एवं निर्वचन करते समय इन सीमाओं का ध्यान न रखा जाए तो निकाले गये निष्कर्ष अनिश्चित एवं भ्रमात्मक हो सकते हैं।
- सांख्यिकी की प्रमुख सीमा यह है कि यह केवल संख्यात्मक रूप से व्यक्त किये गये तथ्यों या समस्याओं का विश्लेषण करता है गुणात्मक का नहीं।
- सांख्यिकी में किसी भी क्षेत्र की सामूहिक विशेषताओं का अध्ययन किया जाता है व्यक्तिगत इकाई का नहीं। यद्यपि अध्ययन करते समय व्यक्तिगत इकाइयों को ही माध्यम बनाया जाता है परन्तु निकाले गये निष्कर्ष एक औसत एवं समूह की प्रकृति दर्शाते हैं।
- सांख्यिकीय विश्लेषण के द्वारा प्राप्त निष्कर्षों को तभी अन्तिम सत्य मानना चाहिए जब वे अन्य रीतियों; जैसे—प्रयोग, अन्तरावलोकन, निगमन तथा अन्य प्रमाणों द्वारा पूर्णतया जाँच लिये जाएँ।
- सांख्यिकी के निष्कर्षों को समझने के लिए समस्या के हर पहलू से वाकिफ होना आवश्यक है अन्यथा वे भ्रामक हो सकते हैं। समस्या की प्रत्येक परिस्थिति एवं सन्दर्भ को जानने के पश्चात् निकाले गये निष्कर्ष ही वास्तविक रूप से सत्य होते हैं अन्यथा बिना समस्या को समझे निकाले गये निष्कर्ष वास्तविक दिखाई तो देते हैं परन्तु वास्तविक होते नहीं हैं।
- सांख्यिकी के नियम प्राकृतिक विज्ञान के नियमों की तरह पूर्ण सत्य नहीं होते हैं अर्थात् सभी परिस्थितियों में लागू नहीं होते हैं अर्थात् ये केवल दीर्घकाल में औसत रूप से सामूहिक रूप में ही खरे उतरते हैं।
- शुद्ध एवं सत्य सांख्यिकीय निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि प्रयोग किये गये समंक एकरूप एवं सजातीय हों।

1.7 शब्दकोश (Keywords)

- **समंक**—आंकड़ा।
- **निर्वचन**—विश्लेषण करना।

नोट

1.8 अभ्यास–प्रश्न (Review Questions)

1. सांख्यिकी की परिभाषा एवं कार्यों की व्याख्या कीजिए।
2. सांख्यिकी के महत्त्व का वर्णन कीजिए।
3. सांख्यिकी की सीमाओं का विश्लेषणात्मक विवेचन कीजिए।

उत्तर :स्व-मूल्यांकन (Answer : Self Assessment)

1. सांख्यिकी	2. मानव	3. सांख्यिक
4. संकलन विश्लेषण	5. संख्यात्मक	

1.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड रामनगर, नई दिल्ली - 110055
2. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा

नोट

इकाई—2: समंकों के संकलन के प्रकार: प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक प्राथमिक समंकों के संकलन की विधियाँ (Types of Data Collection: Primary and Secondary Data, Methods of Collecting Primary Data)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों को जानने में एवं उनके बीच अन्तर करने में।
- प्राथमिक समंकों के संकलन की विधियों की व्याख्या करने में।
- प्राथमिक समंकों के संकलन के लिए उपयुक्त रीति तथा अनुसूची एवं प्रश्नावली का प्रयोग करने में।
- द्वितीय समंकों के संकलन की विवेचना करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

सांख्यिकीय अनुसन्धान की योजना पूरी होने के बाद समंकों का संकलन किया जाता है। समंकों का संकलन सांख्यिकी विज्ञान की प्रथम एवं महत्त्वपूर्ण क्रिया है क्योंकि ये अनुसन्धान का आधार होते हैं। समंकों के उचित संकलन, शुद्धता एवं व्यापकता के आधार पर ही विश्लेषण एवं निर्वचन निर्भर करता है। **डॉ. ए. एल बाउले** के अनुसार, "समंकों के संकलन में, सामान्य विवेक प्रमुख आवश्यकता है और अनुभव मुख्य शिक्षक" अत: समंकों

का संकलन अत्यन्त सावधानी, विश्वास, निष्पक्षता, दृढ़ता, सतर्कता एवं धैर्य से करना चाहिए ताकि उनसे निकाले जाने वाले निष्कर्ष शुद्ध, विश्वसनीय एवं वास्तविक हों।

2.1 प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक (Primary and Secondary Data)

समंक दो प्रकार के होते हैं—(1) प्राथमिक (2) द्वितीयक।

1. प्राथमिक समंक (Primary Data)—वे समंक प्राथमिक समंक कहलाते हैं जो अनुसन्धानकर्ता द्वारा पहली बार शुरू से अन्त तक नये सिरे से एकत्रित किये जाते हैं। अर्थात् जो समंक अनुसन्धानकर्ता द्वारा स्वयं किसी उद्देश्य के लिए मौलिक रूप से एकत्र किये जाते हैं, प्राथमिक समंक कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, देश में बाल श्रमिकों की स्थिति, शिक्षा के अधिकार आदि के बारे में यदि कोई अनुसन्धानकर्ता नये सिरे से मौलिक समंकों का संकलन करता है तो ये समंक प्राथमिक समंक कहलाएँगे।

2. द्वितीयक समंक (Secondary Data)—वे समंक द्वितीयक कहलाते हैं जो पहले से ही किसी अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा किसी उद्देश्य के लिए एकत्रित किये जा चुके हों और अनुसन्धानकर्ता केवल उन्हें प्रयोग करता है। ऐसे समंक मौलिक एवं नये नहीं होते हैं बल्कि पहले से प्रकाशित सामग्री द्वारा लेकर प्रयोग किये जाते हैं। उदाहरण के लिए, यदि अनुसन्धानकर्ता सरकार द्वारा संकलित बाल श्रमिकों के जीवन एवं शिक्षा स्तर सम्बन्धी समंकों का प्रयोग करता है तो वे द्वितीयक समंक माने जाएँगे।

प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों में अन्तर
(Distinction between Primary and Secondary Data)

प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों में अन्तर प्रकृति का नहीं बल्कि अवस्था एवं सापेक्षता का होता है। जब किसी संस्था द्वारा पहली बार समंक एकत्रित किये जाते हैं तो वे प्राथमिक सामग्री का कार्य करते हैं परन्तु यही समंक जब किसी दूसरे अनुसन्धानकर्ता द्वारा प्रयोग किये जाते हैं तो द्वितीयक सामग्री कहलाते हैं। अर्थात् एक ही प्रकार के समंक एक व्यक्ति के लिए प्राथमिक तो दूसरे व्यक्ति के लिए द्वितीयक समंक कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, सरकार द्वारा एकत्रित एवं प्रकाशित महँगाई दर प्राथमिक है परन्तु यही समंक अन्य के लिए द्वितीयक समंक हैं। प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों में निम्न अंतर हैं—

(1) प्राथमिक समंक सदैव मौलिक (Original) एवं नये होते हैं जो विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों के लिए कच्चे माल की तरह होते हैं जबकि द्वितीयक समंकों का प्रयोग एक बार हो चुका होता है अर्थात् वे मौलिक एवं नये नहीं होते हैं। ये सांख्यिकीय रीतियों के लिए किसी निर्मित माल की तरह होते हैं।

(2) प्राथमिक समंक अनुसन्धानकर्ता द्वारा विभिन्न व्यक्तियों से सम्पूर्ण क्षेत्र या समग्र में से प्राथमिक रीति द्वारा एकत्र किये जाते हैं जबकि द्वितीयक समंक अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा पूर्व संकलित होते हैं।

(3) प्राथमिक समंक सदैव अनुसंधान के उद्देश्य के अनुकूल होते हैं और इनमें संशोधन या जाँच की ज्यादा जरूरत नहीं होती है क्योंकि ये समंक इसी अनुसंधान के लिए एकत्र किये गये हैं जबकि द्वितीयक समंकों में संशोधन, जाँच-पड़ताल एवं शुद्धता की जरूरत ज्यादा होती है क्योंकि ये पूर्व में किसी अनुसन्धान के लिए एकत्रित किये गये थे।

नोट

नोट्स प्राथमिक समंकों के संकलन में अधिक समय, धन एवं परिश्रम की जरूरत होती है क्योंकि इनके संकलन के लिए अनुसंधान योजना को नये सिरे से प्रारम्भ करना होता है जबकि द्वितीयक समंक विभिन्न सरकारी पत्रों, प्रकाशनों, समाचार-पत्रों, विवरणों द्वारा प्राप्त हो जाते हैं। जिससे समय, धन व श्रम की बचत होती है।

2.2 प्राथमिक समंकों के संकलन की विधियाँ (Methods of Collecting Primary Data)

संकलन का कार्य केवल प्राथमिक समंकों के लिए किया जाता है। प्राथमिक समंकों को संकलित करने की प्रमुख रीतियाँ प्राथमिक रीतियाँ कहलाती हैं जोकि निम्न हैं—

1. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान
2. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान
3. संवाददाताओं से सूचना प्राप्ति
4. सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना प्राप्ति
5. प्रगणकों द्वारा सूचना प्राप्ति।

1. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (Direct Personal Investigation)

इस रीति के अनुसार अनुसन्धानकर्ता स्वयं अनुसन्धान क्षेत्र में जाकर सम्बन्धित लोगों से व्यक्तिगत सम्पर्क स्थापित करते हैं और सूचना देने वालों से प्रत्यक्ष रूप से मिलते हैं और निरीक्षण एवं अनुभव द्वारा आँकड़े एकत्र करते हैं। इस रीति को प्रत्यक्ष रीति भी कहा जाता है क्योंकि जिस क्षेत्र या व्यक्ति के बारे में सूचना प्राप्त करनी होती है वह सूचना स्वयं उस व्यक्ति द्वारा प्राप्त की जाती है किसी अन्य व्यक्ति से नहीं। इसलिए इसे व्यक्तिगत अनुसन्धान भी कहा जाता है क्योंकि अनुसन्धानकर्ता स्वयं क्षेत्र में जाकर सूचना प्राप्त करते हैं। इस रीति का प्रयोग निम्न परिस्थितियों में किया जाता है—

(1) ऐसा अनुसन्धान केवल वहीं उपयुक्त होता है जहाँ का क्षेत्र सीमित या स्थानीय प्रकृति का हो।

(2) जब समंकों में मौलिकता, शुद्धता व गोपनीयता की ज्यादा आवश्यकता हो।

(3) जब अनुसन्धान योजना की सूक्ष्मता के लिए, अनुसन्धानकर्ता के व्यक्तिगत अनुभव, तीक्ष्ण वृद्धि व सतत् निरीक्षण की जरूरत होती है।

(4) इसके अन्तर्गत पारिवारिक आय-व्यय मजदूरों का जीवन-स्तर, शिक्षित बेराजगारी, अपराध प्रवृत्ति आदि अनुसन्धान किये जाते हें।

(5) जब समंकों को गोपनीय रखना हो।

रीति के गुण (Merits of the Method)—प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान के निम्न गुण होते हैं—

1. **शुद्धता—**इस रीति का सबसे बड़ा गुण समंकों की शुद्धता एवं मौलिकता होती है, इस रीति में अनुसन्धानकर्ता के स्वयं कार्यक्षेत्र में रहने के कारण मौलिक एवं शुद्ध आँकड़े प्राप्त होते हैं।
2. **विस्तृत सूचनाओं की प्राप्ति—**इस रीति के द्वारा मुख्य सूचना के साथ-साथ अनेक अतिरिक्त सूचनाएँ भी उपलब्ध हो जाती हैं। उदाहरण के लिए, मजदूरों के आय-व्यय सम्बन्धी समंकों को एकत्र करते समय उनके जीवन-स्तर, प्राप्त सुविधाएँ, कार्य स्थिति आदि की महत्वपूर्ण सूचनाएँ प्राप्त हो जाती हैं।
3. **विश्वसनीयता—**इस रीति द्वारा प्राप्त आँकड़े विश्वसनीय होते हैं, क्योंकि ये आँकड़े अनुसन्धानकर्ता द्वारा स्वयं कार्यक्षेत्र में जाकर एकत्र किये जाते हैं। संकलन के दौरान अनुसन्धानकर्ता, सूचना देने वालों के सभी

नोट

संदेह दूर करके सही-सही सूचना प्राप्त करता है और यदि वह जानबूझकर गलत जानकारी देते हैं तो अनसन्धानकर्ता घुमा-फिरा कर प्रश्न (Cross questioning) करके आसानी से जाँच लेते हैं।

4. **सजातीयता**—इस रीति द्वारा उपलब्ध सभी समंकों में सजातीयता का गुण पाया जाता है क्योंकि ये भी आँकड़े एक ही व्यक्ति द्वारा एकत्र किये जाते हैं।
5. **लचकशीलता**—यह प्रणाली लचीली प्रवृत्ति की होती है। अनुसन्धानकर्ता अपनी आवश्यकतानुसार समंकों या प्रश्नों में संशोधन करके उचित सूचना प्राप्त कर लेता है।
6. **सार्थकता**—इस प्रणाली में सूचना देने वालों से अनुसन्धानकर्ता स्वयं सम्पर्क करता है जिससे संकलन कार्य उत्साहवर्द्धक होता है और समंकों की सार्थकता बढ़ जाती है।

रीति के दोष (Demerits of the Method)—इस रीति के निम्न दोष हैं—

1. **सीमित क्षेत्र**—यह रीति विस्तृत एवं व्यापक अनुसन्धान क्षेत्रों के लिए अनुचित या अनुपयुक्त होती है।
2. **अपव्यय**—इस प्रणाली में व्यक्तिगत सम्पर्क करने के कारण समय, धन एवं श्रम का अपव्यय होता है।
3. **पक्षपात**—इस प्रणाली में अनुसन्धानकर्ता के व्यक्तिगत द्वेषों, पक्षपात और सनक आदि के कारण परिणाम दूषित और एकांगी होने की आशंका रहती है।
4. **भ्रामक निष्कर्ष**—यह आशंका रहती है कि सीमित क्षेत्र होने के कारण संकलित समंक पूरे समग्र का सही प्रतिनिधित्व न करे एवं निष्कर्ष भ्रामक हो जाए।

सावधानियाँ (Precautions)—इस रीति को प्रयोग करते समय निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए—

(1) अनुसन्धानकर्ता व्यवहारकुशल, अनुभवी, परिश्रमी एवं धैर्यवान हो।

(2) अनुसन्धानकर्ता उस क्षेत्र की भौगोलिक, सामाजिक स्थिति एवं भाषा व रीति-रिवाजों से परिचित हो।

(3) पूछे जाने वाले प्रश्न संक्षिप्त एवं सटीक हों।

2. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (Indirect Oral Investigation)

इस प्रणाली के अन्तर्गत, समस्या से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्ध रखने वाले व्यक्तियों से सूचना प्राप्त नहीं की जाती बल्कि ऐसे व्यक्तियों या साक्षियों से मौखिक पूछताछ की जाती है जो इस समस्या से अप्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित हों। अर्थात् जिनके बारे में सूचना प्राप्त करनी है उनसे प्रत्यक्ष सम्पर्क स्थापित नहीं किया जाता है। उदाहरण के लिए, श्रमिकों की आय की जानकारी के लिए श्रमिकों से सीधे सम्पर्क न करके मिल मालिकों या श्रमसंघों द्वारा पूछताछ करके जानकारी प्राप्त कर लेते हैं, जिन व्यक्तियों से सूचना प्राप्त की जाती है अर्थात् अप्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित होते हैं, साक्षी (Witness) कहलाते हैं। साक्षी ऐसे व्यक्ति होने चाहिए जो समस्या या स्थिति या व्यक्ति के सम्बन्ध में पूर्ण जानकारी रखते हों। इस रीति का प्रयोग निम्न परिस्थितियों में किया जाता है।

(1) जब अनुसन्धान क्षेत्र बहुत व्यापक एवं विस्तृत हो।

(2) जब सूचना देने वाले व्यक्ति से व्यक्तिगत सम्पर्क सम्भव न हो या वे अरुचि, अज्ञानता या जानबूझकर सूचना न देना चाहें या सूचना देने में असमर्थता जाहिर करें।

(3) जब सम्बन्धित व्यक्तियों से प्रश्न या बात करना उचित न हो या पक्षपातपूर्ण व्यवहार की आशा हो।

(4) इस रीति का प्रयोग सरकारी स्तर पर नियुक्त समितियों या आयोगों द्वारा किया जाता है।

रीति के गुण (Merits of the Method)—इस रीति के निम्न गुण हैं—

1. **मितव्ययिता**—इस पद्धति में समय, धन व परिश्रम आदि कम लगता है, कार्य शीघ्रता से होता है और अधिक परेशानी नहीं उठानी पड़ती है।
2. **विशेषज्ञों की सम्मति**—इस रीति में अनुसन्धान विषय पर विशेषज्ञों की राय एवं सुझाव प्राप्त हो जाते हैं और पक्ष या विपक्ष के व्यक्तियों से पूछताछ करने से समस्या के सभी पहलुओं पर विचार हो जाता है।
3. **निष्पक्षता**—इस रीति से प्राप्त समंक अनुसन्धानकर्ता के व्यक्तिगत द्वेष के कारण प्रभावित नहीं होते हैं।

4. **विस्तृत क्षेत्र**—इस रीति में विस्तृत क्षेत्र वाले अनुसन्धान कार्य किये जाते हैं जहाँ सूचकों से प्रत्यक्ष सम्पर्क सम्भव या उचित न हो।
5. **सरल एवं सुविधाजनक**—यह एक सरल व सुविधाजनक रीति है क्योंकि व्यक्तिगत सम्पर्क की कठिनाई समाप्त हो जाती है।

रीति के दोष (Demerits of the Method)—इस रीति में निम्न दोष हैं—

1. **अशुद्ध परिणाम**—इस रीति में अनुसन्धानकर्ता को सूचनाएँ परोक्ष रूप से प्राप्त होती हैं जिससे परिणामों के अशुद्ध होने की सम्भावना अधिक रहती है। इस रीति में अनुसन्धानकर्ता को व्यक्तिगत सम्पर्क के अभाव में अन्य व्यक्तियों या प्रगणकों पर निर्भर रहना पड़ता है जिससे शुद्धता की सम्भावना कम हो जाती है।
2. **साक्षियों के दोष**—जिन साक्षियों से सूचनाएँ एकत्र की जाती हैं उनकी लापरवाही, अज्ञानता एवं पक्षपात के कारण अशुद्ध समंकों की प्राप्ति होती है। कई बार साक्षियों के गलत चयन के कारण भी अनुसन्धान परिणाम दूषित हो जाते हैं।

सावधानियाँ (Precautions)—इस रीति के सफल प्रयोग के लिए निम्न सावधानियों की जरूरत होती है—

(1) सूचना देने वाले साक्षियों की संख्या पर्याप्त होनी चाहिए।

(2) चुने गये साक्षियों में पक्षपात का समावेश नहीं होना चाहिए।

(3) साक्षियों से पूछताछ करते समय उनकी मन:स्थिति एवं मनोवृत्ति का भी ध्यान रखना चाहिए और वे उदासीन या लापरवाह नहीं होने चाहिए।

(4) साथियों को समस्या से सम्बन्धित सभी पहलुओं का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए।

(5) अनुसन्धानकर्ता को साक्षियों से पूछताछ करते समय धैर्य, विनम्रता, चतुराई एवं निष्पक्षता से कार्य करना चाहिए।

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान एवं अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान में अन्तर—इन दोनों रीतियों में निम्न अन्तर हैं—

(1) प्रथम रीति में समस्या से प्रत्यक्ष सम्बन्ध रखने वालों से व्यक्तिगत सम्पर्क किया जाता है जबकि द्वितीय रीति में समस्या से अप्रत्यक्ष सम्बन्ध रखने वाले साक्षियों से सूचना प्राप्त की जाती है।

(2) प्रथम रीति में अनुसन्धानकर्ता स्वयं क्षेत्र में जाकर निरीक्षण व अनुभव एवं पूछताछ के आधार पर समंक प्राप्त करता है जबकि द्वितीय रीति में प्रगणकों द्वारा मौखिक पूछताछ से सूचना एकत्र करते हैं।

(3) प्रथम रीति में अनुसन्धान क्षेत्र सीमित होता है जबकि द्वितीय रीति में अनुसन्धान क्षेत्र व्यापक होता है।

(4) प्रथम रीति प्राय: अनुसन्धानकर्ता द्वारा अपनाई जाती है जबकि द्वितीय रीति प्राय: सरकारी समितियों एवं आयोग द्वारा अपनाई जाती है।

(5) प्रथम रीति में समय, धन व परिश्रम का व्यय होता है जबकि द्वितीय रीति में इनकी बचत होती है।

3. संवाददाताओं से सूचना प्राप्ति (Information through Correspondents)

इस रीति में अनुसन्धानकर्ता द्वारा विभिन्न स्थानों पर स्थानीय व्यक्ति या सम्वाददाता नियुक्त कर दिये जाते हैं जो अपने अनुभव एवं निरीक्षण के आधार पर समय-समय पर सूचना भेजते रहते हैं। संवाददाताओं की सूचनाओं में प्राय: अशुद्धि की सम्भावना रहती है क्योंकि वे समंकों का संकलन अपने तौर-तरीकों, रुचि, निर्णय आदि के आधार पर करते हैं। इस रीति का प्रयोग निम्न अनुसन्धानकर्ता करते हैं—

(1) इस रीति का प्रयोग प्राय: समाचार-पत्रों, पत्रिकाओं और आकाशवाणी एवं मीडिया द्वारा किया जाता है।

(2) सरकार भी विभिन्न वस्तुओं की थोक मण्डियों से बाजार भाव ज्ञात करने एवं फसल आदि का अनुमान लगाने में इसका प्रयोग करती है।

(3) इस रीति का प्रयोग प्राय: ऐसे अनुसन्धानों के लिए किया जाता है जिनमें शुद्धता की कम जरूरत होती है।

रीति के गुण (Merits of the Method)—इस रीति के प्रमुख गुण निम्न हैं—

नोट

(1) **मितव्ययिता**—इस रीति में समय, धन और परिश्रम की बचत होती है। सूचना शीघ्रता से एवं कम खर्च में प्राप्त हो जाती है।

(2) इस रीति के प्रयोग से दूर-दराज के स्थानों से भी शीघ्र सूचनाएँ मिल जाती हैं। अतः यह रीति व्यापक क्षेत्रों के लिए उपयुक्त होती है।

रीति के दोष (Demerits of the Method)—इस रीति में निम्न दोष पाये जाते हैं—

1. **शुद्धता व मौलिकता की कमी**—इस रीति से एकत्र समंकों में मौलिकता एवं शुद्धता का अभाव रहता है, क्योंकि इनमें अनुमानों को अधिक महत्व दिया जाता है।
2. **एकरूपता का अभाव**—ये आँकड़े भिन्न-भिन्न संवाददाताओं द्वारा अलग-अलग विधियों से एकत्र किये जाते हैं और विभिन्न शब्दों के अलग-अलग अर्थ भी लगाते हैं जिनसे समंकों में एकरूपता का अभाव रहता है।
3. **पक्षपात**—कई बार संवाददाताओं के पक्षपात के कारण समंक एकांगी हो जाते हैं।
4. कई बार संवाददाताओं द्वारा सूचनाएँ इतनी विलम्ब से भेजी जाती हैं कि विषय का महत्व ही समाप्त हो जाता है।

सावधानियाँ (Precautions)—इस रीति को प्रयोग करते समय निम्न बातें ध्यान में रखनी चाहिए—

(1) संवाददाताओं की नियुक्ति सोच-समझकर एवं सतर्कता से करनी चाहिए।

(2) संवाददाताओं की व्यक्तिगत राय का कम-से-कम प्रयोग करना चाहिए।

(3) एक क्षेत्र में संवाददाताओं की संख्या पर्याप्त होनी चाहिए।

4. सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना प्राप्ति

(Information through Schedules to be filled in by Informants)

इस रीति को 'डाक-प्रश्नावली प्रणाली' (Mailed Questionnarie Method) भी कहते हैं। इस रीति में अनुसन्धानकर्ता समस्या से सम्बन्धित प्रश्नों की एक सूची (प्रश्नावली) तैयार करता है। फिर सूची की प्रतियाँ डाक द्वारा सूचना देने वालों के पास भेज देता है; जो उसे भरकर निश्चित तिथि तक लौटा देते हैं। सूचना देने वालों का सहयोग एवं विश्वास प्राप्त करने के लिए सूची के साथ एक अनुरोध पत्र संलग्न होता है जिसमें जाँच का उद्देश्य स्पष्ट किया जाता है एवं सूचना को गुप्त रखने का आश्वासन दिया जाता है। इस रीति का प्रयोग निम्न परिस्थिति में करते हैं—

(1) समंकों के संकलन की यह रीति उन विस्तृत क्षेत्रों के लिए उचित है जहाँ सूचना देने वाले शिक्षित हैं।

(2) इस रीति का प्रयोग मत सर्वेक्षण (Opinion Surveys) एवं उपभोक्ताओं की रुचियों का अनुसन्धान करने में कारगर है।

(3) भारत सरकार द्वारा इस रीति का प्रयोग उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण में किया जाता है।

रीति के गुण (Merits of Method)—इस रीति से निम्न लाभ हैं—

1. **मितव्ययिता**—यह एक कम खर्चीली रीति है जिससे कम समय, श्रम एवं धन में विस्तृत क्षेत्र की सूचनाएँ उपलब्ध हो जाती हैं।
2. **मौलिकता**—सूचकों द्वारा स्वयं सूचनाएँ दिये जाने के कारण इसमें मौलिकता होती है एवं विश्वसनीय होती हैं।
3. **विस्तृत क्षेत्र**—यह रीति विस्तृत क्षेत्र के लिए उपयोगी होती है।

रीति के दोष (Demerits of the Method)—इस रीति में निम्न दोष हैं—

1. **अपर्याप्त एवं अपूर्ण सूचना**—अधिकांशतः भेजी गई अनुसूची, सूचक वापस ही नहीं भेजते हैं। जो अनुसूचियाँ वापस आ जाती हैं वे अपूर्ण होती हैं। उदासीनता या शंका के कारण सूचकों द्वारा प्रश्नों के उत्तर

नहीं दिये जाते हैं। इस प्रकार सूचकों द्वारा उचित उत्तर न देने के कारण अनुसन्धान में अभिनति एवं श्रमों का समावेश हो जाता है।

2. **शुद्धता की कमी**—इस रीति से प्राप्त की गई सूचना में शुद्धता कम होती है। सूचकों द्वारा भेजी गई सूचना में पक्षपात की भावना होती है।
3. **लचकशीलता का अभाव**—यह रीति लोचदार नहीं है। अपर्याप्त सूचना प्राप्त होने पर आवश्यक संशोधन करके भी प्रयोग नहीं कर सकते हैं।
4. **सीमित क्षेत्र**—यह रीति शिक्षित व्यक्तियों के लिए होती है। अशिक्षित व्यक्ति द्वारा इस रीति से सूचनाएँ प्राप्त नहीं की जा सकती हैं।
5. **प्रति-जाँच का अभाव**—इस रीति में प्रश्नों के उत्तर सूचकों के द्वारा स्वयं भरे जाते हैं जिससे अनुसन्धानकर्ता इन प्रश्नों की प्रतिजाँच नहीं कर पाता है।

सावधानियाँ (Precautions)—इस रीति का प्रयोग करते समय निम्न सावधानी रखी जाती हैं—

(1) सूचना देने वालों को उद्देश्य आदि की स्पष्ट जानकारी दे देनी चाहिए।

(2) सूची तैयार करते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि प्रश्न सरल, स्पष्ट व छोटे हों, प्रश्न संख्या में कम हों, उत्तेजना, शंका या विरोध उत्पन्न करने वाले न हों। हाँ या ना के उत्तर वाले प्रश्न होने चाहिए। प्रश्न ऐसे हों जिससे उनकी प्रतिजाँच हो सके।

(3) सभी अनुसूचियाँ निश्चित तिथि तक प्राप्त हो जानी चाहिए।

(4) सूचियाँ बिना किसी पक्षपात या पूर्वाग्रह के तैयार की गई हों।

5. प्रगणकों द्वारा सूचना प्राप्ति (Information through Enumerators)

सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर मँगाने से अनेक कठिनाइयाँ होती हैं एवं सूचना भी अपूर्ण, अपर्याप्त एवं अशुद्ध होती है। इन कठिनाइयों को दूर करने के लिए यह रीति अपनाई जाती है। इस रीति में तैयार की गई सूचियों को डाक द्वारा न भेजकर नियुक्त किये गये प्रगणकों द्वारा घर-घर जाकर सूचकों से पूछताछ करके स्वयं अनुसूचियाँ भरी जाती हैं। इन दोनों रीतियों में समानता यह है कि अनुसूचियों के प्रश्न के उत्तर स्वयं सूचकों से प्राप्त किये जाते हैं जबकि अन्तर यह है कि प्रथम रीति में अनुसूचियाँ डाक से भेजी जाती थीं जिसमें सूचक मनमर्जी से सूचनाएँ भरते थे जबकि द्वितीय रीति में प्रगणक सूचकों से पूछकर स्वयं अनुसूची भरता है। इस रीति का प्रयोग निम्न परिस्थितियों में करते हैं।

(1) जहाँ बहुत विस्तृत क्षेत्र हो चाहे शिक्षित हो या अशिक्षित।

(2) यह रीति मुख्यत: सरकार द्वारा जनगणना के लिए अपनाई जाती है।

(3) इस रीति का प्रयोग शोध संस्थाओं एवं शोधार्थी के द्वारा एवं बड़े व्यापार-गृहों, सार्वजनिक उपक्रम आदि द्वारा भी किया जाता है।

रीति के गुण (Merits of the Method)—इस रीति के निम्न लाभ हैं—

1. **विस्तृत क्षेत्र**—इस प्रणाली द्वारा अत्यन्त व्यापक क्षेत्र में सूचनाएँ प्राप्त कर सकते हैं।
2. **शुद्धता**—इस रीति में योग्य, प्रशिक्षित एवं अनुभवी प्रगणकों के द्वारा सूचनाएँ एकत्र करने के कारण शुद्धता की काफी मात्रा रहती है।
3. **व्यक्तिगत सम्पर्क**—प्रगणकों का सूचकों से व्यक्तिगत सम्पर्क रहता है जिससे जटिल प्रश्नों के उत्तर भी मिलते हैं और प्रति जाँच भी कर सकते हैं।
4. **निष्पक्षता**—इस रीति में पक्षपात का विशेष प्रभाव नहीं पड़ता है, क्योंकि प्रगणक दोनों प्रकार की प्रवृत्तियों—पक्ष व विपक्ष के होते हैं। सूचकों द्वारा पक्षपात भी प्रगणक की उपस्थिति के कारण नहीं किया जा सकता है।

नोट

5. **विश्वसनीयता**–प्रगणक द्वारा सूचकों को उद्देश्य की स्पष्ट जानकारी दिये जाने के कारण एवं सभी सन्देह दूर करने के कारण अधिक विश्वसनीय सूचनाएँ प्राप्त होती हैं।

रीति के दोष (Demerits of the Method)–इस रीति के निम्न दोष है–

1. **अधिक महँगी**–इस रीति में व्यक्तिगत सम्पर्क किये जाने के कारण, प्रगणक नियुक्त किये जाने के कारण अधिक धन की आवश्यकता होती है इसके साथ ही अधिक समय व श्रम भी लगता है।
2. **जटिल व कठिन**–यह एक जटिल रीति है, क्योंकि प्रगणकों की नियुक्ति, उनके प्रशिक्षण व उनके कार्य के निरीक्षण में कठिनाइयाँ होती हैं।
3. **स्वाभाविक अभिनति**–प्रगणकों के आचार-विचार एवं कार्यशैली में अन्तर के कारण संकलित सूचनाओं में भी अन्तर रहता है जिससे समंकों में अभिनति (biases) आ जाती है।

सावधानियाँ (Precautins)–इस रीति का प्रयोग करते समय निम्न बातें ध्यान में रखना चाहिए–

(1) अनुसूची के सभी प्रश्न उचित होने चाहिए एवं पिछली रीति की तरह होने चाहिए।

(2) प्रगणकों की नियुक्ति करते समय ध्यान रखना चाहिए कि वे निपुण, धैर्यवान, परिश्रमी, निष्पक्ष एवं व्यवहार-कुशल हों।

(3) प्रगणक उस क्षेत्र की भाषा, परम्पराओं, रीति-रिवाजों, रस्मों व परिस्थितियों से पूर्णतया वाकिफ हों। साथ ही अनुसन्धान कार्य में रुचि रखते हों।

(4) प्रगणकों के कार्य का समय-समय पर निरीक्षण हो।

2.3 प्राथमिक समंकों के संकलन की उपयुक्त रीति का चुनाव (Choice of a Suitable Method of Collection of Primary Data)

प्राथमिक समंकों के संकलन की सभी रीतियाँ अलग-अलग परिस्थितियों में सर्वश्रेष्ठ हैं। कोई भी एक रीति सभी परिस्थितियों में उचित नहीं है। समंकों के संकलन की उचित रीति का चुनाव करते समय निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए–

1. अनुसन्धान की प्रकृति–रीति का चुनाव अनुसन्धान की प्रकृति के अनुसार करना चाहिए जैसे सीमित क्षेत्र में व्यक्तिगत सम्पर्क आवश्यक हो तो प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान उपयुक्त रीति है। यदि क्षेत्र विस्तृत हो व व्यक्तिगत सम्पर्क आवश्यक न हो तो अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान अपेक्षित उपयुक्त रीति है। यदि लिखित रूप में शिक्षित व्यक्तियों से सूचना प्राप्त करनी हो तो सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर सूचना प्राप्ति उपयुक्त रीति होती है और यदि सूचक अशिक्षित है तो प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाना उचित रीति होती है।

2. उद्देश्य एवं क्षेत्र–रीति का चुनाव करते समय अनुसन्धान के उद्देश्य एवं क्षेत्र को ध्यान में रखना चाहिए। सीमित क्षेत्र में अनेक विषयों पर सूचना उपलब्ध करने के लिए प्रत्यक्ष अनुसन्धान किया जाता है। जबकि विस्तृत क्षेत्र में व्यापक अनुसन्धान के लिए प्रगणकों द्वारा अनुसूचियां भरकर समंक एकत्र करते हैं। लगातार समंक प्राप्त करने के लिए संवाददाताओं से सूचनाएँ एकत्र की जाती हैं।

3. शुद्धता की मात्रा–अधिक शुद्धता की आवश्यकता होने पर प्रत्यक्ष व्यक्तिगत तथा प्रगणकों द्वारा अनुसन्धान का प्रयोग किया जाता है। अप्रत्यक्ष अनुसन्धान रीति में शुद्धता ज्यादा नहीं होती क्योंकि संवाददाता केवल अनुमान ही उपलब्ध कराते हैं जबकि सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर समंक एकत्रित करने पर अपूर्ण एवं अपर्याप्त सूचना मिलती है।

4. आर्थिक साधन–प्रत्यक्ष अनुसन्धान एवं प्रगणकों द्वारा अनुसन्धान सबसे महँगी रीतियाँ हैं। इनमें सबसे अधिक धन, श्रम व समय व्यय होता है जबकि अन्य रीतियाँ अपेक्षाकृत सस्ती हैं। सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाने में सबसे कम खर्च होता है।

5. उपलब्ध समय—सबसे अतिशीघ्र सूचनाएँ प्राप्त करनी हैं तो संवाददाताओं से समंक प्राप्त करते हैं या सूचकों से अनुसूचियाँ भरवाकर मँगा ली जाती हैं जबकि पर्याप्त समय होने पर अनुसन्धानकर्ता प्रत्यक्ष अनुसन्धान, प्रगणकों द्वारा अनुसन्धान आदि रीति अपनाता है।

उचित रीति का चुनाव करने के लिए ऊपर व्यक्त बातों को ध्यान में रखकर समंक संकलित रीति का चयन करते हैं। संकलन क्रिया की सफलता उपर्युक्त बातों के अलावा अनुसन्धानकर्ता की योग्यता एवं अनुभव पर भी निर्भर करती है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. सही विकल्प चुनिए (Choose the correct option)

1. समंक कितने प्रकार के होते हैं—

   (क) एक (ख) दो

   (ग) तीन (घ) चार।

2. प्राथमिक समंक संकलित करने की विधि है—

   (क) प्रत्यक्ष विधि (ख) अप्रत्यक्ष विधि

   (ग) संवाददाताओं से सूचना प्राप्ति (घ) उपर्युक्त सभी।

3. जो समंक अनुसंधानकर्ता द्वारा स्वयं किसी उद्देश्य के लिए एकत्र किए जाते हैं। वे कहलाते हैं—

   (क) प्राथमिक समंक (ख) द्वितीयक समंक

   (ग) प्रश्नावली (घ) इनमें से कोई नहीं।

4. प्राथमिक समंक होते हैं—

   (क) मौलिक एवं नए (ख) घिसे-पिटे

   (ग) अशुद्ध (घ) इनमें से कोई नहीं।

5. यदि सबसे अतिशीघ्र सूचनाएँ प्राप्त करनी हैं तो संवाददाताओं से प्राप्त करके करते हैं—

   (क) सूचना (ख) समंक

   (ग) (क) और (ख) दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं।

2.4 अनुसूची एवं प्रश्नावली (Schedule and Questionnaire)

प्राथमिक सांख्यिकी अनुसंधान में अधिकांशत: सूचकों द्वारा या प्रगणकों की सहायता से अनुसूचियाँ भरवाकर आवश्यक समंक उपलब्ध हो जाते हैं। व्यावहारिक तौर पर अनुसूची या प्रश्नावली एक ऐसा फॉर्म या प्रपत्र है जिसमें अनुसंधान विषय से सम्बन्धित अभीष्ट एवं विस्तृत जानकारी प्राप्त करने हेतु प्रश्नों का क्रमानुसार तथा प्राथमिकतानुसार ब्यौरा होता है जिसका उत्तर सूचकों द्वारा दिया जाता है। परन्तु प्रश्नावली एवं अनुसूची में अन्तर होता है।

प्रश्नावली, प्रश्नों की एक ऐसी सूची होती है जिसमें प्रश्नों का उत्तर स्वयं सूचक देता है और भरकर वापस भेज देता है जबकि अनुसूची एक ऐसा प्रपत्र है जिसकी पूर्ति प्रशिक्षित प्रगणकों द्वारा सूचकों से पूछताछ करके की जाती है। अनुसूचियाँ दो प्रकार की होती हैं जो निम्न हैं—

1. **रिक्त फॉर्म** (Blank Form)—यह प्रश्नों की ऐसी सूची है जिसमें प्रत्येक प्रश्न के आगे या नीचे उत्तर देने के लिए रिक्त स्थान होता है। इस प्रकार के फॉर्म में सूचक और सांख्यिक दोनों को सुविधा रहती है।
2. **प्रश्नावली** (Questionnaire)—यह भी प्रश्नों की एक सूची है परन्तु इसमें प्रश्न के उत्तर के लिए रिक्त स्थान नहीं होता। उत्तर सूचकों द्वारा अलग कागज पर लिखे जाते हैं। इसके विश्लेषण एवं सारणीयन में

नोट

कठिनाई होती है। यह तब उपयुक्त होती है जब किसी विषय पर सूचकांकों के विचार एवं सुझाव माँगे गये हों।

उत्तम प्रश्नावली के गुण (Essentials of a Good Questionnaire)—सांख्यिकीय अनुसन्धान की सफलता मुख्यत: प्रश्नावली पर निर्भर करती है। प्रश्नावली उच्चकोटि की होनी चाहिए। प्रश्नावली हमेशा दक्ष, योग्य व अनुभवी व्यक्तियों द्वारा बनवानी चाहिए। अत: प्रश्नावली तैयार करते समय निम्न बातों को ध्यान में रखना चाहिए–

1. कम प्रश्न—प्रश्नों की संख्या कम-से-कम होनी चाहिए। लेकिन इतनी मात्रा में होनी चाहिए कि उचित एवं पर्याप्त सूचना प्राप्त हो सके।

2. सरलता एवं स्पष्टता—प्रश्न सरल एवं स्पष्ट होने चाहिए। वे कभी भी लम्बे, जटिल एवं दो अर्थों वाले नहीं होने चाहिए। इसके साथ ही प्रश्नावली में असम्मान सूचक या अनिश्चितता वाले शब्द (शायद, अक्सर, कभी-कभी) का प्रयोग नहीं करना चाहिए।

3. संक्षिप्तता—प्रश्न ऐसे होने चाहिए जिनके उत्तर 'हाँ' या 'ना' अथवा 'शब्द' या 'अंक' के रूप में दिये जा सकें।

4. उचित क्रम—प्रश्नों को उनके महत्व एवं प्राथमिकता के आधार पर क्रम में रखना चाहिए एवं परस्पर सम्बन्धित प्रश्नों को एक ही स्थान क्रमबद्ध करना चाहिए। उदाहरण के लिए, शिक्षा सम्बन्धी जानकारी एक ही स्थान पर क्रमबद्ध होनी चाहिए। वैवाहिक एवं पारिवारिक जानकारी एक ही स्थान पर एकत्रित होनी चाहिए। अत: प्रश्नों का एक निश्चित तर्कपूर्ण एवं सुव्यवस्थित क्रम होना चाहिए।

5. भाषा शैली—प्रश्नों की भाषा एवं शैली मधुर समझने लायक एवं सम्मानजनक होनी चाहिए। प्रश्नों में सूचक के लिए असम्मानजनक शब्दों जैसे नौकर आदि का प्रयोग नहीं करना चाहिए।

6. आपत्तिजनक एवं वर्जित प्रश्न—अनुसूची में ऐसे प्रश्न शामिल नहीं करने चाहिए जो सूचकों के आत्मसम्मान और उनकी धार्मिक एवं सामाजिक भावनाओं को ठेस पहुँचाते हों एवं जिससे सूचकों के मन में, शंका, विरोध या उत्तेजना उत्पन्न हो। कभी भी सूचकों से व्यक्तिगत बातें जैसे चरित्र, सामाजिक स्तर, आय, बीमारी आदि के बारे में प्रत्यक्ष रूप से न पूछकर परोक्ष ढंग से सरल एवं शिष्ट भाषा में ही पूछना चाहिए। सूचकों को ऐसी सूचनाएँ गुप्त रखने का आश्वासन देना चाहिए। उदाहरण के लिए–(1) क्या आप चरित्रवान हैं? (2) क्या आपको एड्स है? (3) क्या आपके अपनी पत्नी एवं बच्चों से सम्बन्ध अच्छे हैं? (4) क्या आप विवाह पूर्व सम्बन्ध में विश्वास रखते हैं?

7. प्रश्नों के स्वरूप (Types of Questions)—**रॉबर्ट वैसेल** एवं **एडवर्ड विलेट** के अनुसार प्रश्नों का स्वरूप निम्न हो सकता है–

(*a*) **बन्द प्रश्न** (Shut Questions)—ऐसे प्रश्नों के उत्तर अनुसन्धानकर्ता द्वारा स्वयं सुझाये जाते हैं और सूचक को उनमें से किसी एक उत्तर को चुनना होता है। बन्द प्रश्न कई प्रकार के होते हैं–

(*i*) **सरल विकल्प वाले प्रश्न**—ऐसे प्रश्नों में दो विकल्प होते हैं, इनका उत्तर केवल 'हाँ' या 'नहीं' अथवा 'गलत' या 'सही' में दिया जाता है। ये प्रश्न श्रेष्ठ माने जाते हैं। उदाहरण के लिए–(1) क्या आपका निजी मकान है? (2) क्या आपके पास कार है? (3) क्या आपके पास मोबाइल है?

(*ii*) **त्रि-विकल्प वाले प्रश्न**—ऐसे प्रश्नों में दो विपरीत विकल्पों के साथ एक मध्यम स्थिति रखी जाती हैं अर्थात् सूचक को तीन विकल्प दिये जाते हैं। उदाहरण के लिए–क्या भारत को परमाणु अप्रसार सन्धि पर हस्ताक्षर करने चाहिए?

हाँ ☐ नहीं ☐ अनिश्चित ☐

(*iii*) **बहुविकल्प वाले प्रश्न**—जब प्रश्नों के सामने उनके सभी सम्भावित उत्तर लिखे जाते हैं और उनमें

से किसी एक पर केवल (√) निशान लगाना होता है। उदाहरण के लिए—

(1) आपकी वैवाहिक स्थिति क्या है?—अविवाहित/विवाहित/विधुर/पृथक्/तलाकशुदा।

(2) आप कार्यालय कैसे जाते हैं?—पैदल/साइकिल/स्कूटर/कार/बस/रेलगाड़ी/टैक्सी/अन्य।

(*b*) **खुले प्रश्न** (Open Questions)—ऐसे प्रश्न जो सूचकों के विचार जानने के लिए पूछे जाते हैं। इन प्रश्नों का कोई विकल्प नहीं होता। इसके अन्तर्गत सूचकों को अपने सुझाव या आलोचनाएँ लिखनी होती हैं खुले प्रश्नों का प्रयोग कम-से-कम होना चाहिए क्योंकि सभी लोक इसका उत्तर नहीं दे सकते हैं। उदाहरण के लिए—(1) जनसंख्या-वृद्धि पर नियन्त्रण के लिए क्या उपाय करने चाहिए? (2) रुपये के अवमूल्यन के बारे में आपकी क्या विचारधारा है? (3) महँगाई किस प्रकार कम की जानी चाहिए?

(*c*) **विशिष्ट सूचना देने वाले प्रश्न** (Specific Information Questions)—ये वे प्रश्न हैं जिनसे सूचकों की विशिष्ट जानकारी प्रापत होती है—उदाहरण के लिए—(1) आपकी आयु कितनी है? (2) आप किस पद पर कार्यरत हैं? (3) आपकी शैक्षणिक योग्यता क्या है?

8. प्रत्यक्ष सम्बन्ध—प्रश्न अनुसन्धान कार्य से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित होने चाहिए ताकि अनावश्यक रूप से समय व धन का अपव्यय न हो।

9. सत्यता की जाँच (क्रॉस चेकिंग)—प्रश्नों की शुद्धता का उच्च स्तर बनाये रखने के लिए प्रश्नावली में ऐसे प्रश्नों का समावेश करना चाहिए जिनसे उत्तरों की यथार्थता की परस्पर जाँच की जा सके।

10. पूर्व परीक्षण व संशोधन—अनुसूची बनाने के बाद अनुसन्धान कार्य आरम्भ करने से पहले कुछ व्यक्तियों द्वारा इसका परीक्षण कर लेना चाहिए, जिससे प्रश्नावली के दोष या प्रश्नों सम्बन्धी कमियों में संशोधन किया जा सके।

11. निर्देश व टिप्पणी—प्रश्नावली को भरने के लिए, स्पष्ट, संक्षिप्त एवं निश्चित निर्देश होने चाहिए। साथ ही यदि किसी प्रश्न में व्याख्या करनी है या विचार देने हैं तो उसे चिह्नित कर देना चाहिए। इसके अलावा प्रश्नावली कब एवं कहाँ लौटानी है यह भी निर्देशित होना चाहिए।

जीवन-निर्वाह व्यय की गणना

I. सामान्य **कोड संख्या (Code No.)**

1. मुखिया का नाम—
2. पूरा पता—
3. व्यवसाय—

   (*a*) स्वतन्त्र व्यवसाय (*b*) शासकीय कर्मचारी (*c*) अशासकीय कर्मचारी (*d*) अन्य
4. निवास-स्थान

   (*a*) स्वयं का मकान (*b*) किराये का मकान (*c*) सरकारी आवास
5. सुविधाएँ

   वाहन टेलीफोन

II. परिवार रचना

	पुरुष	स्त्री
पारिवारिक मुखिया	—	—
पत्नी	—	—
आश्रित बच्चे		
आयु 0-5 वर्ष	—	—

5-15 वर्ष	–	–
15 वर्ष से ऊपर	–	–
अनाश्रित बच्चे	–	–
अन्य व्यक्ति	–	–
III. पारिवारिक आय		
परिवार के मुखिया की आय		–
मुख्य आय		–
अतिरिक्त आय		–
पत्नी द्वारा उपार्जित आय		–
अन्य उपार्जित आय		–
विनियोग से आय		–
मकान या सम्पत्तियों से आय		–
अन्य आय		–
आकस्मिक या अनावर्तक मदें		–
	योग	
IV. पारिवारिक व्यय		
खाद्य सामग्री		
अनाज		–
दालें		–
तेल		–
मसाले		–
फल, सब्जी व अन्य		–
वस्त्र		–
ईंधन व प्रकाश		–
मकान किराया		–
स्वास्थ्य		–
मनोरंजन		–
अन्य मदें (स्पष्ट करें)		–
असामान्य या अनावर्तक व्यय (स्पष्ट करें)		–
	योग	
V. बचत या घाटा		
बचत (किस प्रकार उपयोग की गई)		
घाटा (किस प्रकार पूरा किया गया)		

नोट

अन्य विवरण

मुखिया के हस्ताक्षर —

प्रगणक के हस्ताक्षर —

12. व्याख्या पत्र या निवेदन-पत्र—अनुसन्धानकर्ता प्रश्नावली के साथ एक प्रपत्र भी लगा देते हैं जिसमें मुख्यतः निम्न बातें शामिल होती हैं—(1) अनुसन्धान या उद्देश्य स्पष्ट होना चाहिए। (2) सूचकों को सूचनाएँ गुप्त रखने का आश्वासन। (3) डाक प्रश्नावली रीति में टिकट व पता लिखा लिफाफा संलग्न होना चाहिए। (4) सूचकों को सधन्यवाद व प्रोत्साहनवश कुछ उपहार-कूपन आदि देने चाहिए।

टास्क प्रश्नावली किसे कहते हैं?

2.5 द्वितीयक सामग्री का संकलन (Collection of Secondary Data)

द्वितीयक समंक वे होते हैं जो पहले से ही अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा एकत्रित व प्रकाशित किये जाते हैं। **एम. एम. ब्लेयर** के अनुसार, "द्वितीयक समंक वे हैं जो पहले से ही अस्तित्व में हैं और जो वर्तमान प्रश्नों के उत्तर के लिए न होकर बल्कि किसी दूसरे उद्देश्य के लिए एकत्र किये गये हैं।" ("Secondary data are those already in existence and which have been collected for some other purpose than the answering of the question at hand." —*M. M. Blair*)

अनुसन्धानकर्ता इन समंकों को संकलित नहीं करता है बल्कि उद्धृत (borrow) करके उसे अपने सांख्यिकीय अनुसन्धान में प्रयोग करता है।

द्वितीयक समंकों के स्रोत (Sources of Secondary Data)—द्वितीयक समंकों के प्रायः दो स्रोत होते हैं—

(1) प्रकाशित स्रोत, (2) अप्रकाशित स्रोत।

1. प्रकाशित स्रोत (Published Sources)

विभिन्न विषयों पर सरकारी, अर्द्धसरकारी एवं गैर-सरकारी संस्थाएँ एवं अन्य व्यक्ति, अनुसन्धानकर्ता प्राथमिक अनुसन्धान द्वारा प्राप्त समंकों को समय-समय पर प्रकाशित करते रहते हैं जिनका अन्य व्यक्तियों द्वारा द्वितीयक समंक के रूप में प्रयोग किया जाता है। प्रकाशित समंकों के निम्न स्रोत हैं—

(*i*) **अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन**—विदेशी सरकारों एवं अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाओं द्वारा प्रकाशित समंकों को प्रयोग द्वितीयक समंकों के रूप में करते हैं जैसे The U. N. Statistical Year Book, Demographic Year Book, Annual Report of IMF; IBRD or ECAFE आदि अन्तर्राष्ट्रीय संगठनों के महत्वपूर्ण प्रकाशन हैं।

(*ii*) **सरकारी प्रकाशन**—केन्द्रीय एवं राज्य सरकारों के अनेक विभागों एवं मन्त्रालयों के द्वारा भी समय-समय पर विभिन्न क्षेत्रों व विषयों पर समंक प्रकाशित होते रहते हैं; जैसे—Statistical Abstract of India (Annual), Five Year Plan Progress Reports, Census of India, R.B.I. Bulletin, Economic Survey etc.

(*iii*) **अर्द्ध-सरकारी प्रकाशन**—अर्द्ध-सरकारी संस्थाएँ जैसे नगरपालिकाएँ, नगर निगम, पंचायतें, जिला परिषदें आदि भी समय-समय पर जन्म-मृत्यु सम्बन्धी, सार्वजनिक स्वास्थ्य व शिक्षा सम्बन्धी रिपोर्ट प्रकाशित करती रहती हैं।

(*iv*) **समितियों व आयोगों का प्रकाशन**—सरकार विभिन्न विषयों पर जाँच कराने एवं विशेषज्ञों की राय प्राप्ति के लिए जाँच समिति व आयोग का गठन करती है जिनके प्रतिवेदनों से महत्त्वपूर्ण समंक प्राप्त होते हैं; जैसे—वित्त आयोग, एकाधिकार, आयोग, आय वितरण जाँच समिति आदि।

नोट

(*v*) **व्यापारिक संस्थाओं व परिषदों के प्रकाशन**—बड़ी-बड़ी व्यापारिक संस्थाएँ व परिषदें जैसे General Motors Inc., Hindustan lever Ltd., Bank Bodies, Stock Exchanges, Trade Unions, FICCI etc. द्वारा अपने सांख्यिकी व शोध विभागों द्वारा एकत्रित समंक प्रकाशित करती हैं।

(*vi*) **अनुसन्धान एवं शोध संस्थाओं के प्रकाशन**—अनेक शोध संस्थाएँ विश्वविद्यालय समय-समय पर अपने शोध कार्यों के परिणामों को प्रकाशित कराते रहते हैं; जैसे—भारतीय सांख्यिकी अनुसन्धान (ISI), राष्ट्रीय प्रतिदर्श जाँच संगठन (NSSO), व्यावहारिक आर्थिक शोध की राष्ट्रीय परिषद् (NCAFR) आदि।

(*bii*) **समाचार-पत्र व पत्रिकाएँ**—समाचार-पत्र एवं सामयिक पत्रिकाएँ [Economics Times (Daily), Commerce (Weekly), Transport (Monthly)] आदि भी द्वितीयक समंकों के महत्वपूर्ण साधन हैं।

(*viii*) **व्यक्तिगत अनुसंधानकर्त्ता**—कुछ व्यक्ति अपने उद्देश्यों की पूर्ति के लिए विभिन्न विषयों पर आवश्यक समंक एकत्रित करके सार्वजनिक रूप से प्रकाशित करवाते रहते हैं।

2. अप्रकाशित स्त्रोत (Unpublished Sources)

कुछ सांख्यिकीय सामग्री ऐसी भी होती है जिसका विधिवत् प्रकाशन नहीं हो पाता। अनेक अनुसन्धानकर्त्ता, विभिन्न उद्देश्यों से सामग्री एकत्रित करते हैं जो प्रकाशित नहीं कराई जाती है परन्तु फिर भी उपयोगी होती है; जैसे—शोधार्थियों द्वारा किये गये शोध-कार्य, कॉलेजों के रिकॉर्ड आदि।

द्वितीयक समंकों की जाँच और प्रयोग एवं सावधानियाँ

(Scruting and Use and Precautions of Secondary Data)

द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने से पूर्व आलोचनात्मक जाँच द्वारा उनका विस्तृत सम्पादन करना नितान्त आवश्यक होता है। द्वितीयक समंकों की मुख्य समस्या उनका संकलन न होकर, उनका उचित एवं संशोधित रूप में प्रयोग होता है क्योंकि दूसरों द्वारा संकलित समंकों को अपने उद्देश्य के अनुरूप बनाना काफी कठिन कार्य होता है। **कौनर** के अनुसार, "समंक विशेष रूप से अन्य व्यक्तियों के द्वारा एकत्रित समंक, प्रयोगकर्त्ता के लिए अनेक त्रुटियों से परिपूर्ण होते है।" ये त्रुटियाँ अनेक कारणों से हो सकती हैं; जैसे—सांख्यिकीय इकाई में परिवर्तन, सूचना की अपूर्णता एवं अपर्याप्तता, पक्षपात, उद्देश्य व क्षेत्र की भिन्नता आदि। अत: इन द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने से पूर्व अनुसन्धानकर्ता को यह देख लेना चाहिए कि प्रस्तुत द्वितीयक सामग्री में विश्वसनीयता (Reliability), अनुकूलता (Suitability) तथा पर्याप्तता (Adequacy) आदि आवश्यक गुण पाये जाते हैं या नहीं।

क्या आप जानते हैं द्वितीयक समंक पहले से ही अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा प्रकाशित होते हैं।

सावधानियाँ—द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए।

1. **पिछले अनुसन्धानकर्ता की योग्यता**—सबसे पहले यह देखना चाहिए कि द्वितीयक सामग्री पहले जिस अनुसन्धानकर्ता द्वारा एकत्र की गई है वह अनुभवी, योग्य, ईमानदार एवं निष्पक्ष व्यक्ति था तो उन समंकों का प्रयोग किया जा सकता है।

2. **संग्रहण या संकलन रीति**—संकलन की जो रीति अपनाई गई थी वह समंकों के वर्तमान प्रयोग के लिए कहाँ तक उपयुक्त एवं विश्वसनीय थी? यदि प्रतिदर्श अनुसन्धान किया गया था तो यह निश्चित कर लेना चाहिए कि प्रतिदर्श (Samples) यथेष्ट है और पूर्णरूप से समग्र का प्रतिनिधित्व करता है तभी द्वितीयक समंकों का प्रयोग करना चाहिए।

3. **उद्देश्य व क्षेत्र**—प्राथमिक रूप से प्रस्तुत करते समय समंक एकत्रित किये गये थे तो अनुसन्धान के उद्देश्य व क्षेत्र यदि वही थे जो वर्तमान में हैं तो उनका प्रयोग द्वितीयक समंकों के रूप में किया जा सकता है। लेकिन यदि उद्देश्य व क्षेत्र में अन्तर है तो समंक अनुपयुक्त और अविश्वसनीय होंगे।

4. **जाँच का समय और उसकी परिस्थितियाँ**—द्वितीयक सामग्री का प्रयोग करते समय यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि उपलब्ध समंक किस काल व किन परिस्थिति में एकत्र किये गये थे। यदि आँकड़ों के संकलन काल एवं उपयोग के काल की परिस्थितियों में अन्तर होता है तो उनकी उपयोगिता कम हो जाती है। जैसे मंदीकाल के समंक तेजी काल एवं युद्ध काल के समंक शान्तिकाल में प्रयोग नहीं किये जा सकते। अत: लोगों के रहन-सहन, रीति-रिवाज में होने वाले परिवर्तन, मूल्यों में अन्तर आदि को ध्यान में रखकर ही पूर्व प्रकाशित समंकों का प्रयोग करना चाहिए।
5. **सांख्यिकीय इकाई की परिभाषा**—द्वितीय सामग्री को प्रयोग करते वक्त इस बात की जाँच भी करनी चाहिए कि पूर्व अनुसन्धान की इकाइयाँ अर्थ, परिभाषा व समरूपता की दृष्टि से वर्तमान प्रयोग के अनुकूल हैं या नहीं।
6. **शुद्धता की मात्रा का स्तर**—इस बात की जाँच भी जरूरी है कि प्रस्तुत समंकों में शुद्धता का स्तर क्या रखा गया था। शुद्धता की मात्रा कम होने पर समंक अविश्वसनीय हो जाते हैं साथ ही यह भी देख लेना चाहिए कि आँकड़ों का अत्यधिक सन्निकटन न किया गया हो।
7. **तुलना एवं जाँच**—अनुसन्धानकर्ता को एक ही विषय पर यदि अनेक स्रोतों से द्वितीयक समंक प्राप्त होंगे तो उनकी सत्यता की जाँच करने के लिए उनकी तुलना कर लेनी चाहिए। उपलब्ध समंकों की परीक्षात्मक जाँच करके उनकी विश्वसनीयता को जाँच लेना चाहिए। यदि समंकों में काफी अन्तर हो तो विश्वसनीय स्रोतों से प्राप्त समंक ही लेने चाहिए।

ए. एल. बाउले के अनुसार, "प्रकाशित समंकों को ऊपर से ही देखकर उनके बाह्य मूल्य के आधार पर स्वीकार कर लेना कभी सुरक्षित नहीं है जब तक उनका अर्थ व उनकी सीमाएँ अच्छी तरह से ज्ञात न हो जाएँ और यह सदैव आवश्यक है कि उन तर्कों की आलोचनात्मक समीक्षा की जाए जो उन पर आधारित हैं।"

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)—

1. प्रश्नावली ········· की एक ऐसी सूची है जिसमें प्रश्नों का उत्तर स्वयं सूचक देता है।
2. अनुसूची ········· प्रकार की होती है।
3. द्वितीयक समंक के ········· तथा अप्रकाशित दो स्रोत हैं।
4. सरकार विभिन्न विषयों पर जाँच कराने एवं विशेषज्ञों की राय प्राप्ति के लिए ········· का गठन करती है।
5. ········· एवं सामयिक पत्रिकाएँ द्वितीयक समंकों के महत्वपूर्ण साधन हैं।

2.6 सारांश (Summary)

- सांख्यिकीय अनुसन्धान की योजना पूरी होने के बाद समंकों का संकलन किया जाता है। समंकों का संकलन सांख्यिकी विज्ञान की प्रथम एवं महत्त्वपूर्ण क्रिया है क्योंकि ये अनुसन्धान का आधार होते हैं। समंकों के उचित संकलन, शुद्धता एवं व्यापकता के आधार पर ही विश्लेषण एवं निर्वचन निर्भर करता है।
- प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों में अन्तर प्रकृति का नहीं बल्कि अवस्था एवं सापेक्षता का होता है। जब किसी संस्था द्वारा पहली बार समंक एकत्रित किये जाते हैं तो वे प्राथमिक सामग्री का कार्य करते हैं परन्तु यही समंक जब किसी दूसरे अनुसन्धानकर्ता द्वारा प्रयोग किये जाते हैं तो द्वितीयक सामग्री कहलाते हैं।
- सूची तैयार करते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि प्रश्न सरल, स्पष्ट व छोटे हों, प्रश्न संख्या में कम हों, उत्तेजना, शंका या विरोध उत्पन्न करने वाले न हों। हाँ या ना के उत्तर वाले प्रश्न होने चाहिए। प्रश्न ऐसे हों जिससे उनकी प्रतिजाँच हो सके।
- प्राथमिक सांख्यिकी अनुसंधान में अधिकांशत: सूचकों द्वारा या प्रगणकों की सहायता से अनुसूचियाँ भरवाकर आवश्यक समंक उपलब्ध हो जाते हैं। व्यावहारिक तौर पर अनुसूची या प्रश्नावली एक ऐसा फॉर्म या प्रपत्र

नोट

है जिसमें अनुसंधान विषय से सम्बन्धित अभीष्ट एवं विस्तृत जानकारी प्राप्त करने हेतु प्रश्नों का क्रमानुसार तथा प्राथमिकतानुसार ब्यौरा होता है जिसका उत्तर सूचकों द्वारा दिया जाता है।

- प्रश्नावली, प्रश्नों की एक ऐसी सूची होती है जिसमें प्रश्नों का उत्तर स्वयं सूचक देता है और भरकर वापस भेज देता है जबकि अनुसूची एक ऐसा प्रपत्र है जिसकी पूर्ति प्रशिक्षित प्रगणकों द्वारा सूचकों से पूछताछ करके की जाती है।
- द्वितीयक समंक वे होते हैं जो पहले से ही अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा एकत्रित व प्रकाशित किये जाते हैं।
- विभिन्न विषयों पर सरकारी, अर्द्धसरकारी एवं गैर-सरकारी संस्थाएँ एवं अन्य व्यक्ति, अनुसन्धानकर्ता प्राथमिक अनुसन्धान द्वारा प्राप्त समंकों को समय-समय पर प्रकाशित करते रहते हैं जिनका अन्य व्यक्तियों द्वारा द्वितीयक समंक के रूप में प्रयोग किया जाता है।

2.7 शब्दकोश (Keywords)

- **संग्रहण**—संग्रहण करना, इकट्ठा करना।
- **सापेक्षता**—वह सिद्धांत जिसमें दो बातें या वस्तुएँ एक दूसरे पर आपेक्षित हों।
- **प्रतिदर्श**—नमूना।

2.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. प्राथमिक तथा द्वितीयक समंक किसे कहते हैं? दोनों में अंतर स्पष्ट कीजिए।
2. प्राथमिक समंकों के संकलन की विधियों की व्याख्या कीजिए।
3. अनुसूची एवं प्रश्नावली से आप क्या समझते हैं? अनुसूची तथा प्रश्नावली में क्या अंतर है?
4. प्राथमिक समंकों के संकलन की प्रत्यक्ष विधि पर प्रकाश डालिए।
5. द्वितीयक समंक किसे कहते हैं? इसके संकलन की विधियाँ बताइए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1.	1. (क)	2. (ख)	3. (क)	4. (क)	5. (ख)
2.	1. प्रश्नों	2. दो	3. प्रकाशित	4. जाँच समिति	
	5. समाचार-पत्र।				

2.10 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा
2. साँख्यिकी, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई–3: आँकड़ों का वर्गीकरण एवं सारणीयन : आवृत्ति एवं संचयी आवृत्ति वितरण (Classification and Tabulation of Data : Frequency and Cumulative Frequency Distribution)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- आँकड़ों का वर्गीकरण, प्रकार एवं आदर्श वर्गीकरण के आवश्यक तत्व को समझने में।
- आवृत्ति बंटन, आवृत्ति वितरण की रचना एवं संचयी आवृत्ति श्रृंखला की विधि को समझने में।
- सारणीयन एवं सारणीयन व वर्गीकरण में क्या अंतर होता है, को जानने में।
- सारणी के प्रमुख अंग एवं सारणियों के प्रकार की व्याख्या करने में।

नोट

प्रस्तावना (Introduction)

भवन निर्माण के लिये केवल ईंटों का ढेर ही पर्याप्त नहीं होता बल्कि उन्हें एक सुव्यवस्थित ढंग से सजाने के बाद ही भवन का निर्माण हो पाता है। इसी प्रकार एकत्रित समंक अपने मूल रूप में अंकों के ढेर के समान हैं और उनसे कोई भी तर्कसंगत परिणाम नहीं निकाला जा सकता। वास्तव में, संकलित समंक अत्यन्त जटिल एवं अव्यवस्थित रूप में होते हैं। उन्हें आसानी से समझ पाना और उनसे कोई उचित परिणाम निकालना तब तक सम्भव नहीं होता जब तक कि उन्हें एक सुव्यवस्थित क्रम में प्रस्तुत न कर दिया जाए। फिर, तुलनात्मक अध्ययन, विश्लेषण एवं निर्वचन के लिये भी संकलित सामग्री को सरल, संक्षिप्त व बोधगम्य रूप दोनों की आवश्यकता होती है। वास्तव में, यह प्रक्रिया ही समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीयन कहलाती है। **"वर्गीकृत एवं क्रमबद्ध तथ्य स्वयं बोलते हैं जबकि अव्यवस्थित रूप में वे माँस की तरह मृत होते हैं।"**

3.1 आँकड़ों का वर्गीकरण (Classification of Data)

अर्थ व परिभाषा–वर्गीकरण वह प्रक्रिया है जिसमें एकत्रित समंकों को उनकी विविध विशेषताओं एवं गुणों के आधार पर अलग-अलग वर्गों में बाँटा जाता है। **कौनर** के शब्दों में "वर्गीकरण, तथ्यों को (यथार्थ या कल्पित रूप से) उनकी समानता तथा सादृश्यता के अनुसार, समूहों या वर्गों में क्रमबद्ध करने की क्रिया है और यह व्यक्तिगत इकाइयों की विविधता में पायी जाने वाली, गुणों की एकरूपता (unity) को व्यक्त करता है।"

होरेस सिक्राइस्ट के अनुसार "वर्गीकरण, समंकों को उनकी सामान्य विशेषताओं के अनुसार श्रेणियों एवं वर्गों में क्रमबद्ध करने अथवा उनको भिन्न-भिन्न किन्तु सम्बद्ध हिस्सों में बाँटने की एक क्रिया है।

वर्गीकरण के मुख्य लक्षण (Main Features)–उपरोक्त परिभाषाओं के अनुसार वर्गीकरण के मुख्य लक्षण इस प्रकार हैं।

(1) वर्गीकरण के अन्तर्गत संकलित समंकों को विभिन्न वर्गों में बाँटा जाता है। वर्गों का निर्धारण जाँच के उद्देश्य, क्षेत्र एवं स्वरूप पर निर्भर करता है। **उदाहरणार्थ,** 1985-86 में जीवाजी विश्वविद्यालय (ग्वालियर) में पंजीकृत विद्यार्थियों की संख्या को निम्न में से किसी एक आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है–लिंग (जैसे लड़के-लड़कियाँ), आयु (जैसे 15-19, 20-24, वर्ष इत्यादि), लम्बाई, भार, धर्म, जाति, प्रान्तीयता आदि।

(2) तथ्यों का विभाजन समानता तथा सजातीयता के आधार पर किया जाता है, अर्थात् इस प्रकार की विशेषता वाले समंक एक वर्ग में रखे जाते हैं।

(3) वर्गीकरण वास्तविक या फिर काल्पनिक हो सकता है। तथ्यों के प्राकृतिक गुणों के आधार पर किया गया वर्कीकरण वास्तविक होता है और अनुसन्धानकर्त्ता की इच्छा पर आधारित वर्गीकरण, काल्पनिक होता है।

(3) वर्गीकरण इस प्रकार किया जाता है कि व्यक्तिगत इकाइयों की "विविधता में उनकी एकरूपता" (unity in diversity) स्पष्ट हो जाये।

वर्गीकरण के उद्देश्य या कार्य (Objects or Functions of Classification)

(1) सरल वं संक्षिप्त बनाना (It simplifies and condenses the data)–वर्गीकरण का प्रमुख उद्देश्य समंकों की जटिलता को दूर करके उन्हें सरल व संक्षिपत रूप देना है। वर्गीकृत समंकों को समझना एवं याद करना आसान होता है अर्थात् उनमें बौधगम्यता (comprehensibility) होती है। **उदाहरणार्थ,** भारत के 68.5 करोड़ लोगों में से यदि प्रत्येक व्यक्ति की अलग-अलग आयु लिखी जाय तो समंकों के इस विशाल समुद्र से कोई भी निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता। लेकिन इन समंकों को विभिन्न आयु-वर्गों में प्रस्तुत करने से न केवल समझने में सरलता होती है बल्कि जनसंख्या के आयु अनुसार वितरण की भी जानकारी प्राप्त हो जाती है।

नोट

(2) तुलना में सहायक (It facilitates comparison)—वर्गीकरण समंकों के बीच अर्थपूर्ण तुलना करने की सुविधा प्रदान करता है। **उदाहरणार्थ,** विश्वविद्यालय के विद्यार्थियों का लिंग के अनुसार वर्गीकरण करके हम पुरुष और स्त्रियों के बीच उच्च शिक्षा के प्रचलन की तुलना आसानी से कर सकते हैं। जबकि अवर्गीकृत समंकों से इस प्रकार की कोई जानकारी प्राप्त नहीं की जा सकती।

(3) स्पष्टता व निश्चितता लाना (It brings clarity and certainty)—वर्गीकरण से सांख्यिकीय तथ्यों की समानता स्पष्ट हो जाती है। फिर, समंकों को समानता एवं असमानता के आधार पर कुछ निश्चित वर्गों में बाँटने से उनमें अनिश्चितता समाप्त होती है।

(4) तर्कपूर्ण व्यवस्था प्रदान करना (It provides logical arrangement)—वर्गीकरण समंकों को वैज्ञानिक एवं तर्कपूर्ण ढंग से प्रस्तुत करने की सुविधा प्रदान करता है। **उदाहरणार्थ,** जनगणना समंकों को बिना किसी आधार के लिखने की बजाय उन्हें आयु, लिंग, जाति, धर्म, राज्य आदि वर्गों में बाँटकर व्यक्त करना निःसन्देह एक तर्कपूर्ण किया है।

(5) सम्बन्ध अध्ययन में सहायक—(It helps to study the relationship)—समंकों का दो या दो से अधिक गुणों या मापदण्डों के आधार पर किया गया वर्गीकरण, उनके बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध के अध्ययन को सम्भव बनाता है। **उदाहरणार्थ,** विद्यार्थियों की संख्या को लिंग तथा संकाय में बाँटकर, इन गुणों के पारस्परिक सम्बन्ध का अध्ययन हम आसानी से कर सकते हैं।

(6) सारणीयन का आधार प्रस्तुत करना (It provides basis of tabulation)—वर्गीकरण की क्रिया, सारणीयन तथा सांख्यिकीय विश्लेषण की अन्य क्रियाओं के लिये आधार प्रस्तुत करती है। बिना वर्गीकरण के सारणीयन असम्भव है और सारणीयन के अभाव में सांख्यिकीय विश्लेषण अव्यवहारिक है।

नोट्स वर्गीकरण एवं सारणीयन संकलित सामग्री के संक्षिप्तीकरण की एक प्रक्रिया है; यह न केवल समंकों को उनकी विशेषताओं के आधार पर प्रकट करती है बल्कि सांख्यिकीय सामग्री के निर्वचन की आधारशिला है।

3.2 आदर्श वर्गीकरण के आवश्यक तत्व (Essentials of an Ideal Classification)

यद्यपि वर्गीकरण, समंकों के विश्लेषण की एक महत्वपूर्ण तकनीक हैं किन्तु इसके लिये कोई निश्चित व कठोर नियम निर्धारित नहीं किये जा सकते क्योंकि किसी भी सांख्यिकीय अनुसन्धान में समंकों का वर्गीकरण मुख्यत: समंकों के स्वरूप और जाँच के उद्देश्य पर निर्भर करता है। तथापि एक आदर्श वर्गीकरण के लिये निम्न मार्गदर्शक नियमों को ध्यान में रखना आवश्यक है—

(1) असंदिग्धता तथा स्पष्टता (Unambiguity and Clarity)—विभिन्न वर्गों (classes) की परिभाषा अथवा निर्धारण इस प्रकार किया जाना चाहिये कि उनमें स्पष्टता व असंदग्धिता के गुण मौजूद हों। कोई इकाई, किस वर्ग में रखी जाये इस बारे में किसी भी प्रकार की अनिश्चितात या कठिनाई नहीं होनी चाहिये। **उदाहरणार्थ,** यदि हमें व्यक्तियों के एक समूह को 'साक्षर' तथा 'निरक्षर' में वर्गीकृत करना है तो यह आवश्यक है कि इसे स्पष्टत: परिभाषित कर लिया जाये कि साक्षर तथा निरक्षर से हमारा क्या अभिप्राय है।

(2) व्यापकता (Comprehensiveness)—वर्गीकरण अपने-आप में इतना व्यापक होना चाहिये कि समग्र की प्रत्येक इकाई का किसी-न-किसी वर्ग में अवश्य समावेश हो जाये, अर्थात् कोई भी इकाई छुटनी नहीं चाहिये। **उदाहरणार्थ,** यदि वैवाहिक-स्थित (marital status) वे आधार पर 'विवाहित' तथा 'अविवाहित' केवल दो ही वर्ग बनाये गए हैं तो फिर ऐसी हालत में विधुर, विधवा, तलाक शुदा आदि इकाइयों का इस वर्गीकरण में समावेश नहीं हो पाएगा और यह अपूर्ण वर्गीकरण होगा। अत: वर्गीकरण करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि वर्ग पूर्ण अथवा व्यापक हों।

नोट

फिर, एक आदर्श वर्गीकरण के लिये यह भी आवश्यक है कि उसमें **"अवशेष वर्ग"** (residual class) जैसे 'अन्य' या 'विविध' न तैयार किये जायें क्योंकि ऐसे वर्ग समंकों की विशेषताओं को पूरी तरह से स्पष्ट नहीं कर पाते। हाँ! यदि वर्गों की संख्या बहुत अधिक है तो फिर अवशेष वर्ग तैयार किया जा सकता है अन्यथा वर्गीकरण का उद्देश्य (अर्थात् समंकों का संक्षिप्तीकनण) पूरा न हो पायेगा।

(3) परस्पर अपवर्जी (Mutually Exclusive)—विभिन्न वर्ग परस्पर अपवर्जी अथवा अपरस्परव्यापी (non-overlapping) होने चाहियें ताकि एक इकाई, केवल ही वर्ग-विशेष में शामिल हो। **उदाहरणार्थ,** यदि कालिज के विद्यार्थियों को लिंग के आधार पर 'पुरुष' तथा 'स्त्रियों' में बाँटा गया है तोये दोनों वर्ग परस्पर अपवर्जी हैं। परन्तु यदि इसी समूह को 'पुरुष' 'स्त्रियाँ' और 'नशीली वस्तु के आदी' वर्गों में बाँटा जाये तो यह वर्गीकरण त्रुटिपूर्ण होगा क्योंकि 'नशीली वस्तु के आदी' वर्ग में पुरुष तथा स्त्री, दोनों ही शामिल हैं। अतः ऐसी स्थिति में उचित यह होगा कि वर्गीकरण दो मानदण्डों (criteria) के आधार पर तैयार किया जाये। जेसे पहला पुरुष तथा स्त्री, और दूसरा इन दोनों वर्गों के विद्यार्थियों को पुनः नशीली वस्तु के आदी तथा गैर-आदी (non-addicts) में बाँटा जाए।

(4) स्थिरता (Stability)—परिणामों की अर्थपूर्ण तुलना के लिये वर्गीकरण में स्थिरता का होना आवश्यक है। दूसरे शब्दों में, पूरे जाँच कार्य के दौरान और उसी विषय की प्रत्येक अगली जाँच में, वर्गीकरण का एक ही ढांचा (आधार) रहना चाहिये अन्यथा आँकड़े तुलना-योग्य नहीं रहते। **उदाहरणार्थ,** भारत की पिछली तीन जनगणनाओं में जनसंख्या का पेशेवार वर्गीकरण भिन्न-भिन्न आधारों पर किया गया है जिसके कारण ये समंक तुलना के योग्य नहीं हैं।

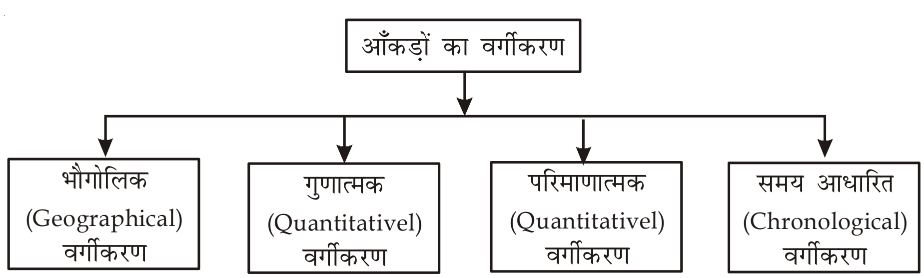
(5) अनुकूलता या उपयुक्तता (Suitability)—वर्गों की रचना अनुसन्धान के उद्देश्य के अनुकूल होनी चाहिये। **उदाहरणार्थ,** यदि हम उच्च शिक्षा और लिंग में सम्बन्ध का अध्ययन करना चाहते हैं तो विद्यार्थियों का आयु और धर्म के अनुसार वर्गीकरण निरर्थक होगा। इसी प्रकार औद्योगिक श्रमिकों की आर्थिक स्थिति का पता लगाने के लिये उनकी आयु तथा वैवाहिक स्थिति के अनुसार वर्गीकरण करना व्यर्थ होगा। ऐसी स्थिति में 'आय' के आधार पर वर्गों की रचना की जानी चाहिये।

(6) लचनशीलता (Flexibilty)—एक उत्तम वर्गीकरण में लचनशीलता का गुण होना भी जरूरी है। लचनशीलता से आशय यह है कि नई परिस्थितियों के तद्नरूप विभिन्न वर्गों में संशोधन या समायोजन किया जा सके। कोई भी वर्गीकरण हमेशा के लिए उपयुक्त नहीं होता क्योंकि समय के साथ-साथ परिस्थितियों में परिवर्तन होता रहता है। उल्लेखनीय यह है कि यहाँ लचनशीलता का अर्थ वर्गीकरण की अस्थिरता (instability) से न लगाकर, वर्गों में संशोधन की सम्भावना से लगाया जाना चाहिए।

(7) सजातीयता (Homogeneity)—सजातीयता से आशय यह है कि प्रत्येक वर्ग की सभी इकाइयाँ इस गुण के तद्नरूप होनी चाहियें जिसके आधार पर वर्गीकरण किया गया है।

3.3 आँकड़ों के वर्गीकरण के प्रकार/पद्धतियाँ/विचार (Types/Methods/Approaches of Classification of Data)

आँकड़ों को चार समूहों में वर्गीकृत किया जा सकता है—



नोट

1. **भौगोलिक वर्गीकरण** (Geographical Classification)—जब संकलित आँकड़े क्षेत्र अथवा जगह के अनुसार वर्गीकृत किये जाते हैं, तो इसे भौगोलिक वर्गीकरण कहा जाता है। जनसंख्या का वितरण राज्यों, शहरों, कस्बों आदि में किया जाता है, जिसे भौगोलिक वर्गीकरण कहते हैं।
2. **गुणात्मक वर्गीकरण** (Qualitative Classification)—लिंग, ईमानदारी, रंग, दक्षता आदि के अनुसार आँकड़ों के वर्गीकरण को गुणात्मक वर्गीकरण कहा जाता है।
3. **परिमाणात्मक वर्गीकरण** (Quantitative Classification)—जब आँकड़े ऊँचाई, भार, अंक, आय व्यय, परिवार में बच्चों की संख्या आदि के आधार पर वर्गीकृत किये जाते हैं, तो इस प्रकार के वर्गीकरण को परिमाणात्मक वर्गीकरण कहते हैं।
4. **समय आधारित वर्गीकरण** (Chronological Classification)—समय अवधि के आधार पर वर्गीकरण समय आधारित (Chronological) वर्गीकरण का एक उदाहरण है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)—

1. वर्गीकरण के अन्तर्गत संकलित ········· को विभिन्न वर्गों में बाँटा जाता है।
2. ········· समंकों के विश्लेषण की एक महत्वपूर्ण तकनीक है।
3. आँकड़ों को ········· समूहों में वर्गीकृत किया गया है।
4. वर्गीकरण समंकों के बीच ········· तुलना करने की सुविधा प्रदान करता है।
5. परिणामों की अर्थपूर्ण तुलना के लिए ········· में स्थिरता का होना आवश्यक है।

3.4 आवृत्ति बंटन (Frequency Distribution)

एक आवृत्ति बंटन का आशय, किसी मापनीय चर (variable) के आधार पर समंकों के वर्गीकरण से है। **मौरिस हमबर्ग** के शब्दों में, "एक आवृत्ति वितरण आवृत्ति तालिका मात्र एक तालिका है जिसमें समंकों को वर्गों के रूप में समूहित किया जाता है और प्रत्येक वर्ग में आने वाली इकाइयों की संख्या को अंकित कर लिया जाता है, जो उन वर्गों की आवृत्तियाँ कहलाती हैं।" इस प्रकार मूल्यों या वर्गों और उनकी आवृत्तियों के क्रमबद्ध विन्यास को ही आवृत्ति बंटन कहते हैं। स्पष्ट है कि आवृत्ति वितरण की रचना के लिए दो तत्व आवश्यक है—(*i*) चर तथा (*ii*) आवृत्ति।

चर (Variable or Variate)—संख्यात्मक तथ्यों को चर कहते हैं। चर वह संख्यात्मक अभिलक्षण है जो मात्रा अथवा आकार में घटता-बढ़ता रहता है जैसे व्यक्तियों की आयु, लम्बाई, वजन, आय, मूल्य, मजदूरी, प्राप्तांक इत्यादि। हाँ! यह ध्यान रहे भिन्न-भिन्न चरों की माप भिन्न-भिन्न इकाइयों में की जाती है जैसे आयु की माप वर्षों में, लम्बाई की माप सैन्टीमीटर में और आय की माप रुपयों में। चर दो प्रकार के होते हैं—(*i*) अखण्डित या सतत चर तथा (*ii*) खण्डित चर।

(*i*) अखण्डित या सतत चर (Continuous Variables)—सतत चर वह चर है जो निश्चित नहीं होता अर्थात् जिसका निश्चित सीमाओं के अन्तर्गत कोई भी मूल्य हो सकता है। दूसरे शब्दों में वह चर, जो एक सुनिश्चित सीमा में सभी सम्भाव्य मूल्यों (पूर्णांक तथा भिन्नात्मक) को शामिल कर लेता है, सतत चर कहलाता है। **ग्रीगोरी एवं वार्ड** के शब्दों में "अखण्डित चर वे हैं जो माप की इकाइयों में होते हैं, जिन्हें अनन्त स्तरों में बाँटा जा सकता है जैसे तापमान एक डिग्री दशमलवाँश तक, लम्बाइ एक इंच के दशमलवांश तक।" अतः स्पष्ट है कि सतत चर के अन्तर्गत समंक, अंकात्मक माप द्वारा प्रापत किये जाते हैं न कि गिनती द्वारा। उदाहरणार्थ, किसी स्कूल के विद्यार्थियों की आयु सतत चर है क्योंकि यह एक निश्चित सीमा, माना 3-15 वर्ष, के बीच कोई भी मूल्य (वर्ष, महीना, दिन आदि) हो सकती है।

नोट

(*ii*) **खण्डित चर** (Discrete Variables)—अखण्डित के विपरीत खण्डित चर वे हैं जिनके मूल्य निश्चित और खण्डित होते हैं। अर्थात इनमें विस्तार नहीं होता बल्कि एक मूल्य से दूसरे मूल्य के बीच कुछ सुनिश्चित अन्तर (definite break or gap) होता है। इस प्रकार खण्डित चर की इकाइयाँ विभाज्य नहीं होतीं अर्थात विस्तार रहित होती हैं। उदाहरणार्थ, दुर्घटनाओं की संख्या 0, 1, 2, 3, होगी, आधी, चौथाई या दशमलवांश में नहीं। इसी प्रकार परिवार में बच्चों की संख्या, क्रिकेट रनों की संख्या, प्रति पृष्ठ गलतियों की संख्या आदि खण्डित चर के उदाहरण हैं। तुलना की दृष्टि से नीचे दोनों प्रकार के चरों पर आधारित आवृति वितरण दिखाया गया है–

अखण्डित आवृत्ति वितरण		**खण्डित आवृत्ति वितरण**	
भार (किलो. में)	व्यक्तियों की संख्या	बच्चों की संख्या	परिवारों की संख्या
40–50	30	0	10
50–60	145	1	22
60–70	210	2	75
70–80	60	3	160
80–90	10	4	140
90–100	5	5	43
योग	**460**	**योग**	**450**

नोट—सतत चर से बनने वाली श्रेणियों को सतत रेणियाँ कहते हैं और खण्डित चरों द्वारा व्यक्त श्रेणियाँ, खण्डित रेणियाँ कहलाती हैं।

3.5 आवृत्ति वितरण की रचना (Formation of Frequency Distribution)

उपर्युक्त विवरण से स्पष्ट है कि आवृत्ति-वितरण, खण्डित एवं अखण्डित चरों का सुबोध एवं संक्षिपत रूप में प्रस्तुतीकरण है। इस दृष्टि से आवृत्ति-वितरण की रचना भी निम्न दो रूपों में की जाती है–(*i*) खण्डित आवृत्ति वितरण तथा (*ii*) अखण्डित आवृत्ति वितरण।

(*i*) **खण्डित आवृत्ति वितरण** (Discrete frequency distribution)—जैसा कि इसके नाम से स्पष्ट है, इस वितरण में खण्डित चरों के आधार पर आवृत्ति तालिका का निर्माण किया जाता है। इसकी रचना-विधि बहुत सरल है–(*i*) सर्व प्रथम अव्यवस्थित समंकों (raw data) को आरोही (ascending) या अवरोही (descending) कम में सजा लिया जाता है। इस क्रिया को क्रम-विन्यास (array) कहते हैं। (*ii*) फिर, चर के सभी सम्भाव्य मूल्य (अर्थात् सबसे छोटे से लेकर सबसे बड़ा मूल्य) तालिका के प्रथम कॉलम में क्रम-वार लिख लिये जाते हैं। इन्हें पद-मूल्य कहते हैं। (*iii*) इसके बाद 'मिलान-चिह्नों' या 'टैली-बार' (Tally-marks or Tally-bars) की सहायता से प्रत्येक पद-मूल्य की आवृत्ति ज्ञात कर ली जाती है। इसे नीचे दिये गये उदाहरण से समझा जा सकता है।

उदाहरण (Illustration) 1: इन्दौर के एक शो-रूम द्वारा किसी एक दिन बेची गयी 30 कमीजों के साइज (सेमी. में) इस प्रकार हैं–

34	32	36	30	33	34	34	29	36	35	30	30	32	35	33
31	31	34	35	34	35	30	36	32	32	32	29	34	34	33

उपर्युक्त की सहायता से एक खण्डित आवृत्ति वितरण तैयार कीजिये।

हल (Solution): चूँकि कमीज का सबसे छोटा साइज 29 सेमी. और सबसे बड़ा साइज 36 सेमी. है। अत: पहले 29 से 36 तक के पद-मूल्य बढ़ते हुए क्रम में लिख लिये जायेंगे। अब यह देखना है कि किस-किस साइज की कितनी-कितनी कमीजें बिकी हैं, अर्थात् प्रत्येक पद-मूल्य की आवृत्ति क्या है? सबसे पहली कमीज 34 नं. की बिकी हैं। अत: 34 साईज के सामने मिलान रेखाओं वाले कॉलम में एक 'बार' या 'खड़ी लकीर' खींच देंगे। इसके

बाद दूसरी संख्या लेते हैं, जोकि 32 है। इसके लिये 32 साइज के सामने एक 'बार' खींच दी जायेगी। यही क्रिया अन्य सभी पदों के लिये दोहरायी जायेगी। अन्त में टैली-बार का अलग-अलग योग किया जाता हैं यही पद-मूल्यों की आवृत्तियाँ हैं। तालिका से स्पष्ट है कि साइज 29 की आवृत्ति 2 है, साइज 30 की आवृत्ति 4 है और कुल आवृत्तियों का योग 30 है, जोकि कमीजों की कुल संख्या (N) के बराबर है।

कमीज का साइज (सेमी. में)	मिलान-रेखायें (*Tally-bars*)	आवृत्ति (*frequency*)
29	||	2
30	||||	4
31	||	2
32	~~||||~~	5
33	|||	3
34	~~||||~~ ||	7
35	||||	4
36	|||	3
	योग	**30**

नोट—हाँ! टैली-बार लगाते समय, जब कोई मूल्य चार बार आ जाता है तो उसके पाँचवीं बार आने (occurrence) पर, हम पहली चार मिलान-रेखाओं को एक तिरछी बार (Cross tally mark) द्वारा काट देते हैं, जिसमें हमें 5 का एक समूह या खण्ड (block) प्राप्त हो जाता है। यद्यपि इसका कोई सैद्धान्तिक महत्व नहीं है, किन्तु पदों की संख्या अधिक होने पर इस क्रिया से, मिलान-रेखाओं की गणना करने में काफी सुविधा हो जाती है।

(*ii*) **सतत या अखण्डित आवृत्ति वितरण** (Continuous frequency distribution)—यह आवृत्ति वितरण वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकण पर आधारित है और इसकी रचना सतत चरों की सहायता से की जाती है। सबसे पहले चर-मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में सजाया जाता है। फिर, सबसे छोटे तथा सबसे बड़े पद मूल्य के अन्तर (range) को, उपयुक्त संख्या के समान वर्गों या वर्गान्तरों में विभाजित कर दिया जाता है। इसके बाद मिलान-रेखाओं की सहायता से प्रत्येक वर्ग में पड़ने वाली इकाइयों की संख्या अर्थात् आवृत्ति ज्ञात कर ली जाती है। आवृत्ति वितरण की रचना निम्न उदाहरण से स्पष्ट की गयी है।

उदाहरण (Illustration) 2: किसी कारखाने में कार्यरत् 40 श्रमिकों की दैनिक आय (रु. में) निम्नलिखित है—

25	34	26	38	32	31	36	42	30	34
20	35	35	39	40	28	33	39	40	29
35	30	30	41	35	39	27	22	43	28
38	34	32	32	25	30	31	29	38	44

उपर्युक्त आँकड़ों से एक वर्गीकृत बारम्बारता वंटन सारणी बनाइये, जिसका प्रारम्भ 20-25 से हो और वर्ग-अन्तराल हमेशा 5 रहे।

(Solution): चूँकि प्रश्न में प्रथम-वर्गान्तर 20-25 और वर्ग-विस्तार 5 रखने के लिये कहा गया हैं अत: उसी के अनुसार वर्गान्तर तैयार किये जायेंगे—

नोट

सतत आवृत्ति वितरण तालिका की रचना

आय (रु. में) (X)	मिलान-रेखायें (*Tally-bars*)	आवृत्ति (*f*)
20–25	II	2
25–30	𝍸 III	8
30–35	𝍸 𝍸 III	13
35–40	𝍸 𝍸 I	11
40–45	𝍸 I	6
योग	**40**	**40**

व्याख्या (Explanation)–(*i*) दिये गये समंकों का पहला मूल्य 25 है। इसे 20–25 वर्ग के बजाय 25–30 वर्ग में शामिल किया जायेगा, क्योंकि वर्गान्तरों की रचना अपवर्जी रीति (exclusive method) के अनुसार की गई है। इसी आधार पर अन्य मूल्यों का वर्गीकरण किया गया है।

(*ii*) चूँकि सबसे बड़ा मूल्य 44 है, इसलिये अन्तिम वर्गान्तर 40–45 बनाया गया है। यदि प्रश्न में कोई पद-मूल्य 44 से बड़ा, माना 45 या 46 दिया गया होता, तो फिर हमें एक अतिरिक्त वर्गान्तर 45-50 तैयार करना पड़ता।

उदाहरण (Illustration) 3: सांख्यिकी में 100 में से 50 छात्रों के प्राप्तांक नीचे दिये गये हैं–

70	25	55	36	31	59	42	63	57	39
45	65	60	45	47	49	63	54	53	64
33	75	65	42	39	41	82	52	55	35
64	30	58	35	61	15	65	48	42	26
50	20	52	40	53	55	45	46	45	18

10–10 प्राप्तांकों का वर्ग-विस्तार लेते हुए एक आवृत्ति वितरण की रचना कीजिये। प्रथम वर्गान्तर 0–10 रखिये।

हल (Solution): सर्व-प्रथम अव्यवस्थित ढंग से दिये गए इन समंकों को आरोही क्रम में विन्यासित किया जायेगा।

15	30	36	42	45	49	53	57	63	65
18	31	39	42	45	50	54	58	63	65
20	33	39	42	46	52	55	59	64	70
25	35	40	45	47	52	55	60	64	75
26	35	41	45	48	53	55	61	65	82

चूंकि प्रश्न में प्रथम-वर्गान्तर 0–10 और वर्ग-विस्तार 10 रखने के लिये कहा गया है। अत: उसी के अनुसार वर्गान्तर तैयार किये जायेंगे–

सतत आवृत्ति बंटन की रचना

प्राप्तांक	टैली-बार	आवृत्ति
0–10		0
10–20	II	2
20–30	III	3
30–40	𝍸 III	8
40–50	𝍸 𝍸 III	13
50–60	𝍸 𝍸 II	12
60–70	𝍸 IIII	9
70–80	II	2
80–90	I	1
योग	**50**	$\Sigma f = 50$

नोट—यदि परीक्षक द्वारा प्रथम वर्गान्तर 0–10 लेने का निर्देश न दिया होता, तब प्रथम वर्गान्तर 10–20 होगा क्योंकि 0–10 के बीच का कोई पद–मूल्य नहीं है।

टास्क सतत चर किसे कहते हैं?

सतत आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित आपकी कुछ शंकायें व उनके समाधान—उपरोक्त आवृत्ति तालिका को देखने के बाद विद्यार्थियों के मन में अनेक प्रकार की शंकायें या प्रश्न उठ सकते हैं। जैसे वर्गों की संख्या कितनी होनी चाहिये? अथवा यहाँ 9 वर्ग–ही क्यों बनाये गये हैं? वर्गों का विस्तार क्या रखा जाये? अथवा यहाँ वर्ग–विस्तार 10 ही क्यों रखा गया है, 15 या 20 क्यों नहीं रखा गया है? फिर, 30 पद को तीसरे वर्ग (20–30) में क्यों नहीं रखा गया, 30–40 में ही क्यों रखा गया है? जब संमक माला का अधिकतम मूल्य 82 है तब वर्ग 90 तक क्यों बनाये गये हैं? इत्यादि–इत्यादि। इन सभी प्रश्नों का उत्तर हम इसी अध्याय में थोड़ा आगे चलकर सविस्तार रूप में देंगे।

वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण की रीतियाँ (Methods of Classification According to Class Intervals)—वर्गान्तरों के अनुसार समंकों के वग्रीकरण की निम्न दो रीतियाँ हैं—(*i*) अपवर्जी रीति (exclusive metod) तथा (*ii*) समावेशी रीति (inclusive method)।

(*i*) **अपवर्जी रीति** (Exclusive Method)—वर्गान्तर–रचना की इस रीति में एक वर्ग की **'ऊपरी सीमा'** (Upper limit) उससे अगलेवर्ग की **'निचली सीमा'** (Lower limit) के बराबर (equal) होती है। दूसरे शब्दों में एक वर्ग की ऊपरी सीमा, उससे अगले वर्ग की निचली सीमा होती है। नीचे उदाहरण से यह स्पष्ट है कि प्रत्येक वर्ग की ऊपरी सीमा, उससे अगले वर्ग की निचली सीमा के बाबर है। इसको अपवर्जी इसलिये कहा जाता है कि यदि कोई पद (item) किसी वर्ग की ऊपरी सीमा के बराबर है तो वह पद उस वर्ग में सम्मिलित न होकर, उससे अगले वर्ग में शामिल किया जाता है। जैसे 20 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी को 10-20 वर्ग के बजाय, 20-30 वर्ग में शामिल किया जायेगा क्योंकि 10-20 वर्गान्तर, 10 से लेकर परन्तु 20 से कम मूल्य के पदों का समावेश अपने अन्दर करता है। अपवर्जी रीति की **मान्यता** यह है कि किसी वर्ग की 'निचली सीमा' के बराबर वाला पद–मूल्य उसी वर्ग में शामिल होता है जबकि 'ऊपरी सीमा' के बराबर वाला पद–मूल्य उस वर्ग से बाहर हो जाता है। यह **उल्लेखनीय** है कि वर्गान्तरों को अपवर्जी रीति के अनुसार व्यक्त करने का अच्छा तरीका नीचे स्थिति–II के अनुसार है—

I		**II**		**प्राप्तांक**
Marks		**Marks**		
10–20		10 but under 20		10 परन्तु 20 से कम
20–30		20 ,, ,, 30		20 ,, 30 ,, ,,
30–40	or	30 ,, ,, 40	or	30 ,, 40 ,, ,,
40–50		40 ,, ,, 50		40 ,, 50 ,, ,,
50–60		50 ,, ,, 60		50 ,, 60 ,, ,,

(*ii*) **समावेशी रीति** (Inclusive Method)—समावेशी वर्ग के होते हैं जिनमें, उनकी निचली तथा ऊपरी दोनों सीमाओं का समावेश होता है। इस प्रकार अपवर्जी वर्गीकरण के विपरीत, समावेशी वर्गीकरण में किसी वर्ग की ऊपरी सीमा के बराबर का पद–मूल्य भी उसी वर्ग में शामिल हो जाता है। पृष्ठ 107 पर दिये उदाहरण की स्थिति–I में, पहले वर्ग (10-19) में उसकी दोनों सीमाएँ 10 तथा 19 शामिल हैं। समावेशी वर्गों को स्थिति–II के अनुसार भी व्यक्त किया जा सकता हैं समावेशी वर्गीकरण की **पहचान** यह है कि (*i*) एक वर्ग की ऊपरी सीमा और उससे अगले वर्ग की निचली सीमा बराबर नहीं होती, और (*ii*) उनमें अधिकतम अन्तर 1 का होता है।

तकनीकी टिप्पणी (Technical Note)—यह निर्णय लेना कि वर्गान्तरों की रचना अपवर्जी रीति द्वारा की जाये अथवा समावेशी रीति द्वारा, यह इस बात पर निर्भर करता है कि विचाराधीन चर (variable) की प्रकृति क्या है अर्थात्, वह अखण्डित चर (continuous) है या खण्डित चर (discrete variable)। **स्मरण** रहे, अखण्उित चरों जैसे प्राप्तांक, आयु, लम्बाई, भार आदि के मामले में **अपवर्जी रीति** का प्रयोग किया जाना चाहिए। इसके विपरीत खण्डित चरों जैसे श्रमिकों की संख्या के अनुसार फैक्ट्रियों का वर्गीकरण, निवास या परिवारों के अनुसार सदस्य-संख्या आदि के लिये समावेशी रीति का ही प्रयोग किया जाता है।

I	II	Conversion	
10–19	11–20	9.5–19.5	10.5–20.5
20–29	21–30	19.5–29.5	20.5–30.5
30–39	31–40	29.5–39.5	30.5–40.5
40–49	41–50	39.5–49.5	40.5–50.5
50–59	51–60	49.5–59.5	50.5–60.5
60–69	61–70	59.5–69.5	60.5–70.5

एक कठिनाई—उपरोक्त वर्गीकरण की एक कठिनाई यह है कि इसमें 19 से 20 के बीच के दशमलव मूल्यों (जैसे 19.6) का समायोजन नहीं हो सकता। अत: ऐसी स्थिति में समावेशी वर्गान्तरों को अपवर्जी वर्गानतरों में बदल लेना चाहिये।

समावेशी वर्गान्तरों को अपवर्जी बनाने की विधि—इसके लिये एक वर्ग की ऊपरी सीमा और उससे अगले वग्र की निचली सीमा के **अन्तर का आधा करके,** उसे निचली सीमाओं में से घटा दिया जाता है और ऊपरी सीमाओं में जोड़ दिया जाता है। इस परिवर्तन (conversion) से एक तो गणना-क्रिया आसान हो जाती है, दूसरा बहुलक व मध्यका के आगणन के लिये वह परिवर्तन जरूरी होता है। सूत्रानूसार–

$$d = 20 - 19 = 1 \quad \text{या} \quad 21 - 20 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{2} = 0.5$$

$d/2$ को संशोधन कारक (correction factor) कहते हैं।

ऊपर दिये गये समावेशी वर्गान्तरों को अपवर्जी बनाकर दिखाया गया है। हाँ! इन नये अपवर्जी वर्गों की निचली तथा ऊपरी सीमाओं को, **'वर्ग सीमायें'** (class boundries) कहते हैं।

अपवर्जी तथा समावेशी रीति में अन्तर—इन दोनों रीतियों में मुख्य अन्तर इस प्रकार हैं–(*i*) अपवर्जी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा उससे अगले वर्ग की निचली सीमा के बराबर होती है, जबकि समावेशी रीति में इन दोनों सीमाओं में अन्तर होता है और यह अन्तर अधिकतर 1 का होता है। (*ii*) इस प्रकार अपवर्जी वर्गों में जहाँ निरनतरता या अविच्छिन्नता (continuity) पायी जाती है, वहाँ समावेशी वर्गान्तरों में विच्छिन्नता (discontinuity) होती है। (*iii*) अपवर्जी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा के बराबर मूल्य की इकाई, उस वर्ग में शामिल नहीं की जाती, बल्कि उससे अगले वर्गान्तर में शामिल की जाती है। किन्तु इसके विपरीत समावेशी रीति में ऊपरी सीमा के बराबर मूल्य की इकाई का भी, उसी वर्ग में समावेश होता है। (*iv*) किसी भी सांख्यिकीय माप की गणना के लिये अपवर्जी वर्गान्तरों में संशोधन करने की कोई आवश्यकता नहीं होती। किन्तु समावेशी वर्गान्तरों में बहुलक तथा मध्यका का आगणन करते समय उनमें संशोधन करना जरूरी होता है, अर्थात् उन्हें अपवर्जी वर्गान्तरों में बदलना पड़ता है। (*v*) जब दिये हुये मूल्य पूर्णांकों में हों तो समावेशी रीति अधिक उपयुक्त होती है, अन्यथा अपवर्जी रीति अच्छी समझी जाती है।

उदाहरण (Illustration) 4: रांची के एक पब्लिक स्कूल के 30 बच्चों का भार (किलोग्राम) में इस प्रकार है–

8	7	16	15	14	12	10	10	9	11	13	13	17	16	12
13	16	14	13	12	11	9	8	16	17	18	19	20	20	21

नोट

उपर्युक्त समंकों की सहायता से अपवर्जी तथा समावेशी रीति द्वारा 3-3 का वर्ग-विस्तार लेते हुये सतत आवृत्ति वितरण तैयार कीजिये।

हल (Solution): सर्वप्रथम समंकों को आरोही क्रम में विन्यासित किया जायेगा।

7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	13
13	14	14	15	16	16	16	16	17	17	18	19	20	20	21

अब 3 का वर्ग-विस्तार (i) लेकर वर्गान्तरों की रचना की जायेगी—

अपवर्जी तथा समावेशी रीति द्वारा सतत आवृत्ति बंटन की रचना

अपवर्जी रीति			समावेशी रीति		
Weights	*Tallies*	*f*	*Weights*	*Tallies*	*f*
6–9	|||	3	7–9	||||	5
9–12	|||| |	6	10–12	|||| ||	7
12–15	|||| ||||	9	13–15	|||| ||	7
15–18	|||| ||	7	16–18	|||| ||	7
18–21	||||	4	19–21	||||	4
21–24	|	1	22–24	–	0
		N or $\Sigma f = 30$			N or $\Sigma f = 30$

ऊपर समावेशी रीति के कॉलम में केवल पाँच वर्गान्तर ही तैयार किये जायेंगे, क्योंकि अन्तिम वर्ग की आवृत्ति शून्य है। हाँ! यदि वर्ग-सीमायें 6-8, 8-11, ⋯रखी जायें, तब 6 वर्ग तैयार होंगे और उनकी आवृत्तियाँ क्रमशः 3, 6, 9, 7, 4 व 1 होंगी।

3.6 साधारण अथवा संचयी आवृत्ति शृंखला (Ordinary or Cumulative Frequency Series)

संचयी आवृत्ति शृंखला (Cumulative Frequency Series) पहले वाले समूह में या अगले समूह में इकाइयाँ जोड़कर बनाई जाती है। यह विभिन्न समूहों की आवृत्तियों का योग है। यह शृंखला या तो (*i*) "से कम" (Less than) अथवा (*ii*) "से अधिक" (More than) के रूप में तैयार की जाती है। उपरोक्त उदाहरण लेकर हम दोनों प्रकार की संचयी आवृत्तियों की शृंखला निम्नलिखित रूप से तैयार कर सकते हैं—

"से कम" संचयी आवृत्ति तालिका (Less than Cumulative Frequency Table)

प्राप्त अंक (*Marks Obtained*)	***मिलान रेखायें*** (*Tally-Bars*)	***विद्यार्थियों की संख्या*** (*No. of Students*)
250 से कम	||	02
300 ″ ″	|||| |||	08
350 ″ ″	|||| |||| ||||	15
400 ″ ″	|||| |||| |||| ||||	20
450 ″ ″	|||| |||| |||| |||| ||||	25

नोट

"से अधिक" संचयी आवृत्ति तालिका (More than Cumulative Frequency Table)

प्राप्त अंक (*Marks Obtained*)	*मिलान रेखायें* (*Tally-Bars*)	*विद्यार्थियों की संख्या* (*No. of Students*)
250 से कम	|||| |||| |||| |||| ||||	25
250 " "	|||| |||| |||| |||| |	21
300 " "	|||| |||| ||||	14
350 " "	|||| ||||	09
400 " "	||||	04
450 " "	–	–

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. सही विकल्प चुनिए–(Choose the Correct Option)–

1. मूल्यों या वर्गों और उनकी आवृत्तियों के क्रमबद्ध विन्यास को कहते हैं–
   (क) वर्गीकरण (ख) सारणीयन
   (ग) आवृत्ति बंटन (घ) इनमें से कोई नहीं।
2. आनुपातिक वृद्धि दरों को क्रमशः व्यक्त करते हैं–
   (क) चर (ख) अचर
   (ग) (क) और (ख) दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं।
3. खण्डित एवं अखण्डित चरों का सुबोध एवं संक्षिप्त रूप में प्रस्तुतीकरण है–
   (क) वर्गीकरण (ख) आवृत्ति वितरण
   (ग) सारणीयन (घ) इनमें से कोई नहीं।
4. वर्गान्तरों के अनुसार समंकों के वर्गीकरण की रीतियाँ नहीं हैं–
   (क) अपवर्जी रीति (ख) समावेशी रीति
   (ग) (क) और (ख) दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं।
5. विभिन्न समूहों की आवृत्तियों का योग है–
   (क) संचयी आवृत्ति श्रृंखला (ख) आवृत्ति वितरण
   (ग) वर्गीकरण (घ) इनमें से कोई नहीं।

3.7 सारणीयन (Tabulation)

समंकों का वर्गीकरण करने के बाद उन्हें व्यवस्थित ढंग से सारणियों के रूप में प्रस्तुत करना आवश्यक होता है ताकि आंकड़ों से यथोचित निष्कर्ष निकाले जा सकें। **क्राक्सटन एवं काउडेन** का कहना है कि "स्वयं अपने प्रयोग हेतु या अन्य लोगों द्वारा प्रयोग किये जाने के उद्देश्य से समंकों को किसी उपयुक्त रूप में प्रस्तुत किया जाना चाहिये। आमतौर पर समंक या तो सारणियों में क्रमबद्ध किये जाते हैं या आरेखीय (graphic) विधियों द्वारा उनका चित्रण किया जाता है।"

जहाँ तक सारणीयन के अर्थ का प्रश्न है सारणीयन, समंकों को प्रस्तुत करने की एक व्यवस्थिति पद्धति है। **प्रो ब्लेयर** के शब्दों में, "विस्तृत अर्थ में, सारणीयन समंकों की खानों (columns) और पंक्तियों (rows) के रूप में

एक क्रमबद्ध व्यवस्था है।"

प्रो. कौनर के मतानुसार, "सारणीयन किसी विचाराधीन समस्या को स्पष्ट करने के उद्देश्य से किया जाने वाला सांख्यिकीय तथ्यों का क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित प्रस्तुतीकरण है।"

उद्देश्य (Objects)—सारणीयन के तीन उद्देश्य हैं—(*i*) समंकों को व्यवस्थित रूप से प्रस्तुत करना (*ii*) आंकड़ों को संक्षिप्त ढंग से प्रकट करना, तथा (*iii*) समस्या को अधिक सरल व स्पष्ट बनाना।

सारणीयन का महत्व या लाभ (Importance)

(1) **सरलता**—सारणीयन से समंकों की जटिलता समाप्त हो जाती है और फलस्वरूप आवश्यक सूचनायें जल्दी तथा आसानी से समझ में आ जाती हैं।

(2) **स्थान व समय की बचत**—सरणीयन द्वारा विशाल तथ्यों को थोड़े व संक्षिप्त रूप में व्यक्त किया जाता है, जिससे समय तथा स्थान की बचत होती है।

(3) **तुलनात्मक अध्ययन की सुविधा**—सारणीयन-क्रिया तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाती है क्योंकि इसमें समान व तुलना-योग्य समंकों को परस्पर निकटवर्ती खानों में रखा जाता है।

(4) **आकर्षक प्रदर्शन**—सारणीयन के फलस्वरूप नीरस आँकड़े भी आकर्षक लगने लगते हैं।

(5) **सांख्यिकी विवेचन में सहायक**—सारणीबद्ध समंकों का सांख्यिकीय विवेचन जैसे माध्य, अपकिरण, विषमता, सह-सम्बन्ध आदि आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

3.8 सारणीयन व वर्गीकरण में अन्तर (Distinction Between Classification and Tabulation)

वर्गीकरण तथा सारणीयन में काफी अन्तर है। **प्रथम,** सारणीयन समंकों के वर्गीकरण के बाद की एक स्थिति है। सर्वप्रथम आँकड़ों को वर्गीकृत किया जाता है, तत्पश्चात् उन्हें विभिन्न सारणियों में प्रस्तुत किया जाता है। इस प्रकार वर्गीकरण, सारणीयन का आधार है। **द्वितीय,** वर्गीकरण में संकलित समंकों को उनके समान व असमान गुणों के आधार पर विभिन्न वर्गों (classes) या श्रेणियों (series) में बाँटा जाता है जबकि सारणीयन में उन्हीं वर्गीकृत तथ्यों को खानों और पंक्तियों में प्रस्तुत किया जाता है। इस दृष्टि से सारणीयन वर्गीकरण का एक यन्त्रात्मक पहलू (mechanical aspect) है। **तृतीय,** वर्गीकरण सांख्यिकीय विश्लेषण की एक विधि है जबकि सारणीयन समंकों के प्रस्तुतीकरण की एक प्रक्रिया है।

वर्गीकरण के अन्तर्गत समंकों को वर्गों व उपवर्गों में बाँटा जाता है जबकि सारणीयन में उन्हें शीर्षक व उपशीर्षकों में रक्खा जाता है।

3.9 सारणी के प्रमुख अंग (Main Parts of Table)

(1) **शीर्षक** (Title)—प्रत्येक सारणी का एक संक्षिप्त, स्पष्ट एवं पूर्ण शीर्षक होना चाहिये ताकि समंकों की एक ही दृष्टि में जानकारी हो सके।

(2) **खाने की पंक्तियाँ** (Columns and Rows)—खानों व पंक्तियों की संख्या सारणीयन के उद्देश्य एवं प्रस्तुत सामग्री के आकार को ध्यान में रखकर पहले ही निश्चित कर लेनी चाहिये। ध्यान रहे, खानों की संख्या अधिक होने से समस्या जटिल व अस्पष्ट हो सकती है। प्रत्येक खाने का उपशीर्षक (capction) देना आवश्यक है। उपशीर्षक यथासम्भव संक्षिप्त होना चाहिए और प्रत्येक खाने पर क्रम संख्या लिख देनी चाहिये।

नोट

(3) **खानों का रूलिंग** (Ruling of Columns)–विषय-सामग्री का महत्वपूर्ण भाग मोटी या दोहरी रेखाओं से बनाना चाहिये जिससे कि द्रष्टा का ध्यान तुरनत आकर्षित हो सके। कम महत्व के खानों को हल्की रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाना चाहिये।

(4) **तुलनात्मक अध्ययन** (Comparative Study)–ध्यानरहे,जिन समंकों की परस्पर तुलना करनी होवे पास-पास रक्खे जायें।

(5) **पदों की व्यवस्था** (Arrangement of Items)–एक आदर्श सारणी की दृष्अि से यह आवश्यक होगा कि विभिन्न पदों को उनके महत्व के अनुसार सारणी में स्थान दिया जाय अर्थात महत्वपूर्ण पदों को पहले और कम महत्व वाले पदों को बाद में रखा जाये। अधिकतर उन पदों को पहला स्थान दिया जाता है जिनको कई वर्गों में विभक्त करना होता है।

(6) **टिप्पणियाँ** (Foot-notes)–यदि समंकों से सम्बन्धित कोई आवश्यक सूचना सारणी में देने से रह गई है, अथवा किसी तथ्य से सम्बन्धित विशेष स्पष्टीकरण की आवश्यकता है तो उसके लिये सारणी के नीचे व्याख्यात्मक टिप्पणी (explanatory note) दे देनी चाहिये।

(7) **स्त्रोत** (Source)–सारणी को संदेहरहित व प्रभावशाली बनाने के लिये समंकों का स्त्रोत अवश्य स्पष्ट कर देना चाहिये।

(8) **योग** (Total)–सारणी में प्रयुक्त होने वाले समंकों के योग व अन्तर्योग की व्यवस्था इस प्रकार की जानी चाहिये कि खानों व पंक्तियों के योग की जाँच व स्पष्टीकरण (verification) स्वत: ही हो सके।

(9) **इकाई एवं व्युत्पन्न समंक** (Unit Derivatives)–समंकों के माप की इकाई को सम्बन्धित खानों के ऊपर लिख देना चाहिये। इसी प्रकार प्रतिशत, अनुपात, गुणक व माध्य आदि व्युत्पन्न समंकों को मूल्य समंकों के पास वाले खाने में रखना चाहिये।

(10) **सामान्य नियम** (General Rules)–इसके अलावा सारणी का आकर्षक होना आवश्यक है तथा उसका आकार दिये हुए स्थान अर्थात् कागज के अनुकूल हो। सारणी स्वयं में समंकों की एक मुंह बोलती तस्वीर होनी चाहिये। **डॉ. बाउले** का कहना है कि "एक सामान्य व्यक्ति का सारणी को समझने के लिये किया गया विशेष प्रयत्न, सही अर्थों में, सारणी की दोषपूर्ण रचना समझी जानी चाहिये।" वास्तव में सारणी समंकों का एक ऐसा दर्पण है जिसमें झाँकने पर वस्तु-स्थिति की पूर्ण जानकारी तुरन्त हो जानी चाहिये।

ध्यान रहे, सारणीयन एक सरल नहीं वरन् तानित्रक कार्य है। **श्री हैरी जरोम** (Harry Jerome) के मतानुसार "एक आदर्श सांख्यिकीय सारणी निपुणता व प्राविधि की कसौटी है और स्पष्ट रूप से प्रस्तुत की गई सूचनाओं तथा स्थान की मितव्ययिता की सर्वोत्कृष्ट कला-कृति है।" संक्षेप में सारंणीयन के कार्य में निपुणता, अनुभव व सामान्य विवेक का होना अतयन्त आवश्यक है। **डॉ. बाउले** का कहना है कि "संकलन तथा सारणीयन में सामान्य विवेक एक प्रमुख आवश्यकता है तो अनुभव प्रमुख शिक्षक।"

सारणी के प्रमुख 'भाग' निम्न प्रारूप में स्पष्ट किये गए हैं–

नोट

तालिका 3.1 शीर्षक (Title)

(शीर्ष संकेत)

<table>
<tr><td rowspan="3">Stub
Heading</td><td colspan="4">Caption</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Sub-Heads</td><td colspan="2">Sub-Heads</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>Column Head</td><td>Column Head</td><td>Column Head</td><td>Column Head</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Source Foot note

3.10 सारणियों के प्रकार (Types of Tables)

सांख्यिकीय सारणियों का वर्गीकरण मुख्य रूप से (अ) उद्देय, (ब) मौलिकता एवं (स) रचना के आधार पर किया जाता है।

(अ) उद्देश्य के आधार पर सारणीयन

उद्देश्य के आधार पर सारणियाँ दो प्रकार की होती हैं—(*i*) **सामान्य उद्देश्य वाली सारणी** (General Pupose Table) तथा (*ii*) **विशेष उद्देश्य वाली सारणी** (Special Purpose Table)। सामान्य उद्देश्य वाली अिवा सन्दर्भ सारणी का प्राथमिक उद्देश्य समंकों को इस प्रकार प्रस्तुत करना होता है कि व्यक्तिगत इकाइयों का पाठकों द्वारा तुरन्त पता लगाया जा सके (क्राक्स्टन एवं काउडेन)। यह सारणी अत्यधिक उपयुक्त नहीं समझी जाती है। यही कारण है कि इसका प्रयोग अधिकतर सरकारी रिपोर्टों के सन्दर्भ में किया जाता है। इसके विपरीत विशेष उद्देश्य वाली अथवा सारांश सारणी (Summary Table) किसी उद्देश्य विशेष की पूर्ति के लिए तैयार की जाती है तथा इसका आधार सामान्य सारणी से अपेक्षाकृत छोटा होता है।

(ब) मौलिकता के आधार पर सारणीयन

मौलिकता के आधार पर सारणियाँ दो प्रकार की होती हैं—(*i*) **मौलिक** या **प्राथमिक सारणी** (Original of Primary Table) तथा (*ii*) **व्युत्पन्न सारणी** (Derivative Table)। मौलिक सारणी में समंकों को उनके मौलिक रूप में रखा जाता है जबकि व्युत्पन्न सारणी में समंकों के योग, प्रतिशत, अनुपात, गुणांक व माध्य आदि मूल्यों को प्रस्तुत किया जाता है।

(स) रचना के आधार पर सारणीयन

रचना अथवा बनावट के आधार पर सारणियाँ दो प्रकार की होती हैं—

(1) सरल सारणी (Simple Table)—जब समंकों को केवल एक ही गुण अथवा विशेषता के आधार पर प्रस्तुत किया जाता है, तो उसे सरल सारणी कहते हैं, जैसे जनसंख्या का आयु (age) अथवा लिंग (sex) अथवा राज्यों के अनुसार वितरण। सरल अर्थात् एक-गुण सारणी का उदाहरण नीचे दिया गया है—

नोट

उदाहरणः

Distribution of Population by Age-groups.

Age-Groups (Years)	Numbers of Persons Millions
0-20	... ...
20-50	... ...
over 50	... ...
Total	... ...

(2) जटिल सारणी (Complex Table)—जब समंकों को एक से अधिक विशेषताओं के आधार पर प्रस्तुत किया जाता है तो उसे जटिल सारणी कहते हैं। जटिल सारणी पुनः तीन रूपों में विभाजित की जा सकती है–

(*i*) द्विगुण सारणी (Double or Two-way Table)—द्विगुण सारणी उसे कहते हैं जिसमें समंकों की केवल दो विशेषताओं का समावेश किया जाता है जैसे जनसंख्या का आयु तथा लिंग (Age and Sex) वे आधार पर वितरण। इस दृष्टि से द्विगुण सारणी का उदाहरण इस प्रकार होगा–

उदाहरणः

Distribution of Population by Age and Sex

Age-Groups (Years)	Numbers of Persons (Millions)		
	Male	**Female**	**Total**
0-20	...	...	...
20-50	...	...	...
over 50	...	...	...
Total	...	...	...

(*ii*) त्रिगुण सारणी (Treble or Three-way Table)—त्रिगुण सारणी में एक साथ तीन गुणों के आधार पर समंकों को प्रदर्शित किया जाता है जैसे जनसंख्या का आयु, लिंग तथा साक्षरता (Age, Sex and Literacy) के अनुसार वितरण।

(*iii*) बहुगुण सारणी (Manifold or Higher Order Table)—जब समंकों को तीन से अधिक विशेषताओं के आधार पर प्रस्तुत किया जाता है तो उसे बहुगुण सारणी कहते हैं। उदाहरण के लिये जनसंख्या को आयु, लिंग, साक्षरता तथा राज्यों में वितरण के आधार पर इस प्रकार दिखाया जायेगा–

नोट

उदाहरण:

जनसंख्या का राज्य, आयु लिंग व साक्षरता के अनुसार वितरण

(Distribution of Population by States, Age, Sex and Literacy)

राज्य States	आयु-वर्ग Age-Groups	व्यक्तियों की संख्या (मिलियन)								
		पुरुष (Male)			स्त्री (Female)			योग (Total)		
		L	IL	T	L	IL	T	साक्षर	निरक्षर	योग
1. Assam असम	0–20 20–50 over 50									
	Total									
2. Bihar बिहार	0–20 20–50 over 50									
	Total									

इस सारणी को इसी प्रकार अन्य प्रान्तों के लिए बढ़ाया जा सकता है।

उदाहरण (Illustration) 5 : एक रिक्त सारणी बनाइये जिसमें जनशक्ति समंकों का वितरण आयु (age), लिंग (sex) तथा ग्रामीण-शहरी निवास (rural-urban characterof residence) के आधार पर दिखाया जा सके।

हल (Solution): प्रस्तुत प्रश्न के लिए त्रिगुण सारणी तैयार की जायेगी। आयु-वर्ग चार माने गये हैं।

जनशक्ति का आयु, लिंग तथा ग्रामीण-शहरी निवास के अनुरूप वितरण

(Distribution of Manpower by Age, Sex and Character of Residence)

Age-Groups आयु वर्ग	Urban (शहरी)			Rural (ग्रामीण)			Total (योग)		
	Male	Female	Total	Male	Female	Total	Male	Female	Total
0-20 20-40 40-60 over 60									
Total									

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

3. दिए गए कथन के सामने सही (✓) अथवा गलत (×) का निशान लगाइए।

1. समंकों का वर्गीकरण करने के बाद उन्हें व्यवस्थित ठंग से सारणियों के रूप में प्रस्तुत करना आवश्यक होता है। ☐
2. सारणीयन से समंकों की जटिलता बढ़ जाती है। ☐
3. सारणीय-क्रिया तुलनात्मक अध्ययन को संभव बनाती है। ☐

नोट

4. रचना के आधार पर सारणी तीन प्रकार की होती है। ☐
5. द्विगुण सारणी उसे कहते हैं जिसमें समंकों की केवल दो विशेषताओं का समावेश किया जाता है। ☐

3.11 सारांश (Summary)

- वर्गीकरण वह प्रक्रिया है जिसमें एकत्रित समंकों को उनकी विविध विशेषताओं एवं गुणों के आधार पर अलग-अलग वर्गों में बाँटा जाता है।
- वर्गीकरण के अन्तर्गत संकलित समंकों को विभिन्न वर्गों में बाँटा जाता है। वर्गों का निर्धारण जाँच के उद्देश्य, क्षेत्र एवं स्वरूप पर निर्भर करता है।
- वर्गीकरण की क्रिया, सारणीयन तथा सांख्यिकीय विश्लेषण की अन्य क्रियाओं के लिये आधार प्रस्तुत करती है। बिना वर्गीकरण के सारणीयन असम्भव है और सारणीयन के अभाव में सांख्यिकीय विश्लेषण अव्यवहारिक है।
- वर्गीकरण, समंकों के विश्लेषण की एक महत्वपूर्ण तकनीक हैं किन्तु इसके लिये कोई निश्चित व कठोर नियम निर्धारित नहीं किये जा सकते क्योंकि किसी भी सांख्यिकीय अनुसन्धान में समंकों का वर्गीकरण मुख्यत: समंकों के स्वरूप और जाँच के उद्देश्य पर निर्भर करता है।
- मूल्यों या वर्गों और उनकी आवृत्तियों के क्रमबद्ध विन्यास को ही आवृत्ति बंटन कहते हैं। स्पष्ट है कि आवृत्ति वितरण की रचना के लिए दो तत्व आवश्यक है–(*i*) चर तथा (*ii*) आवृत्ति।
- आवृत्ति-वितरण, खण्डित एवं अखण्डित चरों का सुबोध एवं संक्षिपत रूप में प्रस्तुतीकरण है। इस दृष्टि से आवृत्ति-वितरण की रचना भी निम्न दो रूपों में की जाती है–(*i*) खण्डित आवृत्ति वितरण तथा (*ii*) अखण्डित आवृत्ति वितरण।

3.12 शब्दकोश (Keywords)

- अपवर्जी (Exclusive)–विशिष्ट, व्यावर्तक।
- अपरस्परव्यापी (non-overlapping)–गैर-अति व्यक्ति गैर परस्पर व्यापी।
- समावेशी (Anglusive)–सम्मिलित, समावेश।

3.13 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. वर्गीकरण की परिभाषा दीजिए तथा उसके उद्देश्य एवं विभिन्न प्रकारों पर प्रकाश डालिए।
2. आदर्श वर्गीकरण के आवश्यक तत्व बताइए।
3. वर्गीकरण और सारणीयन को परिभाषित कीजिए तथा सांख्यिकीय विश्लेषण में उनका महत्व बताइए। वर्गीकरण एवं सारणीयन में अंतर स्पष्ट कीजिए।
4. सारणीयन को परिभाषित कीजिए तथा सारणीयन के उद्देश्यों एवं रीतियों को समझाइए।
5. सारणी के कौन-कौन से अंग हैं? सारणी तैयार करते समय किन-किन बातों का ध्यान रखना चाहिए?
6. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए–

   (*i*) आवृत्ति बंटन (*ii*) संचयी आवृत्ति शृंखला

   (*iii*) अपवर्जी तथा समावेशी वर्गान्तर।

नोट

7. श्रीरामपुर गाँव के 500 जनसंख्या में 300 पुरुष और 200 स्त्रियाँ हैं। 300 पुरुषों में 200 विवाहित हैं तथा शेष अविवाहित। विवाहित पुरुषों में 20% शिक्षित हैं। अविवाहित पुरुषों में 90% शिक्षित हैं। स्त्रियों में 80% अशिक्षित हैं। शिक्षित स्त्रियों में 10% विवाहित हैं। अशिक्षित स्त्रियों में 90% विवाहित हैं। उपरोक्त तथ्यों को एक सारणी का रूप दीजिए।
8. निम्नलिखित सूचना प्रदर्शित करने के लिए एक सारणी बनाइए—
   एक चीनी मिल के कर्मचारियों का ठीक 1/4 स्त्रियाँ थीं परन्तु उनमें से केवल 1/10 विवाहित थीं और 1/2 श्रम संघ की सदस्य थीं। इसके विपरीत 500 पुरुष कर्मचारी श्रम-संघ के सदस्य थे जिनमें से 240 विवाहित थे। अविवाहित गैर-सदस्य पुरुष कर्मचारियों की संख्या केवल 40 थी जो कुल पुरुष कर्मचारियों का 1/15 भाग था। इसी प्रकार मिल में अविवाहित कर्मचारियों की संख्या जो किसी श्रम-संघ के सदस्य नहीं थे, 32 थी।
9. उत्तर प्रदेश के 7 प्रमुख बाजारों के 1981 तथा 1991 में गेहूँ तथा चावल के प्रति कुन्तल मूल्यों को प्रदर्शित करने के लिए एक रिक्त सारणी बनाइए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. समंक 2. वर्गीकरण 3. चार 4. अर्थपूर्ण
   5. वर्गीकरण

2. 1. (ग) 2. (क) 3. (ख) 4. (ग) 5. (क)

3. 1. (☑) 2. (☒) 3. (☑) 4. (☒) 5. (☑)

3.14 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
2. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई–4: केन्द्रीय प्रवृत्तिः माध्य, माध्यिका और बहुलक एवं उनके गुण (Central Tendency: Mean, Median and Mode and Their Properties)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- माध्य, माध्यिका और बहुलक तथा उनके गुण के जानने में

प्रस्तावना (Introduction)

सांख्यिकीय विश्लेषण का सबसे महत्त्वपूर्ण उद्देश्य एक ऐसा अकेला माप या मूल्य ज्ञात करना है जो समंकों के सभी प्रकार के समूह की विशेषताओं का एक साथ वर्णन कर सके। परन्तु वर्गीकरण, समीकरण, सारणीयन प्रतिशतें, अनुपात आदि विधियाँ समंकों की जटिलता को काफी हद तक कम करके उन्हें सरल व तुलनीय बना देती हैं तथापि इनके समंकों का संक्षिप्तीकरण उस सीमा तक नहीं हो पाता जितना कि विश्लेषण के लिए आवश्यक है। चूँकि मानव मस्तिष्क जटिल समंकों को पूर्णतया समझने और तुलना करने में हमेशा सक्षम नहीं है इसलिए यह जरूरी हो जाता है कि विविध तथ्यों जिनकी तुलना की जानी है उन्हें सारांश रूप में एक ही अंक द्वारा व्यक्त किया जा सके। इसलिए ऐसे मूल्य या अंक ही केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप या सांख्यिकी माध्य कहलाते हैं।

4.1 माध्य का अर्थ एवं परिभाषा और उनके गुण (Meaning and Definition of Mean and their Properties)

माध्य किसी समंक श्रेणी का एक ऐसा विशिष्ट या प्रतिरूपी मूल्य है जिसके आस-पास अन्य समंकों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति पाई जाती है। यह श्रेणी के सीमान्त पदों के बीच स्थित एक ऐसा अंक है जो बंटन के मध्य भाग

में मूल्यों के जमाव की जानकारी देता है। इस दृष्टि से इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप भी कहा जाता है क्योंकि व्यक्तिगत चर-मूल्यों का जमाव अधिकतर उसके आस-पास ही होता है। माध्य की कुछ परिभाषाएँ निम्न प्रकार हैं–

सिम्पसन एवं **कापका** के अनुसार, "केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप एक ऐसा प्रतिरूपी मूल्य है जिसके चारों ओर संख्याएँ समकेन्द्रित होती हैं।"

या-लुन चाऊ (Ya-lun Chou) के अनुसार, "माध्य इस अर्थ में एक विशिष्ट मूल्य है जिसे कभी-कभी एक समंकमाला या एक चर के सभी व्यक्तिगत मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिए प्रयोग में लाया जाता है।"

क्लार्क के अनुसार, "माध्य समंकों के सम्पूर्ण समूह का वर्णन करने हेतु, कोई अकेला अंक प्राप्त करने का प्रयास है।"

क्रॉवसटन एवं **काउडेन** के अनुसार, "माध्य-समंकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थित एक ऐसा मूल्य है जिसका प्रयोगत्रिणी के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है। चूँकि माध्य समंकों के विस्तार के अन्तर्गत ही कहीं होता है इसलिए इसे केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है।"

(1) A measure of central tendency is a typical value around which after figures congregate. — **Simpson and Kafka**

(2) An average is a typical value in the sense that is sometimes employed to represent all the individual value in a series or of a variable.

(3) Average is an attempt to find one single figure to describe whole groups of figures.

(4) An average is a single value which the range of the data that is used to represent all of the values in the series. Since an average in somewhere within the range of the data. It is sometimes called a measure of central value.

इन सभी परिभाषाओं से सारांश निकलता है कि कोई ऐसी अकेली संख्या, जो श्रेणी के सभी समंकों का प्रतिनिधित्व करती है, माध्य कहलाती है। माध्य में वे सभी विशेषताएँ होती हैं जो श्रेणी के अन्य मूल्यों में पाई जाती हैं। इसे विभिन्न नामों से भी पुकारा जाता है; जैसे–केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप, सांख्यिकीय माध्य, प्रतिरूपी या प्रतिनिधिक मूल्य, सारांश अंक इत्यादि। माध्यों को प्राय: उसी इकाई में व्यक्त किया जाता है जिसमें प्रारम्भिक समंक संगृहीत होते हैं।

नोट्स माध्य सम्पूर्ण बंटन की अभिव्यक्ति का एकमात्र सार्थक प्रतिनिधिक मूल्य है। यह एक ऐसा सरल व संक्षिप्त अंक है जो समंकमाला के प्रमुख लक्षणों का सारांश रूप व्यक्त करता है।

माध्य का महत्व (Importance of Mean)

सांख्यिकी में माध्यों का अभूतपूर्व महत्व है। सांख्यिकी में माध्यम ही सर्वोपरि है क्योंकि सांख्यिकीय विश्लेषण की अन्य कई रीतियाँ इस पर आधारित हैं। डॉ. बाउले ने सांख्यिकी को माध्यों का विज्ञान (Science of average) कहा है। माध्य को सांख्यिकीय विज्ञान का प्रवेश द्वार (Gateway of Statistics) भी कहते हैं। माध्यों की मदद से समंकमाला के सभी मूल्यों का सार प्रकट किया जाता है क्योंकि सांख्यिकी में व्यक्तिगत इकाइयों का अलग-अलग कोई महत्व नहीं है। माध्यों के द्वारा समंकों की पारस्परिक तुलना आसान हो जाती है और सभी इकाइयों के सामूहिक लक्षण स्पष्ट हो जाते हैं। औसत आयु, आय, मूल्य, व्यय, ऊँचाई, उत्पादन, लागत, मजदूरी आदि अनेक अध्ययन विषय हमारी प्रतिदिन की दिनचर्या में शामिल हैं जो माध्यों द्वारा ज्ञात किये जाते हैं।

टास्क सांख्यिकी विज्ञान का प्रवेश द्वार किसे कहते हैं?

नोट

उद्देश्य एवं कार्य (Objects and Functions)

सांख्यिकीय माध्यों के निम्न कार्य व उद्देश्य हैं–

1. **सरल एवं संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत करना** (To present a simple and brief picture)–माध्यों द्वारा जटिल एवं अव्यवस्थित समंकों को सुव्यवस्थित सरल, संक्षिप्त एवं बोधगम्य रूप में परिवर्तित किया जाता है। यह पूरी समंक श्रेणी का सारांश प्रस्तुत करता है और समंकों के विशाल समूह को समझने योग्य बना देता है।

   मोरोने के अनुसार, "माध्य का उद्देश्य व्यक्तिगत मूल्यों के समूह का सरल एवं संक्षिप्त रूप में प्रतिनिधित्व करना है जिससे कि मस्तिष्क, समूह की इकाइयों के सामान्य आकार को शीघ्रता से ग्रहण कर सके।"
2. **तुलना की सुविधा देना** (To facilitate comparison)–माध्यों की सहायता से दो या दो से अधिक समूहों के महत्त्वपूर्ण लक्षणों की सरलता से तुलना की जा सकती है। प्रत्यक्ष रूप में समंकों द्वारा यह कार्य बहुत कठिन होता है लेकिन माध्यों द्वारा सरल हो जाता है। उदाहरण के लिए, दो देशों की औसत प्रति व्यक्ति आय की तुलना करके उचित परिणाम निकाले जाते हैं।
3. **समग्र का प्रतिनिधित्व** (To represent the entire group)–माध्यों की सहायता से ही प्रतिदर्श के अध्ययन के आधार पर पूरे समग्र के बारे में निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। माध्य सम्पूर्ण समग्र का संक्षिप्त चित्र होता है।
4. **सांख्यिकीय विवेचन का आधार** (Basis of statistical analysis)–सांख्यिकीय विश्लेषण की अनेक विधियाँ माध्यों पर ही आधारित हैं; जैसे–अपकिरण, विषमता सहसम्बन्ध, प्रतीपगमन आदि।
5. **नीति-निर्माण में सहायक** (To help in policy-formulation)–माध्य के रूप में ऐसे समंक प्राप्त होते हैं जो भावी योजनाओं, क्रियाओं व नीतियों के निर्धारण में मार्गदर्शक होते हैं। व्यापारियों एवं अर्थशास्त्रियों के लिए इनसे अनुमान लगाने एवं निर्णय लेने का कार्य आसान हो जाता है।

माध्य के गुण (Properties of An Ideal Average)

यूल और **कैण्डाल** के अनुसार एक आदर्श माध्य में निम्न गुण होने चाहिए–

1. **स्पष्ट एवं स्थिर परिभाषा** (Clearly and rigidly defined)–आदर्श माध्य स्पष्ट एवं परिभाषित होना चाहिए जिससे उनका एक ही अर्थ लगाया जा सके। यदि यह अनुमानों पर आधारित होगा तो समंक श्रेणी की विशेषताओं का सही प्रतिनिधित्व नहीं कर पायेगा।
2. **सभी मूल्यों पर आधारित** (Based on all the observations)–एक अच्छे माध्य को समंकमाला के सभी पदों पर आधारित होना चाहिए अर्थात् उसके परिकलन में सभी पद-मूल्यों का उपयोग होना चाहिए। ऐसा न होने पर यह पूरे समग्र के अभिलक्षणों को संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत नहीं कर सकेगा।
3. **सरल एवं बोध** (Easy and intelligible)–उत्तम माध्य में सरल व स्पष्ट गुण होने चाहिए जिससे उसकी प्रकृति आसानी से समझी जा सके।
4. **आगणन में सरलता** (Easy to calculate)–माध्य ऐसा होना चाहिए जिसे साधारण व्यक्ति भी आसानी से समझ सके। माध्य को अत्यधिक गणितीय नहीं होना चाहिए। कुछ माध्य अधिक जटिल रीतियों द्वारा परिगणित होने के कारण अधिक लोकप्रिय नहीं है।
5. **प्रतिचयन के परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव** (Least affect of sampling fluctuations)–इसका अभिप्राय यह है कि यदि एक ही समग्र में से उचित रीति द्वारा विभिन्न प्रतिदर्श चुनकर उनके माध्य निकाले जायें तो उन माध्यों में अत्यधिक अन्तर नहीं होने चाहिए। आदर्श माध्य में इस प्रकार के प्रतिचयन परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव पड़ता है अर्थात् एक ही समग्र के भिन्न-भिन्न प्रतिदर्शों के माध्यों में लगभग समानता होगी।
6. **बीजगणितीय विवेचन** (Algebraic treatment)–एक आदर्श माध्य में कुछ ऐसी गणितीय विशेषताएँ होनी चाहिए जिससे उसका बीजीय विवेचन सरलता से हो सके। यदि माध्य में यह विशेषता नहीं है तो

सांख्यिकीय सिद्धान्त में उसका अनुप्रयोग सीमित बना रहेगा। उदाहरण के लिए—यदि विभिन्न समूहों के माध्य मूल्य और आवृत्तियाँ ज्ञात हैं तो उनसे उन समूहों का समूहित माध्य भी निर्धारित हो जाना चाहिए।

7. **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव** (Least affect of extreme observation)—इसका आशय समंकमाला के अत्यधिक छोटे एवं अत्यधिक बड़े मूल्यों से है। इन चरम मूल्यों से एक आदर्श माध्य को प्रभावित नहीं होना चाहिए।

4.2 बहुलक और उनके गुण (Mode and their Properties)

'Mode' शब्द फ्रेंच भाषा के '*La mode*' से उत्पन्न हुआ है जिसका अर्थ है, फैशन या रिवाज अर्थात् जो अधिक प्रचलित हो। सांख्यिकी में बहुलक उस मूल्य को कहते हैं जो समंकमाला में सबसे अधिक बार आता हो अर्थात् जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक हो। बहुलक सर्वाधिक घनत्व की स्थिति (Position of greatest density) या मूल्यों के अधिकतम संकेन्द्रण का बिन्दु (point of highest concentration of values) या सर्वाधिक आवृत्ति वाले पद का मूल्य कहलाता है। इसीलिए इसे स्थिति सम्बन्धी माध्य कहते हैं।

क्रॉक्सटन एवं **काउडेन** के अनुसार, "एक समंक बंटन का बहुलक वह मूल्य है जिसके निकट श्रेणी की इकाइयाँ अधिक-से-अधिक केन्द्रित होती हैं उसे मूल्यों की श्रेणी का सबसे अधिक प्रतिरूपी मूल्य माना जा सकता है।

जिजेक के अनुसार, "बहुलक वह मूल्य है जो समूह में सबसे अधिक बार आता है और जिसके चारों ओर सबसे अधिक घनत्व वाले पदों का जमाव रहता है।"

कैनी एवं **कीपिंग** के अनुसार, "बहुलक वह मूल्य है जो श्रणी में सबसे अधिक बार आता हो अर्थात् जिसकी सर्वाधिक पुनरावृत्ति हो।"

प्रो. टुटले के अनुसार, "बहुलक वह मूल्य है जिसके एकदम आस-पास आवृत्ति घनत्व अधिकतम होता है।" लए—यदि एक विद्यालय के छात्रों का बहुलक व्यय 200 रुपये प्रतिमाह है तो इसका तात्पर्य है कि उन विद्यार्थियों में से अधिकतर का मासिक व्यय 200 रु. है। इसी प्रकार बहुलक लाभ (modal profits), बहुलक मजदूरी (modal wages), जूते का बहुलक आकार (Modal size of shoes) आदि का तात्पर्य इन घटनाओं से सम्बन्धित अधिकतम इकाइयों के मूल्यों से है।

बहुलक के गुण (Properties of Mode)

बहुलक के निम्नलिख्ति गुण हैं–

1. **सरलता एवं बुद्धिगम्य**—बहुलक का सबसे बड़ा लाभ इसकी सरलता है। बहुलक अधिकतर निरीक्षण से ही ज्ञात हो जाता है। सतत् श्रेणी में भी सरल गणना द्वारा ही इसका निर्धारण हो जाता है। यह समझने में भी बहुत आसान होता है।
2. **लोकप्रियता** (Commonly used)—बहुलक एक ऐसा माध्य है जिसे दैनिक जीवन में काफी प्रयोग किया जाता है; जैसे—सिले-सिलाये कपड़े, जूते, दैनिक प्रयोग की वस्तुओं आदि के औसत आकार से हमारा आशय बहुलक आकार (Modal size) से होता है।
3. **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव** (Least affected by extreme values)—बहुलक पर श्रेणी के चरम मूल्यों या सीमान्त इकाइयों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। नियमित आवृत्ति बंटन में अधिकतम आवृत्ति संकेन्द्रण प्रायः श्रेणी के मध्य में होती है न कि चरम सीमाओं के आस-पास।
4. **बिन्दुरेखीय निर्धारण** (Graphically Determined)—बहुलक का निर्धारण बिन्दुरेखीय रीति द्वारा भी आसानी से किया जा सकता है।
5. **श्रेणी के सभी मूल्यों की जानकारी आवश्यक नहीं** (Not necessary to know all the values of a series)—बहुलक निर्धारण के लिए श्रेणी के सभी पद मूल्यों की आवश्यकता नहीं होती है। एक नियमित

नोट

श्रेणी में बहुलक वर्ग एवं उसके पहले व बाद के एक वर्ग की आवृत्ति के आधार पर ही बहुलक ज्ञात कर सकते हैं।

6. **सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व** (Optimum Representative)—बहुलक श्रेणी का वह मूल्य है जो सबसे अधिक बार पाया जाता है अत: वह समूह का सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व करने वाला माध्य माना जाता है। इसका मूल्य भी समूह में दिये गये मूल्यों में से एक होता है।

बहुलक के दोष (Demerits of Mode)

बहुलक के निम्नलिख्ति दोष हैं–

1. **अस्पष्ट अनिश्चित व अनिर्धारित** (Undefined, indefinite and indeterminate)—बहुलक सबसे अधिक अस्पष्ट एवं अनिश्चित माध्य है। श्रेणी की सभी आवृत्तियाँ समान होने पर बहुलक निर्धारण नहीं किया जा सकता है। कभी-कभी एक समूह में दो या दो से अधिक बहुलक भी हो सकते हैं।
2. **चरम मूल्यों की उपेक्षा** (Neglect of Extreme Values)—बहुलक सीमान्त पदों को कोई महत्व नहीं देता जोकि गणितीय दृष्टि से अनुचित है।
3. **बीजगणितीय विवेचन का अभाव** (Lack of Mathematical treatment)—बहुलक में सभी पद मूल्यों के शामिल न होने के कारण इसका बीजगणितीय विवेचन सम्भव नहीं है इसी वजह से इसका अन्य सांख्यिकीय रीतियों में कम प्रयोग होता है।
4. **कुल मूल्य ज्ञात न होना**—यदि बहुलक मूल्य एवं पदों की संख्या ज्ञात हो तो उनको गुणा करके समूह के सब मूल्यों का जोड़ ज्ञात नहीं हो सकता।
5. **अवास्तविक और अप्रतिनिधिक** (Illusory and Unrepresentative)—बहुलक कभी-कभी समंक श्रेणी का सही प्रतिनिधित्व नहीं करता। उदाहरण के लिए, यदि 1,000 व्यक्तियों में से 10 व्यक्तियों की आय 100 रुपये है तथा बाकी सभी की आय 100 रु. से कम है तो बहुलक आय 100 रु. होगी जोकि समूह का सही प्रतिनिधित्व नहीं करती है। अत: कुछ परिस्थितियों में बहुलक से भ्रमात्मक निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।
6. **वर्ग-विस्तार का प्रभाव**—बहुलक मूल्य वर्ग-विस्तार पर भी निर्भर होता है। वर्गान्तरों के विस्तार में परिवर्तन होने पर वह भी भिन्न हो जाता हैं।

क्या आप जानते हैं बहुलक में आदर्श माध्य के आवश्यक गुणों का अभाव होता है। इसमें कई दोष हैं परन्तु इसके बावजूद यह एक अत्यधिक विषम बंटन या गैर-प्रसामान्य बंटन की स्थिति में केन्द्रीय प्रवृत्ति की अर्थपूर्ण माप है जो अधिकतम संकेन्द्रण के बिन्दु को चिह्नित करता है।

4.3 मध्यका और उनके गुण (Median and their Properties)

बहुलक की तरह मध्यका भी एक स्थितीय माध्य है। किसी समंक श्रेणी को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर उस श्रेणी के मध्य में जो मूल्य आता है, वही मध्यका (median) कहलाता है। अत: यह एक क्रमबद्ध समंकमाला का केन्द्रीय या मध्य मूल्य होता है।

कौनर के अनुसार, "मध्यका समंक श्रेणी का वह चर-मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार बाँटता है कि एक भाग में सभी मूल्य से अधिक एवं दूसरे भाग में सभी मूल्य उससे कम हों।"

अर्थात् मध्यका वह केन्द्रीय मूल्य है जो क्रमबद्ध समंकमाला को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

होरेस सेक्राइस्ट (Horace Secrist) के अनुसार, "जब एक श्रेणी क्रमानुसार विन्यासित हो तो मध्यका श्रेणी का वह वास्तविक या अनुमानित पद-मूल्य है जो बंटन को दो बराबर भागों में बाँटता है।"

उदाहरण के लिए, यदि 7 छात्रों के प्राप्तांक 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 हों तो उनकी मध्यका 7 होगी क्योंकि यह चौथे क्रम का अंक है जो बिल्कुल मध्य में स्थित है तथा इसके पहले के अंक (3, 4, 5) मध्यका से छोटे एवं बाद के अंक (8, 9, 10) मध्यका से बड़े हैं।

मध्यका के गुण (Properties of Median)

मध्यका के निम्नलिखित लाभ अथवा गुण हैं—

1. **सरल एवं बुद्धिगम्य** (Easy and Intelligible)—मध्यका को समझना एवं ज्ञात करना बहुत सरल है। इसकी गठन क्रिया भी काफी सरल है जो आसानी से समझ में आती है।
2. **स्पष्ट एवं स्थिर रूप से परिभाषित** (Clearly and Rigidly defined)—मध्यका एक स्पष्टतः परिभाषित माध्य है। यह आदर्श माध्य की शर्त पूरी करता है।
3. **निरीक्षण द्वारा निर्धारण** (Location by Inspection)—इसके मूल्य का निर्धारण प्रत्येक श्रेणी में निश्चितता के साथ कर सकते हैं।
4. **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव** (Least affected by Extreme items)—मध्यका पर चरम मूल्यों या सीमान्त पदों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि यह स्थितीय माध्य है। सीमांत मूल्यों के बिना केवल श्रेणी के मध्य के मूल्यों द्वारा भी इसे ज्ञात कर सकते हैं।
5. **परिकलन की निश्चितता** (Certainty of Computation)—मध्यका का निर्धारण सभी प्रकार की श्रेणियों; जैसे—असमान वर्गान्तर, खुले सिरे वाले वर्गान्तर, आदि में भी निश्चितता के साथ किया जा सकता है। यदि चरम मूल्य न ज्ञात हो लेकिन पदों की संख्या ज्ञात हो तो भी मध्यका ज्ञात कर सकते हैं।
6. **गुणात्मक तथ्यों में उपयुक्त** (More suitable for Qualitative Phenomena)—ऐसे तथ्य जिनकी प्रत्यक्ष माप सम्भव नहीं होती; जैसे—बौद्धिक स्तर, स्वास्थ्य, दरिद्रता, अमीरी आदि के लिए यह सर्वोत्तम होती है।
7. **बिन्दुरेखीय रीति द्वारा निर्धारण** (Location by Graphic Method)—बिन्दुरेखीय रीति द्वारा भी मध्यका का निर्धारण किया जा सकता है।

मध्यका के दोष (Demerits of Median) -

मध्यका में निम्नलिखित कमियाँ हैं—

1. **निधारण सम्बन्धी कठिनाइयाँ** (Computational Difficulties)—मध्यका मूल्य को निर्धारित करने से पहले पदों को आरोही या अवरोही क्रम में विन्यासित करना पड़ता है। व्यक्तिगत इकाइयों के सम होने पर दो केन्द्रीय मूल्यों के औसत को ही मध्यका मान लिया जाता है जोकि वास्तविक नहीं होता है।
2. **बीजीय विवेचन का अभाव** (Lack of Algebraic Treatment)—मध्यका में बीजगणितीय गुणों का अभाव होता है जिसके कारण इसे उच्च सांख्यिकीय रीतियों में प्रयोग नहीं करते हैं। मध्यका मूल्य को आवृत्तियों से गुणा करने पर पद-मूल्यों का कुल योग ज्ञात नहीं किया जा सकता।
3. **सीमान्त मूल्यों की उपेक्षा** (Neglect of Extreme Values)—मध्यका चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता। अतः जहाँ इन मूल्यों को महत्व देना हो, वहाँ यह मध्यका अनुपयुक्त है।
4. **अप्रतिनिधिक** (Unrepresentative)—मध्यका ऐसे समूहों की केन्द्रीय प्रवृत्ति का यथोचित रूप से प्रतिनिधित्व नहीं करता जिनमें विभिन्न पदों के मूल्यों में काफी अन्तर होता है या आवृत्तियाँ अनियमित होती हैं।
5. **प्रतिचयन उच्चावचनों से प्रभावित होना** (Affected by Fluctuations of sampling)—मध्यका का प्रतिचयन के परिवर्तनों का प्रभाव समान्तर माध्य की तुलना में ज्यादा होता है।

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. कोई ऐसी अकेली संस्था, जो श्रेणी के सभी समंकों का प्रतिनिधित्व करती है, ········ कहलाती है।
2. ········ ने सांख्यिकी को माध्यें का विज्ञान कहा है।
3. एक अच्छे माध्य को ········ के सभी पदों पर अधारित होना चाहिए।
4. ········ में बहुलक उस मूल्य के कहते हैं जे समंगमाला में सबसे अधिक बार आता हो।
5. ········ एक ऐसा माध्य है जिसे दैनिक जीवन में काफी प्रयोग किया जाता है।
6. श्रेणी की सभी ········ समान होने पर बहुलक क निर्धारण नहीं किया जा सकता है।

4.4 सारांश (Summary)

- मध्य किसी समंक श्रेणी का एक ऐसा विशिष्ट या प्रतिरूपी मूल्य है जिसके आस-पास अन्य समंकों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति पाई जाती है। यह श्रेणी के सीमान्त पदों के बीच स्थित एक ऐसा अंक है जो बंटन के मध्य भाग में मूल्यों के जमाव की जानकारी देता है। इस दृष्टि से इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप भी कहा जाता है क्योंकि व्यक्तिगत चर-मूल्यों का जमाव अधिकतर उसके आस-पास ही होता है।
- सांख्यिकी में माध्यों का अभूतपूर्व महत्व है। सांख्यिकी में माध्यम ही सर्वोपरि है क्योंकि सांख्यिकीय विश्लेषण की अन्य कई रीतियाँ इस पर आधारित हैं। डॉ. बाउले ने सांख्यिकी को माध्यों का विज्ञान (Science of average) कहा है। माध्य को सांख्यिकीय विज्ञान का प्रवेश द्वार (Gateway of Statistics) भी कहते हैं। माध्यों की मदद से समंकमाला के सभी मूल्यों का सार प्रकट किया जाता है क्योंकि सांख्यिकी में व्यक्तिगत इकाइयों का अलग-अलग कोई महत्व नहीं है।
- 'Mode' शब्द फ्रेंच भाषा के '*La mode*' से उत्पन्न हुआ है जिसका अर्थ है, फैशन या रिवाज अर्थात् जो अधिक प्रचलित हो। सांख्यिकी में बहुलक उस मूल्य को कहते हैं जो समंकमाला में सबसे अधिक बार आता हो अर्थात् जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक हो। बहुलक सर्वाधिक घनत्व की स्थिति (Position of greatest density) या मूल्यों के अधिकतम संकेन्द्रण का बिन्दु (point of highest concentration of values) या सर्वाधिक आवृत्ति वाले पद का मूल्य कहलाता है। इसीलिए इसे स्थिति सम्बन्धी माध्य कहते हैं।
- बहुलक सबसे अधिक अस्पष्ट एवं अनिश्चित माध्य है। श्रेणी की सभी आवृत्तियाँ समान होने पर बहुलक निर्धारण नहीं किया जा सकता है। कभी-कभी एक समूह में दो या दो से अधिक बहुलक भी हो सकते हैं।
- बहुलक सीमान्त पदों को कोई महत्व नहीं देता जोकि गणितीय दृष्टि से अनुचित है।
- बहुलक की तरह मध्यका भी एक स्थितीय माध्य है। किसी समंक श्रेणी को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर उस श्रेणी के मध्य में जो मूल्य आता है, वही मध्यका (median) कहलाता है। अतः यह एक क्रमबद्ध समंकमाला का केन्द्रीय या मध्य मूल्य होता है।

4.5 शब्दकोश (Keywords)

- समंक–चर।
- बंटन–वितरण।

नोट

4.6 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. माध्य की परिभाषा देते हुए इसके अर्थ एवं उपयोग की व्याख्या कीजिए।
2. माध्य के गुण व दोषों का विवेचन कीजिए।
3. बहुलक से आप क्या समझते हैं? विश्लेषण कीजिए।
4. मध्यका अथवा माध्यिका के गुण और दोषों का विवेचन कीजिए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. माध्य 2. डा. बाउले 3. समंकमाला 4. सांख्यिकी
5. बहुलक 6. आवृत्तियाँ

4.7 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. साँख्यिकी, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई–5: माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के अनुप्रयोग (Application of Mean, Median and Mode)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- समान्तर माध्य के अनुप्रयोग की व्याख्या करने में।
- माध्यिका के अनुप्रयोग की विवेचना करने में।
- बहुलक निकालने के अनुप्रयोग का विश्लेषण करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

सांख्यिकीय विश्लेषण का सबसे महत्त्वपूर्ण उद्देश्य कुछ ऐसे संख्यात्मक मापों का निर्धारण करना है जो आवृत्ति-वितरण की अन्तर्निहित सभी विशेषताओं को स्पष्ट कर सकें। यद्यपि वर्गीकरण, सारणीयन, चित्रमय व बिन्दु-रेखीय प्रदर्शन आदि विधियाँ जटिल समंकों को संक्षिप्त, सरल तथा बोधगम्य बनाने का कार्य करती है। परंतु इनके प्रयोग से समंकों की जटिलता समाप्त नहीं होती और न ही समंक-मात्रा की महत्त्वपूर्ण विशेषतायें स्पष्ट हो पाती है। फिर, इन तथ्यों के विशाल समूह से निष्कर्ष निकालना एक अत्यनत कठिन कार्य है क्योंकि मानव मस्तिष्क जटिल समंकों को भली-भाँति समझने और उनका तुलनात्मक अध्ययन करने में सर्वथा असमर्थ है। इस संबंध में रोनाल्ड फिशर ने ठीक ही कहा है कि "संख्यात्मक तथ्यों के विशाल समूह को पूरी तरह से समझ सकने की मानव मस्तिष्क की अन्तर्निहित अयोग्यता, हमें किसी ऐसे अपेक्षाकृत संक्षिप्त स्थिर माप की खोज को बाध्य करती है, जो समंकों की पर्याप्त रूप से व्याख्या कर सकें।"

वास्तव में, माध्य माध्यिका एवं बहुलक ही इस कठिनाई को दूर करते हैं। यह एक ऐसा सरल माप है जो समंकों का प्रतिनिधित्व करने वाला सबसे संक्षिप्त संख्यात्मक विवरण होता है।

नोट

5.1 समान्तर माध्य के अनुप्रयोग (Application of Mean)

समान्तर माध्य सबसे अधिक प्रचलित माध्य है जिसका प्रयोग सामान्यत: प्रत्येक व्यक्ति द्वारा दैनिक जीवन में किया जाता है। "समान्तर माध्य वह मूल्य है जो किसी श्रेणी के सभी पदों के मूल्यों के योग्य में उन पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।" प्रो. मिल के अनुसार "समान्तर माध्य किसी वितरण का समातोलन केन्द्र है।" प्रो. मिल के अनुसार "समान्तर माध्य किसी वितरण का समातोलन केन्द्र है।" समान्तर माध्य या मध्यक निकालने की दो रीतियाँ हैं– प्रत्यक्ष रीति तथा लघु रीति। नीचे हम इन दोनों रीतियों का तीनों प्रकार की श्रेणियों में अलग-अलग अध्ययन करेंगे।

(A) व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यक का आगणन (Individual Series)

(1) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)– (i) सर्वप्रथम श्रेणी के सभी मूल्यों का योग (total) किया जाता है। (ii) फिर, इस योग को पदों की संख्या से भाग दे दिया जाता है। हाँ! इस रीति का प्रयोग तभी करना चाहिये जब चर-मूल्यों की संख्या कम हो तथा वे दशमलव में न हों।

सूत्र: $$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots X_n}{N}$$

or $$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

$\bar{X}$ = समान्तर माध्य
ΣX = पद-मूल्यों का जोड़
N = पदों की संख्या

(2) लघु रीति (Short-cut Method)– इसकी प्रक्रिया निम्न है–

(i) सर्वप्रथम दिये हुए मूल्यों में से किसी एक मूल्य को कल्पित माध्य (assumed mean) मान लिया जाता है। वैसे कल्पित-माध्य श्रेणी से बाहर का भी कोई मूल्य माना जा सकता है। किंतु सुविधा की दृष्टि से कल्पित माध्य सदैव श्रेणी के मूल्यों में से ही कोई एक होना चाहिये तथा वह न सबसे छोटा और न सबसे बड़ा बल्कि मध्य-मूल्य (middle-value) होना चाहिए।

(ii) श्रेणी के प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (X) में से कल्पित-माध्य (A) को घटाकर, विचलन प्राप्त किये जाते हैं अर्थात् $dx = X - A$.

(iii) विचलनों का योग प्राप्त कर लिया जाता है: Σdx या $\Sigma(X-A)$.

(iv) अन्त में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$$

$\bar{X}$ = समान्तर माध्य (*Arithmetic Mean*)
A = कल्पित माध्य (*Assumed Mean*)
Σdx = विचलनों का योग (*Total of deviations*)
N = पदों की संख्या (*Number of Items*)

उदाहरण (Illustration) 1: निम्न समंकों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए–

क्रमांक:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
पद-मूल्य:	96	180	98	75	270	80	102	100	94	75	200	610

नोट

हल (Solution): **Calculation of Arithmetic Mean**

क्रमांक	प्रत्यक्ष रीति	लघु रीति		
		कल्पित माध्य 200 से विचलन		
S.No.	X	X–A		dx
1	96	(96–200)		–104
2	180	(180–200)		–20
3	98	(98–200)		–102
4	75	(75–200)		–125
5	270	(270–200)	+ 70	
6	80	(80–200)		–120
7	102	(102–200)		–98
8	100	(100–200)		–100
9	94	(94–200)		–106
10	75	(75–200)		–125
11	200	(200–200)		–0
12	610	(610–200)	+410	
$N = 12$	$\Sigma X = 1980$	$\Sigma dx = -420$		

लघु रीति–

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$$

$$= 200 + \frac{-420}{12}$$

$$= 200 - 35 = 165$$

प्रत्यक्ष रीति–

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

$$= \frac{1980}{12} = 165$$

(B) खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना (Discrete Series)

(1) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)– (i) सर्वप्रथम प्रत्येक मूल्य (X) की आवृत्ति (f) से गुण की जाती है अर्थात् ($X \times f$)।

(ii) फिर, इन गुणाओं के योग (Σfx) को कुल इकाइयों की संख्या से भाग दे दिया जाता है।

(iii) प्रत्यक्ष रीति के अनुसार सूत्र इस प्रकार है–

नोट्स आवृत्ति श्रेणी में आवृत्तियों का जोड़ ही कुल इकाइयों की संख्या होती है अर्थात् $N = \Sigma f$ ।

(2) लघु रीति (Short-cut Method)– (i) सर्वप्रथम दिये हुए मूल्यों में किसी एक को कल्पित-माध्य मान लिया जाता है।

नोट

(ii) फिर, प्रत्येक पद-मूल्य में से कल्पित-माध्य विचलन प्राप्त कर लिये जाते हैं अर्थात् $dx = (X - A)$।

(iii) प्रत्येक विचलन (dx) को उसकी आवृत्ति (f) से गुणा करके, उन गुणाओं का जोड़ निकाल लिया जाता है। (Σfdx)।

(iv) अन्त में, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{N} \quad \text{or} \quad \bar{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{\Sigma f}$$

A = कल्पित माध्य, Σfdx = विचलनों व आवृत्तियों की गुणाओं का जोड़,

N = आवृत्तियों का जोड़,

उदाहरण (Illustration) 2: निम्नलिखित खण्डित श्रेणी में (i) 15 को शून्य (अर्थात् कल्पित-माध्य) समान्तर माध्य निकालिये तथा (ii) प्रत्यक्ष रीति द्वारा परिणाम की जाँच कीजिए–

आकार (X):	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
आवृत्ति (f):	1	2	4	8	11	10	7	4	2	1

हल (Solution) : यहाँ कल्पित-माध्य 15 माना जाएगा क्योंकि प्रश्न में दिया हुआ है।

प्रत्यक्ष तथा लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य का परिकलन?

आकार	आवृत्ति	लघु रीति		प्रत्यक्ष रीति
		$A = 15$ से विचलन	गुणनफल	
(X)	(f)	(dx)	(fdx)	(fX)
20	1	+ 5	+ 5	20
19	2	+ 4	+ 8	38
18	4	+ 3	+ 12	72
17	8	+ 2	+ 16	136
16	11	+ 1	+ 11	176
15	10	0	0	150
14	7	–1	–7	98
13	4	–2	–8	52
12	2	–3	–6	24
11	1	–4	–4	11
Total	$N = 50$		$\Sigma fdx = 27$	$\Sigma fX = 777$

लघु रीति (Short-cut Method)	प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)
$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{N}$	Mean or $\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{777}{50}$
$= 15 + 0.54 =$ **15. 54**	$\therefore \quad \bar{X}$ = **15.54**

(C) अखण्डित श्रेणी में मध्यक का परिकलन (Mean in Continuous Series)

अखण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य ठीक उसी प्रकार निर्धारित किया जाता है जिस प्रकार खण्डित श्रेणी में सूत्र भी दोनों में एक समान है। परन्तु अन्तर केवल इतना है कि अखण्डित श्रेणी में पहले वर्गों के मध्य-मूल्य (mid-values) निकाले जाते हैं जिन्हें 'X' कहते हैं। इस प्रकार मध्य-मूल्य लेने पर अखण्डित श्रेणी, खण्डित श्रेणी का रूप ले लेती है।

नोट

प्रत्यक्ष रीति (Direct Method) – (i) सर्व प्रथम, वर्गों के मध्य-मूल्य ज्ञात किये जाते हैं।

(ii) फिर, मध्य-मूल्यों को उनकी आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ (ΣfX) प्राप्त कर लिया जाता है।

(iii) अन्त में, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

लघु रीति (Short-cut Method)– (i) सबसे पहले किसी मध्य-मूल को कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है।

(ii) फिर, प्रत्येक मध्य-मूल (X) में से कल्पित माध्य घटाकर विचलन (dx) ज्ञात किये जाते हैं और उनकी तत्संवादी आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ (Σfdx) प्राप्त कर लिया जाता है।

(iii) अन्त में, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$X = A + \frac{\Sigma fdx}{N}$$

उदाहरण (Illustration) 3:

निम्न सारणी से समान्तर माध्य कीजिए–

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
अवृत्तिः	12	18	27	20	17	6

समान्तरमाध्य का परिकलन (Calculation of Arithmetic Meam)

वर्ग	मध्य-मान	आवृत्ति	लघु रीति		प्रत्यक्ष रीति
			A = 25 से विचलन	गुणनफल	
(X)	(M.V.)	(f)	(dx)	(fdx)	(fx)
0-10	5	12	–20	–240	60
10-20	15	18	–10	–180	270
20-30	25	27	0	0	675
30-40	35	20	+10	+200	700
40-50	45	17	+20	+340	765
50-60	55	6	+30	+180	330
Total		N = 100		Σfdx = 300	ΣfX = 2800

लघु रीति–

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{N}$$

$$= 25 + \frac{300}{100} = 25 + 3$$

$$\therefore \bar{X} = 25 + 3 = 28$$

प्रत्यक्ष रीति–

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$= \frac{2800}{100}$$

$$\therefore \bar{X} = 28$$

नोट

क्या आप जानते हैं यदि वर्ग-विस्तार समान है तो 'लघु रीति' श्रेष्ठ है और यदि वर्गों का विस्तार असमान है तो 'प्रत्यक्ष रीति' उपयुक्त होगी।

समान्तर माध्य संबंधी कुछ स्मरणीय बातें (Some Memorable Points Regarding Arithmetic Mean)

(1) पद-विचलन रीति (Step Deviation Method)– लघु रीति को और भी सरल बनाने के लिये पद-विचलन रीति का प्रयोग किया जा सकता है बशर्ते कि श्रेणी में वर्ग-विस्तार 'समान' हो। लघु रीति और इस रीति में अंतर केवल इतना है कि लघु रीति में जो विचलन लिये जाते हैं उन्हें इस रीति में किसी समापवर्त्तक (common factor) से भाग देकर संक्षिप्त बना लिया जाता है। इन्हें ही पद-विचलन ($d'x$) कहते हैं। सामान्यत: वर्ग-विस्तार को ही समापवर्त्तक माना जाता है। फिर, पद-विचलनों को उनकी आवृत्तियों से गुणा करके $\Sigma df'x$ ज्ञात कर लते हैं। अंत में, समायोजन की दृष्टि से $\Sigma df'x$ में समापवर्त्तक (i) से गुणा कर दी जाती है। सूत्र व उदाहरण नीचे देखिए।

लघु रीति	पद-विचलन रीति
$\bar{X} = A + \dfrac{\Sigma fdx}{N}$	$\bar{X} = A + \dfrac{\Sigma fd'x}{N} \times i$

$\Sigma fd'x$ = पद-विचलनों तथा आवृत्तियों की गुणाओं का जोड़

i = समापवर्त्तक वर्ग-विस्तार

(2) संचयी आवृत्ति-वितरण– कभी-कभी वर्गान्तरों को संचयी आधार पर दिया जाता है। ऐसी स्थिति में संचयी वितरण को समान्य वितरण में बदल लेना चाहिये।

उदाहरण (Illustration) 5: निम्न सारणी से समान्तर माध्य निकालिए

प्राप्तांक:	10	20	30	40	50	60	70	80
अवृत्ति :	25	40	60	75	95	125	190	240

हल (Solution): सर्वप्रथम संचयी आवृत्ति वितरण को सामान्य आवृत्ति वितरण में बदला जायेगा–

समान्तर माध्य का परिकलन (पद-विचलन रीति)

प्राप्तांक	मध्य-बिंदु	आवृत्ति	पद-विचलन	गुणनफल
X	$M.P.$	f	$d'x = X - 45/10$	$f \times d'x$
0 – 10	5	25	– 4	– 100
10 – 20	15	15	– 3	– 45
20 – 30	25	20	– 2	– 40
30 – 40	35	15	– 1	– 15
40 – 50	45	20	0	0
50 – 60	55	30	+ 1	+ 30
60 – 70	65	65	+ 2	+ 130
70 – 80	75	50	+ 3	+ 150
		N = 240		Σfdx = 110

Mean Marks or $\bar{X} = A + \dfrac{\Sigma fd'x}{N} \times i = 45 + \dfrac{110}{240} \times 10$

= 45 + 4.58 $\quad\quad$ $\therefore$ माध्य प्राप्तांक = 49.58

नोट

(3) समावेशी वर्गान्तर (Inclusive Class Intervals)– जब वर्गान्तर समावेशी आधर पर दिये गये हों तो समान्तर माध्य निकालने के लिये उन्हें अपवर्जी बनाने की कोई आवश्यकता नहीं होती, क्योंकि मध्य-मूल्य वही रहते हैं भले ही वर्गों का समायोजन किया जाये या न किया जाये।

(4) असमान वर्गान्तर (न्दमुनंस बसें प्दजमतअंसे)– जब वर्गान्तर असमान हों तो उन्हें समान बानो के लिये आवृत्तियों के समायोजन की कोई आवश्यकता नहीं होती बल्कि ऐसे प्रश्न को उसके मूल रूप में ही हल कर देना चाहिये।

उदाहरण (Illustration) 5: निम्न समंकों का मध्यक ज्ञात कीजिए–

उम्र (वर्ष):	18–21	22–25	26–35	36–45	46–55
व्यक्तियों का संख्या :	8	32	54	36	20

हल (Solution): Calculation of Arithmetic Mean

उम्र	*M.P.*	आवृत्ति	$dx = X-30.5$	fdx
18–21	19.5	8	–11	–88
21–25	23.5	32	–7	–224
26–35	30.5	54	0	0
36–45	40.5	36	+10	+360
46–55	50.5	20	+20	+400
		$N = 150$		$\Sigma fdx = 448$

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{N} = 30.5 + \frac{448}{150} = 30.5 + 2.99 = 33.49$$

अत: मध्यक आयु = 33.49 वर्ष

(5) खुले सिरे वाले वर्गान्तर (Open-end Classses)– जब वर्गान्तर खुले सिर वाले दिये हुए हों तो सिद्धान्त रूप में, ऐसे प्रश्नों या वितरणों में समान्तर माध्य का प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए बल्कि उसके स्थान पर बहुलक तथा मध्यक का इस्तेमान करना चाहिए।

हाँ! यदि उक्त प्रश्न का समान्तर माध्य ही निकलाने के लिये कहा गया है तब ऐसी दशा में निम्न दो स्थितियों को ध्यान में रखना होगा–

(i)जब वर्गों का वर्ग-विस्तार समान हो– ऐसी स्थिति में पहले वर्ग की 'ऊपरी सीमा' में और अंतिम-वर्ग की निचली सीमा' में, उनके निकटतम वर्गों के वर्ग-विस्तार को क्रमश: घटाकर तथा जोड़कर अज्ञात सीमाओं का निर्धारण कर लेना चाहिए।

(ii) जब वर्गों का वर्ग-विस्तार असमान हो–नीचे दिए उदाहरण में वर्ग-विस्तार असमान है: दूसरे वर्ग का वर्ग-विस्तार 20 है, तीसरे का 30 और चौथे का

40 है अर्थात् वर्ग-विस्तार क्रमश: 10 से बढ़ रहा है। अत: ऐसी स्थिति में प्रथम वर्ग की निचली सीमा शून्य (10–10) होगी और अंतिम वर्ग की ऊपरी सीमा 150 (100+50) होगी अर्थात् प्रथम वर्ग 0–10 तथा अंतिम वर्ग 100–150 होगा।

Marks:	Below 10	10–30	30–60	60–100	Above 100
No. of Students:	5	9	16	7	3

(6) चार्लियर की शुद्धता की जाँच (Charlier's Check for Accuracy)– लघु-रीति या पद-विचलन रीति द्वारा समान्तर माध्य निकालते समय गणना-क्रिया की शुद्धता की जाँच कराने के लिए 'चार्लियर जाँच' का प्रयोग

किया जाता है।

विधि-(i)– सर्वप्रथम प्रत्येक विचलन या पद-विचलन में 1 जोड़कर $(dx + 1)$ अथवा $(d'x+1)$ ज्ञात कर लिया जाता है।

(ii) $(dx + 1)$ या $(d'x+1)$ में उनकी आवृत्तियों की गुणा करके गुणनफलों का योग $\Sigma[f(dx+1]$ अथवा $\Sigma[f(d'x+1)]$ज्ञात कर लिया जाता है।

(iii) तत्पश्चात् निम्न समीकरणों का प्रयोग किया जाता है–

$\Sigma fdx = \Sigma[f(dx+1)] - \Sigma f$ **लघु रीति** का प्रयोग करने पर

$\Sigma fd'x = \Sigma[f(d'x+1)] - \Sigma f$ **पद-विचलन** रीति का प्रयोग करने पर

(iv) यदि उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हैं, तो समझ लेना चाहिए कि गणन-क्रिया शुद्ध है अन्यथा कोई त्रुटि हो गई है।

टास्क समावेशी वर्गान्तर किसे कहते हैं?

उदाहरण (Illustration) 6: निम्न सारणी से माध्य निकालिए

वर्ग:	–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
आवृत्ति :	22	38	54	75	72	64	31	10

हल (Solution) : चूँकी पूरी समंक-माला में वर्ग-विस्तार (10) समान है। अत: अन्तिम वर्ग की ऊपरी सीमा 70 + 10 = 80 मानी जायेगी अर्थात् यह वर्ग 70–80 होगा और पहला वर्ग 0–10 होगा।

X	$M.V.$	f	$d'x = A$–35/10	$fd'x$	$(d'x+1)$	$f(d'x+1)$
0–10	5	22	– 3	– 66	– 2	– 44
10–20	15	38	– 2	– 76	– 1	– 38
20–30	25	54	– 1	– 54	0	0
30–40	35	75	0	0	+1	+ 75
40–50	45	72	+ 1	+ 72	+2	+ 144
50–60	55	64	+ 2	+128	+3	+ 192
60–70	65	31	+ 3	+ 93	+4	+ 124
70–80	75	10	+ 4	+ 40	+5	+ 50
		366		137		503

$[N = \Sigma f = 366, A = 35, \Sigma fd'x = 137]$ $[\Sigma f\,(d'x+1) = 503]$

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'x}{N} \times i = 35 + \frac{137}{366} \times 10 = 35 + 3.74 = 38.74$$

चार्लियर जाँच सूत्र का प्रयोग करे पर–

$\Sigma fd'x = \Sigma[f(d'x + 1)] - \Sigma f$ or $137 = 503 - 366$

$\therefore$ 137 = 137 अत: गणना-क्रिया में कोई अशुद्धि नहीं है।

(7) अज्ञात मूल्य या आवृत्ति का निर्धारण (Location of Missing Size of Frequency)– समान्तर माध्य की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि यदि किसी श्रेणी के इन तीन मानों $\bar{X}, N$ और ΣX में कोई से दो मान ज्ञात

नोट

हों तो तीसरा मान निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है–

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} \text{ or } \frac{\Sigma fX}{N},\ \Sigma X \text{ or } \Sigma fX = \bar{X} \times N,\ N = \frac{\Sigma X}{X} \text{ or } \frac{\Sigma fX}{\bar{X}}$$

उदाहरण (Illustration) 6: यदि निम्न आवृत्ति बंटन का समान्तर माध्य 67.45 है तो अज्ञात आवृत्ति ज्ञात कीजिए–

मार्क्स :	60-62	63-65	66-68	69-71	72-74
आवृत्ति:	15	54	–	81	24

हल (Solution): माना अज्ञात आवृत्ति है–

अज्ञात आवृत्ति निर्धारण (Locating the Missing Frequency)

मार्क्स	Mid-values	आवृत्ति	Total Size
X	X	f	$X{\times}f$
60–62	61	15	915
63–65	64	54	3456
66–68	67	f	$67\,f$
69–71	70	81	5670
72–74	73	24	1752
Total		$N = 174 + f$	$\Sigma fX = 11793 + 67\,f$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} \quad \text{or} \quad 67.45 = \frac{11793 + 67f}{174 + f}$$

$67.45\ (174 + f) = 11793 + 67\,f$ or $11736.3 + 67.45\,f = 11793 + 67\,f$

$67.45\,f - 67\,f = 11793 - 11736$ or $0.45\,f = 56.7$ or $f = 126$

अत: अज्ञात आवृत्ति 126 है।

समान्तर माध्य की सीमाएँ (Limitations of Arithmetic Mean)

एक आदर्श माध्य होने के बावजूद समान्तर माध्य निम्न दोषों से ग्रसित है–

(1) चरम मूल्यों का प्रभाव (Effect of Extreme Values)– इस माध्य का सबसे बड़ा दोष चरम-मूल्यों (अत्यधिक बड़े या छोटे मूल्यों) को अधिक महत्त्व देना है। उदाहरणार्थ, चार कर्मचारियों के वेतन क्रमश: 1000, 250, 210, 180 रु. का समान्तर माध्य 410 हुआ। स्पष्ट है कि अकेले पद-मूल्य (1000) ने औसत को काफी हद तक बढ़ा दिया है

(2) अवास्तविक माध्य (Unrealistic Average)– समान्तर माध्य कभी-कभी पूर्णांक न होकर दशमलव या भिन्न के रूप में आता है जोकि इसे अवास्तविक बना देता है। उदाहरणार्थ, चार माताओं द्वारा क्रमश: 3, 2, 1 व 4 बच्चों को जन्म दिया गया जिसका प्रति माता औसत 2.5 आया। नि:संदेह यह एक हास्यप्रद निष्कर्ष है।

(3) अप्रतिनिधित्व– समान्तर माध्य किसी श्रेणी का एक ऐसा मूल्य हो सकता है जो उस श्रेणी में न होकर कोई बाहर का मूल्य हो। उदाहरणार्थ, 6, 7 व 2 का समानतर माध्य 5 है जो इन तीनों में से एक भी नहीं है। यही कारण है कि यह माध्य उचित प्रतिनिधित्व नहीं कर पाता।

(4) गणना संबंधी जटिलता– स्थिति संबंधी माध्यों जैसे भूयिष्ठक व मध्यका की अपेक्षा समानतर माध्य की गणना-क्रिया अधिक जटिल है। प्रथम, यह निरीक्षण द्वारा नहीं निकाला जा सकता। दूसरा, यदि श्रेणी का कोई एक मूल्य भी अज्ञात है तो समान्तर माध्य नहीं निकल पायेगा क्योंकि यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता हैं

तीसरा, गुणात्मक समंकों के लिए समांतर माध्य का प्रयोग नहीं किया जा सकता। चौथा, मध्यका व भूयिष्ठक की भाँति इस माध्य का निर्धारण बिन्दु-रेखीय रीति द्वारा भी नहीं किया जा सकता।

(5) भ्रमात्मक निष्कर्ष– समान्तर माध्य कभी-कभी भ्रमात्मक निष्कर्ष भी देता है। उदाहरणार्थ, जूट उद्योग की दो फर्मों का पिछले तीन वर्षों में लाभ इस प्रकार रहा है–

A : 5000 रु. + 7000 रु. + 9000 रु. = औसत 7000 रु.

A : 12000 रु. + 6000 रु. + 3000 रु. = औसत 7000 रु.

औसत लाभ दोनों फर्मों का एक समान है जो इनके समान-स्तर का प्रतीक है। परंतु वास्तविकता यह है कि A फर्म उन्नति की ओर अग्रसर है जबकि B फर्म दिवालियापन की ओर बढ़ रही है।

(6) अनुपयुक्तता– समांतर माध्य का अंतिम दोष यह है कि इसके द्वारा अनुपात, दर व प्रतिशत आदि की कणना करना संभव नहीं हो पाता है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए-

1. निम्नलिखित पद-मूल्यों से समांतर माध्य ($\overline{X}$)ज्ञात कीजिए–
2. निम्न समंकों से समान्तर माध्य ($\overline{X}$) ज्ञात कीजिए–

60	75	84	92	96	100	150	280
74	80	86	94	98	104	180	400
75	82	90	95	100	110	200	600

3. निम्न समंकों से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए–

15	19	18	28	15	21	30	32	11
40	20	22	11	15	35	23	22	12

4. 20 छात्रों द्वारा प्राप्त निम्नांकित अंकों से मध्यक ($\overline{X}$) मूल्य ज्ञात कीजिए–

28	25	29	38	32	33	33	30	42	45
46	47	48	54	52	53	60	50	65	72

5.2 बहुलक के अनुप्रयोग (Application of Mode)

अंग्रेजी शब्द 'Mode' की उत्पत्ति फ्रेंच भाषा के 'La mode' से हुई है जिसका अर्थ है फैशन या रिवाज अर्थात् जिसका प्रचलन अधिक हो। सांख्यिकी में भी इस शब्द का यही अर्थ लिया जाता है। अत: बहुलक किसी समंक-मात्रा में अधिकतम आवृत्ति वाला पद होता है अथवा यह उस बिन्दु को बताता है जहाँ सबसे अधिक पद संकेन्द्रीत होते हैं। इस प्रकार बहुलक सर्वाधिक घनत्व की स्थिति, सर्वाधिक आवृत्ति वाले पद का मूलय या मूल्यों के सर्वाधिक संकेन्द्रण के बिन्दु का प्रतीक है। इसीलिये बहुलक को स्थिति संबंधी माध्य कहा जाता है।

कैनी एवं कीपिंग के अनुसार "बहुलक वह मूल्य है जो श्रेणी में सबसे अधिक बार आता हो अर्थात् जिसकी सर्वाधिक आवृत्ति हो।"

जिजेक के मतानुसार "बहुलक वह मूलय है जो समूह में सबसे अधिक बार आता है और जिसके चारों ओर सबसे अधिक घनत्व वाले पदों का जमाव रहता है।"

ऑक्सटन एवं काउडेन के अनुसार "एक वितरण का बहुलक वह मूल्य है जिसके निकट श्रेणी की इकाइयाँ अधिक-से-अधिक केन्द्रित होती है। उसे श्रेणी का सर्वाधिक प्रतिरूपी या विशिष्ट (typical) मूल्य कामना जा सकता

नोट

है।"

प्रो. टुटले के अनुसार "बहुलक वह मूल्य है जिसके एकदम आस-पास आवृत्ति घनत्व अधिकतम होता है।"

बहुलक का निर्धारण (Location or Computation of The Mode)

I. व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक निर्धारण (Mode in individual observation)

सैद्धान्तिक रूप से एक व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक निर्धारण तक नहीं हो सकता जब तक उसे खण्डित या अखण्डित श्रेणी में न बदल ले। व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक निकालने की तीन विधियाँ हैं–

1. व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित श्रेणी में बदल कर (Change in discrete series),
2. सतत् या अखण्डित श्रेणी (Continuous series) में बदल कर,
3. समान्तर माध्य या मध्यका की सहायता से बहुलक का अनुमान।

1. व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित श्रेणी में बदलना–जब व्यक्तिगत श्रेणी के अनेक मूल्य दो या दो से अधिक बार पाये जाते हैं तो उन्हें आरोही क्रम के अनुसार रखकर उनके सामने उनकी आवृत्ति लिख देते हैं। फिर निरीक्षण द्वारा अधिकतम आवृत्ति वाले मूल्य को चुन लिया जाता है, यही बहुलक होता है।

उदाहरण (Illustration) 7: निम्न श्रेणी का बहुलक ज्ञात कीजिये–

20, 22, 23, 20, 22, 24, 25, 21, 22, 23, 24, 22

हल (Solution) : निरीक्षण से स्पष्ट है कि 22 वाला पद सबसे अधिक (5) बार आया है।

अत: 22 ही बहुलक पद होगा। फिर इसे खण्डित श्रेणी में बदलने पर भी यही परिणाम होगा–

x :	20	21	22	23	24	25
y :	2	1	5	2	2	1

अत: बहुलक (mode) या $z = 2$

यदि दो या अधिक चर मूल्यों की आवृत्तियाँ अधिकतम हों तो बहुलक निर्धारण कठिन हो जाता है। ऐसी स्थिति में समंक श्रेणी में उतने ही बहुलक होंगे जितनी अधिकतम आवृत्तियाँ होंगी। ऐसी समंकमालाएँ द्वि-बहुलक (bi-modal), त्रि-बहुलक (Tri-modal) या अनेक बहुलक (multi-modal) श्रेणियाँ कहलाती हैं।

उदाहरण (Illustration) 8: निम्न समंकों से बहुलक परिकलित कीजिए–

क्रमांक :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आकार :	2	14	10	14	22	10	8	14	10	12

हल (Solution): निरीक्षण से स्पष्ट है कि 14 और 10 वाले पद तीन-तीन बार आये हैं अत: इसका बहुलक अनिश्चित अर्थात् अनिर्धारित है अर्थात् यह एक द्वि-बहुलक श्रेणी (bimodal series) है।

2. सतत् या अखण्डित श्रेणी में बदलना–जब श्रेणी में कोई भी व्यक्तिगत मूल्य एक से अधिक बार नहीं पाया जाता है तो उसे खण्डित श्रेणी में बदलना व्यर्थ होगा क्योंकि सभी मूल्यों की आवृत्ति समान होने पर बहुलक निर्धारण करना असम्भव होता है। ऐसी स्थिति में उसे सतत् आवृत्ति बंटन के रूप में बदलकर अधिकतम आवृत्ति वाला वर्गान्तर ज्ञात कर लेना चाहिए। फिर इस बहुलक वर्ग में सूत्र द्वारा बहुलक मूल्य ज्ञात किया जा सकता है।

3. समान्तर माध्य एवं मध्यका की सहायता से बहुलक निर्धारण–यदि किसी व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका (M), समान्तर माध्य $(\overline{X})$ और बहुलक तीनो ही ज्ञात करने हों तो इन तीनों के पारस्परिक सम्बन्ध पर आधारित निम्न सूत्र द्वारा ही बहुलक मूल्य का अनुमान लगाना चाहिए–

$$(\overline{X} - Z) = 3(\overline{X} - M) \quad \text{or} \quad Z = 3M - 2\overline{X}$$

II. खण्डित श्रेणी में बहुलक निर्धारण (Mode in Discrete Series)

खण्डित श्रेणी में बहुलक निर्धारण की दो रीतियाँ हैं–(*a*) निरीक्षण रीति, (*b*) समूहन रीति।

(*a*) **निरीक्षण रीति** (Inspection Method)—यह रीति मुख्यत: तब अपनाई जाती है जब आवृत्ति बंटन निम्न शर्तें पूरी करता हो–

(*i*) श्रेणी की आवृत्तियाँ नियमित हों अर्थात् पहले बढ़ें फिर अधिकतम हों और उसके बाद गिरती हुई हों।

(*ii*) श्रेणी की अधिकतम आवृत्ति केवल एक ही हो और लगभग केन्द्र में हो।

(*iii*) अधिकतम आवृत्ति से पहले एवं बाद की आवृत्तियों के योग में अधिक अन्तर न हो।

उदाहरण (Illustration) 9: निम्न श्रेणी में एक कक्षा के 50 छात्रों के भार दिये गये हैं। बहुलक भार ज्ञात कीजिए–

भार (किग्रा)	48	49	50	51	52	53
छात्रों की संख्या	4	10	20	11	3	2

हल (Solution): उपर्युक्त श्रेणी में आवृत्तियाँ नियमित हैं अत: निरीक्षण द्वारा बहुलक ज्ञात किया जाएगा, अधिकतम आवृत्ति 20 है जिसका पद मूल्य 50 है अत: बहुलक भार या $Z = 50$ किग्रा।

(*b*) **समूहन रीति** (Grouping Method)—समूहन रीति का प्रयोग उस स्थिति में किया जाता है जब समंकमाला की आवृत्तियाँ अनियमित हों, क्योंकि ऐसे में अधिकतम आवृत्ति का पता नहीं लग पाता। आवृत्तियाँ अनियमित तब मानी जाती हैं जब–

(*i*) आवृत्तियाँ अनियमित रूप से कभी बढ़ें और कभी घटें।

(*ii*) अधिकतम आवृत्ति केन्द्र में न होकर श्रेणी के आरम्भ या अन्त में हो।

(*iii*) अधिकतम आवृत्ति या आवृत्ति संकेन्द्रण दो या अधिक स्थानों पर हो।

(*iv*) अधिकतम आवृत्ति के दोनों ओर की आवृत्तियाँ एक-दूसरे से पूर्णतया भिन्न हों।

समूहन की प्रक्रिया (Procedure of Grouping)—इस क्रिया के लिए एक सारणी बनाई जाती है जिसमें चर मूल्यों के अतिरिक्त आवृत्ति प्रयोग के लिए 6 खाने बनाये जाते हैं। समूहन क्रिया करते समय केवल आवृत्तियों का प्रयोग किया जाता है, पद मूल्यों का नहीं। क्रिया-विधि निम्न होती है–

- पहले खाने (1) में प्रश्न में दी गई आवृत्तियाँ ही लिखी जाती हैं।
- दूसरे खाने में शुरू से दो-दो आवृत्तियों के जोड़ लिखे जाते हैं।
- तीसरे खाने में पहली आवृत्ति (पहले खाने की) को छोड़कर दो-दो आवृत्तियों के जोड़ लिखे जाते हैं।
- चौथे खाने में पहले खाने की तीन-तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं।
- पाँचवें खाने में पहली आवृत्ति (पहले खाने की) को छोड़कर तीन-तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं।
- छठे खाने में शुरू की दो आवृत्तियाँ छोड़कर (पहले खाने की) तीन-तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं।

इस क्रिया के बाद प्रत्येक खाने की अधिकतम आवृत्ति समूह को रेखांकित कर दिया जाता है। समूहन में न आ सकने वाली आवृत्ति को छोड़ दिया जाता है।

विश्लेषण सारणी (Analysis Table)—आवृत्तियों का समूहन करने के बाद विश्लेषण सारणी बनाकर यह पता लगाते हैं कि वास्तव में कौन-सा पद मूल्य बहुलक का दावेदार है। विश्लेषण सारणी में सबसे पहले समूहन सारणी के विभिन्न खानों की संख्या क्रमानुसार लिख दी जाती है। इस विश्लेषण सारणी के क्षैतिज भाग में पद मूल्य लिखे जाते हैं। उन अधिकतम आवृत्तियों के चर मूल्यों पर चिन्ह लगाकर उनकी गणना कर ली जाती है। अन्त में जिस पद मूल्य के सामने अधिकतम चिन्ह होते हैं उसे ही बहुलक मान लेते हैं।

इस प्रकार का समूहन का उद्देश्य अनियमित आवृत्ति वाले बंटन में आवृत्तियों का जमाव बिन्दु निश्चित करना होता है क्योंकि अधिकतम आवृत्ति निर्धारित करने में निकटतम आवृत्तियों का बहुत प्रभाव पड़ता है।

उदाहरण (Illustration) 10: किसी महाविद्यालय के 230 छात्रों के कॉलर माप निम्न हैं। कॉलर का बहुलक माप निर्धारित कीजिए।

नोट

कॉलर माप (सेमी)	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
छात्रों की संख्या	7	14	30	28	35	34	16	14	36	16

हल (Solution): आवृत्तियाँ अनियमित होने के कारण समूहन रीति द्वारा बहुलक ज्ञात किया जाएगा।

समूहन द्वारा बहुलक निर्धारण
(Location of Mode By Grouping)

Collar Size	आवृत्ति (*i*)	(*ii*)	(*iii*)	(*iv*)	(*v*)	(*vi*)	अधिकतम आवृत्तियों की संख्या	
32	7	21		51				
33	14		44		72			
34	30	58				93		
35	28		63	97			|	1
36	35	69			85		|||	3
37	34		50			64	|||||	5
38	16	30		66			|||	3
39	14		50		66		|	1
40	36	52					|	1
41	16							

उपर्युक्त सारणी को देखने से पता चलता है कि सबसे अधिक (5) बार 36 मूल्य पाया जाता है। समूहन द्वारा प्राप्त अधिकतम आवृत्तियों का विश्लेषण निम्न सारणी के रूप में भी किया जा सकता है–

विश्लेषण सारणी (Analysis Table)

स्तम्भ संख्या	पद मूल्य 32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
(*i*)									4	
(*ii*)					4	4				
(*iii*)				4	4					
(*iv*)				4	4	4				
(*v*)					4	4	4			
(*vi*)			4	4	4					
बारम्बारता	—	—	1	3	5	3	1	—	1	—

अत: कॉलर का बहुलक माप (Modal Size of the collar) = 36 सेमी

III. अखण्डित या सतत् श्रेणी (Continuous Series)

अखण्डित श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने के लिए पहले बहुलक वर्ग का निर्धारण किया जाता है। यदि आवृत्तियाँ नियमित हैं तो निरीक्षण द्वारा ही बहुलक वर्गान्तर का पता चल जाता है परन्तु अनियमित आवृत्तियों वाली श्रेणी में समूहन द्वारा विश्लेषण करके बहुलक वर्ग निर्धारित किया जाता है। इसके बाद बहुलक का मूल्य निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर लिया जाता है–

नोट

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i \quad \text{or} \quad Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times (l_2 - l_1)$$

Z = बहुलक मूल्य (Value of mode)

l_1 = बहुलक वर्ग की निचली सीमा (lower limit of the modal group)

l_2 = बहुलक वर्ग की ऊपरी सीमा (upper limit of the modal group)

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति (freqency of modal class)

f_0 = बहुलक वर्ग से तुरन्त पहले वाले वर्ग अर्थात् लघुतर वर्ग की आवृत्ति (frequency of the premodal class)

f_2 = बहुलक वर्ग से तुरन्त बाद आने वाले अर्थात् उच्चतर वर्ग की आवृत्ति (frequency of the post modal class)

i = बहुलक वर्ग का विस्तार (magnitude of the modal class)

सूत्र का आधार–यह सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि बहुलक मूल्य बहुलक वर्ग के निकटवर्ती वर्गों की आवृत्तियों से प्रभावित होता है। यदि पिछले वर्ग की आवृत्ति, अगले वर्ग की आवृत्ति की अपेक्षा अधिक है तो बहुलक मूल्य बहुलक वर्ग की निचली सीमा के अधिक निकट होगा। इसके विपरीत यदि अगले वर्ग की आवृत्ति अधिक है तो बहुलक वर्ग की ऊपरी सीमा के अधिक निकट होगा।

सूत्र का दूसरा रूप–बहुलक के सूत्र को आवृत्तियों के अन्तर के रूप में निम्न प्रकार लिखा जाता है–

I — निचली (अधर) सीमा में जोड़कर

$$Z = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

II — ऊपरी (अपर) सीमा में से घटाकर

$$Z = l_2 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

यहाँ $\Delta_1 = f_1 - f_0$ तथा $\Delta_2 = f_1 - f_2$

l_1 व l_2 बहुलक वर्ग की निचली एवं ऊपरी सीमा हैं।

उदाहरण (Illustration) 12: निम्न श्रेणी का बहुलक परिकलित कीजिए–

वर्ग अन्तराल	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
आवृत्ति	10	12	16	14	10	8	17	5	4

हल (Solution) :

आवृत्ति अनियमित होने के कारण बहुलक वर्ग का निर्धारण समूहन रीति द्वारा किया जाएगा।

नोट

बहुलक वर्ग का निर्धारण (Location of Modal Group)

वर्गान्तर	आवृत्ति	दो-दो के जोड़		तीन-तीन के जोड़			अधिकतम आवृत्ति वाले वर्ग	
	(*i*)	(*ii*)	(*iii*)	(*iv*)	(*v*)	(*vi*)		
4—8	10	22						
8—12	12		28	38				
12—16	16	30			42			
16—20	14		24			40	|	1
20—24	10	18		32			|||	3
24—28	8		25				|||||	5
28—32	17	22			35		|||	3
32—36	5		9	26		30	|	1
36—40	4						|	1

सारणी के निरीक्षण से पता चलता है कि (12−16) बहुलक वर्ग है। इस वर्ग में बहुलक का मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा—

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$Z = 12 + \frac{16 - 12}{2 \times 16 - 12 - 14} \times 4 = 12 + \frac{4 \times 4}{32 - 36} = 12 + \frac{16}{6}$$

$$= 12 + 2.67$$

Mode (Z) = 14.67

दूसरे सूत्र का प्रयोग करने पर

$$Z = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

$$= 12 + \frac{4}{4+2} \times 4$$

$$= 12 + \frac{4}{6} \times 4$$

Z = 14.67

$$Z = l_2 - \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

$$= 16 - \frac{2}{4+2} \times 4$$

$$= 16 - \frac{2 \times 4}{6} = 16 - \frac{8}{6}$$

Z = 14.67

बहुलक सम्बन्धी स्मरणी बिन्दु

(Some memorable points about mode)

1. वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग (Alternative Formula)—जब बहुलक वर्ग की आवृत्ति की तुलना में उसके बाद वाली व पहले वाली दोनों आवृत्तियाँ बड़ी हों या दोनों में से कोई भी एक बड़ी हो तो सामान्य सूत्र के स्थान पर नीचे दिये गये वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग करते हैं अन्यथा उत्तर बहुलक वर्ग के बाहर आयेगा जो कि गलत है—

$$Z = l_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i$$

2. घनत्व परीक्षण (Density Test)—कभी-कभी समूहन के बाद भी दो या दो से अधिक वर्गों की आवृत्तियाँ समान रूप से अधिकतम बार पायी जाती हैं तब बहुलक वर्ग का निर्धारण करने के लिए उन वर्गों की और उनके निकटवर्ती वर्गों की आवृत्तियाँ जोड़कर उनकी तुलना की जाती है जिस वर्ग समूह का जोड़ ज्यादा होता है वही बहुलक वर्ग मान लिया जाता है। लेकिन यदि इनका जोड़ भी बराबर हो तो फिर उसे द्वि-बहुलक श्रेणी मान लेते हैं अर्थात् उसका बहुलक मूल्य अनिश्चित एवं अनिर्धारित है। उदाहरण के लिए–

उदाहरण (Illustration) 12: निम्न सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए–

मध्य आकार	15	25	35	45	55	65	75	85
आवृत्तियाँ	5	9	13	21	20	15	8	3

हल (Solution): वर्गान्तरों के स्थान पर केन्द्रीय आकार या मध्य मूल्य दिये गये हैं, जिनमें दस-दस का अन्तर है। अत: वर्गान्तरों की सीमाएँ $15 \pm 5, 25 \pm 5, 35 \pm 5$ होंगी अर्थात् वर्गान्तर 10-20, 20-30 होगा।

बहुलक वर्ग का निर्धारण
(Location of Modal Group)

वर्गान्तर	आवृत्ति	दो-दो के जोड़		तीन-तीन के जोड़			अधिकतम आवृत्ति वाले वर्ग	
	(i)	*(ii)*	*(iii)*	*(iv)*	*(v)*	*(vi)*		
10—20	5	14		27				
20—30	9		22		43			
30—40	13	34				54	|	1
40—50	21		41	56			||	2
50—60	20	35			43		~~||||~~	5
60—70	15		23			26	~~||||~~	5
70—80	8	11					||	3
80—90	3						|	1

सारणी से स्पष्ट है कि (40 – 50) एवं (50 – 60) वाले वर्गों में अधिकतम आवृत्ति 5 – 5 आयी है। अत: दोनों में से बहुलक वर्ग निर्धारित करने के लिए घनत्व परीक्षण किया जाएगा–

	40 – 50	50 – 60
बहुलक वर्ग की आवृत्ति	21	20
पहले वर्ग की आवृत्ति	13	21
बाद वाले वर्ग की आवृत्ति	20	15
	54	56

अत: (50 – 60) ही बहुलक वर्ग होगा जिसकी आवृत्ति 20 है परन्तु इससे पहले वर्ग की आवृत्ति अधिक होने के कारण वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग होगा–

$$Z = l_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i = 50 + \frac{15}{21 + 15} \times 10 = 50 + \frac{50}{36}$$

$$= 50 + 4.166 = 54.17$$

नोट

3. समावेशी वर्गान्तर (Inclusive Class Intervals)—यदि वर्गान्तर समावेशी आधार पर है तो सूत्र तो वही रहता है, परन्तु बहुलक ज्ञात करने से पहले अर्थात् आन्तरणगन करते समय उन्हें अपवर्जी श्रेणी में बदल लेना चाहिए। ऐसा न करने पर उत्तर गलत हो जाएगा।

उदाहरण (Illustration) 13: निम्न समंकमाला से बहुलक ज्ञात कीजिए–

वर्ग	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45
आवृत्ति	8	11	17	33	25	19	10	5	2

हल (Solution): निरीक्षण से स्पष्ट है कि 16 – 20 ही बहुलक वर्ग है क्योंकि इसकी आवृत्ति अधिकतम है। चूँकि ये वर्गान्तर समावेशी हैं अत: इन्हें अपवर्जी में बदलना जरूरी है। आन्तरगणन करते समय वर्ग की सीमाएँ 15.5-20.5 होंगी।

अत:

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times l_2 - l_1$$

$$= 15.5 + \frac{33 - 17}{2 \times 33 - 17 - 25} \times 5$$

$$Z = 15.5 + \frac{16 \times 5}{24}$$

$$= 15.5 + 3.33$$

$l_1 = 15.5$

$l_2 = 20.5$

$f_1 = 33$

$f_0 = 17$

$f_2 = 24$

बहुलक (Z) = 18.83

4. संचयी आवृत्ति श्रेणी या बंटन में बहुलक (Mode in case of Cumulative Frequency Series)—यदि आवृत्ति बंटन संचयी आवृत्ति के आधार पर बना है तो बहुलक ज्ञात करने के लिए पहले उसे सामान्य आवृत्ति बंटन में बदल लेंगे।

उदाहरण (Illustration) 14: निम्न श्रेणी से बहुलक ज्ञात कीजिए–

वर्ग अन्तराल	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
आवृत्ति	4	16	56	97	124	138	140

हल (Solution):

यह एक संचयी श्रेणी है जिसे सामान्य आवृत्ति श्रेणी में बदला जाएगा।

वर्ग	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
आवृत्ति	4	12	40	41	27	14	02

निरीक्षण द्वारा स्पष्ट है कि 30 – 40 ही बहुलक वर्ग है, अत: सूत्र में मूल्य रखने पर

$$l_1 = 30, f_1 = 41, f_0 = 40, f_2 = 27, i = 0$$

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i = 30 + \frac{41 - 40}{2 \times 41 - 40 - 27} \times 10$$

$$= 30 + \frac{10}{15} = 30 + 0.67$$

$$Z = 30.67$$

बहुलक मूल्य = 30.67

नोट

5. श्रेणी या वर्गान्तरों का अवरोही क्रम (Descending Order of the series)–यदि श्रेणी आरोही के स्थान पर अवरोही क्रम में दी गई है अर्थात् ऊपर से नीचे की ओर घटती हुई है तो हम सूत्र का दो प्रकार से प्रयोग कर सकते हैं–

(*a*) **सामान्य सूत्र का प्रयोग**–सामान्य सूत्र को प्रयोग करते समय f_0 का मान बहुलक वर्ग से निचले वर्ग की आवृत्ति होगी एवं f_2 बहुलक वर्ग से उच्चतर वर्ग की आवृत्ति मानी जाएगी।

(*b*) **संशोधित सूत्र का प्रयोग**–अवरोही वर्गान्तर में सामान्य सूत्र में थोड़ा परिवर्तन करते हैं। इसमें (l_1 +) के स्थान पर (l_2 –) का प्रयोग करते हैं अर्थात्

आरोही वर्गान्तर | अवरोही वर्गान्तर

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i \quad Z = l_2 - \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

6. जब मध्य मूल्य दिये गये हों (When mid-values are given)–कभी-कभी वर्गान्तरों के स्थान पर उनके मध्य मूल्य दिये होते हैं क्योंकि अखण्डित श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने के लिए ऊपरी एवं निचली दोनों सीमाओं की आवश्यकता होती है। अत: निम्न सूत्र द्वारा वर्गान्तरों की ऊपरी एवं निचली सीमाएँ ज्ञात कर लेते हैं–

$$l_1 = \text{M.V} = \frac{i}{2} \qquad l_2 = \text{M.V} + \frac{i}{2}$$

7. असमान वर्गान्तर वाली श्रेणी (Series with unequal class intervals)–यदि श्रेणी में वर्ग विस्तार असमान है तो प्रश्न हल करने से पूर्व उसे समान कर लेना चाहिए क्योंकि बहुलक का सूत्र 'समान वर्गान्तर' की मान्यता पर आधारित है।

क्या आप जानते हैं यदि किसी सतत् आवृत्ति श्रेणी का बहुलक एवं कुल आवृत्तियों का योग ज्ञात हो तो कुछ अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण सूत्र द्वारा किया जा सकता है।

उदाहरण (Illustration) 15: नीचे दिये अपूर्ण बंटन में अज्ञात आवृत्ति का मान ज्ञात कीजिए यदि इसका बहुलक 35 है–

वर्ग अन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
आवृत्ति	10	12	14	20	–	12	10

हल (Solution): Z = 35, अत: बहुलक वर्ग 30–40 है और अज्ञात आवृत्ति उसके बाद वाले वर्ग की अर्थात् f_2 है।

$Z = 35, l_1 = 30, f_0 = 14, f_1 = 20, i = 10, f_2 = ?$

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i = 30 + \frac{20 - 14}{2 \times 20 - 14 - f_2} \times 10$$

$$35 = 30 + \frac{6 \times 10}{26 - f_2} \quad \text{या} \quad 35 - 30 = \frac{60}{26 - f_2} \quad \text{या} \quad 5(26 - f_2) = 60$$

$$130 - 5f_2 = 60 \quad \text{या} \quad 5f_2 = 130 - 60 = 70$$

$$\therefore \quad f_2 = \frac{70}{5} = 14$$

अत: बंटन की अज्ञात आवृत्ति 14 होगी।

नोट

5.3 मध्यका के अनुप्रयोग (Application of Median)

मध्यका भी बहुलक की तरह स्थिति संबंधी एक माध्य है। मध्यका, एक क्रमबद्ध समंक-माला का केन्द्रीय या मध्य-मूल्य होता है अर्थात् उसे दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रो. कौनर के अनुसार, "मध्यका समंकश्रेणी का वह चार-मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार बांटता है कि एक भाग के सभी मूल्य मध्यका से कम (अर्थात् छोटे) तथा दूसरे भाग के सभी मूल्य मध्यका से अधिक (अर्थात् बड़े) हों। उदाहरणार्थ, यदि 5 छात्रों के प्राप्तांक क्रमशः 2, 5, 6, 9, 14 हों तो उनका मध्यका 6 होगा क्योंकि यह तीसरे क्रम का अंक श्रेणी के बिल्कुल मध्य में स्थित है और इससे पहले के दोनों अंक (2, 5) इससे छोटे हैं तथा बाद के दोनों अंक (9, 14) इससे बड़े हैं।

मध्यका का निर्धारण (Computation of Median)

व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका निर्धारण (Median in Individual Series)–व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका ज्ञात के लिए निम्न क्रियाएँ की जाती हैं–

(*a*) सबसे पहले पद-मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में अनुविन्यासित किया जाता है। दोनों क्रमों में केन्द्र-बिन्दु एक ही होता है। मूल्यों की क्रम संख्याएँ भी साथ-साथ लिख देनी चाहिए।

(*b*) क्रमबद्ध करने के बाद निम्न सूत्र का प्रयोग करना चाहिए–

$$M = \text{Size of} \left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item} \qquad M \rightarrow \text{Median (मध्यका)}$$

$$N \rightarrow \text{Number of items (पदों की संख्या)}$$

इस सूत्र के द्वारा हमें मध्यका मूल्य ज्ञात नहीं होता बल्कि मध्यका संख्या का पता चल जाता है, इसी क्रम संख्या का पद मूल्य ही वास्तव मे मध्यका मूल्य होता है।

सम पद संख्या वाली श्रेणी में मध्यका निर्धारण

यदि व्यक्तिगत श्रेणी में सम पद संख्या होती है अर्थात् 2 से विभाज्य है; जैसे–N = 8 या N = 12 तो सूत्र द्वारा ज्ञात होने वाली क्रम संख्या पूर्णांक नहीं होगी बल्कि 4.5 या 6.5 होगी। ऐसे में क्रम संख्या का निर्धारण करने के लिए उसके दोनों ओर की दो पूर्ण क्रम संख्याओं के मूल्यों को जोड़कर 2 से विभाजित कर दिया जाता है। यही मध्यका मूल्य होता है।

$$\text{Size of 4.5th item} = \frac{\text{Value of 4th item} + \text{Size of 5th item}}{2}$$

$$= \frac{23+29}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

Median marks (M) = 26

खण्डित श्रेणी या विच्छिन्न श्रेणी (Discrete series) **में मध्यका निर्धारण**–खण्डित श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्न क्रियाएँ की जाती हैं–

1. सबसे पहले संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती हैं और संचयी आवृत्ति श्रेणी में बदल लिया जाता है।
2. इसके बाद निम्न सूत्र द्वारा मध्यका की क्रम संख्या ज्ञात कर ली जाती है–

$$M = \text{Size of} \left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item} \qquad \text{N आवृत्ति का योग}$$

3. मध्यका साइज या क्रम संख्या का मूल्य संचयी आवृत्ति की सहायता से ज्ञात कर लिया जाता है। जिस संचयी आवृत्ति में यह क्रम संख्या प्रथम बार शामिल होती है उसका मूल्य ही मध्यका होती है।

नोट

उदाहरण (Illustration) 16: निम्न श्रेणी से मध्यका ज्ञात कीजिए–

पद आकार	6	8	10	12	14	16	18	20	22
आवृत्ति	4	8	10	22	18	15	9	6	3

हल (Solution):

पद का आकार	**आवृत्ति**	**संचयी आवृत्ति**
6	4	4
8	8	12
10	10	22
12	22	44
14	18	62
16	15	77
18	9	86
20	6	92
22	3	95
	N = 95	

$$\text{Median} = \text{Size of}\left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item}$$

$$= \text{Size of}\ \frac{95+1}{2} = \text{Size of}\ \frac{96}{2} = 48\text{th item}$$

सारणी में संचयी आवृत्तियों को देखने से ज्ञात होता है कि 48वीं इकाई का मूल्य 14 है क्योंकि 45वीं इकाई से 62वीं इकाई तक सभी पदों का मूल्य 14 है।

अखण्डित या सतत् श्रेणी में मध्यका निर्धारण (Median in Continuous series)—सतत् श्रेणी में मध्यका का मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न क्रिया की जाती है–

1. सबसे पहले संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती हैं।
2. इसके बाद मध्यका संख्या निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है–

$$\text{Median} = \text{Size of}\left(\frac{N}{2}\right)\text{th item}$$

सतत् श्रेणी में मध्यका $\left(\frac{N}{2}\right)$th item का ही मूल्य होता है। $\left(\frac{N+1}{2}\right)$th item का नहीं।

इसके दो कारण होते हैं–

1. मध्यका का मूल्य एक समान होना चाहिए चाहे उसका निर्धारण आरोही वर्गान्तरों के आधार पर किया जाए या अवरोही वर्गान्तरों के आधार पर, केन्द्र-बिन्दु को $N/2$ पर स्थित मानने से दोनों स्थितियों में मध्यका समान आती है।
2. संचयी आवृत्ति वक्र खींचकर मध्यका का मूल्य निर्धारित करने में भी $N/2$ का प्रयोग ही उचित है क्योंकि वक्र का केन्द्र-बिन्दु $N/2$ पर होता है।
3. मध्यका की संख्या जिस संचयी आवृत्ति में पहली बार आती है उसका वर्ग मध्यका वर्गान्तर कहलाता है।
4. मध्यका वर्ग में मध्यका मूल्य-निर्धारण के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं–

नोट

प्रथम सूत्र– $M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c)$ or $M = l_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c\right)$

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(m - c)$$

M = मध्यका (median)

l_1 = मध्यका वर्ग की निचली सीमा (Lower limit of class)

i = मध्यका वर्ग का विस्तार ($l_2 - l_1$)

f = मध्यका वर्ग की आवृत्ति (Frequency of median class)

m = मध्यका संख्या (median number i.e., $\frac{N}{2}$)

c = मध्यका वर्गान्तर से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति

(c.f. of the class just preceding the median class)

उदाहरण (Illustration) 17: 100 विद्यार्थियों के निम्न प्राप्तांकों से मध्यका ज्ञात कीजिए–

प्राप्तांक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
छात्रों की संख्या	9	28	35	18	10

हल (Solution):

मध्यका निर्धारण

प्राप्तांक	**छात्रों की संख्या**	**संचयी आवृत्ति**
0 – 10	9	9
10 – 10	28	37*c*
l 20 – 30	35*f*	72
30 – 40	18	90
40 – 50	10	100
	N = 100	

मध्यका संख्या $= \text{Size of} \left(\frac{N}{2}\right) \text{th item} = \text{Size of } \frac{100}{2} \text{th item}$

m = 50th item

संचयी आवृत्तियों के निरीक्षण से पता चलता है कि 50वीं इकाई 72 संचयी आवृत्ति में पहली बार शामिल हुई है। इसलिए इसका वर्गान्तर (20 – 30) ही मध्यका वर्गान्तर होगा। मध्यका वर्ग में मध्यका मूल्य निम्न सूत्र द्वारा निश्चित होगा–

$$M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c)$$

$$= 20 + \frac{10}{35}(50 - 37) = 20 + \frac{10}{35} \times 13$$

$$= 20 + \frac{130}{35} = 20 + 3.71$$

$$M = 23.71$$

नोट

मध्यका सम्बन्धी महत्वपूर्ण तथ्य

1. **अवरोही वर्गान्तर** (Descending class interval)–जब वर्गान्तर आरोही क्रम में दिये गये हों तो मध्यका का निर्धारण निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है–

   द्वितीय सूत्र–$M = l_2 - \frac{(l_2 - l_1)}{f}(m - c)$ या $M = l_2 - \frac{i}{f}(m - c)$

2. c **का निर्धारण**–प्रथम सूत्र का प्रयोग करने पर c का मान निम्न प्रकार से ज्ञात करते हैं–

   $c = (N - c.f)$ = (कुल आवृत्ति - मध्यका वर्ग की संचयी आवृत्ति)

   द्वितीय सूत्र का प्रयोग करने पर मध्यका वर्ग की निचली सीमा (l_1) के बजाय ऊपरी सीमा (l_2) ली जाती है एवं c मध्यका वर्ग से पहले वाले वर्ग की आवृत्ति होती है।

3. **संचयी आवृत्ति श्रेणी या बंटन** (Cumulative Frequency Series)–यदि श्रेणी संचयी आवृत्ति बंटन के रूप में दी गई हो तो उसे सामान्य आवृत्ति श्रेणी में बदल लेना चाहिए जिससे मध्यका वर्ग की आवृत्ति ज्ञात हो जाए।

4. **जब वर्गान्तरों के स्थान पर मध्य मूल्य दिये हों**–ऐसी स्थिति में गणना करते समय $\left(\text{M.V.} \pm \frac{i}{2}\right)$ सूत्र द्वारा वर्गान्तर ज्ञात कर लेते हैं फिर मध्यका निर्धारण करते हैं।

5. **समावेशी वर्गान्तर** (Inclusive class interval)–समावेशी वर्गान्तरों वाली श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक है कि गणना करते समय उन्हें अपवर्जी वर्गान्तर बना लिया जाए अन्यथा परिणाम गलत आएगा।

6. **खुले सिरे वाली श्रेणी में मध्यका निर्धारण**–ऐसी श्रेणी के मध्यका निर्धारण में कोई कठिनाई नहीं होती क्योंकि खुले सिरे चरम सिरे होते हैं जिनका सूत्र में कोई प्रयोग नहीं किया जाता है। वास्तव में खुले सिरे वाली श्रेणी में मध्यका सर्वाधिक उपयुक्त माध्य माना जाता है।

7. **असमान वर्गान्तरों की स्थिति में मध्यका निर्धारण**–यदि वर्गान्तर असमान हों तो मध्यका ज्ञात करने के लिए उन्हें समान वर्गान्तरों में बदलने की आवश्यकता नहीं होती है। लेकिन यदि प्रश्न में श्रेणी पुनर्गठन के लिए कहा गया है तब उन्हें समान वर्गान्तर में बदल लेना चाहिए।

8. **जब प्रथम वर्ग ही मध्यका वर्गान्तर हो**–यदि प्रथम वर्गान्तर ही मध्यका वर्ग हो तो c का मूल्य शून्य मान लिया जाता है।

9. **अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण** (Determination of missing frequencies)–यदि किसी आवृत्ति श्रेणी की कुछ आवृत्तियाँ अज्ञात हों तो सूत्र द्वारा उन्हें ज्ञात किया जा सकता है। इसके लिए निम्न दो शर्तों में से एक का पूर्ण होना आवश्यक है–

   (*i*) श्रेणी की मध्यका एवं कुल आवृत्तियाँ ज्ञात हों।

   (*ii*) मध्यका, बहुलक एवं समान्तर माध्य में से कोई दो मूल्य ज्ञात हों।

उदाहरण (Illustration) 18: नीचे दिये बंटन का मध्यका मूल्य 36 है, अज्ञात आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल :	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
आवृत्ति :	12	–	25	–	40 = 100

हल (Solution): हमें ज्ञात है M = 36, N = 100. माना अज्ञात आवृत्ति 20–30 वर्ग की x एवं 40–50 वर्ग की y है तो मध्यका वर्ग 30–40 होगा।

नोट

Class	f	cf
10 – 20	12	12
20 – 30	x	$12 + x(c)$
30 – 40	$25(f)$	$37 + x$
40 – 50	$3y$	$37 + x + y$
50 – 60	20	$57 + x + y$
	N = 100	$N = 57 + x + y$

$$\text{मध्यका संख्या} = \frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

$$M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c)$$

$$36 = 30 + \frac{10}{25}[50 - (12 + x)]$$

$$= 30 + \frac{10}{25}[38 - x]$$

$$36 = 30 + \frac{380 - 10x}{25}$$

$$36 - 30 = \frac{380 - 10x}{25}$$

$$6 \times 25 = 380 - 10x$$

$$-10x = 150 - 380 = -230$$

$$x = \frac{230}{10} = 23$$

दिया है, $N = 100 = 57 + x + y$

$$100 = 57 + 23 + y = 80 + y$$

$$y = 100 - 80$$

$$y = 20$$

अत: वर्ग 20 – 30 की आवृत्ति 23 एवं वर्ग 40 – 50 की आवृत्ति 20 है।

10. **मध्यका का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन**–मध्यका का निर्धारण 'संचयी आवृत्ति वक्र' खींचकर या गाल्टन पद्धति द्वारा भी किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 19: निम्न समंकों से मध्यका ज्ञात कीजिए–

अंक	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20	21 – 25	26 – 30	31 – 35
छात्रों की संख्या	7	10	15	30	22	20	18

हल (Solution): मध्यका निर्धारण–दिये गये समंकों में समावेशी वर्गान्तर है, अत: उन्हें अपवर्जी में बदलना आवश्यक है।

नोट

अंक	छात्र संख्या	संचयी आवृत्ति	वास्तविक वर्ग सीमाएँ
1 – 5	7	7	0.5 – 5.5
6 – 10	10	17	5.5 – 10.5
11 – 15	15	32(c)	10.5 – 15.5
16 – 20	30(f)	62	15.5 – 20.5
21 – 25	22	84	20.5 – 25.5
26 – 30	20	104	25.5 – 30.5
31 – 35	18	122	30.5 – 35.5
	N = 122		

मध्यका संख्या $= \text{Size of } \frac{N}{2} \text{th item}$

$$= \frac{122}{2} = 61\text{th item}$$

संचयी आवृत्तियों के निरीक्षण से ज्ञात होता है कि 61वीं इकाई 16 – 20 वाले वर्ग में है अतः मध्यका वर्ग (16 – 20) या वर्ग (15.5 – 20.5) होगा।

$$M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c) = 15.5 + \frac{5}{30}(61 - 32)$$

$$= 15.5 + \frac{5}{30} \times 29 = 15.5 + \frac{29}{6} = 15.5 \;\; 4.83$$

$$M = 20.33$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. निम्नलिखित प्रनों को हल कीजिए –

1. निम्न समंकों से मध्यका (M) ज्ञात कीजिए–

   Sizes : 22 21 12 15 17 18 18 20 19 1 6 25

2. निम्नलिखित समंकमाला से मध्यका, बहुलक माध्य ज्ञात कीजिए–

Height (in inches) :	50	51	52	53	54	55	56	57	58
No. of Students :	15	20	32	35	33	22	20	10	8

3. निम्नलिखित समंकों से मध्यका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए–

Size :	8	10	12	14	16	18	20
Frequency :	3	7	12	28	10	9	6

4. निम्न समंकों से मध्यका (M) तथा बहुलक ज्ञात कीजिए–

   5 4 8 3 7 2 9

नोट

5.4 सारांश (Summary)

- समान्तर माध्य सबसे अधिक प्रचलित माध्य है जिसका प्रयोग सामान्यत: प्रत्येक व्यक्ति द्वारा दैनिक जीवन में किया जाता है। "समान्तर माध्य वह मूल्य है जो किसी श्रेणी के सभी पदों के मूल्यों के योग्य में उन पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।"
- अखण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य ठीक उसी प्रकार निर्धारित किया जाता है जिस प्रकार खण्डित श्रेणी में सूत्र भी दोनों में एक समान है। परन्तु अन्तर केवल इतना है कि अखण्डित श्रेणी में पहले वर्गों के मध्य-मूल्य (mid-values) निकाले जाते हैं जिन्हें 'X' कहते हैं। इस प्रकार मध्य-मूल्य लेने पर अखण्डित श्रेणी, खण्डित श्रेणी का रूप ले लेती है।
- यदि वर्ग-विस्तार समान है तो 'लघु रीति' श्रेष्ठ है और यदि वर्गों का विस्तार असमान है तो 'प्रत्यक्ष रीति' उपयुक्त होगी।
- लघु रीति को और भी सरल बनाने के लिये पद-विचलन रीति का प्रयोग किया जा सकता है बशर्ते कि श्रेणी में वर्ग-विस्तार 'समान' हो।
- अंग्रेजी शब्द 'Mode' की उत्पत्ति फ्रेंच भाषा के 'La mode' से हुई है जिसका अर्थ है फैशन या रिवाज अर्थात् जिसका प्रचलन अधिक हो। अत: बहुलक किसी समंक-मात्रा में अधिकतम आवृत्ति वाला पद होता है।
- यदि किसी व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका (M), समान्तर माध्य $(\overline{X})$ और बहुलक तीनो ही ज्ञात करने हों तो इन तीनों के पारस्परिक सम्बन्ध पर आधारित निम्न सूत्र द्वारा ही बहुलक मूल्य का अनुमान लगाना चाहिए–

  $$(\overline{X} - Z) = 3(\overline{X} - M) \quad \text{or} \quad Z = 3M - 2\overline{X}$$
- समूहन का उद्देश्य अनियमित आवृत्ति वाले बंटन में आवृत्तियों का जमाव बिन्दु निश्चित करना होता है क्योंकि अधिकतम आवृत्ति निर्धारित करने में निकटतम आवृत्तियों का बहुत प्रभाव पड़ता है।
- अखण्डित श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने के लिए पहले बहुलक वर्ग का निर्धारण किया जाता है। यदि आवृत्तियाँ नियमित हैं तो निरीक्षण द्वारा ही बहुलक वर्गान्तर का पता चल जाता है परन्तु अनियमित आवृत्तियों वाली श्रेणी में समूहन द्वारा विश्लेषण करके बहुलक वर्ग निर्धारित किया जाता है।
- मध्यका का मूल्य एक समान होना चाहिए चाहे उसका निर्धारण आरोही वर्गान्तरों के आधार पर किया जाए या अवरोही वर्गान्तरों के आधार पर, केन्द्र-बिन्दु को $N/2$ पर स्थित मानने से दोनों स्थितियों में मध्यका समान आती है।
- समावेशी वर्गान्तरों वाली श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक है कि गणना करते समय उन्हें अपवर्जी वर्गान्तर बना लिया जाए अन्यथा परिणाम गलत आएगा।

5.5 शब्दकोश (Keywords)

- **अप्रतिनिधिक**–एकतरफा।
- **संचयी**–संचय करना, इकट्ठा करना, जमा करना।

5.6 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. समान्तर माध्य से आप क्या समझते हैं? इसके निर्धारण की प्रत्यक्ष एवं लघु रीति बताइए।
2. पद-विचलन रीति द्वारा समांतर माध्य की गणना विधि एवं इसकी सीमाएं बताइए।

नोट

3. बहुलक निर्धारण की खण्डित तथा अखण्डित विधि बताइए
4. माध्यिका की निर्धारण विधि समझाइए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. $\bar{X}$ = 33.82 2. $\bar{X}$ = 141.879 3. $\bar{X}$ = 21.61 4. $\bar{X}$ = 44..1

2. 1. M = 18 2. M = 53,Z = 53 3. M = 14 4. M = 5, Z= 4.14

5.7 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. *सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह;* एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, दिल्ली – 110055
2. *परिणात्मक विधियाँ;* डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
3. *परिमाणात्मक पद्धतियाँ;* डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा
4. *साँख्यिकी*, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई–6: अपकिरण अर्थ एवं विशेषताएँ, अपकिरणः के सापेक्ष एवं निरपेक्ष माप, रेंज, चतुर्थक विचलन एवं शतमक विस्तार (Dispersion, Meaning and Characteristics: Absolute and Relative Measures of Dispersion, Including Range, Quartile Deviation, Percentile Range)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- अपकिरण के बारे में जानने में ।
- अपकिरण के निरपेक्ष एवं सापेक्ष माप को समझने में ।
- अन्तर-चतुर्थक विस्तार, शतमक विस्तार एवं चतुर्थक विचलन की गणना करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

अपकिरण से तात्पर्य समंक श्रेणी के प्रसार, बिखराव (Scatter) तथा विचरण (Variation) आदि से है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप प्रथम श्रेणी के माध्य कहलाते हैं क्योंकि इनकी गणना का आधार समंक श्रेणी के विभिन्न पद

मूल्य होते हैं जबकि अपकिरण ज्ञात करने के लिए पहले सांख्यिकीय माध्य ज्ञात किए जाते हैं और उसके बाद उनसे पद मूल्यों के विचलन ज्ञात कर उनका माध्य निकाला जाता है, अत: अपकिरण के मापों को द्वितीय श्रेणी के माध्य कहा जाता है।

6.1 अपकिरण (Dispersion)

अपकिरण को प्रसार (spread), बिखराव (scatter) तथा विचरण (variation) आदि नामों से भी पुकारा जाता है। अपकिरण का सम्बन्ध समंकों की एकरूपता से है और इसका काम माध्य में पद-मूल्यों के बिखराव या फैलाव की माप करना है। समंक श्रेणी के विभिन्न मूल्यों का अन्तर अपकिरण या विक्षेपण है।

डॉ. बाउले के अनुसार, "अपकिरण पदों के विवरण या अन्तर का माप है।"

कौनर के अनुसार, "जिस सीमा तक व्यक्तिगत पद मूल्यों में भिन्नता होती है उसके माप को अपकिरण कहते हैं।"

स्पीगेल के अनुसार, "वह सीमा जहाँ तक सांख्यिकीय समंक, एक माध्य मूल्य के दोनों ओर फैलने की प्रवृत्ति रखते हैं उन समंकों का विचरण या अपकिरण कहलाती है।"

बुक्स एवं **डिक** के शब्दों में, "अपकिरण अथवा प्रसार एक केन्द्रीय मूल्य (माध्य मूल्य) के दोनों ओर चर मूल्यों के विचरण या बिखराव की सीमा है।"

डिकमैन व **थॉमस** के अनुसार, "विचरणशीलता के मापों का प्रयोग प्राय: यह जानने के लिए किया जाता है कि प्रतिदर्श मूल्य (समंक) माध्य के चारों ओर कितनी दृढ़तापूर्वक गुच्छित हैं।"

दो अर्थों में प्रयोग–अपकिरण शब्द का दो अर्थों में प्रयोग किया जाता है। प्रथम अर्थ में अपकिरण का अर्थ समंक श्रेणी के सीमान्त मूल्यों के अन्तर या सीमा विस्तार से है। इसके अनुसार, अपकिरण हमें उन सीमाओं का अन्तर बताता है जिनके भीतर समंकमाला के पद पाये जाते हैं। इसके विपरीत दूसरे अर्थ में अपकिरण श्रेणी के माध्य से निकाले गये विभिन्न पदों के विचलनों का माध्य है। इस अर्थ के अनुसार अपकिरण हमें यह बताता है कि श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक निश्चित माप से विभिन्न मूल्यों की औसत दूरी क्या है। अपकिरण का दूसरा अर्थ पहले की तुलना में ज्यादा सही व यथार्थ माप प्रस्तुत करता है।

द्वितीय श्रेणी के माध्य (Averages of the second order)–केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप (समान्तर माध्य, बहुलक, मध्यका आदि) प्रथम श्रेणी के माध्य कहलाते हैं क्योंकि ये वास्तविक पदमूल्यों पर आधारित होते हैं। जबकि अपकिरण के माप द्वितीय श्रेणी के माध्य कहलाते हैं क्योंकि इसके लिए पहले समंकों का समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं फिर उस माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों या अन्तरों का माध्य ज्ञात करते हैं। अर्थात् ये माध्य से निकाले गये विचलनों के माध्य होते हैं।

निरपेक्ष और सापेक्ष अपकिरण (Absolute and Relative Dispersion)

जब किसी समंक श्रेणी के प्रसार, बिखराव या विचरण की माप निरपेक्ष रूप में उस श्रेणी की इकाई में ही ज्ञात की जाती है तो उसे अपकिरण की निरपेक्ष माप कहते हैं। उदाहरण के लिए, व्यक्तियों की आय रुपये में लम्बाई सेमी में भार किग्रा में आदि अपकिरण के निरपेक्ष मान हैं। परन्तु इन निरपेक्ष मापों का एक मुख्य दोष यह है कि इसके आधार पर उन समंक श्रेणियों के अपकिरण की तुलना नहीं कर सकते हैं, जिनके माप की इकाई अलग-अलग हैं।

अत: तुलनात्मक अध्ययन के लिए निरपेक्ष माप को सम्बन्धित माध्य से भाग देने पर जो अनुपात या प्रतिशत आता है वह अपकिरण की सापेक्ष माप (relative measure of dispersion) कहलाती है। यह सापेक्ष माप समंकों की इकाई में न होकर एक अनुपात या प्रतिशत में होती है। इसे 'अपकिरण गुणांक' (Coefficient Dispersion)

भी कहते हैं। उदाहरण के लिए–दो कारखानों में औसत मजदूरी 100 व 200 रु. है और उन दोनों में मजदूरी के अपकिरण के निरपेक्ष माप 20 रुपये हैं जो यह कहना गलत होगा कि दोनों में अपकिरण या विचरण बराबर हैं। तुलनात्मक अध्ययन के लिए दोनों के अपकिरण गुणांक या सापेक्ष माप ज्ञात करते हैं। पहले में अपकिरण की माप 2% है जबकि दूसरे में 1 या 10% है। अत: पहले में अपकिरण ज्यादा है।

अपकिरण के माप के उद्देश्य एवं महत्व (Objects and Significance)

अपकिरण की माप के निम्न उद्देश्य हैं–

1. **माध्य की विश्वसनीयता का पता लगाना**–अपकिरण द्वारा यह ज्ञात होता है कि माध्य कितना विश्वसनीय है और पूरे समूह या श्रेणी का कहाँ तक प्रतिनिधित्व करता है। यदि विचरण की मात्रा कम होती है तो माध्य प्रतिरूप मूल्य होता है अर्थात् वह व्यक्तिगत पदमूल्यों का उचित प्रतिनिधित्व करता है और विश्वसनीय होता है। जबकि विचरण की मात्रा अधिक होती है तो माध्य अविश्वसनीय होता है।
2. **दो या अधिक श्रेणियों में विचरणशीलता की तुलना करना**–किसी समूह में एकरूपता एवं नियमितता को ज्ञात करने के लिए अपकिरण का अध्ययन करते हैं। इसकी मापों के आधार पर दो या अधिक श्रेणियों के बीच विचरणशीलता की तुलना कर सकते हैं। विचरणशीलता कम होने पर समरूपता अधिक व विचरणशीलता ज्यादा होने पर समरूपता कम होती है।
3. **विचरणशीलता के नियन्त्रण में सहायक**–अपकिरण का उद्देश्य विचरणशीलता की प्रकृति व कारणों का पता लगाना है ताकि इसे नियन्त्रित कर सकें। आर्थिक मामलों में आय तथा धन के वितरण की विषमताएँ ज्ञात करने के लिए अपकिरण की माप जरूरी होती है।
4. **अन्य सांख्यिकीय मापों के प्रयोग हेतु**–कई अन्य तकनीकें; जैसे–सहसम्बन्ध प्रतीपगमन विश्लेषण, परिकल्पना परीक्षण, उत्पादन तकनीक, लागत नियन्त्रण आदि विचरण की मापों पर आधारित हैं।

स्पर एवं **बोनिनी** के अनुसार, "विचरण की धारणा का प्रयोग क्षेत्र अत्यधिक व्यापक है। यह किसी समंकमाला के बारे में केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों द्वारा प्रदत्त अधूरी जानकारी की पूर्ति करता है और आर्थिक, सामाजिक, व्यावसायिक, व्यापारिक, औद्योगिक सभी क्षेत्रों में उपयोगी सिद्ध होती है।"

उत्पादन नियन्त्रण व किस्म नियन्त्रण के क्षेत्र में विचरण की माप द्वारा समस्या का समाधान खोजा जाता है। अपकिरण से समस्याओं के अवलोकन, निरूपण एवं निर्धारण को सम्भव बनाया जाता है व समाधान प्रस्तुत करते हैं।

डैरेल हफ के अनुसार, "जब वे महत्वपूर्ण अंक अज्ञात हों तो केवल माध्य पर भरोसा मत कीजिए अन्यथा आप उस अन्धे व्यक्ति के समान होंगे जो केवल औसत तापमान की जानकारी के आधार पर ही कैम्प स्थल का चयन कर लेता है। यदि आपने विचरण या विस्तार का ध्यान नहीं रखा तो फिर आप अत्यधिक ठंड से जम सकते हैं या फिर गर्मी से भुन सकते हैं।"

अपकिरण ज्ञात करने की विधियाँ (Methods of Measuring Dispersion)

सांख्यिकी में अपकिरण शब्द दो अर्थों में प्रयोग किया जाता है। इन दोनों अर्थों के आधार पर अपकिरण ज्ञात करने की विभिन्न मापों को अग्र प्रकार क्रमबद्ध किया गया है–

(*a*) सीमा रीति (Method of Limits) –

(1) विस्तार या परास (Range),

(2) अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Interquartile Range),

(3) शतमक विस्तार (Percentile Range),

(*b*) विचलन माध्य रीति (Method of Averaging Deviations)–

(4) चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation),

(5) माध्य विचलन (Mean Deviation),

(6) प्रमाप विचलन (Standard Deviation),

(7) अन्य माप (Other Measures),

(*c*) बिन्दुरेखीय रीति (Graphic Mehtod)–

(8) लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)।

अपकिरण के एक आदर्श माप के आवश्यक गुण

(Essential Properties of a Good Measure of Dispersion)

अपकिरण के एक आदर्श माप में निम्न गुण होने चाहिए–

(1) यह स्पष्ट एवं स्थिर रूप से परिभाषित होना चाहिए।

(2) यह समंकमाला के सभी पदों पर आधारित होना चाहिए।

(3) इसकी गणनक्रिया सरल होनी चाहिए।

(4) यह प्रतिचयन उच्चावचनों से प्रभावित नहीं होना चाहिए।

(5) इसका आगे बीजगणितीय विवेचन सम्भव होना चाहिए।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. .... का संबंध समंकों की एकरूपता से है।
2. अपकिरण पदों के .... या अंतर का माप है।
3. सांख्यिकी में अपकिरण .... अर्थों में प्रयोग किया जाता है।
4. .... की धारणा का प्रयोग क्षेत्र अत्यधिक व्यापक है।

6.2 अपकिरण के निरपेक्ष एवं सापेक्ष माप (Absolute and Relative Measures of Dispersion)

किसी समंक श्रेणी के सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्य के अन्तर को उसका विस्तार या परास (Range) कहते हैं। यह अपकिरण ज्ञात करने की सबसे सरल एवं अवैज्ञानिक रीति है। यह किसी भी श्रेणी के चरम (सीमान्त) मूल्यों का अन्तर होता है। इसकी गणना निम्न प्रकार की जाती है–

1. **व्यक्तिगत श्रेणी में**–पहले श्रेणी के अधिकतम मूल्य व न्यूनतम मूल्य ज्ञात कर लेते हैं फिर निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं–

   $R = L - S$ R = विस्तार (Range)

   L = सबसे बड़ा मूल्य (Largest Value)

   S = सबसे छोटा मूल्य (Smallest Value)

2. **खण्डित श्रेणी में**–आवृत्ति श्रेणी में विस्तार निकालते समय केवल पदमूल्यों को ध्यान में रखा जाता है और आवृत्तियों को बिल्कुल छोड़ दिया जाता है।

नोट

3. **अखण्डित श्रेणी में–**इसके परिकलन की दो रीतियाँ हैं–

(*a*) न्यूनतम वर्ग की निचली सीमा को न्यूनतम मूल्य और अधिकतम वर्ग की ऊपरी सीमा को अधिकतम मूल्य माना जाता है।

(*b*) उच्चतम वर्गान्तर के मध्य मूल्य को अधिकतम एवं न्यूनतम वर्गान्तर के मध्य मूल्य को न्यूनतम मूल्य मान लेते हैं।

$$R = L - S$$

टिप्पणी–(1) खुले सिर वाले वर्गान्तरों में विस्तार ज्ञात नहीं किया जा सकता।

(2) समावेशी वर्गान्तर को पहले अपवर्जी वर्गान्तरों में बदल लेते हैं।

विस्तार गुणांक–विस्तार अपकिरण का एक निरपेक्ष माप है जो तुलनात्मक अध्ययन के लिए अनुपयुक्त है, अत: तुलना करने के लिए विस्तार का सापेक्ष माप ज्ञात किया जाता है। यदि विस्तार को चरम पदों के योग से विभाजित कर दिया जाए तो उसे विस्तार गुणांक या परास गुणांक कहते हैं।

$$\text{विस्तार गुणांक (CR)} = \frac{L-S}{L+S}$$

उदाहरण (Illustration) 1: निम्न समंक श्रेणी का विस्तार और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए–

20, 35, 25, 30, 16, 14, 13, 28, 38, 40, 10

हल (Solution):

$$S = 10, L = 40$$

$$\text{विस्तार} = L - S = 40 - 10 = 30$$

$$\text{विस्तार गुणांक } \frac{L-S}{L+S} = \frac{40-10}{40+10} = \frac{30}{50} = 0.6$$

उदाहरण (Illustration) 2: निम्न बंटन में विस्तार व उसके गुणांक का परिकलन कीजिए–

वर्ग:	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
आवृत्ति:	4	8	5	15	10	11

हल (Solution):

I. $L = 30, S = 0$

$$\text{विस्तार } L - S = 30 - 0 = 30$$

$$CR = \frac{L-S}{L+S} = \frac{30-0}{30+0} = 1$$

II. $L = 27.5 \; S = 2.5$

$$\text{विस्तार} = L - S = 27.5 - 2.5 = 25$$

$$CR = \frac{L-S}{L+S} = \frac{27.5-2.5}{27.5+2.5} = \frac{25}{30}$$

$$CR = 0.83$$

उदाहरण (Illustration) 3: निम्न बंटन से विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए–

वर्ग:	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20	21 – 25	26 – 30
आवृत्ति:	8	7	6	15	11	9

हल (Solution) : समावेशी वर्गान्तरों को पहले अपवर्जी वर्गान्तरों में बदल लिया जाता है। उक्त समंकों में न्यूनतम सीमा 0.5 व अधिकतम सीमा 30.5 है।

नोट

$$\text{विस्तार गुणांक (CR)} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{30.5-0.5}{30.5+0.5} = \frac{30}{31}$$

$$CR = 0.97$$

टास्क विस्तार गुणांक किसे कहते हैं ?

विस्तार के गुण व सीमाएँ

(Merits and Limitations of Range)

विस्तार के गुण (Merits)–अपकिरण ज्ञात करने की सबसे सरल रीति है और आसानी से समझा जा सकता है। बड़े उद्योगों में वस्तु के किस्म नियन्त्रण में इसका बहुत प्रयोग होता है।

विस्तार की सीमाएँ (Limitations)–विस्तार में निम्न दोष पाये जाते हैं–

1. **अस्थिर माप**–विस्तार श्रेणी के विचरण का स्थिर माप नहीं है। यह केवल दो चरम मूल्यों पर निर्भर होता है। यह प्रतिचयन परिवर्तनों से अत्यधिक रूप से प्रभावित होता है। चरम मूल्यों में एकमात्र परिवर्तन होने से विस्तार का मूल्य पूरी तरह प्रभावित होता है।
2. **सभी पदमूल्यों पर आधारित न होना**–विस्तार श्रेणी के सभी पदमूल्यों पर आधारित नहीं होता। अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों के बीच के पदों में होने वाले परिवर्तनों का विस्तार पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। अत: यह अपकिरण की अधूरी एवं अविश्सनीय माप है।
3. **श्रेणी की बनावट की जानकारी नहीं देता**–विस्तार का सबसे बड़ा दोष यह है कि इससे श्रेणी की बनावट अथवा चरम सीमाओं के बीच पदमूल्यों के फैलावों या बिखराव (Scatter) की जानकारी नहीं होती है। दो श्रेणियों का विस्तार समान होने पर भी उनकी बनावट में बहुत अन्तर हो सकता है। एक सममित व असमित बंटन का विस्तार एक समान हो सकता है। जबकि ऐसे दो बंटनों का अपकिरण कभी भी समरूप नहीं हो सकता।
4. **खुले सिरे वाले व आवृत्ति बंटनों के लिए अनुपयुक्त**–खुले सिर बंटन में चरम सीमाएँ अज्ञात होने के कारण विस्तार ज्ञात नहीं कर सकते जबकि इसमें अपकिरण हो सकता है। यह आवृत्ति बंटनों के लिए भी अनुपयुक्त होता है क्योंकि विस्तार निकालते समय आवृत्ति का प्रयोग नहीं होता है।
5. **बीजगणितीय विवेचन के लिए अनुपयुक्त**–विस्तार बीजगणितीय विवेचन के लिए भी अनुपयुक्त है क्योंकि इसका और आगे सांख्यिकीय परिकलनों में प्रयोग सम्भव नहीं है।

विस्तार के उपयोग (Uses of Range)

विस्तार का अनेक क्षेत्रों में प्रयोग किया जाता है।

1. **गुण नियन्त्रण**–उत्पादित की जाने वाली वस्तुओं के किस्म नियन्त्रण में विस्तार एक उपयोगी उपकरण है। उत्पादन के दौरान निर्मित विभिन्न इकाइयों में कुछ अन्तर हो सकता है। इस स्थिति में विस्तार द्वारा उच्चतम व निम्नतम सीमाएँ ज्ञात करके यह पता लगा लिया जाता है कि कितनी इकाइयाँ उन सीमाओं के अन्दर या बाहर हैं।
2. **सामान्य जीवन में उपयोग** (Uses in Common Life)–विस्तार का प्रयोग मुद्रा-दरों, विनिमय-दरों, स्कन्ध, अंश व प्रतिभूतियों, सोने, चाँदी के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन करने के लिए किया जाता है।

नोट

3. **मौसम का पूर्वानुमान** (Weather Forecasting)–विस्तार की सहायता से अधिकतम व न्यूनतम तापमान के बीच होने वाले विचरण का पता लगाया जाता है। जिससे किसी निश्चित दिन व काल के लिए पूर्वानुमान लगाना सम्भव हो पाता है।

6.3 अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Inter-Quartile Range)

अन्तर-चतुर्थक विस्तार, का ही सुधरा व उन्नत रूप होता है। यह समंक श्रेणी के तृतीय-चतुर्थक व प्रथम-चतुर्थक के अन्तर की माप होता है। यह माप विस्तार से ज्यादा श्रेष्ठ होता है क्योंकि प्रथम व तृतीय चतुर्थक के बीच श्रेणी के 50 प्रतिशत पद-मूल्य शामिल हो जाते हैं। इसके निर्धारक चरम मूल्य न होकर श्रेणी के चतुर्थक होते हैं।

परिगणन विधि–

(1) पहले दोनों चतुर्थक ज्ञात कर लिये जाते हैं।

(2) फिर निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं–

$$I.Q.R = Q_3 - Q_1$$

I.Q.R.–Inter-Quartile Range

Q_3–तृतीय चतुर्थक

Q_1–प्रथम चतुर्थक

गुण (Merits)

(1) यह भी अपकिरण के माप की एक सरल व आसान रीति है।

(2) सीमान्त मूल्यों का प्रभाव न पड़ने के कारण विस्तार से श्रेष्ठ विधि है।

(3) जब सीमान्त मूल्य असामान्य, अत्याधिक विषम एवं लम्बी पूँछ वाले वक्र प्रदर्शित करते हों, तब यह रीति उपयुक्त होती है।

दोष (Demerits)

(1) यह श्रेणी के मध्य के आगे भाग का विस्तार ($Q_3 - Q_1$) बताता है जिसमें सभी पदमूल्य शामिल न होने के कारण प्रतिनिधि माप नहीं कही जा सकती है।

(2) समंकमाला की बनावट का भी ज्ञान नहीं हो पाता है।

(3) विस्तार की भांति एक अस्थिर माप है।

(4) इसका भी बीजगणितीय विवेचन सम्भव नहीं है।

6.4 शतमक विस्तार (Percentile Range)

अपकिरण ज्ञात करने के लिए शतमक विस्तार का भी प्रयोग किया जा सकता है। यह माप शतमक विभाजन मूल्यों पर आधारित है। इसमें 90 तथा 10 क्रमसंख्या के शतमक विभाजनों (90^{th} Percentile and 10^{th} Percentile) का अन्तर शतमक विस्तार (10–90 Percentile Range) कहलाता है। इसे निम्न विधि द्वारा परिकलित करते हैं–

(1) श्रेणी 90^{th} तथा 10^{th} Percentile निकाल लिए जाते हैं।

(2) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\text{शतमक विस्तार (PR)} = P_{90} - P_{10}$$

शतमक विस्तार को दशमक विस्तार (Decile Range) भी कहते हैं क्योंकि $P_{10} = D_1$ एवं $P_{90} = D_9$ होता है। चूंकि प्रतिशत मूल्यों को समझना अधिक सरल है इसलिए व्यवहार में शतमक विस्तार का ही ज्यादा प्रयोग किया

नोट

जाता है।

अपकिरण की यह रीति विस्तार एवं अन्तर-चतुर्थक विस्तार से श्रेष्ठ मानी जाती है क्योंकि–(1) यह चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होती। (2) यह श्रेणी के मध्य के 80% मूल्यों पर आधारित होती है। शतमक विस्तार समंकमाला के विभाजन मूल्यों पर आधारित होते हैं। इनका प्रयोग यह निश्चित करने के लिए किया जाता है कि श्रेणी के 80% मूल्य किन सीमाओं के अन्तर्गत फैले हुए हैं।

शतमक विस्तार में वही गुण-दोष होते हैं जो विस्तार व अन्तर-चतुर्थक विस्तार में पाये जाते हैं। शिक्षा व मनोविज्ञान के क्षेत्र में यह रीति उपयोगी है।

उदाहरण (Illustration) 4: 100 विधार्थिओं को किसी परीक्षा में निम्न अंक प्राप्त हुए हैं–

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
46 – 50	2	21 – 25	30
41 – 45	5	16 – 20	20
36 – 40	5	11 – 15	15
31 – 35	6	6 – 10	5
26 – 30	10	1 – 5	2

(1) मध्यवर्ती 50% छात्रों व

(2) मध्यवर्ती 80% छात्रों के प्राप्ताकों का विस्तार ज्ञात कीजिए।

हल (Solution): निम्न श्रेणी को आरोही क्रम में विन्यासित करके संचयी आवृत्ति निकाली जाएगी–

अंक	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति	अंक	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
1 – 5	2	2	26 – 30	10	82
6 – 10	5	7	31 – 35	6	88
11 – 15	15	22	36 – 40	5	93
16 – 20	20	42	41 – 45	5	98
21 – 25	30	72	46 – 50	2	100
				N = 100	

प्रथम चतुर्थक

$$Q_1 = \text{Size of } \frac{N}{4}^{th} \text{ item}$$

$$= \text{Size of } \frac{100}{4} \text{ or } 25^{th} \text{ item}$$

$\therefore$ 16 – 20 is the Q_1 class

$$Q_1 = l + \frac{i}{f}(q_1 - C)$$

$$= 15.5 + \frac{5}{20}(25 - 22)$$

$$= 15.5 + \frac{5 \times 3}{20}$$

$$= 15.50 + .75$$

$$Q_1 = 16.25$$

तृतीय चतुर्थक

$$Q_3 = \text{Size of } \frac{3N}{4}^{th} \text{ item}$$

$$= \text{Size of } \frac{300}{4} \text{ or } 75^{th} \text{ item}$$

$\therefore$ (26 – 30) is the Q_3 class

$$Q_3 = l + \frac{i}{f}(q_3 - C)$$

$$= 25.5 + \frac{5}{10}(75 - 72)$$

$$= 25.5 + \frac{5 \times 3}{10}$$

$$= 25.5 + 1.5$$

$$Q_3 = 27.0$$

10वाँ शतमक

$$P_{10} = \text{Size of } \frac{10N}{100}^{th} \text{ item}$$

$$= \text{Size of } 10^{th} \text{ item}$$

90वाँ शतमक

$$P_{90} = \text{Size of } \frac{90N}{100}^{th} \text{ item}$$

$$= \text{Size of } 90^{th} \text{ item}$$

नोट

$\therefore$ (11 – 15) is the P_{10} class

$$P_{10} = l + \frac{i}{f}(P_{10} - C)$$

$$= 10.5 + \frac{5}{15}(10 - 7)$$

$$= 10.5 + \frac{5 \times 3}{15} = 10.5 + 1.0$$

$$P_{10} = 11.5$$

$\therefore$ (36 – 40) is the P_{90} class

$$P_{90} = l + \frac{i}{f}(P_{90} - C)$$

$$= 35.5 + \frac{5}{5}(90 - 88)$$

$$= 35.5 + \frac{5 \times 2}{5} = 35.5 + 2.0$$

$$P_{90} = 37.5$$

(*i*) अन्तर-चतुर्थक विस्तार (IQR) = $Q_3 - Q_1$ = 27.00 – 16.25

IQR = 10.75

(*ii*) शतमक विस्तार (PR) = $P_{90} - P_{10}$ = 37.5 – 11.5

PR = 26

अतः मध्यवर्ती 50% विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का विस्तार = 10.75

मध्यवर्ती 80% विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का विस्तार = 26

नोट्स विस्तार, अन्तर-चतुर्थक और शतमक विस्तार अपकिरण ज्ञात करने की सीमा रीतियाँ (methods of limit) हैं।

6.5 चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

चतुर्थक विचलन भी श्रेणी के चतुर्थक मूल्यों पर आधारित अपकिरण की एक माप है। तृतीय चतुर्थक एवं प्रथम चतुर्थक के अन्तर के आधे को चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation) या अर्द्ध अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Semi Inter Quartile Range) कहते हैं। चतुर्थक विचलन ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$Q.\ D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

एक सममित श्रेणी में मध्यका (M) दोनों चतुर्थकों (Q_1 व Q_3) से समान दूरी पर स्थिर होता है। अतः यदि QD का मान Q_1 में जोड़ दिया जाए और Q_3 में से घटा दिया जाये तो प्राप्त मान मध्यका होगा अर्थात्

$$Q_1 + QD = Q_3 - QD = M$$

परन्तु श्रेणियाँ अधिकतर सममित न होकर साधारणतः असममित होती हैं, उनमें यह अन्तर समान नहीं होता बल्कि अन्तर की मात्रा जितनी अधिक होती है श्रेणी प्रसामान्यता से उतनी ही दूर हो जाती है अर्थात् अपकिरण बढ़ने लगता है।

चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation)—चतुर्थक विचलन अपकिरण की निरपेक्ष माप है। विभिन्न श्रेणियों के चतुर्थक विचलन की तुलना करने के लिए इसका सापेक्ष माप निकाला जाता है। यह सापेक्ष माप, चतुर्थक विचलन गुणांक कहलाता है। इसे ज्ञात करने के लिए चतुर्थक विचलन के निरपेक्ष माप को दोनों चतुर्थकों के माध्य से भाग दे दिया जाता है। इसका निम्न सूत्र है—

नोट

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{\frac{Q_3 + Q_1}{2}} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

उदाहरण (Illustration) 5: निम्न दो श्रेणियों में अपकिरण की तुलना चतुर्थक मापों द्वारा कीजिए–

ऊँचाई (इंच में) :	58	56	62	61	63	64	65	59	62	65	55
भार (पौण्ड में) :	117	112	127	123	125	130	106	119	121	132	108

हल (Solution):

चतुर्थक मापों द्वारा अपकिरण की तुलना के लिए चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात किया जाएगा–

क्रम :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ऊँचाई :	55	56	58	59	61	62	62	63	64	65	65
भार :	106	108	112	117	119	121	123	125	127	130	132

(A) ऊँचाई

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{4}\right)^{\text{th}} \text{ item}$$

$$= \text{Size of } \left(\frac{11+1}{4}\right) \text{ or } 3^{\text{rd}} \text{ item}$$

$$Q_1 = 58$$

$$Q_3 = \text{Size of } \frac{3(N+1)}{4}^{\text{th}} \text{ item}$$

$$= \text{Size of } \frac{3(11+1)}{4} = 9^{\text{th}} \text{ item}$$

$$Q_3 = 64$$

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{64-58}{64+58} = \frac{6}{122} = .049$$

(B) भार

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{4}\right)^{\text{th}} \text{ item}$$

$$= \text{Size of } \left(\frac{11+1}{4}\right) \text{ or } 3^{\text{rd}} \text{ item}$$

$$Q_1 = 112$$

$$Q_3 = \text{Size of } \frac{3(N+1)}{4}^{\text{th}} \text{ item}$$

$$= \text{Size of } \frac{3(11+1)}{4} = 9^{\text{th}} \text{ item}$$

$$Q_3 = 127$$

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{127-112}{127+112} = \frac{15}{239} = .063$$

अत: भार में ऊँचाई की अपेक्षा अधिक अपकिरण है।

उदाहरण (Illustration) 6: निम्न बंटन से अपकिरण के चतुर्थक गुणांक का परिकलन कीजिए–

पद का केन्द्रीय मान :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आवृत्ति :	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

हल (Solution): दिये गये मध्य-बिन्दु के आधार पर वर्गान्तर ज्ञात किये जायेंगे। मध्य बिन्दु का अन्तर 1 है। अत: 0.5 मध्य मूल्य में घटाने व जोड़ने पर निचली व ऊपरी सीमा प्राप्त हो जाएगी।

नोट

चतुर्थकों का परिकलन–

मध्यमान	वर्गान्तर	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
1	.5–1.5	2	2
2	1.5–2.5	9	11
3	2.5–3.5	11	22
4	3.5–4.5	14	36
5	4.5–5.5	20b	56
6	5.5–6.5	24	80
7	6.5–7.5	20	100
8	7.5–8.5	16	116
9	8.5–9.5	5	121
10	9.5–10.5	2	123
		N = 123	

Q_1 = Size of $\frac{N}{4}^{th}$ item

= Size of $\frac{123}{4}$ = 30.75^{th} item

$\therefore$ (3.5 – 4.5) Q_1 वर्ग है।

$$Q_1 = l + \frac{i}{f}(q_1 - C)$$

$$= 3.5 + \frac{1}{14}(30.75 - 22)$$

$$= 3.5 + \frac{8.74}{14} = 3.5 + .625$$

$Q_1 = 4.125$

Q_3 = Size of $\frac{3N}{4}^{th}$ item

= Size of $\frac{3 \times 123}{4}$ = 92.25^{th} item

$\therefore$ (6.5 – 7.5) Q_3 वर्ग है।

$$Q_3 = l + \frac{i}{f}(q_3 - C)$$

$$= 6.5 + \frac{1}{20}(92.25) - 80)$$

$$= 6.5 + \frac{12.25}{20} = 6.5 + .6125$$

$Q_3 = 7.1125$

$$\text{अपकिरण का चतुर्थक गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{7.1125 - 4.1250}{7.1125 + 4.1250}$$

$$= \frac{2.9875}{11.2375} = 0.27$$

अत: चतुर्थक विचलन गुणांक = 0.27

चतुर्थक विचलन के गुण (Merits of Quartile Deviation)

1. **सरलता**–इसका गणन एवं समझना बहुत आसान है।
2. **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव**–अपकिरण की इस माप पर चरम मूल्यों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।
3. **मध्य भाग का अपकिरण**–यह माप वहाँ उपयोगी होती है जहाँ श्रेणी के मध्य के आधे भाग का अध्ययन करना हो।

क्या आप जानते हैं चतुर्थक विचलन का प्रयोग खुली सीमाओं वाले वर्गों और विषम बंटनों में भी किया जा सकता है।

चतुर्थक विचलन के दोष (Demerits of Quartile Deviation)

1. **अधूरी जानकारी**–चतुर्थक विचलन की माप से समंक श्रेणी की बनावट का ठीक-ठीक पता नहीं चलता।
2. **सभी मूल्यों पर आधारित न होना**–यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित न होकर श्रेणी के मध्य के 50% मूल्यों पर आधारित होता है अर्थात् शुरू के 25% व आखिर के 25% मूल्यों को छोड़ देता है।
3. **बीजगणितीय विवेचन**–वस्तुत: यह एक स्थितीय माध्य या माप है जो पैमाने पर केवल दूरी को दर्शाता है। यह किसी माध्य से पदमूल्यों के विचरणों का अध्ययन नहीं करता इसलिए इसका बीजगणितीय विवेचन सम्भव नहीं है।
4. **प्रतिचयन परिवर्तन के प्रति संवेदनशील**–यह प्रतिचयन परिवर्तनों से अत्यधिक प्रभावित होता है।
5. **सीमित उपयोग**–ऐसी श्रेणियों में जिनके विभिन्न पदमूल्यों में बहुत विचरण हो, चतुर्थक विचलन अपकिरण का उपयुक्त माप नहीं है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए–

1. नीचे एक फैक्ट्री के 8 श्रमिकों की मजदूरी के आँकड़े दिए हुए हैं। विस्तार एवं विस्तार गुणांक की गणना कीजिए।

Wages (Rs.)	:	100	150	220	80	85	195	275	140

2. नीचे एक कक्षा के 80 विद्यार्थियों के प्राप्तांक दिए हुए हैं। विस्तार एवं विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए।

Marks	No. of Students
0 – 10	4
10 – 20	12
20 – 30	20
30 – 40	18
40 – 50	15
50 – 60	8
60 – 70	2
70 – 80	1

3. निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन की गणना कीजिए।

Size	Frequency
4 – 8	6
8 – 12	10

नोट

12 – 16	18
16 – 20	30
20 – 24	15
24 – 28	12
28 – 32	10
32 – 36	6
36 – 40	2

4. निम्नलिखित अंकों से चतुर्थक विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए–

Height (cm)	:	150	151	152	153	154	155	156	157	158
No. of Students	:	15	20	32	35	33	22	20	12	10

6.6 सारांश (Summary)

- अपकिरण से तात्पर्य समंक श्रेणी के प्रसार विखराव (Scatter) तथा विचरण (Variation) आदि से है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप प्रथम श्रेणी के माध्य कहलाते हैं क्योंकि इनकी गणना का आधार समंक श्रेणी के विभिन्न पद मूल्य होते हैं जबकि अपकिरण ज्ञात करने के लिए पहले सांख्यिकीय माध्य ज्ञात किए जाते हैं और उसके बाद उनसे पद मूल्यों के विचलन ज्ञात कर उनका माध्य निकाला जाता है, अत: अपकिरण के मापों को द्वितीय श्रेणी के माध्य कहा जाता है।
- अपकिरण को प्रसार (spread), बिखराव (scatter) तथा विचरण (variation) आदि नामों से भी पुकारा जाता है। अपकिरण का सम्बन्ध समंकों की एकरूपता से है और इसका काम माध्य में पद-मूल्यों के बिखराव या फैलाव की माप करना है।
- अपकिरण शब्द का दो अर्थों में प्रयोग किया जाता है। प्रथम अर्थ में अपकिरण का अर्थ समंक श्रेणी के सीमान्त मूल्यों के अन्तर या सीमा विस्तार से है। इसके अनुसार, अपकिरण हमें उन सीमाओं का अन्तर बताता है जिनके भीतर समंकमाला के पद पाये जाते हैं। इसके विपरीत दूसरे अर्थ में अपकिरण श्रेणी के माध्य से निकाले गये विभिन्न पदों के विचलनों का माध्य है।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप (समान्तर माध्य, बहुलक, मध्यका आदि) प्रथम श्रेणी के माध्य कहलाते हैं क्योंकि ये वास्तविक पदमूल्यों पर आधारित होते हैं। जबकि अपकिरण के माप द्वितीय श्रेणी के माध्य कहलाते हैं क्योंकि इसके लिए पहले समंकों का समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं फिर उस माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों या अन्तरों का माध्य ज्ञात करते हैं।
- जब किसी समंक श्रेणी के प्रसार, बिखराव या विचरण की माप निरपेक्ष रूप में उस श्रेणी की इकाई में ही ज्ञात की जाती है तो उसे अपकिरण की निरपेक्ष माप कहते हैं।
- तुलनात्मक अध्ययन के लिए निरपेक्ष माप को सम्बन्धित माध्य से भाग देने पर जो अनुपात या प्रतिशत आता है वह अपकिरण की सापेक्ष माप (relative measure of dispersion) कहलाती है।
- किसी समंक श्रेणी के सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्य के अन्तर को उसका विस्तार या परास (Range) कहते हैं। यह अपकिरण ज्ञात करने की सबसे सरल एवं अवैज्ञानिक रीति है। यह किसी भी श्रेणी के चरम (सीमान्त) मूल्यों का अन्तर होता है।
- विस्तार अपकिरण का एक निरपेक्ष माप है जो तुलनात्मक अध्ययन के लिए अनुपयुक्त है, अत: तुलना करने के लिए विस्तार का सापेक्ष माप ज्ञात किया जाता है। यदि विस्तार को चरम पदों के योग से विभाजित कर दिया जाए तो उसे विस्तार गुणांक या परास गुणांक कहते हैं।
- उत्पादित की जाने वाली वस्तुओं के किस्म नियन्त्रण में विस्तार एक उपयोगी उपकरण है। उत्पादन के

दौरान निर्मित विभिन्न इकाइयों में कुछ अन्तर हो सकता है। इस स्थिति में विस्तार द्वारा उच्चतम व निम्नतम सीमाएँ ज्ञात करके यह पता लगा लिया जाता है कि कितनी इकाइयाँ उन सीमाओं के अन्दर या बाहर हैं।

- विस्तार का प्रयोग मुद्रा–दरों, विनिमय–दरों, स्कन्ध, अंश व प्रतिभूतियों, सोने, चाँदी के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन करने के लिए किया जाता है।
- विस्तार की सहायता से अधिकतम व न्यूनतम तापमान के बीच होने वाले विचरण का पता लगाया जाता है।
- अन्तर–चतुर्थक विस्तार, का ही सुधरा व उन्नत रूप होता है। यह समंक श्रेणी के तृतीय–चतुर्थक व प्रथम–चतुर्थक के अन्तर की माप होता है। यह माप विस्तार से ज्यादा श्रेष्ठ होता है क्योंकि प्रथम व तृतीय चतुर्थक के बीच श्रेणी के 50 प्रतिशत पद–मूल्य शामिल हो जाते हैं।
- अपकिरण ज्ञात करने के लिए शतमक विस्तार का भी प्रयोग किया जा सकता है। यह माप शतमक विभाजन मूल्यों पर आधारित है। इसमें 90 तथा 10 क्रमसंख्या के शतमक विभाजनों (90^{th} Percentile and 10^{th} Percentile) का अन्तर शतमक विस्तार (10–90 Percentile Range) कहलाता है। इसे निम्न विधि द्वारा परिकलित करते हैं।
- शतमक विस्तार को दशमक विस्तार (Decile Range) भी कहते हैं क्योंकि $P_{10} = D_1$ एवं $P_{90} = D_9$ होता है। चूंकि प्रतिशत मूल्यों को समझना अधिक सरल है इसलिए व्यवहार में शतमक विस्तार का ही ज्यादा प्रयोग किया जाता है।
- शतमक विस्तार में वही गुण–दोष होते हैं जो विस्तार व अन्तर–चतुर्थक विस्तार में पाये जाते हैं। शिक्षा व मनोविज्ञान के क्षेत्र में यह रीति उपयोगी है।
- चतुर्थक विचलन भी श्रेणी के चतुर्थक मूल्यों पर आधारित अपकिरण की एक माप है। तृतीय चतुर्थक एवं प्रथम चतुर्थक के अन्तर के आधे को चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation) या अर्द्ध अन्तर–चतुर्थक विस्तार (Semi Inter Quartile Range) कहते हैं।
- चतुर्थक विचलन अपकिरण की निरपेक्ष माप है। विभिन्न श्रेणियों के चतुर्थक विचलन की तुलना करने के लिए इसका सापेक्ष माप निकाला जाता है। यह सापेक्ष माप, चतुर्थक विचलन गुणांक कहलाता है। इसे ज्ञात करने के लिए चतुर्थक विचलन के निरपेक्ष माप को दोनों चतुर्थकों के माध्य से भाग दे दिया जाता है।

6.7 शब्दकोश (Keywords)

- गुच्छित—एक प्रकार के आँकड़ों का समूह।
- शतमक (Percentile)—बोध, प्रत्यक्ष वस्तु।

6.8 अभ्यास प्रश्न (Review Questions)

1. अपकिरण को समझाइए। अपकिरण मापने की कौन–कौन सी विधियाँ हैं ?
2. अपकिरण के मापों के रूप में प्रयुक्त विस्तार के गुण एवं सीमाएँ बताइए।
3. विस्तार तथा अन्तर–चतुर्थक विस्तार में अंतर स्पष्ट कीजिए।
4. शतमक चतुर्थक विस्तार पर प्रकाश डालिए।
5. चतुर्थक विचलन तथा चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना विधि समझाइए तथा इनके गुण एवं दोष बताइए।

नोट

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. अपकिरण 2. वितरण 3. दो 4. विचरण।

2. 1. Range = 195; C.R. = .549 2. Range = 80; C.R. = 1.0

3. Q.D. = 5.2 4. Q.D. = 1.5; C of Q.D. = .0098

6.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई—7: माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन (Mean Deviation and Standard Deviation)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- माध्य विचलन, माध्य विचलन गुणांक एवं इसके परिकलन की रीतियों का विवेचन करने में।
- प्रमाप विचलन, प्रमाप विचलन परिकलन की रीतियों एवं गुण-दोषों का विवेचन करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

माध्य विचलन अपकिरण का श्रेष्ठ माप है क्योंकि यह वास्तविक माध्य द्वारा विभिन्न पदमूल्यों से लिये गये विचलनों का समान्तर माध्य होता है। अत: समंक श्रेणी के किसी सांख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, मध्यका या बहुलक) से निकाले गये विभिन्न मूल्यों के विचलनों का समान्तर माध्य उसका माध्य विचलन कहलाता है। माध्य विचलन को प्रथम अपकिरण परिघात (First Moment of Dispersion) भी कहते हैं।

प्रमाप विचलन को सर्वप्रथम कार्ल पियर्सन ने प्रयोग किया था। अपकिरण के एक आदर्श माप के लिए आवश्यक सभी विशेषताओं को यह पूरा करता है इसलिए यह आदर्श व वैज्ञानिक माप है और सांख्यिकीय विश्लेषणों में सर्वाधिक प्रयोग की जाती है।

नोट

7.1 माध्य विचलन (Mean Deviation)

मूल्यों के विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिह्न + और - को छोड़ दिया जाता है अर्थात् ऋणात्मक विचलन (Negative deviation) भी धनात्मक (Positive) मान लिये जाते हैं।

माध्य विचलन ज्ञात करने में निम्न बातों का ध्यान रखा जाता है–

1. **माध्य का चुनाव** (Selection of Average)–सैद्धान्तिक रूप से माध्य विचलन समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक में से किसी एक से निकाला जा सकता है परन्तु व्यावहारिक रूप में बहुलक का प्रयोग नहीं किया जाता है क्योंकि यह अनिश्चित होने के कारण भ्रामक निष्कर्ष देता है। जबकि मध्यका सर्वोत्तम होता है क्योंकि यह स्थिर, निश्चित व प्रतिनिधि माध्य है और इससे निकाले गए विचलनों का योग सबसे कम होता है। समान्तर माध्य से भी विचलन ज्ञात किया जा सकता है।
2. **बीजगणितीय चिह्नों की उपेक्षा** (Ignoring Algebraic Signs)–माध्य विचलन निकालते समय + एवं - चिह्नों को छोड़ दिया जाता है अर्थात् ऋणात्मक विचलनों को भी धनात्मक मान लिया जाता है। ऐसे विचलनों को व्यक्त करने के लिए d के दोनों ओर दो खड़ी रेखाएँ ।। (modulus) बना दी जाती हैं, इस प्रकार $|d|$ का अर्थ यह है कि विचलन निकालते समय चिह्नों को छोड़ दिया गया है। ऐसा इसलिए किया जाता है क्योंकि विचलनों का बीजगणितीय योग समान्तर माध्य से निकालने पर शून्य होता है और मध्यका से निकालने पर भी लगभग शून्य होता है।
3. **विचलनों का माध्य** (Averaging of Deviations)–सभी विचलनों के जोड़ ($\sum|d|$) को पदों की संख्या से भाग देने पर माध्य विचलन ज्ञात हो जाता है। आवृत्ति श्रेणी की दशा में विचलनों और आवृत्तियों का गुणा करके कुल विचलनों का योग निकाला जाता है और इस योग को N वत $\sum f$ से भाग दिया जाता है।

संकेताक्षर (Symbol)–माध्य विचलन के लिए ग्रीक वर्णमाला के अक्षर δ (डेल्टा) का प्रयोग किया जाता है। जिस माध्य से माध्य विचलन निकाला जाता है δ के बाद उसका संकेताक्षर नीचे की ओर उपसंकेत (Subscript) के रूप में लिख दिया जाता है–

मध्यका से	समान्तर माध्य से	बहुलक से
$\delta_m = \dfrac{\sum\|d_m\|}{N}$	$\delta_x = \dfrac{\sum\|d_{\bar{x}}\|}{N}$	$\delta_2 = \dfrac{\sum\|d_z\|}{N}$

7.2 माध्य विचलन गुणांक (Coefficient of Mean Deviation)

माध्य विचलन अपकिरण की एक निरपेक्ष माप है अर्थात् यह उसी इकाई में व्यक्त होता है जो मूल समंकों की है। परन्तु तुलनात्मक विवेचन के लिए माध्य विवेचन के लिए माध्य विचलन की निरपेक्ष माप को सापेक्ष माप में बदला जाता है। इसके लिए माध्य विचलन के निरपेक्ष माप को उस माध्य से भाग दिया जाता है जिससे ये विचलन निकाले गये हैं अर्थात्

$$\text{माध्य विचलन गुणांक} = \frac{\delta_M}{M} \text{ (मध्यका से) or } \frac{\delta_{\bar{x}}}{\bar{x}} \text{ (समान्तर माध्य)}$$

7.3 माध्य विचलन के परिकलन की रीतियाँ (Methods of Calculation of Mean Deviation)

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual series) **में माध्य विचलन**–माध्य विचलन ज्ञात करने की दो रीतियाँ हैं– (*a*) प्रत्यक्ष रीति, (*b*) लघु रीति।

1. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)–इस रीति से माध्य विचलन निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं–

नोट

(*a*) सबसे पहले उस माध्य को ज्ञात करते हैं जिससे माध्य विचलन निकालना हो।

(*b*) फिर उसी माध्य से बीजगणितीय चिह्नों को छोड़ते हुए विभिन्न मूल्यों से विचलन $|d|$ निकाल लिये जाते हैं।

(*c*) इन विचलनों को जोड़ $\sum|d|$ निकाल लिया जाता है।

(*d*) फिर निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं—

$$\delta_M = \frac{\sum|d_M|}{N}, \qquad \delta_{\bar{x}} = \frac{\sum|d_{\bar{x}}|}{N}, \qquad \delta_Z = \frac{\sum|d_z|}{N}$$

> *क्या आप जानते हैं* माध्य विचलन गुणांक निकालने के लिए माध्य विचलन को सम्बन्धित माध्य से भाग दे दिया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 1:

निम्न आँकड़ों से मध्यका एवं समान्तर माध्य द्वारा विचलन और उनके गुणांक ज्ञात कीजिए—

47, 50, 58, 45, 53, 59, 47, 60, 49

हल (Solution):

सबसे पहले पदमूल्यों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करके मध्यका एवं समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं फिर माध्य विचलन का परिकलन करते हैं।

माध्य विचलन का परिकलन—

क्रमांक	**पद मूल्य**	**मध्यका 50 से विचलन (चिह्न छोड़कर)** $|d_M| = |X - M|$	**माध्य 52 से विचलन चिह्न छोड़कर** $|d_x| = |X - \bar{X}|$
1	45	5	7
2	47	3	5
3	47	3	5
4	49	1	3
5	50	0	2
6	53	3	1
7	58	8	6
8	59	9	7
9	60	10	8
योग	468	42	44
N = 9	$\sum X$	$\sum|d_M|$	$\sum|d_{\bar{X}}|$

मध्यका से

$$\text{Median} = \text{Size of} \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{item}$$

$$= \text{Size of } \frac{9+1}{2} = 5^{\text{th}} \text{ item}$$

समान्तर माध्य से

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{468}{9} = 52$$

माध्य विचलन

नोट

माध्य विचलन $\delta_M = \frac{\Sigma|d_M|}{N} = \frac{42}{9}$

$\delta_M = 4.6$

माध्य विचलन गुणांक (C of δ_M) $= \frac{\delta_M}{M}$

$= \frac{4.67}{50} = 0.0934$

$\delta_{\overline{X}} = \frac{\Sigma|d_{\overline{X}}|}{N} = \frac{44}{9}$

$\delta_{\overline{X}} = 4.89$

माध्य विचलन गुणांक (C of $\delta_{\overline{X}}$) $= \frac{\delta_{\overline{X}}}{\overline{X}}$

$= \frac{4.89}{52} = 0.0940$

2. **लघु रीति** (Short-cut Method)—माध्य विचलन ज्ञात करने की इस विधि में विचलन नहीं लिये जाते हैं एवं निम्न प्रक्रिया अपनाई जाती है—
   1. पदों को आरोही (या अवरोही) क्रम में रखा जाता है।
   2. फिर, उस माध्य विशेष (मध्यका, समान्तर माध्य, बहुलक) को ज्ञात किया जाता है जिससे माध्य विचलन निकालना है।
   3. फिर इसके बाद माध्य मूल्य से अधिक (बड़े) मूल्यों का योग (ΣX_A) ज्ञात करते हैं। इसी प्रकार माध्य मूल्य से कम (छोटे) मूल्यों का योग (ΣX_B) निकाल लेते हैं।
   4. फिर उस माध्य विशेष से अधिक वाले पदों की संख्या (N_A) और कम वाले पदों की संख्या (N_B) ज्ञात की जाती है।
   5. अन्त में निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जाता है—

मध्यका (M) से $\delta_M = \frac{\Sigma X_A - \Sigma X_B - (N_A - N_B)M}{N}$

$\delta_M = \frac{\Sigma X_A - \Sigma X_B}{N}$

[$(N_A - N_B) = 0$ क्योंकि मध्यका श्रेणी के ठीक केन्द्र में होती है और उसके दोनों ओर के पदों की संख्या बराबर होती है अर्थात् $N_A = N_B$]

मध्यका ($\overline{X}$) से, $\delta_{\overline{X}} = \frac{\Sigma X_A - \Sigma X_B - (N_A - N_B)\overline{X}}{N}$

बहुलक (Z) से, $\delta_Z = \frac{\Sigma X_A - \Sigma X_B - (N_A - N_B)Z}{N}$

ΣX_A व ΣX_B = क्रमशः माध्य से 'अधिक' और 'कम' वाले मूल्यों के योग हैं।

N_A व N_B = क्रमशः माध्य से अधिक और कम वाले पदों की संख्या हैं।

N = पदों की कुल संख्या है।

उदाहरण (Illustration) 2 : निम्न समंकों से तीनों माध्य विचलन और उनके तत्सम्बन्धी माप सापेक्ष ज्ञात कीजिए—

मूल्य : 20, 23, 30, 32, 46, 50, 57, 57, 57, 78

हल (Solution):

माध्य विचलन का परिकलन तीनों माध्यों द्वारा निम्न प्रकार किया जाएगा—

माध्यों का परिकलन (Calculation of Averages)—

समान्तर माध्य $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{450}{10} = 45$

नोट

मध्यका (M) $= \text{Size of} \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} \text{item} = \frac{10+1}{2} = 5.5^{th} \text{item}$

$$= \frac{\text{Value of } 5^{th} \text{ item } + \text{ Value of } 6^{th} \text{ item}}{2}$$

$$= \frac{46+50}{2} = \frac{96}{2}\ 48$$

निरीक्षण द्वारा बहुलक मूल्य Z = 57.

माध्य विचलन की लघु रीति द्वारा गणना—

S. No.	Size	$\overline{X}$ = 45 से परिकलन		M = 48 से परिकलन		Z = 57 से परिकलन	
1.	20	20		20		20	
2.	23	23	$\Sigma X_B = 105$	23		23	$\Sigma X_B = 201$
3.	30	30	$N_B = 4$	30	$\Sigma X_B = 151$	30	$N_B = 6$
4.	32	32		32	$N_B = 5$	32	
5.	46	46		46		46	
6.	50	50	$\Sigma X_A = 345$	50		50	
7.	57	57	$N_A = 6$	57	$SX_A = 299$	57	
8.	57	57		57	$N_A = 5$	57	
9.	57	57		57		57	
10.	78	78		78		78	$\Sigma X_A = 78$
							$N_B = 1$
N = 10	$\Sigma X = 450$						

समान्तर माध्य से माध्य विचलन (Mean Deviation from Mean)

$$\delta_{\overline{X}} = \frac{\Sigma X_A - \Sigma X_B - (N_A - N_B)\overline{X}}{N} = \frac{345 - 105 - (6-4)\ 45}{10}$$

$$\delta_{\overline{X}} = \frac{345 - 105 - (2 \times 45)}{10} = \frac{150}{10} = 15$$

$$\text{C of } \delta_{\overline{X}} = \frac{\delta_{\overline{X}}}{X} = \frac{15}{45} = 0.333$$

मध्यका से माध्य विचलन

$$\delta_M = \frac{\Sigma X_A - \Sigma X_B - (N_A - N_B)M}{N} = \frac{299 - 151 - (5-5)\ 48}{10} = \frac{299 - 151}{10}$$

$$\delta_M = \frac{148}{10} = 14.8$$

$$\text{C of } \delta_M = \frac{\delta_M}{M} = \frac{14.8}{48} = 0.308$$

बहुलक द्वारा माध्य विचलन

$$\delta_Z = \frac{\Sigma X_A - \Sigma X_B - (N_A - N_B)Z}{N} = \frac{78 - 201 - (1-6)\ 57}{10}$$

नोट

$$= \frac{78 - 201 - (-5 \times 57)}{10} = \frac{78 - 201 + 285}{10} = \frac{363 - 201}{10} = \frac{162}{10}$$

$$\delta_Z = 16.2$$

$$C \text{ of } \delta_Z = \frac{\delta_Z}{Z} = \frac{16.2}{57} = 0.284$$

7.4 माध्य विचलन के गुण एवं दोष (Merits and Demerits of Mean Deviation)

माध्य विचलन के निम्नलिखित गुण हैं–

1. **सरल एवं बुद्धिगम्य–**माध्य विचलन की गणन क्रिया सरल है और यह आसानी से समझ में आ जाता है। यह किसी भी माध्य से निकाला जा सकता है।
2. **सभी मूल्यों पर आधारित–**यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होने के कारण एक वैज्ञानिक रीति है और इससे श्रेणी की बनावट की उचित जानकारी प्राप्त हो जाती है।
3. **चरम मूल्यों से कम प्रभावित–**माध्य विचलन पर चरम या सीमान्त मूल्यों का कम प्रभाव पड़ता है।
4. **किसी भी माध्य से आगणन–**माध्य विचलन की गणना किसी भी माध्य से कर सकते हैं।
5. **पद सीमाओं का निर्धारण–**एक प्रसामान्य बंटन में $\overline{X} \pm \delta$ के अन्तर्गत लगभग 57.3% मूल्यों का समावेश होता है।

माध्य विचलन के निम्नलिखित दोष हैं–

1. **बीजगणितीय रूप में अशुद्ध–**माध्य विचलन का सबसे बड़ा दोष यह है कि विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिह्नों + एवं - को छोड़ दिया जाता है। यदि ऐसा न करें तो कुल विचलन हमेशा शून्य आयेगा। परन्तु चिह्नों को छोड़ देने से यह गणितीय दृष्टिकोण से अशुद्ध एवं अवैज्ञानिक माप ही जाती है और उच्च स्तरीय प्रयोग के योग्य नहीं रहती।
2. **अनिश्चित माप–**यह अपकिरण की एक अनिश्चित माप है क्योंकि यह किसी भी माध्य द्वारा परिकलित किया जा सकता है। बहुलक से निकाला गया माध्य विचलन बहुलक के अनिश्चित व अप्रतिनिधिक होने के कारण असंतोषजनक होता है। समान्तर माध्य से निकाले गये विचलनों का योग अधिक होने के कारण माध्य विचलन अवैज्ञानिक होता है। यदि श्रेणी में विचरणशीलता बहुत अधिक होती है तो निकाले गये परिणाम भी भ्रामक होंगे।
3. **अतुलनीय माप–**एक श्रेणी के विभिन्न माध्यमों द्वारा ज्ञात किये गये माध्य विचलनों में समानता नहीं होती है। इसी प्रकार अलग-अलग श्रेणी के अलग-अलग माध्यों से निकाले गये माध्य विचलनों में भी असमानता होती है। अतः ये तुलना योग्य नहीं होते हैं।

उपयोगिता

आर्थिक, व्यापारिक एवं सामाजिक क्षेत्र में अपकिरण के इस माप का काफी प्रयोग होता है। आय व धन वितरण की असमानताओं का अध्ययन इसी रीति से किया जाता है। व्यापार चक्रों के पूर्वानुमान के लिए इसका प्रयोग अधिक होता है। यह लघु प्रतिदर्श अध्ययन के लिए बेहद उपयोगी माप होती है। परिकलन की सरलता एवं प्रमाप विचलन में चरम पदों को ज्यादा महत्त्व देने से इस माप को पूर्ण समर्थन प्राप्त है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

माध्य विचलन के गुण व दोष इस प्रकार हैं–

1. माध्य विचलन की गणन क्रिया सरल है। यह किसी भी ········· से निकाला जा सकता है।
2. यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होने के कारण एक ········· रीति है।
3. इस पर ········· का कम प्रभाव पड़ता है।
4. माध्य विचलन का सबसे बड़ा दोष यह है कि विचलन निकालते समय ········· चिह्नों + एवं – को छोड़ दिया जाता है।
5. यह अपकिरण की ········· माप है।

7.5 प्रमाप विचलन या मानक विचलन (Standard Deviation)

अर्थ–प्रमाप विचलन गणितीय रूप से एक शुद्ध माप है क्योंकि इसमें विचलनों के चिह्नों को छोड़ा नहीं जाता है बल्कि प्राप्त विचलनों के वर्ग कर लेते हैं जिससे ऋणात्मक विचलन स्वत: ही धनात्मक हो जाते हैं। अंत में विचलन वर्गों का माध्य निकालकर उसका वर्गमूल ज्ञात कर लेते हैं जो प्रमाप विचलन कहलाता है। अत: किसी श्रेणी के समान्तर माध्य से निकाले गये उसके विभिन्न पदमूल्यों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल, उस श्रेणी का प्रमाप विचलन होता है। (Standard Deviation is the square root of the arithmetic mean of the squares of deviations of items from their arithmetic mean.) माध्य से विचलनों के वर्गों का समान्तर माध्य द्वितीय अपकिरण घात (Second Moment of Dispersion) अथवा प्रसरण (variance) कहलाता है। प्रमाप विचलन इसी मूल्य का वर्गमूल है।

विचलन वर्ग माध्य मूल्य, कल्पित मूल्य अथवा कल्पित माध्य से लिये गये विचलन वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल होता है। अत: यदि विचलन समान्तर माध्य से लिये गये हों जब इन दोनों में कोई अन्तर नहीं होता है।

नोट्स प्रमाप विचलन को माध्य विभ्रम (Mean Error), माध्य वर्ग विभ्रम (Mean Square Error) या माध्य से निकाला जाने वाला विचलन वर्ग माध्य मूल भी कहा जाता है।

माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन में अन्तर (Difference between M.D. and S.D.)

(1) माध्य विचलन का परिकलन समान्तर माध्य, बहुलक व मध्यका तीनों से कर सकते हैं लेकिन प्रमाप विचलन सदैव समान्तर माध्य से निकालते हैं।

(2) माध्य विचलन से विचलन लेते समय बीजगणितीय चिह्नों को छोड़ दिया जाता है जोकि तर्कहीन है; जबकि प्रमाप विचलन में चिह्नों को न छोड़कर उनका वर्ग करके इस दोष को दूर कर देते हैं।

(3) माध्य विचलन की बजाय प्रमाप विचलन की गणितीय विशेषताएँ बहुत ज्यादा हैं जिसके फलस्वरूप सांख्यिकीय मापों में प्रमाप विचलन एक केन्द्रीय माप का स्थान रखता है।

प्रमाप विचलन सम्बन्धी तथ्य

(1) प्रमाप विचलन केवल समान्तर माध्य से निकाला जाता है, अन्य किसी माध्य से नहीं।

(2) बीजगणितीय चिह्नों को छोड़ा नहीं जाता बल्कि उनका वर्ग कर लिया जाता है।

(3) प्रमाप विचलन के लिए ग्रीक वर्णमाला के अक्षर σ (sigma) का प्रयोग किया जाता है।

नोट

(4) समान्तर माध्य से लिए गये विचलनों का वर्ग ही प्रसरण कहलाता है।

प्रमाप विचलन गुणांक–दो श्रेणियों के अपकिरण की तुलना करने के लिए प्रमाप विचलन का सापेक्ष मान ज्ञात करते हैं जिसे प्रमाप विचलन गुणांक कहते हैं। इसे ज्ञात करने के लिए प्रमाप विचलन (σ) को समान्तर माध्य ($\overline{X}$) से भाग दे देते हैं अर्थात्

$$\text{प्रमाप विचलन गुणांक} = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

7.6 प्रमाप विचलन के परिकलन की रीतियाँ (Methods of Calculation of Standard Deviation)

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) **में प्रमाप विचलन**–इस श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने की निम्न तीन रीतियाँ हैं–

(1) प्रत्यक्ष रीति, (2) मूल्य वर्ग रीति, (3) लघु रीति।

1. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)–इस रीति की क्रियाविधि निम्न है–

(*a*) सर्वप्रथम श्रेणी का समान्तर माध्य ($\overline{X}$) ज्ञात करते हैं।

(*b*) फिर प्रत्येक पद-मूल्य में से समान्तर माध्य घटाकर विचलन ज्ञात कर लेते हैं। $d = (X - \overline{X})$

(*c*) सभी विचलनों के वर्गों का योग Σd^2 ज्ञात कर लेते हैं।

(*d*) विचलन वर्गों के योग को पदों की संख्या से भाग दे देते हैं। यह संख्या या मान द्वितीय अपकिरण घात या प्रसरण होती है।

$$\text{प्रसरण} = \frac{\sum d^2}{N} \text{ or } = \frac{\sum X^2}{N} \text{ or } \frac{\sum (X - \overline{X})^2}{N}$$

2. प्रमाप विचलन ज्ञात करने के लिए इसका वर्गमूल ज्ञात करते हैं अर्थात्

(*e*) प्रमाप विचलन ज्ञात करने के लिए इसका वर्गमूल ज्ञात करते हैं अर्थात्

$$\text{प्रमाप विचलन } \sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum (X - \overline{X})^2}{N}}$$

जब समान्तर माध्य पूर्णांक में हो तब यह रीति उपयुक्त होती है।

2. मूल्य वर्ग रीति (Squares-Value Method)–इस रीति में प्रमाप विचलन ज्ञात करने के लिए पद-मूल्यों (X) का प्रयोग किया जाता है और विचलन नहीं लिये जाते हैं। इसकी निम्न प्रक्रिया है–

(*a*) सर्वप्रथम सभी मूल्यों (X) का योग ($\sum X$) ज्ञात कर लेते हैं।

(*b*) फिर प्रत्येक मूल्य का वर्ग करके उन सभी वर्गों का योग ($\sum X^2$) ज्ञात करते हैं।

(*c*) श्रेणी का समान्तर माध्य ज्ञात करके उसका वर्ग $(\overline{X})^2$ ज्ञात करते हैं।

(*d*) अन्त में प्रमाप विचलन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर लेते हैं–

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} \text{ Or } \sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N.\sum X^2 - (\sum X)^2} \text{ Or } \sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - (\overline{X})^2}$$

जब श्रेणी के मूल्य काफी छोटे हों तो यह सर्वश्रेष्ठ रीति है।

उदाहरण (Illustration) 3:

निम्न श्रेणी से प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए–

मूल्य–26, 24, 29, 22, 30, 19, 24, 28, 28, 30

हल (Solution): समान्तर माध्य एवं प्रमाप विचलन का परिकलन

नोट

क्रमांक	पद मूल्य (X)	प्रत्यक्ष रीति $\overline{X}$ = 26 से विचलन ($d = X - \overline{X}$)	विचलनों के वर्ग (d^2)	मूल्य वर्ग रीति पद-मूल्यों के वर्ग (X^2)
1.	26	0	0	676
2.	24	– 2	4	576
3.	29	+ 3	9	841
4.	22	– 4	16	484
5.	30	+ 4	16	900
6.	19	– 7	49	361
7.	24	– 2	4	576
8.	28	+ 2	4	784
9.	28	+ 2	4	784
10.	30	+ 4	16	900
योग	$\sum X = 260$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 122$	$\sum X^2 = 6882$

प्रत्यक्ष रीति— समान्तर माध्य $\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{260}{10} = 26$

$$\text{प्रमाप विचलन } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} = \sqrt{\frac{122}{10}} = \sqrt{12.2}$$

$$\sigma = 3.49$$

मूल्य वर्ग रीति—प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{6882}{10} - \left(\frac{260}{10}\right)^2} = \sqrt{688.2 - 676}$$

$$\sigma = \sqrt{12.2} = 3.49$$

प्रमाप विचलन गुणांक (Coefficient of Standard Deviation)—प्रमाप विचलन अपकिरण का एक निरपेक्ष माप (Absolute measure) है। दो श्रेणियों के अपकिरण की तुलना करने के लिए इसका सापेक्ष माप (Relative measure) निकाला जाता है, जिसके लिए प्रमाप विचलन को समान्तर माध्य से भाग कर दिया जाता है। इसे अपकिरण का प्रमाप गुणांक (Standard Coefficient of Dispersion) अथवा प्रमाप विचलन गुणांक (Coefficient of Standard Deviation) कहते हैं। अतः सूत्रानुसार—

$$\text{प्रमाप विचलन गुणांक (C of SD)} = \frac{\sigma}{X}$$

3. लघु रीतियाँ (Short-cut Methods)—लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात करने की निम्न प्रक्रिया है—

(*a*) किसी भी मूल्य को अथवा दिये हुए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है।

(*b*) कल्पित माध्य से सभी मूल्यों के विचलन ($dx = X - A$) ज्ञात करके उसका योग ($\sum dx$) ज्ञात कर लेते हैं।

(*c*) सभी विचलनों के वर्ग करके उन वर्गों का योग ($\sum d^2x$) ज्ञात कर लेते हैं।

नोट

(*d*) अन्त में अग्रलिखित सूत्रों में से किसी एक द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात कर लेते हैं–

प्रथम सूत्र–$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$ द्वितीय सूत्र–$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - (\overline{X} - A)^2}$

तृतीय सूत्र–$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2 - N(\overline{X} - A)^2}{N}}$ चतुर्थ सूत्र–$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N.\sum dx^2 - (\sum dx)^2}$

यह रीति समान्तर माध्य के दशमलव होने की स्थिति में ज्यादा उपयोगी है। इन चारों सूत्रों द्वारा परिणाम समान प्राप्त होते हैं। प्रथम सूत्र अधिक प्रचलित है, परन्तु चतुर्थ सूत्र का प्रयोग करने से उपसादन विभ्रम न्यूनतम होता है, क्योंकि यह गुणात्मक सूत्र होता है।

टास्क प्रमाप विचलन गुणांक किसे कहते हैं?

उदाहरण (Illustration) 4:

निम्न समंकों से प्रमाप विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए–

41, 44, 45, 49, 50, 53, 55, 55, 58, 60

हल (Solution): **प्रमाप विचलन का लघु रीति द्वारा परिकलन**

क्रमांक	मूल्य (X)	A = 50 से विचलन (dx)	विचलनों के वर्ग (d^2x)	पद-मूल्यों के वर्ग (X^2)
1.	41	– 9	81	1681
2.	44	– 6	36	1936
3.	45	– 5	25	2025
4.	49	– 1	1	2401
5.	50	0	0	2500
6.	53	+ 3	9	2809
7.	55	+ 5	25	3025
8.	55	+ 5	25	3025
9.	58	+ 8	64	3364
10.	60	+ 10	100	3600
योग N = 10	$\sum X = 510$	$\sum dx = +10$	$\sum d^2x = 366$	$\sum X^2 = 26366$

प्रथम सूत्रानुसार–

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2x}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{366}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{36.6 - 1}$$

$$= \sqrt{35.6}$$

$$\sigma = 5.97$$

द्वितीय सूत्रानुसार–

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2X}{N} - (\overline{X} - A)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{366}{10} - (51 - 50)^2}$$

$$= \sqrt{36.6 - 1}$$

$$= \sqrt{35.6}$$

$$\sigma = 5.97$$

नोट

तृतीय सूत्रानुसार—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2x - N(X-A)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{366 - 10(51-50)^2}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{366-10}{10}} = \sqrt{\frac{356}{10}} = \sqrt{35.6}$$

$\sigma = 5.97$

चतुर्थ सूत्रानुसार—

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N.\sum d^2x - (\sum dx)^2}$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{10 \times 366 - (10)^2}$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{3660 - 100}$$

$$\sigma = \frac{1}{10}\sqrt{3560} = \frac{59.7}{10}$$

$\sigma = 5.97$

7.7 प्रमाप विचलन के गुण एवं दोष (Merits and Demerits of Standard Deviation)

प्रभाव विचलन के निम्नलिखित है -

1. **सभी मूल्यों पर आधारित**—यह श्रेणी के सभी पदमूल्यों पर आधारित होता है। इसमें किसी भी मूल्य को छोड़ा नहीं जाता है।
2. **उच्चतर बीजगणितीय अध्ययन में उपयोगी**—अपने बीजगणितीय गुणों के कारण प्रमाप विचलन का उच्च सांख्यिकीय रीतियों में प्रयोग किया जाता है। इसमें बीजगणितीय चिह्नों को छोड़ा नहीं जाता है।
3. **प्रतिचयन परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव**—यदि एक ही समग्र से कई प्रतिदर्श लिये जाएँ और सभी के लिए अपकिरण के चारों मापों का आगणन किया जाए तो अन्य मापों की तुलना में प्रमाप विचलन में अन्तर न्यूनतम होगा। इसी कारण परिकल्पना जाँच एवं सार्थकता परीक्षण में प्रमाप विचलन का ही प्रयोग किया जाता है।
4. **स्पष्ट व निश्चित माप**—प्रमाप विचलन अपकिरण का एक स्पष्ट व निश्चित माप है जो प्रत्येक स्थिति में ज्ञात किया जा सकता है।
5. **समान्तर माध्य पर आधारित**—प्रमाप विचलन समान्तर माध्य द्वारा ज्ञात करते हैं जोकि एक आदर्श माध्य है इसलिए समान्तर माध्य के सभी गुण इसमें पाये जाते हैं।
6. **अपकिरण का श्रेष्ठ या मानक माप**—एक प्रसामान्य बंटन में $\overline{X} + S.D.$ के अन्तर्गत श्रेणी के 68.27% मूल्य शामिल होते हैं, जबकि माध्य विचलन एवं चतुर्थक विचलन में क्रमशः 57.31% एवं 50% मूल्य शामिल होते हैं।
7. **उपयोगिता**—प्रमाप विचलन अपकिरण की एक सर्वश्रेष्ठ माप है। इस कारण विभिन्न उद्देश्यों के लिए इसका प्रयोग किया जाता है; जैसे—विभिन्न समूहों के विचरण की तुलना करने, विभिन्न श्रेणियों के समान्तर माध्यों की विश्वसनीयता की जाँच करने, दैव प्रतिदर्शों में विभिन्न मापों की सार्थकता की जाँच करने, प्रसामान्य चक्र के अधीनस्थ क्षेत्रफल ज्ञात करने, सह-सम्बन्ध का विश्लेषण करने व तुलना व निर्वचन करने में यह अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होता है।

प्रभाव विचलन के निम्नलिखित दोष है—

(1) अन्य मापों की तुलना में इसका समझना व गणना करना अधिक जटिल है। (2) मध्यक की तरह यह चरम मूल्यों से अत्यधिक प्रभावित होता है। (3) यह समान्तर माध्य से दूर के पदों को अनावश्यक महत्त्व देता है, जबकि पास के पदों को कम महत्त्व देता है। (4) इसका प्रमुख दोष यह भी है कि यह ऐसी दो या दो से अधिक श्रेणियों के विचरण की तुलना नहीं कर सकता जिनकी इकाइयाँ अलग-अलग हों।

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए–

1. निम्न श्रेणी से मध्यक ($\overline{X}$) द्वारा माध्य विचलन ज्ञात कीजिए–

X :	40–50	30–40	20–30	10–20	0–10	–10–0	–20 से –10	–30 से –20
f :	5	7	13	6	3	4	4	8

2. निम्न श्रेणी से मध्यका का प्रयोग करके माध्य विचलन गुणांक निकालिए–

ऊँचाई :	150–155	155–160	160–165	165–170	170–175
संख्या :	10	20	30	15	10

3. निम्न श्रेणी से प्रमाप विचलन व उसका गुणांक निकालिए–

आकार :	25	34	48	36	42	70	30	60	45	50

7.8 सारांश (Summary)

- माध्य विचलन अपकिरण की श्रेष्ठ माप है क्योंकि यह वास्तविक माध्य द्वारा विभिन्न पदमूल्यों से लिये गये विचलनों का समान्तर माध्य होता है। अतः समंक श्रेणी के किसी सांख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, मध्यका या बहुलक) से निकाले गये विभिन्न मूल्यों के विचलनों का समान्तर माध्य उसका माध्य विचलन कहलाता है। माध्य विचलन को प्रथम अपकिरण परिघात (First Moment of Dispersion) भी कहते हैं।
- सैद्धान्तिक रूप से माध्य विचलन समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक में से किसी एक से निकाला जा सकता है परन्तु व्यावहारिक रूप में बहुलक का प्रयोग नहीं किया जाता है क्योंकि यह अनिश्चित होने के कारण भ्रामक निष्कर्ष देता है। जबकि मध्यका सर्वोत्तम होता है क्योंकि यह स्थिर, निश्चित व प्रतिनिधि माध्य है और इससे निकाले गए विचलनों का योग सबसे कम होता है। समान्तर माध्य से भी विचलन ज्ञात किया जा सकता है।
- माध्य विचलन निकालते समय + एवं – चिह्नों को छोड़ दिया जाता है अर्थात् ऋणात्मक विचलनों को भी धनात्मक मान लिया जाता है। ऐसे विचलनों को व्यक्त करने के लिए d के दोनों ओर दो खड़ी रेखाएँ || (modulus) बना दी जाती हैं, इस प्रकार $|d|$ का अर्थ यह है कि विचलन निकालते समय चिह्नों को छोड़ दिया गया है। ऐसा इसलिए किया जाता है क्योंकि विचलनों का बीजगणितीय योग समान्तर माध्य से निकालने पर शून्य होता है और मध्यका से निकालने पर भी लगभग शून्य होता है।
- सभी विचलनों के जोड़ ($\sum|d|$) को पदों की संख्या से भाग देने पर माध्य विचलन ज्ञात हो जाता है।
- माध्य विचलन अपकिरण की एक निरपेक्ष माप है अर्थात् यह उसी इकाई में व्यक्त होता है जो मूल समंकों की है। परन्तु तुलनात्मक विवेचन के लिए माध्य विवेचन के लिए माध्य विचलन की निरपेक्ष माप को सापेक्ष माप में बदला जाता है। इसके लिए माध्य विचलन के निरपेक्ष माप को उस माध्य से भाग दिया जाता है जिससे ये विचलन निकाले गये हैं।
- माध्य विचलन की गणन क्रिया सरल है और यह आसानी से समझ में आ जाता है। यह किसी भी माध्य से निकाला जा सकता है।
- यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होने के कारण एक वैज्ञानिक रीति है और इससे श्रेणी की बनावट की उचित जानकारी प्राप्त हो जाती है।
- माध्य विचलन पर चरम या सीमान्त मूल्यों का कम प्रभाव पड़ता है।
- माध्य विचलन की गणना किसी भी माध्य से कर सकते हैं।

नोट

- माध्य विचलन का सबसे बड़ा दोष यह है कि विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिह्नों + एवं – को छोड़ दिया जाता है। यदि ऐसा न करें तो कुल विचलन हमेशा शून्य आयेगा। परन्तु चिह्नों को छोड़ देने से यह गणितीय दृष्टिकोण से अशुद्ध एवं अवैज्ञानिक माप ही जाती है और उच्च स्तरीय प्रयोग के योग्य नहीं रहती।
- यह अपकिरण की एक अनिश्चित माप है क्योंकि यह किसी भी माध्य द्वारा परिकलित किया जा सकता है। बहुलक से निकाला गया माध्य विचलन बहुलक के अनिश्चित व अप्रतिनिधिक होने के कारण असंतोषजनक होता है। समान्तर माध्य से निकाले गये विचलनों का योग अधिक होने के कारण माध्य विचलन अवैज्ञानिक होता है। यदि श्रेणी में विचरणशीलता बहुत अधिक होती है तो निकाले गये परिणाम भी भ्रामक होंगे।
- आर्थिक, व्यापारिक एवं सामाजिक क्षेत्र में अपकिरण के इस माप का काफी प्रयोग होता है। आय व ध न वितरण की असमानताओं का अध्ययन इसी रीति से किया जाता है। व्यापार चक्रों के पूर्वानुमान के लिए इसका प्रयोग अधिक होता है। यह लघु प्रतिदर्श अध्ययन के लिए बेहद उपयोगी माप होती है। परिकलन की सरलता एवं प्रमाप विचलन में चरम पदों को ज्यादा महत्व देने से इस माप को पूर्ण समर्थन प्राप्त है।
- प्रमाप विचलन गणितीय रूप से एक शुद्ध माप है क्योंकि इसमें विचलनों के चिह्नों को छोड़ा नहीं जाता है बल्कि प्राप्त विचलनों के वर्ग कर लेते हैं जिससे ऋणात्मक विचलन स्वत: ही धनात्मक हो जाते हैं। अंत में विचलन वर्गों का माध्य निकालकर उसका वर्गमूल ज्ञात कर लेते हैं जो प्रमाप विचलन कहलाता है।
- प्रमाप विचलन को माध्य विभ्रम (Mean Error), माध्य वर्ग विभ्रम (Mean Square Error) या माध्य से निकाला जाने वाला विचलन वर्ग माध्य मूल भी कहा जाता है। विचलन वर्ग माध्य मूल्य, कल्पित मूल्य अथवा कल्पित माध्य से लिये गये विचलन वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल होता है। अत: यदि विचलन समान्तर माध्य से लिये गये हों जब इन दोनों में कोई अन्तर नहीं होता है।
- दो श्रेणियों के अपकिरण की तुलना करने के लिए प्रमाप विचलन का सापेक्ष मान ज्ञात करते हैं जिसे प्रमाप विचलन गुणांक कहते हैं। इसे ज्ञात करने के लिए प्रमाप विचलन (σ) को समान्तर माध्य $(\overline{X})$ से भाग दे देते हैं अर्थात्

$$\text{प्रमाप विचलन गुणांक} = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

- प्रमाप विचलन अपकिरण का एक निरपेक्ष माप (Absolute measure) है। दो श्रेणियों के अपकिरण की तुलना करने के लिए इसका सापेक्ष माप (Relative measure) निकाला जाता है, जिसके लिए प्रमाप विचलन को समान्तर माध्य से भाग कर दिया जाता है। इसे अपकिरण का प्रमाप गुणांक (Standard Coefficient of Dispersion) अथवा प्रमाप विचलन गुणांक (Coefficient of Standard Deviation) कहते हैं। अत: सूत्रानुसार–

$$\text{प्रमाप विचलन गुणांक (C of SD)} = \frac{\sigma}{X}$$

- यह श्रेणी के सभी पदमूल्यों पर आधारित होता है। इसमें किसी भी मूल्य को छोड़ा नहीं जाता है।
- अपने बीजगणितीय गुणों के कारण प्रमाप विचलन का उच्च सांख्यिकीय रीतियों में प्रयोग किया जाता है। इसमें बीजगणितीय चिह्नों को छोड़ा नहीं जाता है।
- यदि एक ही समग्र से कई प्रतिदर्श लिये जाएँ और सभी के लिए अपकिरण के चारों मापों का आगणन किया जाए तो अन्य मापों की तुलना में प्रमाप विचलन में अन्तर न्यूनतम होगा। इसी कारण परिकल्पना जाँच एवं सार्थकता परीक्षण में प्रमाप विचलन का ही प्रयोग किया जाता है।
- प्रमाप विचलन अपकिरण का एक स्पष्ट व निश्चित माप है जो प्रत्येक स्थिति में ज्ञात किया जा सकता है।
- प्रमाप विचलन अपकिरण की एक सर्वश्रेष्ठ माप है। इस कारण विभिन्न उद्देश्यों के लिए इसका प्रयोग किया जाता है; जैसे–विभिन्न समूहों के विचरण की तुलना करने, विभिन्न श्रेणियों के समान्तर माध्यों की

नोट

विश्वसनीयता की जाँच करने, दैव प्रतिदर्शों में विभिन्न मापों की सार्थकता की जाँच करने, प्रसामान्य चक्र के अधीनस्थ क्षेत्रफल ज्ञात करने, सह-सम्बन्ध का विश्लेषण करने व तुलना व निर्वचन करने में यह अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होता है।

- प्रमाप विचलन अपकिरण की एक सर्वश्रेष्ठ माप है। इस कारण विभिन्न उद्देश्यों के लिए इसका प्रयोग किया जाता है; जैसे–विभिन्न समूहों के विचरण की तुलना करने, विभिन्न श्रेणियों के समान्तर माध्यों की विश्वसनीयता की जाँच करने, दैव प्रतिदर्शों में विभिन्न मापों की सार्थकता की जाँच करने, प्रसामान्य चक्र के अधीनस्थ क्षेत्रफल ज्ञात करने, सह-सम्बन्ध का विश्लेषण करने व तुलना व निर्वचन करने में यह अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होता है।

7.9 शब्दकोश (Keywords)

- अपकिरण–यह भिन्नताओं का पूर्ण एवं सापेक्ष माप है।
- परिकलन–जटिल गणना, कठिन हिसाब।

7.10 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. माध्य विचलन एवं माध्य विचलन गुणांक का विवेचन कीजिए।
2. माध्य विचलन के परिकलन की रीतियाँ क्या हैं?
3. माध्य विचलन के गुण-दोषों का विश्लेषण कीजिए।
4. प्रमाप विचलन से आप क्या समझते हैं? प्रमाप विचलन के परिकलन की रीतियों का वर्णन कीजिए।
5. प्रमाप विचलन के गुण-दोषों का विश्लेषण कीजिए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. माध्य 2. वैज्ञानिक 3. चरम या सीमांत मूल्यों 4. बीजगणितीय 5. अनिश्चित

2. 1. $\overline{X} = 12.4, \delta = 20.024$ 2. $M = 16.2, \delta m = 4.535$ 3. $\sigma = 13.08$, C of $\sigma = 0.297$

7.11 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा

नोट

इकाई—8: विषमता एवं पृथुशीर्षत्व : कार्ल पियर्सन, बाउले, कैली की विधियाँ (Skewness and Kurtosis : Karl Pearson, Bowley, Kelly's Methods)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- विषमता के अर्थ, माप एवं परिभाषा को समझने में।
- अपकिरण एवं विषमता में अन्तर की व्याख्या करने में।
- पृथुशीर्षत्व की व्याख्या करने एवं सांख्यिकी की सीमाओं का विवेचन करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

एक आवृत्ति बंटन की केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप और केन्द्रीय मूल्य (माध्य) के चारों ओर पदमूल्यों के जमाव या संकेन्द्रण को अपकिरण की माप में ज्ञात करते हैं, परन्तु ये श्रेणी की विशेषताओं पर प्रकाश नहीं डालते हैं। अर्थात् यह नहीं ज्ञात हो पाता कि श्रेणी का स्वरूप एवं बनावट कैसी है। यह ज्ञात नहीं हो पाता है कि बंटन सममित है या असममित है। इसका अध्ययन करने के लिए विषमता माप का प्रयोग करते हैं।

आवृत्ति वक्र के शीर्ष की प्रकृति का अध्ययन करने के लिए पृथुशीर्षत्व (Kurtosis) का माप निकाला जाता है। पृथुशीर्षत्व द्वारा आवृत्ति वक्र की प्रसामान्यता (Normality) का विश्लेषण किया जाता है।

नोट

8.1 विषमता का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Skewness)

विषमता का अपना कोई स्वतंत्र अर्थ नहीं होता है बल्कि इसका प्रयोग सममिति के माप के रूप में करते हैं। किसी समंक श्रेणी में सममिति के अभाव को विषमता अथवा असममिति कहते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी वितरण के सममिति से दूर हटने की प्रवृत्ति विषमता कहलाती है। विषमता की माप से यह ज्ञात होता है कि यदि आवृत्ति बंटन का वक्र बनाया जाए तो वह सममित होगा या असममित तथा असममिति की दिशा व मात्रा क्या होगी।

क्रॉक्सटन व **काउडेन** के अनुसार, "जब कोई श्रेणी सममित नहीं होती तो उसे असममित या वैषम्य कहा जाता है।"

रिगलमैन व **फ्रिस्बी** के अनुसार, "विषमता सममिति का अभाव है। जब एक आवृत्ति बंटन को रेखाचित्र कर प्रांकित किया जाता है तो पद-मूल्यों में उपस्थित विषमता की प्रवृत्ति मध्यक के एक तरफ अधिक फैलने की होती है न कि दूसरी तरफ।"

सिम्पसन एवं **काफ्का** (Simpson and Kafka) के अनुसार, "विषमता के माप हमें असममिति (विषमता) की दिशा व सीमा बताते हैं। एक सममित बंटन में समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक समरूप होते हैं। समान्तर माध्य बहुलक से जितना दूर होता जाता है असममिति या विषमता उतनी अधिक होती है।"

गैरट के अनुसार, "एक बंटन विषम कहलाता है जब बंटन में माध्य तथा मध्यका भिन्न बिन्दुओं पर स्थित होते हैं और गुरुत्व केन्द्र (Central of gravity) एक तरफ अथवा दूसरी तरफ बायें या दायें खिसक जाता है।"

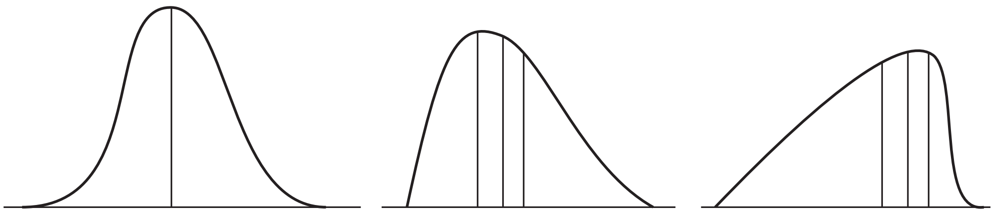
विषमता होने पर सममित नहीं होती और सममित होने पर विषमता लुप्त हो जाती है।

1. **सममित बंटन या वितरण** (Symmetrical Distribution)–सममित प्रकृति के आधार पर आवृत्ति बंटन दो प्रकार के हो सकते हैं–(1) सममित, (2) असममित। सममित बंटन में आवृत्तियों के बढ़ने और घटने का क्रम नियमित होता है। इसमें आवृत्तियाँ नियमित क्रम से बढ़ती हैं फिर एक निश्चित बिन्दु अर्थात् अधिकतम आवृत्ति से उसी नियमित क्रम में घटती हैं। इसका वक्र घण्टी के आकार वाला होता है जिसे प्रसामान्य वक्र कहते हैं। एक सममित बंटन में समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक बराबर होते हैं तथा मध्यका से दोनों चतुर्थक मूल्यों के अन्तर भी आपस में समान होते हैं। ($\overline{X} = M = Z$ or $Q_3 - M = M - Q_1$) इस बंटन में विषमता का मान शून्य होता है।

2. **असममित बंटन या वितरण** (Asymmetrical or Skewed Distribution)–असममित बंटन में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने का क्रम नियमित नहीं होता। आवृत्तियाँ जिस क्रम से पहले बढ़ती हैं अधिकतम होने के बाद फिर उसी क्रम से नहीं घटतीं। ऐसे बंटन का वक्र घण्टाकार न होकर दायें व बायें झुकाव लिये होता है। ऐसे बंटन में समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक का मूल्य बराबर नहीं होता और मध्यका से दोनों चतुर्थकों के मूल्य भी असमान होते हैं। इस बंटन में विषमता पाई जाती है। ये दो प्रकार के होते हैं–

   (*a*) **धनात्मक विषमता** (Positive Skewness)–यदि वक्र दाहिनी ओर अधिक झुका हुआ हो तो विषमता धनात्मक होती है (देखिए चित्र-B)। धनात्मक विषमता वाले बंटन में समान्तर माध्य ($\overline{X}$) मध्यका (M) से बड़ा होता है और मध्यका बहुलक (Z) से बड़ा होता है। इसी प्रकार मध्यका से तृतीय चतुर्थक का अन्तर ($Q_3 - M$), मध्यका से प्रथम चतुर्थक के अन्तर ($M - Q_1$) से अधिक होता है।

नोट



$\bar{X} = M = Z$
$Q_3 - M = M - Q_1$
(*a*) विषमता का अभाव

$\bar{X} > M > Z$
$Q_3 - M > M - Q_1$
(*b*) धनात्मक विषमता

$Z > M > \bar{X}$
$M - Q_1 > Q_3 - M$
(*c*) ऋणात्मक विषमता

चित्र : 8.1

(*b*) **ऋणात्मक विषमता** (Negative Skewness)—यदि वक्र दाहिनी ओर के बजाय बायीं ओर अधिक झुका हुआ हो तो विषमता ऋणात्मक होती है (देखिए चित्र-C)। ऐसे बंटन में समान्तर माध्य का मूल्य मध्यका से कम और मध्यका का मूल्य बहुलक से कम होता है। इसी प्रकार, मध्यका व तृतीय चतुर्थक का अन्तर $(Q_3 - M)$ मध्यका और प्रथम चतुर्थक के अन्तर $(M - Q_1)$ से कम होता है। सममित तथा असममित बंटन को नीचे तीन उदाहरण लेकर सारणी द्वारा भी स्पष्ट किया गया है।

विषमता के विभिन्न स्वरूप—तुलनात्मक अध्ययन

आकार (Size)	बंटन A		बंटन B		बंटन C	
	f	fX	f	fX	f	fX
10	7	70	2	20	2	20
11	8	88	12	132	4	44
12	9	108	10	120	5	60
13	10	130	7	91	6	78
14	9	126	6	84	10	140
15	8	120	5	75	12	180
16	7	112	2	32	7	112
योग	$N = 58$	$\Sigma fX = 754$	$N = 44$	$\Sigma fX = 554$	$N = 46$	$\Sigma fX = 634$
माध्य-मूल्य	$\bar{X} = 13, M = 13, Z = 13$		$\bar{X} = 12.6, M = 12, Z = 10$		$\bar{X} = 13.8, M = 14, Z = 15$	
माध्यों का क्रम	$\bar{X} = M = Z$		$\bar{X} > M > Z$		$\bar{X} < M < Z$	
विभाजन मूल्य	$(Q_3 - M) = (M - Q_1)$		$(Q_3 - M) > (M - Q_1)$		$(Q_3 - M) < (M - Q_1)$	
विषमता	विषमता का अभाव		धनात्मक विषमता		ऋणात्मक विषमता	
वक्र	घण्टाकार या प्रासामान्य		दाहिनी ओर झुकाव		बायीं ओर झुकाव	

विषमता की जाँच (Test of Skewness)—किसी बंटन या समंकमाला में विषमता की जाँच निम्न आधार पर की जाती है—

(1) **माध्यों का सम्बन्ध**—यदि बंटन में समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक के मूल्य बराबर नहीं हैं तो उसमें विषमता होती है। विषम बंटन में माध्य और बहुलक काफी दूरी पर होते हैं और मध्यका प्रायः उनके बीच स्थित होता है। माध्य और बहुलक में जितना अधिक अन्तर होता है विषमता की मात्रा उतनी ही अधिक होगी।

नोट

(2) **विभाजन-मूल्यों का अन्तर**—यदि मध्यका से दोनों चतुर्थक समान दूरी पर न हों अर्थात् $(Q_3 - M) \neq (M - Q_1)$ अथवा $(Q_3 - M) - (M - Q_1) = 0$ न हों तो श्रेणी में विषमता पाई जाती है।

(3) **विचलनों का योग**—यदि मध्यका और बहुलक से लिए गए विचलनों का बीजगणितीय योग शून्य न हो $(\Sigma d \neq 0)$ तो बंटन में विषमता होती है।

(4) **वक्र का स्वरूप**—बंटन को रेखाचित्र पर अंकित करने पर यदि वक्र घण्टाकार नहीं है अथवा वह दायें या बायें अधिक झुकाव लिए है तो उसमें विषमता होती है।

(5) **आवृत्तियों का फैलाव**—यदि बहुलक के दोनों ओर की आवृत्तियों का योग बराबर नहीं है तो श्रेणी में विषमता होती है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)—

1. सममित बंटन में आवृत्तियों के बढ़ने और घटने का ········· होता है।
2. सममित बंटन का वक्र घण्टी के आकार वाला होता है जिसे ········· कहते हैं।
3. असममित बंटन का वक्र घण्टाकार न होकर ········· झुकाव लिये होता है।
4. यदि वक्र दाहिनी ओर अधिक झुका हुआ हो तो विषमता ········· होती है।
5. ········· में समान्तर माध्य का मूल्य मध्यका से कम और मध्यका का मूल्य बहुलक से कम होता है।

8.2 विषमता के माप (Measures of Skewness)

ऊपर बताए गए परीक्षण (tests) केवल इस बात का संकेत देते हैं कि कोई बंटन-विशेष विषम है अथवा नहीं। इसके बाद अगली समस्या होती है विषमता या असममिति की मात्रा या सीमा (Extent) की माप करना। इसके लिए विषमता के माप प्रयोग में लाए जाते हैं। ये माप दो प्रकार के होते हैं—निरपेक्ष माप तथा सापेक्ष माप।

I. विषमता के निरपेक्ष माप (Absolute Measures of Skewness)

इन्हें विषमता के प्रथम माप (First Measures of Skewness) भी कहते हैं। निरपेक्ष माप इस मान्यता पर आधारित है कि एक विषम बंटन में समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक मूल्य समान नहीं होते। अत: इनमें से किन्हीं दो मूल्यों (माध्यों) के बीच का अन्तर, विषमता की मात्रा होती है। सूत्रानुसार—

निरपेक्ष विषमता या $S_k = \overline{X} - Z$ या $S_k = \overline{X} - M$ या $S_k = M - Z$

टिप्पणी—जब विषमता का माप चतुर्थकों पर आधारित हो तब निरपेक्ष विषमता का सूत्र निम्न है—

निरपेक्ष विषमता या $S_k = Q_3 + Q_1 - 2M$

विषमता के निरपेक्ष (या प्रथम) मान निम्न कारणों से असंतोषजनक माने जाते हैं—

(1) **बंटनों की इकाइयाँ भिन्न होना**—निरपेक्ष माप उसी इकाई में व्यक्त होती है जो उस बंटन विशेष की इकाई होती है। चूँकि बंटनों की इकाइयाँ प्राय: भिन्न-भिन्न होती हैं अत: जब हम एक बंटन की विषमता की तुलना किसी अन्यत्र इकाई वाले बंटन से करना चाहें तो वह सम्भव नहीं हो पाता। उदाहरणार्थ, छात्रों के भार और उनकी लम्बाई वाली दो श्रेणियों के बीच निरपेक्ष विषमता की तुलना नहीं की जा सकती, क्योंकि दोनों की इकाइयाँ भिन्न-भिन्न है।

(2) **बंटनों तथा माध्यों में अत्यधिक अन्तर होना**—बंटनों में प्राय: अत्यधिक भिन्नता होती है। दो माध्यों का निरपेक्ष अन्तर $(\overline{X} - Z \text{ or } \overline{X} - M)$ किसी एक बंटन में बहुत ज्यादा हो सकता है जबकि दूसरे बंटन में समान हो, परन्तु उन दोनों बंटनों को यदि रेखाचित्र पर प्रांकित किया जाए तो उनके वक्र समरूप (similar) भी हो सकते हैं।

> टास्क विषमता का प्रथम माप किसे कहते हैं ?

II. विषमता के सापेक्ष माप (Relative Measures of Skewness)

दो श्रेणियों या बंटनों की तुलना करने के लिए विषमता के सापेक्ष माप ज्ञात किए जाते हैं। इनको विषमता गुणांक (Coefficient of skewness) भी कहते हैं। सापेक्ष माप या विषमता गुणांक ज्ञात करने के लिए निरपेक्ष माप को अपकिरण के किसी भी माप से विभाजित कर दिया जाता है। परन्तु ध्यान रहे, व्यवहार में केवल प्रमाप विचलन का ही प्रयोग किया जाता है, क्योंकि अपकिरण के अन्य माप किसी-न-किसी रूप में सीमाग्रसित हैं जबकि प्रमाप विचलन एक आदर्श माप है।

सापेक्ष विषमता के प्रमुख माप (Main Measures of Relative Skewness)

सापेक्ष विषमता के निम्न चार प्रमुख माप हैं—

(1) कार्ल पियर्सन विषमता गुणांक (Karl Pearson Coefficient of Skewness)

(2) बाउले का विषमता गुणांक (Bowley's Coefficient of Skewness),

(3) कैली का विषमता गुणांक (Kelly's Coefficient of Skewness),

(4) परिघातों पर आधारित विषमता माप (Skewness Measures based on Moments)।

(1) कार्ल पियर्सन विषमता गुणांक (Karl Pearson Coefficient of Skewness)

कार्ल पियर्सन का माप समान्तर माध्य तथा बहुलक के अन्तर पर आधारित है और विभाजक के रूप में प्रमाप विचलन का प्रयोग होता है।

सूत्रानुसार—पियर्सन विषमता गुणांक या $J = \dfrac{\overline{X} - Z}{\sigma}$

वैकल्पिक सूत्र (Alternative Formula)—यदि बहुलक अस्पष्ट व अनिश्चित है तो माध्यों के पारस्परिक सम्बन्ध के आधार पर वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग किया जाता है जोकि इस प्रकार है—

वैकल्पिक सूत्र: $J = \dfrac{3(\overline{X} - M)}{\sigma}$ $[\because \overline{X} - Z = 3(\overline{X} - M)]$

पियर्सन गुणांक की विशेषताएँ—(*i*) यदि J का मान शून्य है तो बंटन विषमता रहित अर्थात् सममित होता है। (*ii*) यदि J का मान (+) में है तो धनात्मक विषमता और (-) होने पर ऋणात्मक विषमता होती है। (*iii*) सिद्धान्त रूप में इस गुणांक की कोई सीमा नहीं है (जोकि इसका प्रमुख दोष है) परन्तु व्यवहार में यह सामान्यतया ± 1 के बीच रहता है। वैकल्पिक सूत्र की स्थिति में गुणांक की सीमाएँ ± 3 होती हैं।

(2) बाउले का विषमता गुणांक (Bowley's Coefficient of Skewness)

प्रो. बाउले का विषमता गुणांक चतुर्थकों और मध्यका पर आधारित है। इसे विषमता का द्वितीय माप भी कहते हैं। एक सममित बंटन में दोनों चतुर्थक मध्यका से समान दूरी पर होते हैं अर्थात् $(M - Q_1 = Q_3 - M)$। यदि यह अन्तर समान नहीं है तो बंटन में विषमता निश्चित है। इन अन्तरों के आधार पर किया गया माप ही बाउले का विषमता माप है। चूँकि इस माप का प्रयोग सर्वप्रथम डॉ. बाउले द्वारा किया गया था, इसलिए इसे 'Bowley's Measures of Skewness' भी कहते हैं। सूत्र इस प्रकार है—

बाउले का निरपेक्ष विषमता माप या विषमता का चतुर्थक माप—

$SK_Q = (Q_3 - M) - (M - Q_1)$ या $SK_Q = Q_3 + Q_1 - 2M$

बाउले का विषमता गुणांक या विषमता का चतुर्थक गुणांक—

नोट

$$J_Q = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)} \qquad \text{या} \qquad J_Q = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

> *नोट्स* प्रो. बाउले का विषमता गुणांक चतुर्थकों और मध्यका पर आधारित है। इसे विषमता का द्वितीय माप भी कहते हैं।

स्मरणीय तत्व–(1) यह गुणांक भी एक शुद्ध अंक है। (2) इस गुणांक की सैद्धान्तिक सीमाएँ ± 1 होती हैं। (3) एक सममित बंटन की स्थिति में गुणांक का मान शून्य होगा। (4) बाउले और पियर्सन के विषमता गुणांक के मान समान नहीं होते बल्कि असाधारण आकृति वाले बंटनों की स्थिति में इनके विपरीत चिह्न भी हो सकते हैं। फलत: ये दोनों गुणांक तुलनीय नहीं हैं।

बाउले माप की सीमाएँ (Limitations)–यह विषमता की एक सरल माप है, परन्तु इसके परिणाम विश्वसनीय नहीं होते। उदाहरणार्थ, गुणांक का मान कई बार शून्य होने पर भी, बंटन पूर्णतया सममित नहीं होता। इसका कारण यह है कि चतुर्थक श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होते। दूसरे शब्दों में, यह माप श्रेणी के केवल आधे (50%) भाग की विषमता का ही अध्ययन करता है।

(3) कैली का विषमता गुणांक (Kelly's Coefficient of Skewness)

कैली का विषमता गुणांक बाउले सूत्र का संशोधित रूप है। बाउले सूत्र जोकि चतुर्थकों पर आधारित है, के अन्तर्गत बंटन के प्रथम 25% और अंतिम 25% मूल्य छोड़ दिए जाते हैं। चूँकि एक अच्छा माप वह है जो बंटन के सभी मूल्यों पर आधारित हो अत: इस दृष्टि से कैली ने चतुर्थकों के स्थान पर दशमकों या शतमकों के प्रयोग का सुझाव दिया है। कैली ने अपने विषमता सूत्र में प्रथम तथा नवें दशमक अथवा दसवें तथा नब्बेवें शतमक का प्रयोग किया है। स्पष्ट है कि इस स्थिति में बंटन के प्रथम 10% और अंतिम 10% अर्थात् कुल 20% मूल्य अध्ययन से बाहर रहते हैं जबकि 80% मूल्य अध्ययन में शामिल होते हैं। कैली का सूत्र निम्न है–

$$J_K = \frac{D_1 + D_9 - 2M}{D_9 - D_1} \qquad \text{or} \qquad J_K = \frac{P_{10} + P_{90} - 2M}{P_{90} - P_{10}}$$

$$\text{or} \qquad J_K = \frac{D_1 + D_9 - 2D_5}{D_9 - D_1} \qquad \text{or} \qquad J_K = \frac{P_{10} + P_{90} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}}$$

हम जानते हैं–$D_1 = P_{10}, D_9 = P_{90}, M = D_5 - P_{50}$

(4) परिघातों पर आधारित विषमता माप (Skewness Measures based on Moments)

इस रीति में माध्य पर आधारित तृतीय परिघात की सहायता से विषमता का माप ज्ञात की जाती है।

8.3 अपकिरण और विषमता में अन्तर (Difference Between Dispersion and Skewness)

(1) अपकिरण से किसी बंटन की बनावट का ज्ञान होता है। सरल शब्दों में, अपकिरण की मापों से इस बात का पता चलता है कि श्रेणी के विभिन्न पद-मूल्यों का आपस में या किसी माध्य से कितना विचलन या बिखराव है। इसके विपरीत विषमता के माप यह बताते हैं कि श्रेणी के माध्य से दोनों ओर के भागों का विचरण बराबर है अन्यथा किस भाग में विचरण अधिक है।

(2) अपकिरण इस बात की कोई जानकारी नहीं देता कि माध्य से किस दिशा में मूल्यों का विचरण अधिक है जबकि विषमता की सहायता से माध्य के दोनों ओर के भागों के विचरण की तुलना अर्थात् धनात्मक और ऋणात्मक विषमता के रूप में सहज ही की जा सकती है।

नोट

(3) विषमता से यह पता चलता है कि आवृत्ति-वक्र सममित (symmetrical) है या असममित, और यदि असममित है तो उसकी दिशा और मात्रा कितनी है, जबकि इसके विपरीत अपकिरण की मापें सममिति पर कोई प्रकाश नहीं डालतीं।

(4) अपकिरण से समूह की बनावट (composition) का ज्ञान होता है, जबकि विषमता से समूह के स्वरूप (shape) का पता चलता है।

(5) अपकिरण, केन्द्रीय मूल्य के चारों ओर के विचलनों का औसत है इसलिए यह माध्य का ही एक रूप है। इसके विपरीत विषमता माध्यों पर आधारित है, परन्तु स्वयं माध्य नहीं है।

(6) अपकिरण, समंकों में विचलनशीलता की मात्रा को ज्ञात करने में उपयोगी है जबकि विषमता यह बताती है कि जमाव बड़े मूल्यों में अधिक है या छोटे मूल्यों में।

(7) अपकिरण से यह पता चलता है कि माध्य, व्यक्ति मूल्यों का कहाँ तक प्रतिनिधित्व करता है, जबकि विषमता से बंटन की प्रसामान्यता का ज्ञान होता है।

(8) अपकिरण विचरणशीलता का अध्ययन करता है जबकि विषमता, बहुलक (Mode) के दोनों ओर के वितरण की सममित का अध्ययन करती है।

(9) अपकिरण के माप द्विघातीय माध्यों (Averages of the Second Order) पर आधारित हैं जबकि विषमता के माप मुख्यतया प्रथम घातीय माध्यों (Averages of First Order) पर आधारित हैं।

(10) अपकिरण के माप प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय परिघातों (Moments) पर आधारित हैं जबकि विषमता के माप केवल प्रथम व तृतीय परिघातों के आधार पर ही निकाले जाते हैं।

स्मरण रहे, उपर्युक्त अन्तर के बावजूद अपकिरण तथा विषमता के माप एक-दूसरे के अनुपूरक हैं। सच तो यह है कि आवृत्ति-बंटन के विधिवत् विश्लेषण के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति, अपकिरण तथा विषमता तीनों के मापों का ज्ञान परमावश्यक है। जहाँ केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप से आवृत्ति-बंटन का सारांश ज्ञात होता है, वहाँ अपकिरण से समंकों के बिखराव का पता लगता है और विषमता से यह जानकारी होती है कि माध्य से किस ओर का अपकिरण (बिखराव) अधिक है।

उदाहरण (Illustration) 1: निम्न समंकों से कार्ल पियर्सन विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए–

आकार–82, 87, 109, 124, 93, 120, 130, 118, 106, 105

हल (Solution): इसमें बहुलक अस्पष्ट व अनिर्धारित है अत: पियर्सन के वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग किया जाएगा–

आकार (X) (आरोही क्रम)	**A = 110 से विचलन (Deviations)**	**विचलन वर्ग (Squares)**
X	dx	dx^2
82	– 28	784
87	– 23	529
93	– 17	289
105	– 5	25
106	– 4	16
109	– 1	1
118	+ 8	64
120	+ 10	100
124	+ 14	196
130	+ 20	400
N = 10	$\Sigma dx = -26$	$\Sigma dx^2 = 2404$

नोट

$$\text{समान्तर माध्य } (\bar{X}) = A + \frac{\Sigma dx}{N}$$

$$\bar{X} = 110 - \frac{26}{10} = 110 - 2.6 = 107.4$$

$$M = \text{Size of } \frac{N+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5.5\text{th term}$$

$$\therefore \quad M = \frac{106+109}{2} = \frac{215}{2} = 107.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N} - \left[\frac{\Sigma dx}{N}\right]^2} = \sqrt{\frac{2404}{10} - \left(\frac{-26}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{240.4 - 6.76} = \sqrt{233.64} = 15.285$$

विषमता गुणांक या $\quad J = \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma} = \frac{3(107.4 - 107.5)}{15.285} = \frac{3X - 0.1}{15.285} = 0.02$

अतः श्रेणी में अल्प-मात्रा की ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness) है।

उदाहरण (Illustration) 2: एक समंक बंटन का पियर्सन विषमता गुणांक 0.5 है, विचरण गुणांक 40% है और बहुलक 80 है। बंटन का समान्तर माध्य तथा मध्यका ज्ञात कीजिए।

हल (Solution):

$$J = +0.5,\ C.V. = 40\%,\ Z = 80,\ \bar{X} = ?,\ M = ?$$

$$J = \frac{\bar{X} - Z}{\sigma} \text{ or } 0.5 = \frac{\bar{X} - 80}{\sigma} \text{ or } 0.5\,\sigma = \bar{X} - 80 \text{ or } \bar{X} - 0.5\sigma = 80 \qquad ...(i)$$

$$C.V. = \frac{\sigma}{X} \times 100 \text{ or } 40 = \frac{\sigma}{X} \times 100 \text{ or } 40X = 100\sigma \text{ or } 0.4\bar{X} - \sigma = 0 \qquad ...(ii)$$

समीकरण (*i*) को 0.4 से गुणा करके उसमें से समीकरण (*ii*) घटाने पर,

$$0.4\bar{X} - 0.2\sigma = 32$$

$$0.4\bar{X} - 1\,\sigma = 0$$

$$0.8\,\sigma = 32 \qquad \therefore \quad \sigma = 40$$

समी. (*ii*) में σ का मान रखने पर,

$$0.4\bar{X} - 40 = 0 \qquad \therefore \qquad \bar{X} = 40/0.4 = 100$$

$$J = \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma} \quad \text{or} \quad 0.5 = \frac{300 - 3M}{40} \quad \text{or} \quad 20 = 300 - 3M$$

$$\therefore \quad M = 93.33$$

उदाहरण (Illustration) 3: कैली सूत्र द्वारा निम्न बंटनों में सममितता की तुलना कीजिए–

Size	:	102	104	106	108	110	112	114
Group A	:	10	16	24	22	50	15	12
Group B	:	15	22	55	26	18	20	3

हल (Solution):

नोट

दशमकों का परिकलन

(Computation of Deciles)

आकार (Size)	Group–A		Group–B	
	(*f*)	(*c.f.*)	(*f*)	(*c.f.*)
102	10	10	15	15
104	16	26	22	37
106	24	50	55	92
108	22	72	26	118
110	50	122	18	136
112	15	137	20	156
114	12	149	3	159
योग	N = 149		N = 159	

GROUP–A

$$D_1 = \text{Size of } \frac{N+1}{10} = \frac{150}{10} = 15\text{th item}$$

$$\therefore \quad D_1 = 104$$

$$D_9 = \text{Size of } \frac{9(N+1)}{10} = \frac{9 \times 150}{10} = 135\text{th item}$$

$$\therefore \quad D_9 = 112$$

$$M = D_{50} = \frac{N+1}{2} = \frac{150}{2} = 75\text{th item} \quad \therefore \quad M = D_{50} = 110$$

$$J_K = \frac{D_1 + D_9 - 2M}{D_9 - D_1} = \frac{104 + 112 - (2 \times 10)}{112 - 104}$$

$$= \frac{216 - 220}{8} = \frac{-4}{8} = -0.5$$

GROUP–B

$$D_1 = \text{Size of } \frac{N+1}{10} = \frac{159+1}{10} = 16\text{th item} \quad \therefore \quad D_1 = 104$$

$$D_9 = \text{Size of } \frac{9(N+1)}{10} = \frac{9 \times 160}{10} = \frac{1440}{10} = 144\text{th item} \quad \therefore \quad D_9 = 112$$

$$M = D_{50} = \text{Size of } \frac{N+1}{2} = \frac{159+1}{2} = 80\text{th item} \quad \therefore \quad M = 106$$

$$J_K = \frac{D_1 + D_9 - 2M}{D_9 - D_1} = \frac{104 + 112 - (2 \times 106)}{112 - 104}$$

$$= \frac{216 - 212}{8} = \frac{4}{8} = +0.5$$

दोनों समूहों में विषमता की मात्रा समान है। परन्तु A समूह में ऋणात्मक और B समूह में धनात्मक विषमता है।

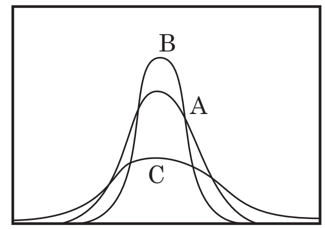
नोट

8.4 पृथुशीर्षत्व अथवा ककुदता अथवा शिखरीयता (Kurtosis)

पृथुशीर्षत्व का अर्थ (Meaning of Kurtosis)—ग्रीक भाषा में Kurtosis शब्द का अर्थ है उभरा हुआ उभरापन (bulge or bulginess)। इसी तरह सांख्यिकी में भी पृथुशीर्षत्व प्रसामान्यता के सन्दर्भ में आवृत्ति वक्र की शिखरीयता का द्योतक है। अतः प्रसामान्य वक्र की तुलना में किसी आवृत्ति वक्र के नुकीलेपन या शीर्षत्व (Peakedness) अथवा चपटेपन (Flatness) के माप को पृथुशीर्षत्व कहते हैं।

क्रॉक्सटेन एवं **काउडेन** के अनुसार, "पृथुशीर्षत्व का माप उस मात्रा को व्यक्त करता है जिसमें एक आवृत्ति बंटन का वक्र नुकीला या चपटे शीर्ष वाला होता है।" "(A measure of Kurtosis indicates the degree to which a curve of a frequency distribution is peaked or flat topped." *Croxton & Cowden*)

स्पीगल के अनुसार, "पृथुशीर्षत्व प्रायः प्रसामान्य वक्र की तुलना में किसी आवृत्ति वक्र के नुकीलेपन (peakedness) की मात्रा का माप है।" (Kurtosis is the degree of peakedness of a distribution usually taken to a normal distribution." — *Spiegel*)



(A) मध्यम शीर्ष वाला

(B) नुकीले शीर्ष वाला

(C) चपटे शीर्ष वाला

चित्र 8.2

पृथुशीर्षत्व से यह पता चलता है कि यदि किसी श्रेणी को बिन्दुरेखा (graph) पर अंकित किया जाए तो क्या वह प्रसामान्य वक्र होगा अथवा प्रसामान्य वक्र से अधिक चपटा वक्र होगा अथवा प्रसामान्य वक्र से अधिक नुकीला वक्र होगा। अतः यह बताता है कि श्रेणी के मध्य भाग में आवृत्तियों का जमाव (Concentration of frequencies in the middle of the distribution) कैसा है। यदि केन्द्र में आवृत्तियों का जमाव सामान्य है तो वह आवृत्ति वक्र मध्यम शीर्ष वाला या प्रसामान्य (Mesokurtic or Normal) कहलाता है। यदि आवृत्तियों का जमाव सामान्य वक्र की तुलना में श्रेणी के मध्य भाग में बहुत अधिक सघन रूप से केन्द्रित है अर्थात् पद मूल्य बहुलक के आस-पास सघनता के साथ गुच्छित होते हैं तो वह वक्र लम्बे या नुकीले शीर्ष वाला (Lepto-kurtic) कहलाता है। केन्द्र में आवृत्ति जमाव बहुत कम होने पर वह चपटे शीर्ष वाला (Platy-kurtic or Flat) वक्र कहलाता है।

चित्र 8.2 से स्पष्ट है कि उत्तलता (Convexity) की दृष्टि से तीनों वक्रों में अत्यधिक अन्तर है। Curve A सामान्य शीर्ष, Curve B नुकीले शीर्ष एवं Curve C चपटे शीर्ष वाला वक्र है।

स्टुडेन्ट (विलियम एस. गौसेट) ने इन वक्रों की चपटे शीर्ष वाले वक्र की तुलना छोटी पूँछ और चपटी पीठ वाले जानवर प्लैटिपस से और नोंकदार वक्र की तुलना ऊँचे शीर्ष व लम्बी पूँछ वाले कंगारू से की है।

पृथुशीर्षत्व का माप (Measurement of Kurtosis)—पृथुशीर्षत्व की माप चतुर्थ एवं द्वितीय परिघातों के आधार पर परिघात अनुपात (moment ratio) द्वारा की जाती है। इसके लिए कार्ल पियर्सन से निम्न सूत्र का प्रयोग किया है—

$$\text{पृथुशीर्षत्व की माप } (\beta_2) = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\text{चतुर्थ परिघात}}{(\text{द्वितीय परिघात})^2} = \frac{\text{Fourth moment}}{(\text{Second moment})^2}$$

निर्वचन (Interpretation)—β_2 का मूल्य 3 के बराबर होता है तो वक्र सामान्य होता है। β_2 का मूल्य 3 से अधिक तथा कम होने पर वक्र सामान्य नहीं होता है।

यदि $\beta_2 = 3$ तो वक्र मध्यम शीर्ष वाला (Meso-kurtic) है।

यदि $\beta_2 > 3$ तो वक्र लम्बे या नुकीले शीर्ष वाला (Lepto-kurtic) है।

यदि $\beta_2 < 3$ तो वक्र चपटे शीर्ष वाला (platy-kurtic) है।

पृथुशीर्षत्व के माप के लिए γ_2 का भी प्रयोग किया जा सकता है—

नोट

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^2}$$

यदि γ_2 या $\beta_2 - 3 = 0$ तो वक्र मध्यम शीर्ष वाला (Meso-kurtic) है।

यदि γ_2 धनात्मक है तो वक्र नुकीले शीर्ष वाला (Lepto-kurtic) है। $\beta_2 > 3$

यदि γ_2 ऋणात्मक है तो वक्र चपटे शीर्ष वाला (Platy-kurtic) है। $\beta < 3$

विषमता की भांति पृथुशीर्षत्व का माप भी जीवन विज्ञान तथा भौतिक विज्ञानों में अधिक उपयोगी होता है। आर्थिक, सामाजिक एवं व्यापारिक घटनाओं में इसका अधिक प्रयोग नहीं होता क्योंकि इन क्षेत्रों में प्रसामान्य बंटन बहुत कम पाये जाते हैं।

Illustration : किसी आवृत्ति श्रेणी में समान्तर माध्य से द्वितीय, तृतीय व चतुर्थ परिघात 3, 0 व 26 हैं। परिघातों की सहायता से विषमता तथा शीर्षत्व ज्ञात कीजिए।

Solution :

ज्ञात है, $\mu_2 = 3, \mu_3 = 0$ तथा $\mu_4 = 26$.

विषमता माप $\qquad \sqrt{\beta_1} = \dfrac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \dfrac{0}{\sqrt{3^3}} = \dfrac{0}{\sqrt{27}} = 0$ विषमता नहीं है।

पृथुशीर्षत्व का माप $\qquad \beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} = \dfrac{26}{(3)^2} = \dfrac{26}{9} = 2.889$

$\therefore \qquad \beta_2 = 2.889 < 3$ वक्र चपटे शीर्ष वाला है।

उदाहरण (Illustration) 5: एक सममितीय बंटन में प्रमाप विचलन 5 है। चतुर्थ केन्द्रीय परिघात का मूल्य क्या हो ताकि बंटन (*a*) नुकीले शीर्ष वाला हो, (*b*) मध्यम शीर्ष वाला हो, (*c*) चपटे शीर्ष वाला हो ?

हल (Solution):

$\sigma = 5 \quad \therefore \quad \mu_2 = 5^2 = 25$

(*i*) नुकीले शीर्ष वाले में $\mu_4 > 3\mu_2^2$ $\qquad$ अत: $\mu_4 > 3 \times (25)^2 > 1875$

(*ii*) Meso-kurtic श्रेणी में $\mu_4 = 3\mu_2^2$ $\qquad$ अत: $\mu_4 > 3\mu_2^2 = 3 \times 25^2 = 1875$

(*iii*) Platy-kurtic श्रेणी में $\mu_4 < 3\mu_2^2$ $\qquad$ अत: $\mu_4 < 3 \times 25^2$ या < 1875

8.5 अपकिरण, विषमता एवं पृथुशीर्षत्व में भेद (Distinction Between Dispersion, Skewness and Kurtosis)

इन तीनों मापों का एक सामान्य उद्देश्य आवृत्ति बंटन की बनावट की जानकारी देना है लेकिन तीनों मापों में अन्तर पाया जाता है—

(1) अपकिरण केन्द्रीय मूल्य (माध्य) के चारों ओर मूल्यों के बिखराव या फैलाव (scatter of items) का अध्ययन करता है जिससे यह पता चलता है कि केन्द्रीय मूल्य पूरे बंटन का कितना प्रतिनिधित्व करता है। अत: अपकिरण विचरण की मात्रा की माप है।

(2) जबकि विचरण की दिशा अर्थात् मूल्यों का फैलाव माध्य से ऊपर अधिक है या नीचे यह जानकारी विषमता के माप उपलब्ध कराते हैं अत: विषमता विचरण की दिशा का मापन करता है। अत: एक प्रसामान्य बंटन (Normal distribution) में माध्य से ऊपर व नीचे विचलन एक समान होते हैं जबकि असममित बंटन (Asymmetrical Distribution) में विचलन समान नहीं होते।

(3) पृथुशीर्षत्व श्रेणी के मध्यवर्ती भाग में मूल्यों या आवृत्तियों के जमाव का अध्ययन करता है। अर्थात् यह बंटन के स्वरूप को दर्शाता है।

नोट

अत: अपकिरण, विषमता व पृथुशीर्षत्व के माप किसी आवृत्ति बंटन के तीन विभिन्न अभिलक्षणों या पहलुओं का अध्ययन करते हैं। अपकिरण श्रेणी के आकार को निश्चित करता है अर्थात् उस विस्तार या सीमा की जानकारी देता है जिसमें चर-मूल्य स्थित होते हैं। विषमता के माप श्रेणी की आकृति और केन्द्रीय मूल्य के दोनों ओर के विचरण की मात्रा पर प्रकाश डालते हैं। पृथुशीर्षत्व श्रेणी के मध्यवर्ती भाग में आवृत्तियों के जमाव की जाँच करता है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए–

1. निम्न आंकड़ों से कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए–

माप:	10	11	12	13	14	15
आवृत्ति:	2	4	10	8	5	1

2. निम्न आँकड़ों से बॉउले विषमता गुणांक परिकलित कीजिए–

वर्ग:	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
आवृत्ति:	1	3	7	11	5	3

3. निम्न बंटन से विषमता तथा पृथुशीर्षत्व माप का परिकलन कीजिए–

वर्ग:	45-52	52-59	59-66	66-73	73-80
आवृत्ति:	4	9	12	4	3

4. निम्न समंकों से विषमता तथा पृथुशीर्षत्व का परिकलन कीजिए–

वर्ग:	10	20	30	40	50
आवृत्ति:	2	4	7	9	10

8.6 सारांश (Summary)

- विषमता का अपना कोई स्वतंत्र अर्थ नहीं होता है बल्कि इसका प्रयोग सममिति के माप के रूप में करते हैं। किसी समंक श्रेणी में सममिति के अभाव को विषमता अथवा असममिति कहते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी वितरण के सममिति से दूर हटने की प्रवृत्ति विषमता कहलाती है।
- सिम्पसन एवं काफ्का (Simpson and Kafka) के अनुसार, "विषमता के माप हमें असममिति (विषमता) की दिशा व सीमा बताते हैं। एक सममित बंटन में समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक समरूप होते हैं। समान्तर माध्य बहुलक से जितना दूर होता जाता है असममिति या विषमता उतनी अधिक होती है।"
- सममिति प्रकृति के आधार पर आवृत्ति बंटन दो प्रकार के हो सकते हैं–(1) सममित, (2) असममित। सममित बंटन में आवृत्तियों के बढ़ने और घटने का क्रम नियमित होता है। इसमें आवृत्तियाँ नियमित क्रम से बढ़ती हैं फिर एक निश्चित बिन्दु अर्थात् अधिकतम आवृत्ति से उसी नियमित क्रम में घटती हैं। इसका वक्र घण्टी के आकार वाला होता है जिसे प्रसामान्य वक्र कहते हैं।
- असममित बंटन में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने का क्रम नियमित नहीं होता। आवृत्तियाँ जिस क्रम से पहले बढ़ती हैं अधिकतम होने के बाद फिर उसी क्रम से नहीं घटतीं। ऐसे बंटन का वक्र घण्टाकार न होकर दायें व बायें झुकाव लिये होता है।
- यदि वक्र दाहिनी ओर अधिक झुका हुआ हो तो विषमता धनात्मक होती है
- यदि वक्र दाहिनी ओर के बजाय बायीं ओर अधिक झुका हुआ हो तो विषमता ऋणात्मक होती है। ऐसे बंटन में समान्तर माध्य का मूल्य मध्यका से कम और मध्यका का मूल्य बहुलक से कम होता है।

नोट

- विषमता के प्रथम माप (First Measures of Skewness) भी कहते हैं। निरपेक्ष माप इस मान्यता पर आधारित है कि एक विषम बंटन में समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक मूल्य समान नहीं होते। अत: इनमें से किन्हीं दो मूल्यों (माध्यों) के बीच का अन्तर, विषमता की मात्रा होती है।
- दो श्रेणियों या बंटनों की तुलना करने के लिए विषमता के सापेक्ष माप ज्ञात किए जाते हैं। इनको विषमता गुणांक (Coefficient of skewness) भी कहते हैं। सापेक्ष माप या विषमता गुणांक ज्ञात करने के लिए निरपेक्ष माप को अपकिरण के किसी भी माप से विभाजित कर दिया जाता है। परन्तु ध्यान रहे, व्यवहार में केवल प्रमाप विचलन का ही प्रयोग किया जाता है, क्योंकि अपकिरण के अन्य माप किसी-न-किसी रूप में सीमाग्रसित हैं जबकि प्रमाप विचलन एक आदर्श माप है।
- **पियर्सन गुणांक की विशेषताएँ**—(*i*) यदि J का मान शून्य है तो बंटन विषमता रहित अर्थात् सममित होता है। (*ii*) यदि J का मान (+) में है तो धनात्मक विषमता और (-) होने पर ऋणात्मक विषमता होती है। (*iii*) सिद्धान्त रूप में इस गुणांक की कोई सीमा नहीं है (जोकि इसका प्रमुख दोष है) परन्तु व्यवहार में यह सामान्यतया ± 1 के बीच रहता है। वैकल्पिक सूत्र की स्थिति में गुणांक की सीमाएँ ± 3 होती हैं।
- कैली का विषमता गुणांक बाउले सूत्र का संशोधित रूप है। बाउले सूत्र जोकि चतुर्थकों पर आधारित है, के अन्तर्गत बंटन के प्रथम 25% और अंतिम 25% मूल्य छोड़ दिए जाते हैं। चूँकि एक अच्छा माप वह है जो बंटन के सभी मूल्यों पर आधारित हो अत: इस दृष्टि से कैली ने चतुर्थकों के स्थान पर दशमकों या शतमकों के प्रयोग का सुझाव दिया है।
- अपकिरण से किसी बंटन की बनावट का ज्ञान होता है। सरल शब्दों में, अपकिरण की मापों से इस बात का पता चलता है कि श्रेणी के विभिन्न पद-मूल्यों का आपस में या किसी माध्य से कितना विचलन या बिखराव है। इसके विपरीत विषमता के माप यह बताते हैं कि श्रेणी के माध्य से दोनों ओर के भागों का विचरण बराबर है अन्यथा किस भाग में विचरण अधिक है।
- अपकिरण से समूह की बनावट (composition) का ज्ञान होता है, जबकि विषमता से समूह के स्वरूप (shape) का पता चलता है।
- अपकिरण, समंकों में विचलनशीलता की मात्रा को ज्ञात करने में उपयोगी है जबकि विषमता यह बताती है कि जमाव बड़े मूल्यों में अधिक है या छोटे मूल्यों में।
- अपकिरण के माप द्विघातीय माध्यों (Averages of the Second Order) पर आधारित हैं जबकि विषमता के माप मुख्यतया प्रथम घातीय माध्यों (Averages of First Order) पर आधारित हैं।
- उपर्युक्त अन्तर के बावजूद अपकिरण तथा विषमता के माप एक-दूसरे के अनुपूरक हैं। सच तो यह है कि आवृत्ति-बंटन के विधिवत् विश्लेषण के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति, अपकिरण तथा विषमता तीनों के मापों का ज्ञान परमावश्यक है। जहाँ केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप से आवृत्ति-बंटन का सारांश ज्ञात होता है, वहाँ अपकिरण से समंकों के बिखराव का पता लगता है और विषमता से यह जानकारी होती है कि माध्य से किस ओर का अपकिरण (बिखराव) अधिक है।
- ग्रीक भाषा में Kurtosis शब्द का अर्थ है उभरा हुआ उभरापन (bulge or bulginess)। इसी तरह सांख्यिकी में भी पृथुशीर्षत्व प्रसामान्यता के सन्दर्भ में आवृत्ति वक्र की शिखरीयता का द्योतक है। अत: प्रसामान्य वक्र की तुलना में किसी आवृत्ति वक्र के नुकीलेपन या शीर्षत्व (Peakedness) अथवा चपटेपन (Flatness) के माप को पृथुशीर्षत्व कहते हैं।
- पृथुशीर्षत्व की माप चतुर्थ एवं द्वितीय परिघातों के आधार पर परिघात अनुपात (moment ratio) द्वारा की जाती है। इसके लिए कार्ल पियर्सन से निम्न सूत्र का प्रयोग किया है—

$$\text{पृथुशीर्षत्व की माप } (\beta_2) = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\text{चतुर्थ परिघात}}{(\text{द्वितीय परिघात})^2} = \frac{\text{Fourth moment}}{(\text{Second moment})^2}$$

- अपकिरण केन्द्रीय मूल्य (माध्य) के चारों ओर मूल्यों के बिखराव या फैलाव (scatter of items) का अध्ययन करता है जिससे यह पता चलता है कि केन्द्रीय मूल्य पूरे बंटन का कितना प्रतिनिधित्व करता है। अत: अपकिरण विचरण की मात्रा की माप है।
- जबकि विचरण की दिशा अर्थात् मूल्यों का फैलाव माध्य से ऊपर अधिक है या नीचे यह जानकारी विषमता के माप उपलब्ध कराते हैं अत: विषमता विचरण की दिशा का मापन करता है। अत: एक प्रसामान्य बंटन (Normal distribution) में माध्य से ऊपर व नीचे विचलन एक समान होते हैं जबकि असममित बंटन (Asymmetrical Distribution) में विचलन समान नहीं होते।
- पृथुशीर्षत्व श्रेणी के मध्यवर्ती भाग में मूल्यों या आवृत्तियों के जमाव का अध्ययन करता है। अर्थात् यह बंटन के स्वरूप को दर्शाता है।
- अपकिरण, विषमता व पृथुशीर्षत्व के माप किसी आवृत्ति बंटन के तीन विभिन्न अभिलक्षणों या पहलुओं का अध्ययन करते हैं। अपकिरण श्रेणी के आकार को निश्चित करता है अर्थात् उस विस्तार या सीमा की जानकारी देता है जिसमें चर-मूल्य स्थित होते हैं। विषमता के माप श्रेणी की आकृति और केन्द्रीय मूल्य के दोनों ओर के विचरण की मात्रा पर प्रकाश डालते हैं। पृथुशीर्षत्व श्रेणी के मध्यवर्ती भाग में आवृत्तियों के जमाव की जाँच करता है।

8.7 शब्दकोश (Keywords)

- **परिघात**–समाप्त कर देना।
- **पृथुशीर्षत्व**–शिखरता।

8.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. विषमता से आप क्या समझते हैं ? विश्लेषणात्मक विवेचन कीजिए।
2. विषमता के माप का विवेचन कीजिए।
3. अपकिरण, विषमता और पृथुशीर्षत्व में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
4. पृथुशीर्षत्व की व्याख्या कीजिए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. क्रम नियमित 2. प्रसामान्य वक्र 3. दायें एवं बायें 4. धनात्मक 5. ऋणात्मक विषमता।

2. 1. 0.3583 2. –.08 3. $\beta_1 = -0.095, \beta_2 = 2.6$

4. $\sqrt{\beta_1} = 0.074$ $\beta_2 = 2.03$

8.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
2. साँख्यिकी, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई–9: सहसंबंध: परिभाषा, प्रकार एवं अर्थशास्त्रियों की प्रयुक्त विधियाँ (Correlation: Definition, Types and its Application for Economists)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- सहसंबंध की परिभाषा तथा अर्थ को समझने में।
- सहसंबंध कितने प्रकार का होता है इसकी विवेचना करने में।
- सहसंबंध के संबंध में अर्थशास्त्रियों ने क्या विविधाँ प्रयुक्त की हैं? इसकी विवेचना करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

दो समंक समूहों में पाए जाने वाले सम्बन्ध की जानकारी के लिए सहसम्बन्ध के सिद्धान्त (Theory of Correlation) का अध्ययन किया जाता है। कई समंक समूह इस प्रकार से परस्पर सम्बन्धित होते हैं कि एक में होने वाले परिवर्तन के परिणामस्वरूप दूसरे में भी परिवर्तन हो जाते हैं, जैसे उत्पादन या पूर्ति में वृद्धि से कीमतों में कमी, माँग में वृद्धि से वस्तु की कीमत में वृद्धि, मुद्रा की मात्रा में वृद्धि से सामान्य कीमत स्तर में वृद्धि आदि। इसी प्रकार और भी कई तथ्य परस्पर सम्बन्धित होते हैं। जैसे पति एवं पत्नियों की आयु, पिता-पुत्र की लम्बाई, प्रकाश के साथ तापक्रम में वृद्धि आदि। सहसम्बन्ध के अध्ययन से यह ज्ञात किया जाता है कि विभिन्न तथ्य परस्पर किस प्रकार से धनात्मक या ऋणात्मक एवं किस परिणाम पूर्ण, उच्च, मध्यम या निम्न से सम्बन्धित हैं।

नोट

9.1 सहसंबंध परिभाषा एवं अर्थ (Meaning and Definition of Correlation)

क्राक्स्टन एवं काउडेन ने दो चरों के मध्य पाए जाने वाले सम्बन्ध की माप के रूप में सहसम्बन्ध को इस प्रकार परिभाषित किया है कि–''जब सम्बन्ध परिमाणात्मक प्रकृति का होता है, तो उसे खोजने एवं मापने तथा सूक्ष्म सूत्र के रूप में व्यक्त करने के उचित सांख्यिकीय युक्ति को सहसम्बन्ध कहते हैं।''

प्रो. किंग के अनुसार–''यदि यह सत्य सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश उदाहरणों में दो चर-मूल्य सदा एक दिशा में या विपरीत दिशा में घटने-बढ़ने की प्रवृत्ति रखते हैं तो ऐसी स्थितियों में हम यह समझते हैं कि उनमें एक सम्बन्ध पाया जाता है। यह सम्बन्ध ही सहसम्बन्ध कहलाता है।''

कॉनर के अनुसार–''जब दो या अधिक राशियाँ सहानुभूति में परिवर्तित होती हैं जिससे एक में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप दूसरी राशि में भी परिवर्तन होने की प्रवृत्ति पाई जाती है, तो वे राशियाँ सहसम्बन्धित कहलाती हैं।''

नीस्वेंजर के अनुसार–''आर्थिक समंकों की दो या अधिक श्रेणियाँ जो एक साथ या विपरीत दिशा में परिवर्तित हों, क्रियात्मक रूप से सम्बन्धित हो सकती हैं। केवल क्रियात्मक सम्बन्धों की उपस्थिति कार्य कारण सम्बन्धों के अस्तित्व को सिद्ध नहीं करती है; यह केवल सहसम्बन्ध का सांख्यिकीय प्रमाप है।''

सहसम्बन्ध सिद्धान्त की प्रकृति एवं महत्त्व (Nature and Significance)

क्राक्स्टन एवं काउडेन के अनुसार, ''विज्ञान के मुख्य उद्देश्यों में, एक तत्त्व (Factor) के मूल्य का, उससे सम्बन्धित तत्त्व के मूल्य के सन्दर्भ में अनुमान लगाना (सहसम्बन्ध ज्ञात करना) एक मुख्य उद्देश्य है।''

सामाजिक, आर्थिक एवं वैज्ञानिक क्षेत्र की समस्याओं के विश्लेषण में सहसम्बन्ध सिद्धान्त का बहुत अधिक महत्त्व है। सांख्यिकीय में प्रतीपगमन (Regression) एवं विचरण-अनुपात (Ratio of Variation) के विचार सहसम्बन्ध सिद्धान्त पर ही आधारित हैं। सहसम्बन्ध सिद्धांत पर आधारित अनुमान अधिक विश्वसनीय होते हैं। टिपेट ने भी स्पष्ट किया है कि सहसम्बन्ध का प्रभाव हमारी भविष्यवाणी की अनिश्चितता के विस्तार को कम करता है।

अर्थशास्त्र एवं व्यवसाय के क्षेत्र में सहसम्बन्ध सिद्धान्त के महत्त्व को स्पष्ट करते हुए प्रो. नीस्वेंजर ने लिखा है कि–''सहसम्बन्ध-विश्लेषण आर्थिक व्यवहार को समझने में योग देता है, विशेष महत्त्वपूर्ण चरों, जिन पर अन्य चर निर्भर करते हैं, को खोजने में सहायता देता है; अर्थशास्त्री को उन सम्बन्धों को स्पष्ट करता है, जिनसे गड़बड़ी फैलती है तथा उसे उन उपायों का सुझाव देता है जिनके द्वारा स्थिरता लाने वाली शक्तियाँ प्रभावी हो सकती हैं।''

इस प्रकार स्पष्ट है कि दो समंक श्रेणियों या घटनाओं के पारस्परिक सम्बन्ध एवं उनके तुलनात्मक अध्ययन में सहसम्बन्ध सिद्धान्त बहुत अधिक महत्त्वपूर्ण है।

सहसम्बन्ध सिद्धान्त का प्रतिपादन सर्वप्रथम फ्रांस के खगोलशास्त्री ब्रवेस (Bravais) ने किया था, सहसम्बन्ध सिद्धान्त की बिन्दुरेखीय विधि का प्रतिपादन फ्रांसिस गाल्टन (Francis Galton) ने किया। सहसम्बन्ध ज्ञात करने की गणितीय विधि के प्रतिपादन तथा इसे वैज्ञानिक रूप प्रदान करने का श्रेय कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) को है।

नोट्स दो परस्पर सम्बन्धित समंक श्रेणियों में एक ही दिशा या विपरीत दिशा से होने वाले परिवर्तन की प्रवृत्ति को ही सांख्यिकी में सह-विचरण (Co-variance) या सहसम्बन्ध (Correlation) कहा जाता है।

9.2 सहसम्बन्ध के प्रकार (Types of Correlation)

सहसम्बन्ध को दिशा, अनुपात, एवं चर-मूल्यों की संख्या के आधार पर निम्न भागों में विभाजित कर सकते हैं–

1. दिशा के आधार पर

(*i*) धनात्मक सहसम्बन्ध (Positive Correlation)

(*ii*) ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Negative Correlation)

2. अनुपात के आधार पर

(*i*) रेखीय सहसम्बन्ध (Linear Correlation)

(*ii*) वक्ररेखीय सहसम्बन्ध (Curve-linear Correlation)

3. चर मूल्यों की संख्या के आधार पर

(*i*) सरल सहसम्बन्ध (Simple Correlation)

(*ii*) बहुगुणी सहसम्बन्ध (Multiple Correlation)

(*iii*) आँशिक सहसम्बन्ध (Partial Correlation)

धनात्मक सहसम्बन्ध—जब दो चर-मूल्यों के परिवर्तन की दिशा एक ही हो अर्थात् एक में वृद्धि पर दूसरे में भी वृद्धि एवं एक में कमी पर दूसरे में भी कमी हो तो इसे धनात्मक सहसम्बन्ध कहा जाता है, जैसे, मुद्रा की मात्रा में वृद्धि से मूल्य स्तर में वृद्धि, वस्तु की माँग में कमी से उसके मूल्य में कमी आदि धनात्मक सहसम्बन्ध के उदाहरण हैं।

धनात्मक सहसम्बन्ध			
X	*Y*	*X*	*Y*
10	50	10	15
20	70	9	10
30	80	7	8
40	90	6	5
50	110	4	2

ऋणात्मक सहसम्बन्ध—जब दो चर-मूल्यों के परिवर्तन की दिशा अलग-अलग हो, जैसे—पहले में वृद्धि पर दूसरे में कमी या पहले में कमी पर दूसरे में वृद्धि हो तो इसे ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहा जाता है। उत्पादन में वृद्धि पर कीमतों में कमी तथा वस्तु के मूल्य में कमी पर माँग में वृद्धि आदि ऋणात्मक सहसम्बन्ध के उदाहरण हैं।

ऋणात्मक सहसम्बन्ध			
X	*Y*	*X*	*Y*
100	50	10	40
150	40	8	50
300	35	7	55
400	25	5	70
800	15	3	100

रेखीय सहसम्बन्ध—जब दो चर मूल्यों में परिवर्तन का अनुपात समान है; जैसे रोजगार में 10% वृद्धि से हर समय उत्पादन में 20% वृद्धि हो तो इस प्रकार के सम्बन्ध को रेखीय सहसम्बन्ध कहा जाता है। इन चर मूल्यों को बिन्दु रेखा पत्र पर अंकित करने पर एक सीधी रेखा प्राप्त होती है।

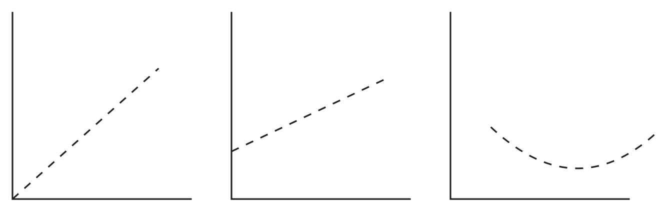
नोट

रेखीय सहसम्बन्ध			
X	*परिवर्तन*	*Y*	*परिवर्तन*
100	–	50	–
110	10%	55	10%
130	30%	65	30%
150	50%	75	50%
200	100%	100	100%

वक्र रेखीय सहसम्बन्ध–जब दो चर-मूल्यों में परिवर्तन का अनुपात असमान हो जैसे रोजगार में 10% वृद्धि से कभी तो उत्पादन में 20% वृद्धि होती है और कभी 20 प्रतिशत से अधिक या कम भी वृद्धि हो जाती है तो इसे वक्र रेखीय सहसम्बन्ध कहा जाता है।

वक्र रेखीय सहसम्बन्ध			
X	*परिवर्तन*	*Y*	*परिवर्तन*
100	–	50	–
110	10%	60	20%
140	40%	75	50%
160	60%	85	70%
200	100%	90	80%

वक्र रेखीय सहसम्बन्ध को रेखाचित्र पर अंकित करने से वक्र रेखा प्राप्त होती है–



रेखीय सहसम्बन्ध रेखीय सहसम्बन्ध वक्र रेखीय सहसम्बन्ध

चित्र–रेखीय एवं वक्ररेखीय सहसम्बन्ध

सरल सहसम्बंध–जब दो चर-मूल्यों के मध्य सहसम्बन्ध ज्ञात किया जाता है तो इसे सरल सहसम्बन्ध कहा जाता है। इसमें एक स्वतन्त्र एवं दूसरा अश्रित चर मूल्य होता है। आधार श्रेणी के चर मूल्यों को स्वतन्त्र एवं सम्बन्ध श्रेणी के चर मूल्यों को आश्रित चर मूल्य कहा जाता है।

बहुगुणी सहसम्बन्ध–जब तीन या अधिक चर मूल्यों के मध्य सहसम्बन्ध ज्ञात किया जाता है तो इसे बहुगुणी सहसम्बन्ध कहा जाता है, इसमें दो या अधिक स्वतन्त्र चर मूल्यों का एक आश्रित चर मूल्य पर प्रभाव का अध्ययन किया जाता है।

आंशिक सहसम्बन्ध–तीन चर मूल्यों के मध्य आंशिक सहसम्बन्ध भी ज्ञात किया जा सकता है, किन्तु इनमें एक स्वतन्त्र चर मूल्य को स्थिर रखकर दूसरे स्वतन्त्र चर मूल्य का आश्रित चर मूलय से सहसम्बन्ध ज्ञात किया जाता है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. .... के अनुसार जब सहसंबंध परिमाणात्मक प्रकृति का होता है, तो उसे खोजने एवं मापने तथा सूक्ष्म सूत्र के रूप में व्यक्त करने के उचित सांख्यिकीय युक्ति को सहसंबंध कहते हैं।

नोट

2. दिशा के आधार पर सहसंबंध दो प्रकार के होते हैं। पहला धनात्मक सहसंबंध तथा दूसरा ………।
3. ……… में एक स्वतंत्र तथा दूसरा आश्रित चर मूल्य होता है।
4. चर मूल्यों की संख्या के आधार पर सहसंबंध ……… प्रकार के होते हैं।

9.3 सहसंबंध के संबंध में अर्थशास्त्रियों की प्रयुक्त विधियाँ (Correlation of Application for Economists)

सह सम्बन्ध निम्न रीतियों से ज्ञात किया जा सकता है–

1. बिन्दु रेखीय रीतियाँ (Graphic Methods)

(*i*) विक्षेप चित्र या बिन्दुचित्र (Scatter Diagram or Dot Diagram)

(*ii*) सहसम्बन्ध रेखाचित्र (Correlation Graph)

2. गणितीय रीतियाँ (Mathematical Methods)

(*i*) कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

(*ii*) स्पियरमैन की कोटि अन्तर रीति (Spearman's Ranking Method)

(*iii*) संगामी विचलन रीति (Concurrent Deviations Method)

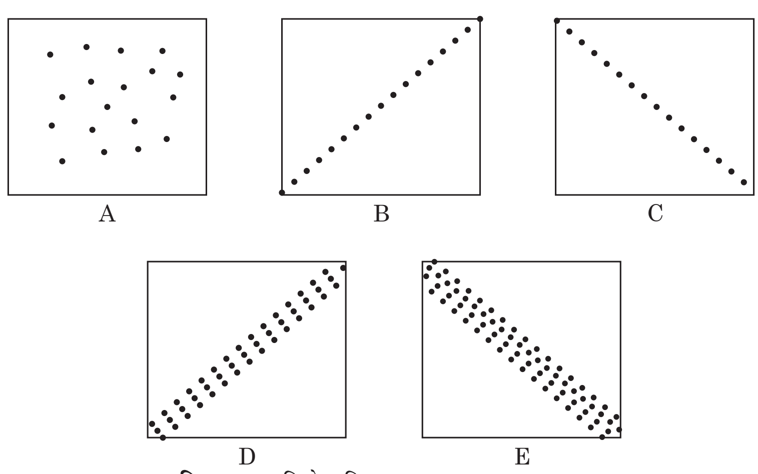
(*iv*) अन्य रीतियाँ (Other Methods)

विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र (Scatter Diagram or Dot Diagram)

विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र दो समंक श्रेणियों के मध्य सहसम्बन्ध की प्रवृत्ति ज्ञात करने का सरल एवं आकर्षक तरीका है। विक्षेप चित्र बनाने के लिए स्वतन्त्र चर मूल्य को भुजाक्ष पर एवं आश्रित चर मूल्य को कोटि अक्ष पर अंकित कर विभिन्न मूल्यों के बिन्दु अंकित किए जाते हैं, इस प्रकार प्राप्त चित्र विक्षेप चित्र कहलाते हैं। पदों की जितनी संख्या होगी विक्षेप चित्र में उतने ही बिन्दु होगें। विक्षेप चित्रों के अध्ययन से सहसम्बन्ध की प्रवृति के बारे में निष्कर्ष प्राप्त किए जा सकते हैं।

(*i*) जब विक्षेप चित्र में बिन्दु चारों ओर बिखरे हुए हों उनमें किसी प्रकार का कोई क्रम न हो तो सहसम्बन्ध का अभाव होता है। (चित्र A)

(*ii*) यदि पद युग्मों (Pairs of values) को प्रांकित करने से नीचे बायीं ओर से ऊपर दाहिनी ओर बढ़ती हुई एक रेखा प्राप्त हो (जैसे चित्र B) तो यह पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध को व्यक्त करती है।



चित्र 9.2–विक्षेप चित्र (Scatter Diagram)

नोट

(iii) ऊपर बायीं ओर से नीचे दाहिनी ओर गिरती हुई एक रेखा के रूप में बिन्दु अंकित हो (जैसे चित्र C) तो यह पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध को व्यक्त करता है।

(iv) जब प्रांकित बिन्दुओं से एक क्रम या प्रवृति का आभास हो तो यह सहसम्बन्ध की उपस्थिति को व्यक्त करती है। एक रेखा न होकर बिखरे हुए बिन्दु नीचे बायीं ओर से ऊपर दाहिनी ओर बढ़ते हुए हों (जैसे चित्र D) तो यह धनात्मक सहसम्बन्ध एवं ऊपर बायीं ओर से नीचे दाहिनी ओर गिरते हुए हों (जैसे चित्र E) तो ऋणात्मक सहसम्बन्ध को व्यक्त करते हैं। बिन्दु जितने पास-पास होंगे सहसम्बन्ध का परिणाम उतना ही अधिक होता है।

विक्षेप चित्रों से सहसम्बन्ध की केवल प्रवृति का आभास होता है, इससे निश्चित मूल्य प्राप्त नहीं हो सकता है; अत: सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिए इस विधि का प्रयोग उस समय ही उपयुक्त रहता है जब सहसम्बन्ध की केवल प्रवृति का ही अध्ययन करना हो, इसका संख्यात्मक माप आवश्यक न हो।

सहसम्बन्ध रेखाचित्र (Correlation Graph)

रेखाचित्र द्वारा भी सहसम्बन्ध का अनुमान लगाया जा सकता है। सहसम्बन्ध रेखाचित्र की रचना निम्न प्रकार की जाती है–

(i) समय, स्थान या क्रम संख्या को भुजाक्ष पर अंकित किया जाता है।

(ii) X चर मूल्य को OY कोटि अक्ष पर एवं Y चर मूल्य को OY′ कोटि अक्ष पर अंकित किया जाता है।

(iii) दोनों चर मूल्यों के लिए अलग-अलग दो वक्र बना लिए जाते हैं।

यदि दोनों चर मूल्य एक ही इकाई में हों एवं उनमें बहुत कम अन्तर हो तो एक मापदण्ड के आधार पर OY अक्ष पर ही दोनों मूल्यों को प्रदर्शित कर दो वक्र बनाए जा सकते हैं। अधिक अन्तर होने पर दो मापदण्ड के आधार पर रेखाचित्र बनाया जाता है।

सहसम्बन्ध रेखाचित्र का विश्लेषण

(i) दोनों चर मूल्यों के वक्र जितने पास-पास होंगे, सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही अधिक एवं दूर होने पर सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही कम होगी।

(ii) दोनों वक्रों में उच्चावचन की दिशा एक हो अर्थात् एक साथ घटते या बढ़ते हैं तो उनमें धनात्मक सहसम्बन्ध होगा। दोनों वक्रों में उच्चावचन की दिशा विपरीत हो अर्थात् एक वक्र के बढ़ने पर दूसरा वक्र घटे या एक के घटने पर दूसरा बढ़े तो ऋणात्मक सहसम्बन्ध होगा।

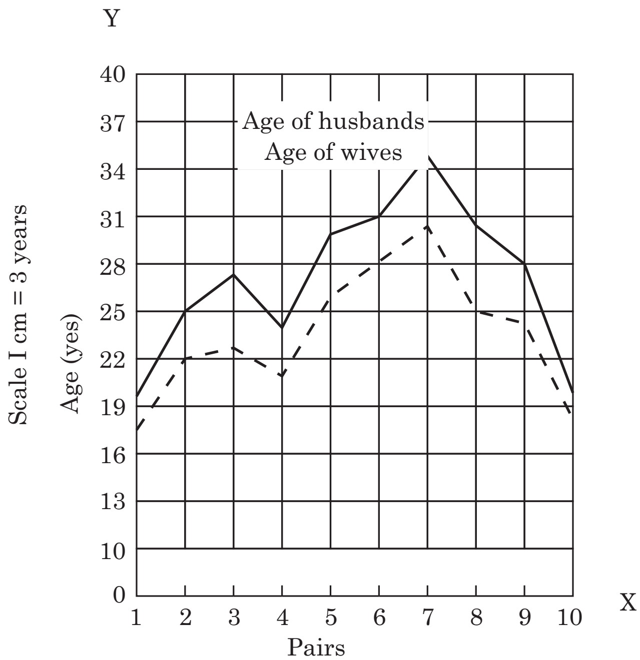
(iii) जब दोनों वक्रों में उच्चावचन की प्रवृति में कोई समानता या सम्बन्ध प्रतीत न हों तो सहसम्बन्ध का अभाव होता है।

उदाहरण (Illustration) 1: निम्न समंकों से सहसम्बन्ध रेखाचित्र की रचना कीजिए और इस पर टिप्पणी कीजिए–

No. of Pairs	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ages of Husbands	:	20	25	27	24	30	31	35	30	28	20
Age of Wives	:	18	22	23	21	26	28	30	25	24	18

हल (Solution): 7पति एवं पत्नियों की उम्र को एक ही मापदण्ड के आधार पर कोटि अक्ष एवं संख्या को भुजाक्ष पर अंकित कर रेखाचित्र की रचना निम्न प्रकार करेंगे–

नोट



चित्र—सहसम्बन्ध रेखाचित्र (Correlation Graph)

उक्त सहसम्बन्ध रेखाचित्र को देखने से यह स्पष्ट होता है कि पति एवं पत्नियों की आयु वक्रों में उतार चढ़ाव एक ही दिशा में है अत: इनमें धनात्मक सहसम्बन्ध का होना स्पष्ट होता है।

सहसम्बन्ध रेखाचित्र से भी सहसम्बन्ध की केवल प्रवृति का आभास होता है, इसकी संख्यात्मक माप सम्भव नहीं है, अत: सहसम्बन्ध की प्रवृति एवं इसकी संख्यात्मक माप के लिए सहसम्बन्ध ज्ञात करने की गणितीय विधियों का प्रयोग किया जाता है।

कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

सहसम्बन्ध की संख्यात्मक माप की इस रीति का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने किया था। कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक से सहसम्बन्ध की दिशा तथा इसकी मात्रा का ज्ञान सरलता से हो जाता है, यह गुणांक हर समय ± 1 की सीमा में रहता है। $+1$ पूर्ण धनात्मक एवं -1 पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध को व्यक्त करते हैं, गुणांक के शून्य होने पर सहसम्बन्ध का अभाव होता है एवं यह गुणांक जैसे-जैसे 1 की ओर बढ़ता जाता है, सहसम्बन्ध की मात्रा भी बढ़ती जाती है। कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना सह-विचरण की माप द्वारा ज्ञात की जाती है।

सहविचरण (Covariance) ज्ञात करने के लिए प्रत्येक समंक श्रेणी के अंकगणितीय माध्य के विचलन ज्ञात कर उन विचलनों के गुणनफल के योग में इकाईयों की संख्या का भाग किया जाता है। सूत्रानुसार—

$$\text{Co-variance} = \frac{\Sigma dxdy}{N}$$

सहविचरण का गुणांक ही सहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Correlation) कहलाता है। कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक को r संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है।

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना—कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न सूत्र के प्रयोग द्वारा की जाती है, इसे सहसम्बन्ध गुणांक का मूल सूत्र भी कहा जाता है—

नोट

$$r = \frac{\frac{\Sigma dxdy}{N}}{\sigma_x, \sigma_y} \quad \text{या} \quad \frac{x \text{ एवं } y \text{ का सहविचरण}}{\sqrt{x \text{ का प्रसरण} \times y \text{ का प्रसरण}}} \quad \text{या} \quad \frac{\Sigma dxdy}{N\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)

प्रत्यक्ष रीति द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है–

(*i*) सर्वप्रथम दोनों समंक श्रेणियों के अंकगणितीय माध्य ($\overline{X}$ एवं $\overline{Y}$) ज्ञात किए जाते हैं।

(*ii*) x श्रेणी का $\overline{X}$ से एवं y श्रेणी का $\overline{Y}$ से विचलन (dx एवं dy) ज्ञात किए जाते हैं।

(*iii*) दोनों श्रेणियों के विचलन dx एवं dy का वर्ग dx^2 एवं dy^2 कर उनका अलग-अलग योग (Σdx^2 एवं Σdy^2) कर लिया जाता है।

(*iv*) दोनों श्रेणियों के विचलनों को आपस में गुणा करके गुणनफल का योग $\Sigma dxdy$ ज्ञात किया जाता है।

(*v*) निम्न सूत्र के प्रयोग से दोनों श्रेणियों के प्रमाप विचलन ज्ञात कर लिए जाते हैं–

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}}, \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{N}}$$

(*vi*) निम्न सूत्रों के प्रयोग द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक (r) की गणना की जाती है–

प्रथम सूत्र– $r = \frac{\Sigma dxdy}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$ (मौलिक सूत्र)

द्वितीय सूत्र– $r = \frac{\Sigma dxdy}{N \cdot \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{N}}}$

तृतीय सूत्र– $r = \frac{\Sigma dxdy}{N \cdot \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}} \times \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{N}}}$ या $\frac{\Sigma dxdy}{\frac{N}{N}\sqrt{\Sigma dx^2 \times \Sigma dy^2}}$

$$= \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma dx^2 \cdot \Sigma dy^2}}$$

सूत्र में–

r = सहसम्बन्ध गुणांक।

σ_x = x श्रेणी का प्रमाप विचलन।

σ_y = y श्रेणी का प्रमाप विचलन।

$\Sigma dxdy$ = दोनों श्रेणियों के अंकगणितीय माध्य से प्राप्त विचलनों के गुणनफल का योग।

Σdx^2 = x श्रेणी के विचलनों के वर्ग का योग।

Σdy^2 = y श्रेणी के विचलनों के वर्ग का योग।

N = पद-युग्मों की संख्या।

उपरोक्त तीनों सूत्रों से प्राप्त परिणाम समान होते हैं, किन्तु गणन क्रियाओं की सरलता को ध्यान में रखते हुए तृतीय सूत्र का प्रयोग अधिक उपयुक्त माना जाता है।

नोट

उदाहरण (Illustration) 2: कार्ल पियर्सन के सूत्र द्वारा पतियों एवं पत्नियों की उम्र में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

पतियों की उम्र	:	20	25	30	35	40	45	50	55	60
पत्नियों की उम्र	:	16	20	23	25	33	38	46	50	55

हल (Solution):

कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना

Ages of Husbands X	$\overline{X} = 40$ $dx = (X - \overline{X})$	dx^2	*Age of Wives* Y	$\overline{Y} = 34$ $dy = (Y - \overline{Y})$	dy^2	*dxdy*
20	– 20	400	16	– 18	324	360
25	– 15	225	20	– 14	196	210
30	– 10	100	23	– 11	121	110
35	– 5	25	25	– 9	81	45
40	0	0	33	– 1	1	0
45	5	25	38	+ 4	16	20
50	10	100	46	+ 12	144	120
55	15	225	50	+ 16	256	240
60	20	400	55	+ 21	441	420
ΣX = 360 N = 9		1500 Σdx^2	ΣY = 306 N = 9		1580 Σdy^2	1525 $\Sigma dxdy$

x श्रेणी का अंकगणितीय माध्य $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{360}{9} = 40$

y श्रेणी का अंकगणितीय माध्य $\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{306}{9} = 34$

x श्रेणी का प्रमाप विचलन $\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}} = \sqrt{\frac{1500}{9}} = 12.91$

y श्रेणी का प्रमाप विचलन $\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{N}} = \sqrt{\frac{1580}{9}} = 13.25$

सहसम्बन्ध गुणांक

प्रथम सूत्र– $r = \frac{\Sigma dxdy}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$

$$= \frac{1525}{9 \,.\, (12.91)(13.25)} = \frac{1525}{1539.55}$$

$= + .99$

द्वितीय सूत्र के अनुसार $r = \frac{\Sigma dxdy}{N \cdot \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{N}}}$

नोट

$$= \frac{1525}{9 \cdot \sqrt{\frac{1500}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1580}{9}}}$$

$$= \frac{1525}{9 \times 12.91 \times 13.25} = \frac{1525}{1539.55}$$

$= + .99$

तृतीय सूत्र के अनुसार $$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma dx^2 \, . \, \Sigma dy^2}}$$

$$= \frac{1525}{\sqrt{1500 \times 1580}} = \frac{1525}{1539.5}$$

$= + .99$

इस प्रकार तीनों सूत्रों से प्राप्त परिणाम समान हैं। यह + .99 है अर्थात पति एवं पत्नियों की आयु में अत्यधिक घनात्मक सहसम्बन्ध है।

प्रत्यक्ष रीति में लघुगणकों का प्रयोग–तृतीय सूत्र के प्रयोग के समय लघुगणकों के माध्यम से गणन क्रिया को और सरल बनाया जा सकता है। लघुगणकों के प्रयोग की प्रक्रिया निम्नानुसार है–

$$r = \text{Antilog} \, [\text{Log} \, \Sigma dxdy - \tfrac{1}{2} (\text{Log} \, \Sigma dx^2 + \text{Log} \, \Sigma dy^2)]$$

उक्त उदाहरण को लघुगणकों के प्रयोग द्वारा निम्न प्रकार हल किया जाएगा–

$$r = \text{Antilog} \, [\text{Log} \, .1525 - \tfrac{1}{2} (\text{Log} \, .1500 + \text{Log} \, .1580)]$$

$$= \text{Antilog} \, [3.1832 - \tfrac{1}{2} (3.1761 + 3.1987)]$$

$$= \text{Antilog} \, [\bar{1}.9958]$$

$= + .99$

लघु रीति (Short-cut Method)

प्रत्यक्ष रीति में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करते समय वास्तविक अंकगणितीय माध्य से विचलन ज्ञात किए जाते हैं, इसलिए जब अंकगणितीय माध्य पूर्णांक में हो उसी समय प्रत्यक्ष रीति उपयुक्त रहती है, किन्तु जब अंकगणितीय माध्य दशमलव में हो तो ऐसे समय प्रत्यक्ष रीति के प्रयोग से गणन क्रियाएँ बहुत जटिल हो जाती हैं, अतः लघु रीति के प्रयोग द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जाती है। लघु रीति में समंक श्रेणी के विचलन कल्पित माध्य से ज्ञात किए जाते हैं, अतः बाद के सूत्र में $\Sigma dxdy$, Σdx^2 एवं Σdy^2 में आवश्यक संशोधन कर लिए जाते हैं। लघु रीति द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है–

(*i*) सर्वप्रथम दोनों समंक श्रेणियों में से एक-एक उपयुक्त मूल्य को कल्पित माध्य मानकर उससे विचलन ज्ञात कर लिए जाते हैं–

$$dx = (X - A_x), \; dy = (Y - A_y)$$

(*ii*) प्राप्त विचलनों का योग क्रमशः Σdx एवं Σdy ज्ञात कर लिया जाता है।

(*iii*) कल्पित माध्यों से ज्ञात विचलनों का वर्ग करके dx^2 एवं dy^2 तथा इनका योग करके Σdx^2 एवं Σxy^2 ज्ञात कर लिए जाते हैं।

(*iv*) कल्पित माध्यों से ज्ञात विचलनों को आपस में गुणा करके ($dxdy$), इनके गुणनफल का योग $\Sigma dxdy$ ज्ञात किया जाता है।

(*v*) निम्न प्रथम सूत्र के प्रयोग के समय समंक श्रेणियों के अंकगणितीय माध्य ($\overline{X}$, $\overline{Y}$) तथा प्रमाप विचलन (σ_x, σ_y) भी ज्ञात कर लिए जाते हैं।

नोट

(*vi*) निम्न सूत्रों के प्रयोग द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है–

प्रथम सूत्र
$$r = \frac{\Sigma dxdy - N(\overline{X} - A_x)(\overline{Y} - A_y)}{N . \sigma_x - \sigma_y}$$

इस सूत्र द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने में दोनों श्रेणियों के अंकगणितीय माध्य एवं प्रमाप विचलन भी ज्ञात करने होते हैं अत: इसके निम्न सरल रूपों का प्रयोग अधिक उपयुक्त माना जाता है।

द्वितीय सूत्र
$$r = \frac{\Sigma dxdy - N\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)\left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)}{N\sqrt{\left[\frac{\Sigma dx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2\right]} \times \sqrt{\left[\frac{\Sigma dy^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)^2\right]}}$$

तृतीय सूत्र
$$r = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx . \Sigma dy}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma dx^2 - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}\right]\left[\Sigma dy^2 - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}\right]}}$$

चतुर्थ सूत्र
$$r = \frac{N . \Sigma dxdy - (\Sigma dx . \Sigma dy)}{\sqrt{[N . \Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2][N . \Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2]}}$$

व्यवहार में चतुर्थ सूत्र का प्रयोग अधिक किया जाता है।

सूत्रों में

$\Sigma dxdy$ = कल्पित माध्यों से प्राप्त विचलनों के गुणफल का योग।

Σdx^2 = x श्रेणी के विचलनों के वर्ग का योग।

Σdy^2 = y श्रेणी के विचलनों के वर्ग का योग।

Σdx = x श्रेणी के विचलनों का योग।

Σdy = y श्रेणी के विचलनों का योग।

$\overline{X}$, $\overline{Y}$ = क्रमश: x एवं y श्रेणियों के अंकगणितीय माध्य।

Ax, Ay = क्रमश: x एवं y श्रेणियों के कल्पित माध्य।

σx, σy = क्रमश: x एवं y श्रेणियों के प्रमाप विचलन।

N = पद युग्मों की संख्या।

उदाहरण (Illustration) 3: दस विद्यार्थियों ने दो विषयों में निम्नलिखित अंक प्राप्त किए, दोनों विषयों के प्राप्तांकों के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

Roll No.	*X*	*Y*
1	80	45
2	60	71
3	51	60
4	69	57
5	58	62
6	62	68

नोट

7	64	48
8	72	50
9	56	62
10	58	60

हल **(Solution):**

सहसम्बन्ध गुणांक की गणना (लघु रीति)

Roll No.	*X Series*			*Y Series*			*dxdy*
	X	*Ax = 62* *dx = X – Ax*	dx^2	*Y*	*Ay = 58* *dy = y – Ay*	dy^2	
1	80	+ 18	324	45	– 13	169	– 234
2	60	– 2	4	71	+ 13	169	– 26
3	51	– 11	121	60	+ 2	4	– 22
4	69	+ 7	49	57	– 1	1	– 7
5	58	– 4	16	62	+ 4	16	– 16
6	62	0	0	68	+ 10	100	0
7	64	+ 2	4	48	– 10	100	– 20
8	72	+ 10	100	50	– 8	64	– 80
9	56	– 6	36	62	+ 4	16	– 24
10	58	– 4	16	60	+ 2	4	– 8
N = 10	ΣX = 630	37 – 27 = 10 Σ*dx*	Σdx^2 = 670	ΣY = 583	35 – 32 = 3 Σ*dy*	643 Σdy^2	– 437 Σ*dxdy*

x श्रेणी का अंकगणितीय माध्य $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{360}{10} = 63$

y श्रेणी का अंकगणितीय माध्य $\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{583}{10} = 58.3$

x श्रेणी का प्रमाप विचलन $\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{670}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2} = \sqrt{66.00} = 8.124$

y श्रेणी का प्रमाप विचलन $\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{643}{10} - \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{64.21} = 8.013$

प्रथम सूत्र के अनुसार

$$r = \frac{\Sigma dxdy - N(\overline{X} - A_x)(\overline{Y} - A_y)}{N . \sigma_x - \sigma_y}$$

$$= \frac{-437 - 10(63 - 62)(583 - 58.3)}{10 \times 8.124 \times 8.013}$$

$$= \frac{-437 - 3}{650.98} = \frac{-440}{655.22} = -.67$$

द्वितीय सूत्र के अनुसार

$$r = \frac{\Sigma dxdy - N\left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)\left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)}{N \times \sqrt{\left[\frac{\Sigma dx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2\right]} \times \sqrt{\left[\frac{\Sigma dy^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{-437 - 10\left(\frac{10}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)}{10 \times \sqrt{\left[\frac{670}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2\right]} \times \sqrt{\left[\frac{643}{10} - \left(\frac{3}{10}\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{-437 - 3}{10 \times 8.124 \times 8.013} = \frac{-440}{650.98} = -.67$$

तृतीय सूत्र के अनुसार

$$r = \frac{\Sigma dxdy - \left(\frac{\Sigma dx \,.\, \Sigma dy}{N}\right)}{\sqrt{\left[\Sigma dx^2 - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}\right]\left[\Sigma dy^2 - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}\right]}}$$

$$= \frac{-437 - \left(\frac{10 \times 3}{10}\right)}{\sqrt{\left[670 - \frac{(10)^2}{10}\right]\left[643 - \frac{(3)^2}{10}\right]}}$$

$$= \frac{-437 - 3}{\sqrt{660 + 642.1}} = \frac{-440}{\sqrt{423786}} = \frac{-440}{650.98} = -.67$$

चतुर्थ सूत्र के अनुसार

$$r = \frac{N \,.\, \Sigma dxdy - (\Sigma dx \,.\, \Sigma dy)}{\sqrt{[N \,.\, \Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2][N \,.\, \Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2]}}$$

$$= \frac{10 \times -437 - (10 \times 3)}{\sqrt{[10 \times 670 - (10)^2][10 \times 643 - (3)^2]}}$$

$$= \frac{-4370 - 30}{\sqrt{(6700 - 100)(6430 - 9)}}$$

$$= \frac{-4400}{\sqrt{6600 \times 6421}} = \frac{-4400}{6509.8} = -.67$$

नोट

लघु रीति में गणन क्रिया को सरल बनाने के लिए लघुगणकों का प्रयोग किया जाना चाहिए, चतुर्थ सूत्र को लघुगणकों द्वारा निम्न प्रकार हल किया जाएगा–

$$r = -\,[\text{Antilog }\{\log 4400 - \tfrac{1}{2}(\log .6600 + \log .6421)\}]$$
$$= -\,[\text{Antilog }\{3.6435 - \tfrac{1}{2}(3.8195 + 3.8076)\}]$$
$$= -\,[\text{Antilog }(3.6435 - 3.8136)]$$
$$= -\,[\text{Antilog }(\bar{1}.8299)]$$
$$= -\,0.6759$$

वर्गीकृत श्रेणी में सहसम्बन्ध (Correlation in Grouped Series)

वर्गीकृत श्रेणियों में भी कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जा सकती है। इन श्रेणियों में अनेक कोष्ठ (cells) होते हैं जिनमें X एवं Y दोनों श्रेणियों की उभयनिष्ठ (common) आवृतियाँ लिखी जाती हैं। वर्गीकृत समंक सारणी को द्विचर आवृति सारणी (Bivariate Frequency Table) या सहसम्बन्ध सारणी (Correlation Table) भी कहा जाता है। सहसम्बन्ध सारणी को देखने से भी सहसम्बन्ध की उपस्थिति एवं दिशा का अनुमान लगाया जा सकता है। यदि आवृतियाँ निचले बाएँ कोने से ऊपर दाएँ कोने की ओर फैली हुई हों तो ऋणात्मक सहसम्बन्ध होगा, ऊपर बाएँ कोने से नीचे दाएँ कोने की ओर फैली हुई हो तो ऋणात्मक सहसम्बन्ध होगा, यदि आवृतियों के अनुविन्यास में किसी प्रकार का क्रम न हो तो सहसम्बन्ध का अभाव होता है। सहसम्बन्ध सारणी को निम्नांकित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है–

सहसम्बन्ध सारणी

	Age of Wives in Years					
Age of husbands in years	*10–20*	*20–30*	*30–40*	*40–50*	*50–60*	*Total*
15 – 25	6	3				9
25 – 35	3	16	10			29
35 – 45		10	15	7		32
45 – 55			7	10	4	21
55 – 65				4	5	9
Total	9	29	32	21	9	100

उपरोक्त सारणी में 15-25 वर्ष के 6 पति ऐसे हैं जिनकी पत्नियों की आयु 10-20 वर्ष है, एवं 3 पति ऐसे हैं जिनकी पत्नियों की आयु 20-30 वर्ष है। इसी प्रकार 55-65 वर्ष के 4 पति ऐसे हैं जिनकी पत्नियों की आयु 40-50 वर्ष है तथा 5 पति ऐसे हैं जिनकी पत्नियों की आयु 50-60 वर्ष है। 10-20 वर्ष की आयु की कुल पत्नियाँ 9 हैं जिनमें से 6 के पति 15-25 वर्ष आयु वर्ग में तथा 3 के पति 25-35 वर्ष की आयु वर्ग में हैं। उक्त सारणी में आवृतियों का फैलाव ऊपर बाएँ कोने से नीचे दाहिने कोने की ओर है, अत: धनात्मक सहसम्बन्ध प्रकट होता है। इस सहसम्बन्ध सारणी के प्रयोग द्वारा ही वर्गीकृत श्रेणियों में सहसम्बन्ध गुणांक को गणना की जाती है।

सहसम्बन्ध गुणांक की गणना प्रक्रिया

वर्गीकृत समंक श्रेणियों में सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार की जाती है–

(*i*) सहसम्बन्ध सारणी के दायीं ओर चार खाने एवं नीचे की ओर तीन खाने बनाए जाते हैं।

(*ii*) दायीं ओर के प्रथम खाने में y श्रेणी के कल्पित माध्य से प्राप्त विचलन (dy) लिखे जाते हैं और नीचे की

नोट

ओर के प्रथम खाने में X श्रेणी के कल्पित माध्य से प्राप्त विचलन (dx) लिखे जाते हैं, इनका योग क्रमशः Σdy एवं Σdx ज्ञात कर लिया जाता है।

(*iii*) दायीं ओर के दूसरे खाने में dy को तत्सम्बन्धी आवृतियों से गुणा करके (fdy) लिखा जाता है। नीचे की ओर के दूसरे खाने में fdx लिखा जाता है। इनका योग Σfdy एवं Σfdx कर लिया जाता है।

(*iv*) दायीं ओर के तीसरे खाने में fdy को dy से गुणा करके fdy^2 तथा नीचे की ओर के तीसरे खाने में fdx को dx से गुणा करके fdx^2 लिखा जाता है और इनका योग Σfdy^2 तथा Σfdx^2 कर लिया जाता है।

(*v*) चौथा खाना $\Sigma fdxdy$ के लिए होता है, इसकी गणना के लिए सर्वप्रथम सभी आवृतियों के कोष्ठों (cells) के लिए उनसे सम्बन्धित dx एवं dy को गुणा करके उस कोष्ठ के ऊपर बाएँ कोने में लिख दिया जाता है। जैसे एक आवृति कोष्ठ का dx – 2 एवं dy भी – 2 है तो $dxdy = 4$ होगा। यदि उसकी आवृति 5 है तो $fdxdy$ का मान 20 होगा। इस प्रकार आवृतियों के सभी कोष्ठों के लिए जब $dxdy$ ज्ञात कर लिया जाता है तो प्रत्येक कोष्ठ के $dxdy$ को उस कोष्ठ की आवृति से गुणा करके नीचे दाएँ कोने में $fdxdy$ लिख दिया जाता है।

उदाहरण—

dy (– 2)

4($dxdy$)
5(f)
($fdxdy$) 20

dx (– 2)

इस प्रकार $fdxdy$ ज्ञात कर इनका क्षैतिज जोड़कर दाहिनी ओर के अन्तिम खाने में लिख दिया जाता है। इनका उदग्र जोड़ भी किया जा सकता है, ऐसे समय नीचे की ओर तीन के स्थान पर चार खाने बनाने होंगे।

(*vi*) निम्न सूत्र के प्रयोग द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जाती है—

प्रथम सूत्र— $r = \dfrac{\Sigma fdxdy - N(\overline{X} - Ax)(\overline{Y} - Ay)}{N.\sigma_x\sigma_y}$

इस सूत्र का प्रयोग व्यवहार में बहुत कम किया जाता है; सामान्यतया इस सूत्र के निम्न सरल रूप प्रयोग में लाए जाते हैं जिनमें श्रेणी के प्रमाप विचलन एवं अंकगणितीय माध्य की गणना अलग से नहीं करनी पड़ती है।

द्वितीय सूत्र— $r = \dfrac{\Sigma fdxdy - N\left(\dfrac{\Sigma fdx}{N}\right)\left(\dfrac{\Sigma fdy}{N}\right)}{N\sqrt{\left[\dfrac{\Sigma fdx^2}{N} - \left(\dfrac{\Sigma fdx}{N}\right)^2\right]} \times \sqrt{\left[\dfrac{\Sigma fdy^2}{N} - \left(\dfrac{\Sigma fdy}{N}\right)^2\right]}}$

तृतीय सूत्र— $r = \dfrac{\Sigma fdxdy - \dfrac{\Sigma fdx\,\Sigma fdy}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma fdx^2 - \dfrac{(\Sigma fdx)^2}{N}\right]\left[\Sigma fdy^2 - \dfrac{(\Sigma fdy)^2}{N}\right]}}$

चतुर्थ सूत्र— $r = \dfrac{N.\Sigma fdxdy - (\Sigma fdx.\Sigma fdy)}{\sqrt{[N.\Sigma fdx^2 - (\Sigma fdx)^2][N.\Sigma fdy^2 - (\Sigma fdy)^2]}}$

संकेताक्षरों का अर्थ पूर्ववत् है, सिर्फ इनमें आवृतियों (f) का समावेश हुआ है।

वर्गीकृत आवृति श्रेणी में वर्ग-विस्तार के समान होने पर पद-विचलन रीति के प्रयोग द्वारा भी सहसम्बन्ध गुणांक

नोट

की गणना की जा सकती है, ऐसा करते समय सूत्र में किसी प्रकार के संशोधन की आवश्यकता नहीं होती है; अर्थात् i समापवर्तक (Common factor) से गुणा नहीं किया जाता है क्योंकि सूत्र में अंश और हर दोनों में उभयनिष्ठ गुणांक ($ix \times iy$) से गुणा करने पर इनका अनुपात पूर्ववत् ही रहता है।

टास्क द्विचर आवृति सारणी किसे कहते हैं ?

उदाहरण (Illustration) 4: निम्न सारणी में X एवं Y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

	13	1				1					
	12			1	1	2	2				
Y	11			1	2	3	3	2			
	10		1	3	4	5	5	3	2	1	
	9			1	3	3	3	2	1		1
	8				2	2	3	4		1	
	7					1	1	3	2	1	
		28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
						X					

हल (Solution):

सहसम्बम्ध गुरगौक का परिकलन

X / Y	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	Total f	dy	$f\,dy$	$f\,dy^2$	$f\,dxdy$
13	–12 1 –12	—	—	—	0 1 0	—	—	—	—	—	2	3	6	18	–12
12	—	—	–4 1 –4	–2 1 –2	0 2 0	2 2 4	—	—	—	—	6	12	12	24	–2
11	—	—	–2 1 –2	–1 2 –2	0 3 0	1 3 3	2 2 4	—	—	—	11	1	11	11	3
10	—	0 1 0	0 3 0	0 4 0	0 5 0	0 6 0	0 3 0	0 2 0	0 1 0	—	25	0	0	0	0
9	—	—	2 1 2	1 3 3	0 3 0	–1 4 –4	–2 2 –4	–3 1 –3	—	–5 1 –5	15	–1	–15	15	–11
8	—	—	—	2 2 4	0 2 0	–2 3 –6	–4 4 –16	—	–8 1 –8	—	12	–2	–24	–48	–26
7	—	—	—	—	0 1 0	–3 1 –3	–6 3 –18	–9 2 –18	–12 1 –12	—	8	–3	–24	72	–51
Total f	1	1	6	12	17	19	14	5	3	1	79		–34	188	–99
dx	–4	–3	–2	–1	0	1	12	3	4	5			Σfdy	188	–99
fdx	–1	–3	–12	–12	0	19	28	15	12	5	48	Σfdx			
fdx^2	16	9	24	12	0	19	56	45	48	25	254	Σfdx^2			
$faxdy$	–12	0	–4	3	0	–16	–34	–21	–20	–5	–99	$\Sigma fdxdy$			

नोट

$$r = \frac{N.\Sigma\, fdxdy - (\Sigma fdx\,.\,\Sigma fdy)}{\sqrt{[N.\Sigma fdx^2 - (\Sigma fdx)^2]\,[N.\Sigma fdy^2 - (\Sigma fdy)^2]}}$$

$$= \frac{79 \times -99 - (48 \times -34)}{\sqrt{[79 \times 254 - (48)^2]\,[79 \times 188 - (-34)^2]}}$$

$$= \frac{-7821 + 1632}{\sqrt{[20066 - 2304]\,[14852 - 1156]}}$$

$$= \frac{-6189}{\sqrt{17762 \times 13696}}$$

$= -$ Antilog [log .6189 $- \frac{1}{2}$ (log .17762 + log .13696)]

$= -$ A.L. [3.7916 $- \frac{1}{2}$(4.2495 + 4.1367)]

$= -$ A.L. [3.7916 – 4.1931]

$= -$ A.L. [1.5985]

$= -$ 0.3968 $= -$ 0.4 approx

अर्थात् ऋणात्मक सहसम्बन्ध है।

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की मान्यताएँ—कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक तीन मान्यताओं पर आधारित है—

(*i*) सहसम्बन्धित समंक श्रेणियाँ कई कारणों से प्रभावित होती हैं, अत: उनमें सामान्यतया (Normality) आ जाती है।

(*ii*) समंकमालाओं को प्रभावित करने वाले स्वतन्त्र कारणों में कारण परिणाम का सम्बन्ध होता है, कारण-परिणाम के सम्बन्ध के अभाव में सहसम्बन्ध की उपस्थिति अर्थहीन होती है।

(*iii*) सहसम्बन्धित समंकमालाओं में रेखीय सम्बन्ध की परिकल्पना की जाती है अर्थात् दोनों पद-युग्मों से रेखाचित्र खींचने पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है।

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की सीमा—कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक हर समय $+1$ एवं -1 की सीमा में रहता है। संकेताक्षरों के रूप में—

$r \ngtr \pm 1$ या $r \leq \pm 1$

$r \ngtr 1 = r, \pm 1$ से अधिक कभी नहीं हो सकता है।

$r \leq 1 = r, \pm 1$ से कम या बराबर होगा।

कोटि-अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक (Rank Correlation)

चार्ल्स स्पियरमैन ने सहसम्बन्ध ज्ञात करने की इस विधि का प्रतिपादन किया इस विधि को कोटि-अन्तर या क्रमानतर रीति (Ranking Difference Method) अथवा अनुपस्थिति रीति (Ranking Method) कहा जाता है।

यह रीति व्यक्तिगत श्रेणी में ऐसी परिस्थितियों के लिए सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिए उपयुक्त है, जिनके संख्यात्मक माप के स्थान केवल क्रम (Order) निश्चित करना ही सम्भव हो, जैसे सुन्दरता, बुद्धिमत्ता, आदि गुणात्मक तथ्य। ऐसी परिस्थितियों को प्रथम, द्वितीय, तृतीय आदि कोटि क्रम (Rank) देकर उनके आधार पर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है।

नोट

कोटि-अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक की गणना—स्पियरमेन के कोटि-अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है—

(*i*) सर्वप्रथम x एवं y श्रेणी के चर मूल्यों का उनके आकार के आधार पर क्रम निश्चित कर उन्हें कोटि-क्रम (Rank) जैसे—1, 2, 3, 4...आदि दे दिए जाते हैं।

(*ii*) x श्रेणी के कोटि-क्रमों में से y श्रेणी के तत्सम्बन्धी कोटि-क्रमों को घटाकर कोटि-अन्तर (D) ज्ञात किया जाता है, कोटि अन्तर का योग ΣD हर समय शून्य होता है।

(*iii*) कोटि अन्तर (D) का वर्ग कर उसका योग ΣD^2 ज्ञात कर लिया जाता है।

(*iv*) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} \text{ या } 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N^3 - N}$$

ρ = ग्रीक वर्णमाला के अक्षर *rho* का प्रयोग कोटि-अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक के लिए किया गया है।

ΣD^2 = क्रमान्तरों के वर्गों का योग

N = पद-युग्मों की संख्या

समान मूल्य—कोटि-क्रम देते समय यह समस्या आती है कि जब दो या अधिक पदों का मूल्य समान हो तो उन्हें किस प्रकार कोटि-क्रम प्रदान किया जाए, इस सम्बन्ध में दो विधियाँ काम में ली जाती हैं—

(*i*) समान प्रकार के सभी पदों को समान कोटिक्रम देकर उनके बाद वाले मूल्य को अगले क्रम में दिया जाता है, जैसे—

मूल्य	:	60	40	30	30	20	10
कोटि-क्रम	:	1	2	3.5	3.5	5	6

(*ii*) दूसरी विधि, जो सामान्यतया व्यवहार में प्रयोग में ली जाती है, के अनुसार समान आकार के पदों को इनके क्रम के औसत के अनुसार कोटि-क्रम प्रदान किया जाता है; जैसे तीसरे एवं चौथे क्रम पर दो पदों का आकार समान है तो इन्हें $\frac{3+4}{2} = 3.5$ कोटि-क्रम दिया जाएगा; जैसे—

मूल्य	:	60	40	30	30	20	10
कोटि-क्रम	:	1	2	3	3	5	6

समान क्रम के लिए संशोधन (Correction for Tied Ranks)—जब दो या अधिक पदों का आकार समान हो और उन्हें औसत के आधार पर समान क्रम प्रदान किया गया हो तो सत्र में निम्न प्रकार संशोधन किया जाता है—

$$\rho = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m)\right]}{N(N^2-1)}$$

सूत्र में m का प्रयोग समान आकार के कोटि-क्रम वाले पदों की संख्या के लिए किया गया है।

उदाहरण (Illustration) 5: अर्थशास्त्र तथा इतिहास में परीक्षा देने वाले 10 छात्रों ने निम्नलिखित श्रेणी प्राप्त की है। क्रमान्तर सहसम्बन्ध गुणांक निकालिये।

Economics	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
History	:	2	4	1	5	3	9	7	10	6	8

हल (Solution): प्रश्न में कोटिक्रम दिए हुए हैं, अत: कोटिक्रम निर्धारण की आवश्यकता नहीं है। **नोट**

क्रमांतर सहसम्बन्ध गुणांक की गणना

अर्थशास्त्र X	*इतिहास* Y	*कोटि-अन्तर* D	D^2
1	2	– 1	1
2	4	– 2	4
3	1	2	4
4	5	– 1	1
5	3	2	4
6	9	– 3	9
7	7	0	0
8	10	– 2	4
9	6	3	9
10	8	2	6
			$\Sigma D^2 = 40$

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 40}{10(100-1)} = 1 - \frac{240}{990}$$

$$= 1 - .24 = +.76 \text{ approx.}$$

अर्थात् उच्च परिमाण का धनात्मक सहसम्बन्ध है।

संगामी विचलन सहसम्बन्ध गुणांक (Correlation Coefficient of Concurrent Deviation)

जब सहसम्बन्ध की केवल दिशा ज्ञात करनी हो तो संगामी विचलन रीति का प्रयोग किया जाता है, इस रीति में प्रत्येक पद-मूल्य का पिछले मूल्य से विचलन की दिशा (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) ज्ञात कर उसके आधार पर सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जाती है। x एवं y श्रेणी के विचलन संगामी होने पर धनात्मक सहसम्बन्ध एवं प्रतिगामी होने पर ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है।

संगामी विचलन गुणांक ज्ञात करने की प्रक्रिया—संगामी विचलन गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात किया जाता है—

(*i*) x एवं y श्रेणी के सभी पद-मूल्यों का पिछले मूल्य से विचलन की दिशा ज्ञात की जाती है, जैसे प्रथम मूल्य 100 है एवं दूसरा मूल्य 100 से अधिक है तो विचलन की दिशा धनात्मक (+) एवं दूसरे मूल्य के 100 से कम होने पर विचलन की दिशा ऋणात्मक (–) होगी।

(*ii*) धनात्मक विचलन के लिए + चिह्न एवं ऋणात्मक विचलन के लिए – चिह्न का प्रयोग किया जाता है, यदि किन्हीं दो पद-मूल्यों का विचलन शून्य है तो उसके लिए = चिह्न का प्रयोग किया जाता है।

(*iii*) x एवं y के विचलन चिह्नों को आपस में गुणा करके गुणा से प्राप्त चिन्हों में से धनात्मक चिह्नों को गिनकर उनकी संख्या ज्ञात कर ली जाती है, इन्हें संगामी विचलन कहा जाता है।

(*iv*) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

नोट

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\frac{2c - n}{n}}$$

r_c = संगामी विचलन गुणांक

C = संगामी विचलनों की संख्या

n = विचलन युग्मों की संख्या

विचलन युग्मों की संख्या हर समय पद-युग्मों की संख्या से 1 कम होती है।

यदि सूत्र में $(2C - n)$ धनात्मक है, तो वर्गमूल के अन्दर एवं बाहर वनात्मक चिह्न (+) होगा एवं इसके ऋणात्मक चिह्न (–) का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 6:

निम्न समंकों से संगामी विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए–

Year	*Supply*	*Price*
1954	150	200
1955	154	180
1956	160	170
1957	172	160
1958	160	190
1959	165	180
1960	180	172

हल (Solution):

संगामी विचलन गुणांक की गणना

Year	*Supply*	*Deviation*	*Price*	*Deviation*	*Product of Deviation*
1954	150		200		
1955	154	+	180	–	–
1956	160	+	170	–	–
1957	172	+	160	–	–
1958	160	–	190	+	–
1959	165	+	180	–	–
1960	180	+	172	–	–
		$n = 6$			C = 0

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\frac{2C - n}{n}} \quad (C = 0;\ n = 6)$$

$$= \pm\sqrt{\pm\frac{2 \times 0 - 6}{6}} = -1$$ अर्थात पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध

क्या आप जानते हैं दो बराबर चिह्नों को गुणा के समय संगामी चिह्न मान लिया जाता है। सहसम्बन्ध ज्ञात करने की संगामी विचलन रीति सरल है, इससे अल्पकालीन उच्चावचनों में सहसम्बन्ध ज्ञात हो जाता है, इससे सहसम्बन्ध की दिशा का ही ज्ञान हो पाता है इसकी संख्यात्मक माप सम्भव नहीं है, अतः इसका प्रयोग बहुत कम किया जाता है।

अन्य रीतियाँ—सहसम्बन्ध ज्ञात करने की गणितीय रीतियों में कार्ल पियर्सन द्वारा प्रतिपादित रीति अधिक लोकप्रिय है। उक्त रीतियों के अतिरिक्त कुछ अन्य रीतियों द्वारा भी सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जा सकती है, इनमें मुख्य न्यूनतम वर्ग रीति है।

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सहसम्बन्ध (Correlation by the Method of Least Squares)

न्यूनतम वर्ग विधि के आधार पर खींची गई सर्वोत्तम रेखा पर (Line of Best Fit) यह विधि आधारित है। इस विधि में दिए गए x के मूल्यों के लिए y के सर्वश्रेष्ठ सम्भावित मूल्य ज्ञात कर सहसम्बन्ध ज्ञात किया जाता है। सर्वोत्तम रेखा से प्राप्त विचलनों के वर्ग का योग ज्ञात विचलनों के वर्ग के योग से हर समय न्यूनतम होता है, अतः इसे न्यूनतम वर्ग रीति कहा जाता है।

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सहसम्बन्ध ज्ञात करने की प्रक्रिया—न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात किया जाता है—

(*i*) सर्वप्रथम सरल रेखा के समीकरण की सहायता से x के दिए हुए मूल्यों के लिए y के सम्भावित मूल्य (y_c) ज्ञात किए जाते हैं—

सरल रेखा का समीकरण : $y = a + bx$. इस समीकरण के दो अचर (Constant) मूल्य a एवं b का मान निम्न दो प्रसामान्य समीकरणों द्वारा ज्ञात किया जाता है—

$$\Sigma y = \mathrm{N}a + b\Sigma x$$
$$\Sigma xy = \Sigma xa + b\Sigma x^2$$

(*ii*) y के दिए हुए मूल्यों में से y के सम्भावित मूल्यों को घटा कर विचलन ज्ञात किए जाते हैं।

$$d = y - y_c$$

(*iii*) प्राप्त विचलनों का वर्ग करके उसका योग $\Sigma(y - y_c)^2$ या Σd^2 ज्ञात कर लिया जाता है।

(*iv*) y श्रेणी के वास्तविक मूल्यों के आधार पर प्रसरण ज्ञात किया जाता है—

$$\text{Variance of } y \text{ या } \sigma_y^2 = \frac{\Sigma d_y^2}{\mathrm{N}}$$

(*v*) सर्वोपयुक्त रेखा प्रसरण जिसे अस्पष्टीकृत प्रसरण (unexplained variance) भी कहते हैं, निम्न प्रकार ज्ञात किया जाता है—

$$\mathrm{S}_y{}^2 = \frac{\Sigma(y - y_c)^2}{\mathrm{N}}$$

$\mathrm{S}y^2$ का वर्गमूल (S_y) को 'अनुमान का प्रमाप विभ्रम' (Standard error of the estimates) कहा जाता है।

(*vi*) निम्न सूत्र के प्रयोग द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जाती है—

$$r = \sqrt{1 - \frac{\mathrm{S}_y{}^2}{\sigma_y{}^2}}$$

नोट

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा ज्ञात सहसम्बन्ध गुणांक का चिह्न वही होगा जो b अचर मूलय का होता है।

उदाहरण (Illustration) 7: निम्न समंकों से x एवं y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए, न्यूनतम वर्ग रीति का प्रयोग कीजिए–

X	:	1	2	3	4	5	6	7
Y	:	160	180	184	166	188	198	184

हल (Solution):

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा Y के संगठित मूल्यों की गणना

X	Y	XY	X^2	$a + bx =$	Y_c
1	160	160	1	164 + 4 × 1	168
2	180	360	4	164 + 4 × 2	172
3	184	552	9	164 + 4 × 3	176
4	166	664	16	164 + 4 × 4	180
5	188	940	25	164 + 4 × 5	184
6	198	1188	36	164 + 4 × 6	188
7	184	1288	49	164 + 4 × 7	192
28 Σx	1260 Σy	5152 Σxy	140 Σx^2		

$\Sigma y = \text{N}a + b\Sigma x$ या $1260 = 7d + 2b$ ...(i)

$\Sigma xy = \Sigma xa + b\Sigma x^2$ $5152 = 28a + 140b$ ...(ii)

समीकरण (i) को 4 से गुणा करके समीकरण (ii) के घटाने पर–

$$5152 = 28a + 140b$$
$$5040 = 28a + 112b$$
$$- \quad - \quad -$$
$$112 = 28b$$

$\therefore$ $b = 4$, समीकरण (i) में b का मूल्य रखने पर

$$1260 = 7a + 28 \times 4 \quad \text{or} \quad 1260 = 7a + 112$$

$$1260 - 112 = 7a \quad \text{or} \quad 1148 = 7a \quad \therefore \quad a = 164$$

Sy^2 एवं σy^2 की गणना

X	Y	Y_c	$(Y - Y_c)$	$(Y - Y_c)^2$	$\overline{Y} = 180$ d $(Y - \overline{Y})$	d^2 $(Y - \overline{Y})^2$
1	160	168	– 8	64	– 20	400
2	180	172	+ 8	64	0	0
3	184	176	+ 8	64	4	16
4	166	180	– 14	196	– 14	196
5	188	184	+ 4	16	8	64
6	198	188	+ 10	100	18	324
7	184	192	– 8	64	4	16
योग	1260 $\overline{Y} = 180$			568 $\Sigma(Y - Y_c)^2$		1016 $\Sigma(Y - \overline{Y})^2$

नोट

$$Sy^2 = \frac{\Sigma(Y - Y_c)^2}{N} = \frac{568}{7} = 81.14$$

$$\sigma_y^{\ 2} = \frac{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}{N} = \frac{1016}{6} = 145.14$$

$$r = \sqrt{1 - \frac{Sy^2}{\sigma_y^{\ 2}}} = \sqrt{1 - \frac{81.14}{145.14}}$$

$$= \sqrt{1 - .558} = \sqrt{.44} = +.66$$

लघु रीति (Sort-cut Method)—न्यूनतम वर्ग रीति में लघु रीति के प्रयोग द्वारा भी सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जा सकती है, इसमें Y_c, $\sigma_y^{\ 2}$ एवं Sy^2 की अलग से गणना करने की आवश्यकता नहीं होती है। इसमें केवल Y के मूल्यों का वर्ग और कर लिया जाता है, उसके बाद निम्न सूत्र के प्रयोग द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जाती है—

$$r = \sqrt{\frac{a\Sigma y + b\Sigma xy - Ncy^2}{\Sigma y^2 - Ncy^2}}$$

$Cy = y$ श्रेणी के अंकगणितीय माध्य एवं कल्पित मध्य बिन्दु का स्तर।

लघु रीति—

हल (Solution):

सहसम्बन्ध गुणांक की गणना
न्यूनतम वर्ग रीति—लघु रीति

x	S	y^2
1	160	25,600
2	180	22,400
3	184	33,856
4	166	27,556
5	188	35,344
6	198	39,204
7	184	33,856
	1260 Σy	2,27816 Σy^2

अन्य मूल्य की गणना पिछले उदाहरण में की गई है—

$a = 164$, $b = 4$ $\Sigma y = 1260$

$\Sigma xy = 5152$ $\Sigma y^2 = 2,27,816$ $N = 7$

पिछले उदाहरण में कोई कल्पित माध्य नहीं लिया गया है, अत: $cy = 180$ ही होगा—

$$r = \sqrt{\frac{a\Sigma y + b\Sigma xy - Ncy^2}{\Sigma y^2 - Ncy^2}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(164 \times 1260) + (4 \times 5152) - (7 \times 180^2)}{(2,27,816) - (7 \times 180^2)}}$$

नोट

$$= \sqrt{\frac{2,06,640 + 20608 - 226800}{2,27,816 - 226800}} = \sqrt{\frac{448}{1016}}$$

$$= \sqrt{.44} = + .66$$

अन्तर रीति द्वारा सहसम्बन्ध (Correlation by Difference Method)

दोनों श्रेणियों के चर मूल्यों के अन्तर के आधार पर भी सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जा सकती है। इसकी प्रक्रिया निम्न प्रकार है–

(*i*) सर्वप्रथम x एवं y श्रेणी के चर मूल्यों का अन्तर ज्ञात कर इन अन्तरों के माध्य से इनका विचलन ज्ञात कर इनका वर्ग Σd^2 ज्ञात कर लिया जाता है।

$$D = x - y d = D - \overline{D}$$

यहाँ $\overline{D}$ = D का अंकगणितीय माध्य है।

(*ii*) x एवं y चर मूल्यों में से इनके सम्बन्धित माध्य से विचलन ज्ञात कर इनका वर्ग Σx^2 एवं Σy^2 कर लिया जाता है,

$$x = (X - \overline{X}) \qquad Y = (Y - \overline{Y})$$

(*iii*) निम्न सूत्र के प्रयोग द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है–

$$r = \frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 - \Sigma d^2}{\sqrt[2]{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}$$ **...प्रथम सूत्र**

or

$$r = \frac{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - s_{x-y}{}^2}{2.\sigma_x.\sigma_y}$$ **...द्वितीय सूत्र**

यहाँ $\sigma_{x-y}{}^2$ का तात्पर्य x एवं y श्रेणी के चर मूल्यों के अन्तर के प्रसरण से है।

उदाहरण (Illustration) 8: अन्तर रीति द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

K Series :	3	5	7	9	11	13	15	17
Y Series :	1	3	5	7	9	11	13	15

हल (Solution):

अन्तर रीति द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना

X	Y	$D = (X - Y)$	$\overline{D} = 2$ $d = D - \overline{D}$	d^2	$\overline{X} = 10$ $x = X - \overline{X}$	x^2	$\overline{Y} = 8$ $Y = Y - \overline{Y}$	y^2
3	1	2	0	0	– 7	49	– 7	49
5	3	2	0	0	– 5	25	– 5	25
7	5	2	0	0	– 3	9	– 3	9
9	7	2	0	0	– 1	1	– 1	1
11	9	2	0	0	+ 1	1	+ 3	1
13	11	2	0	0	+ 3	9	+ 5	9
15	13	2	0	0	+ 5	25	+ 7	25
17	15	2	0	0	+ 7	49	+ 1	49
$\Sigma X = 80$	$\Sigma Y = 64$	$\Sigma D = 16$		$\Sigma d^2 = 0$		168 Σx^2		168 ΣY^2

नोट

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{80}{8} = 10 \qquad \overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{64}{8} = 8$$

$$\overline{D} = \frac{\Sigma D}{N} = \frac{16}{8} = 2$$

$$r = \frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 - \Sigma d^2}{2 \times \sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}$$

$$= \frac{168 + 168 - 0}{2 \times \sqrt{168 \times 168}}$$

$$= \frac{336}{2 \times 168} = \frac{336}{336} = +1$$

अर्थात् पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध है।

सहसम्बन्ध में विलम्बना तथा अग्रगमन (Lag and Lead in Correlation)

काल श्रेणियों के सहसम्बन्ध के अध्ययन में विलम्बना तथा अग्रगमन का विशेष महत्त्व होता है, क्योंकि कुछ दशाओं में स्वतन्त्र श्रेणी में परिवर्तन से आश्रित श्रेणी में परिवर्तन कुछ समयावधि बाद होते हैं, जैसे—उत्पादन में वृद्धि होने पर कीमतों में कमी एवं मुद्रा की मात्रा में वृद्धि से सामान्य मूल स्तर में वृद्धि तुरन्त न होकर कुछ समय बाद होती है, इस अन्तर को ही समय विलम्बना (Time Lag) कहा जाता है। समय विलम्बना से प्रभाव कारण से पिछड़ जाते हैं, अत: ऐसे समय या तो कारण से सम्बन्धित समंकों को पीछे ले जाना था विलम्बित करना होगा या प्रभाव से सम्बन्धित समंकों को आगे ले जाना या अवगमन करना होता है, इस प्रक्रिया को ही विलम्बना तथा अग्रगमन कहा जाता है।

उदाहरणार्थ जैसे जनवरी 1978 में होने वाली उत्पादन या पूर्ति में वृद्धि से कीमतों में दो माह बाद यानी मार्च 1978 में कमी होती है तो सहसम्बन्ध के अध्ययन के समय इन समंकों को इस प्रकार समायोजित किया जाना चाहिए कि उत्पादन से सम्बन्धित जनवरी के समंक एवं कीमतों से सम्बन्धित मार्च के समक परस्पर सम्बन्धित हो जाएँ, इसी प्रकार फरवरी के उत्पादन समंक एवं अप्रैल के कीमतों के समंकों को सम्बन्धित किया जाएगा, इस प्रक्रिया के बाद ही सहसम्बन्ध गुणांक की गणना करनी चाहिए अन्यथा परिणाम भ्रमात्मक हो जाते हैं। समय विलम्बना के आधार पर समंकों को निम्न प्रकार संशोधित किया जाएगा—

माह	*पूर्ति इकाइयाँ*	*कीमत (रु.)*	*समय विलम्बना दो माह के आधार पर संशोधित कीमतें*
जनवरी	70	10	10
फरवरी	65	11	9
मार्च	50	10	8
अप्रैल	60	9	9
मई	60	8	10
जून	80	9	9
जुलाई	100	10	8
अगस्त	70	9	7
सितम्बर	90	8	6
अक्तूबर	80	7	7
नवम्बर	110	6	–
दिसम्बर	100	7	–

नोट

निश्चयन-गुणांक (Coefficient of Determination)

सहसम्बन्ध गुणांक का वर्ग (r^2) निश्चयन गुणांक कहलाता है। निश्चयन गुणांक की माप यह ज्ञात करने के लिए की जाती है कि Y चर मूल्य में होने वाले कितने परिवर्तन X चर मूल्य में होने वाले परिवर्तनों के परिणामस्वरूप होते हैं। Y चर मूल्य में होने वाले परिवर्तनों को दो भागों में विभक्त किया जा सकता है–

(*i*) ऐसे परिवर्तन X चर मूल्य में होने वाले परिवर्तनों से सम्बन्धित हैं।

(*ii*) ऐसे परिवर्तन जो Y चर मूल्य में होने वाले परिवर्तनों से सम्बन्धित हैं।

X चर मूल्य से सम्बन्धित परिवर्तन या विचरण को 'स्पष्टीकृत प्रसरण' (Explained Variance) तथा दूसरे प्रकार के परिवर्तन जो X से सम्बन्धित नहीं हैं 'अस्पष्टीकृत प्रसरण' (Unexplained Variance) कहलाते हैं। स्पष्टीकृत एवं अस्पष्टीकृत प्रसरण का योग कुल प्रसरण को व्यक्त करता है–

$$\Sigma(Y - \overline{Y})^2 = [\Sigma(Y_c - \overline{Y})^2 + \Sigma(Y - Y_c)^2]$$

$\Sigma(Y - \overline{Y})^2$ = कुल प्रसरण $\left(\sigma_y^2\right)$

$\Sigma(Y_c - \overline{Y})^2$ = स्पष्टीकृत प्रसरण $\left(\sigma Y_c^2\right)$

$\Sigma(Y - Y_c)^2$ = अस्पष्टीकृत प्रसरण $\left(S_y^2\right)$

अस्पष्टीकृत प्रसरण का माप तो न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सहसम्बन्ध ज्ञात करते समय हो जाता है, स्पष्टीकृत प्रसरण का माप निश्चयन गुणांक (Coefficient of Determination) द्वारा किया जाता है, अन्य शब्दों में निश्चयन गुणांक कुल प्रसरण के उस अनुपात की माप है जिसे स्पष्टीकृत किया गया है। निश्चयन गुणांक का निर्धारण निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है–

$$\text{Coefficient of Determination} = 1 - \frac{S_y{}^2}{\sigma_y{}^2} = r^2$$

या
$$\frac{\text{स्पष्टीकरण प्रसरण}}{\text{कुल प्रसरण}} = \frac{\Sigma(Y_c - \overline{Y})^2}{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}$$

उदाहरणार्थ, यदि पूर्ति की मात्रा (X) एवं कीमत स्तर (Y) के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक 9 है तो इसका वर्ग = 81 निश्चयन गुणांक होगा। निश्चयन गुणांक इस बात को स्पष्ट करता है कि कीमतों में होने वाले 81% परिवर्तन पूर्ति में होने वाले परिवर्तनों के कारण उत्पन्न होते हैं। इस प्रकार निश्चयन गुणांक से हम उस प्रतिशत को ज्ञात कर सकते हैं जिसके बराबर Y चर मूल्य के परिवर्तन x चर मूल्य के परिवर्तन के कारण होते हैं। सहसम्बन्ध की तुलना करने के लिए निश्चयन गुणांक का प्रयोग अधिक उपयुक्त माना जाता है।

अनिश्चयन गुणांक (Coefficient of Non-Determination)—Y के जो परिवर्तन x के परिवर्तनों से सम्बन्धित नहीं हैं, उनकी माप अनिश्चयन गुणांक द्वारा की जाती है; इसे K^2 द्वारा व्यक्त किया जाता है–

सूत्र के रूप में–

$$K^2 = \frac{S_y^2}{\sigma_y^2} \quad \text{या} \quad \frac{\Sigma(Y - Y_c)^2}{\Sigma(Y - \overline{X})^2}$$

या $(1 - r^2)$

अनिश्चयन गुणांक से वह प्रतिशत प्राप्त होता है जिसके बराबर y चर मूल्य के परिवर्तन x चर मूल्य के परिवर्तनों के कारण न होकर अन्य कारणों से होते हैं।

नोट

अनिश्चयन गुणांक का वर्गमूल $\sqrt{K^2}$ = K असहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Alienation) कहलाता है।

$$K = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{K^2}$$

असहसम्बन्ध गुणांक को K संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. निम्नलिखित में सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए–

1. निम्न समंकों से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

X	:	74	36	98	25	75	82	90	62	65	39
Y	:	84	51	91	60	68	62	86	58	53	47

2. निम्न मूल्यों से कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

Value of X	:	100	110	115	116	120	125	130	135
Value of Y	:	18	18	17	16	16	15	13	15

3. पति एवं पत्नियों की उम्र के लिएसहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

Age of Husband	:	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
Age of Wife	:	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

4. निम्न समंकों से आयु एवं खेलने की आदत के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

Age in years	*Population*	*No.of Players*
15–20	1500	1200
20–25	2000	1560
25–30	4000	2280
30–35	3000	1500
35–40	2500	1000
40–45	1000	300
45–50	800	200
50–55	500	50
55–60	200	6

(v) निम्न समंकों से कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

X	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	:	9	8	10	12	11	13	14	16	15

(vi) निम्न सूचकांकों से पाँच-वर्षीय चल माध्य लेते हुए अल्पकालीन उच्चावचनों का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

नोट

वर्ष	पूर्ति सूचकांक	मूल्य सूचकांक	वर्ष	पूर्ति सूचकांक	मूल्य सूचकांक
1	91	117	9	104	77
2	98	97	10	98	93
3	95	102	11	100	89
4	92	108	12	108	83
5	93	105	13	116	78
6	96	96	14	114	84
7	102	77	15	111	93
8	107	68			

(vii) निम्न कोटि क्रमों से कोटि-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

S.N.	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rank A	:	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
Rank B	:	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

(viii) निम्न कोटि-क्रमों से कोटि-सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

Rank—Statistics	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rank—Maths	:	2	4	1	5	3	9	7	10	6	8

9.5 सारांश (Summary)

- दो समंक समूहों में पाए जानेवाले सम्बन्ध की जानकारी के लिए सहसम्बन्ध के सिद्धान्त (Theory of Correlation) का अध्ययन किया जाता है। कई समंक समूह इस प्रकार से परस्पर सम्बन्धित होते हैं कि एक में होने वाले परिवर्तन के परिणामस्वरूप दूसरे में भी परिवर्तन हो जाते हैं।
- ''आर्थिक समंकों की दो या अधिक श्रेणियाँ जो एक साथ या विपरीत दिशा में परिवर्तित हों, क्रियात्मक रूप से सम्बन्धित हो सकती है। केवल क्रियात्मक सम्बन्धों की उपस्थिति कार्य कारण सम्बन्धों के अस्तित्व को सिद्ध नहीं करती है; यह केवल सहसम्बन्ध का सांख्यिकीय प्रमाप है।''
- सांख्यिकीय में प्रतीपगमन (Regression) एवं विचरण-अनुपात (Ratio of Variation) के विचार सहसम्बन्ध सिद्धान्त पर ही आधारित हैं।
- विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र दो समंक श्रेणियों के मध्य सहसम्बन्ध की प्रवृत्ति ज्ञात करने का सरल एवं आकर्षक तरीका है। विक्षेप चित्र बनाने के लिए स्वतन्त्र चर मूल्य को भुजाक्ष पर एवं आधिन चर मूल्य को कोटि अक्ष पर अंकित कर विभिन्न मूल्यों के बिन्दु अंकित किए जाते हैं, इस प्रकार प्राप्त चित्र विक्षेप चित्र कहलाते हैं।
- कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक से सहसम्बन्ध की दिशा तथा इसकी मात्रा का ज्ञान सरलता से हो जाता है, यह गुणांक हर सहय + 1 की सीमा में रहता है।
- जब सहसम्बन्ध की केवल दिशा ज्ञात करनी हो तो संगामी विचलन रीति का प्रयोग किया जाता है, इस रीति में प्रत्येक पद-मूल्य का पिछले मूल्य से विचलन की दिशा (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) ज्ञात कर उसके आधार पर सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जाती है।
- सहसम्बन्ध ज्ञात करने की संगामी विचलन रीति सरल है, इससे अल्पकालीन उच्चावचनों में सहसम्बन्ध ज्ञात हो जाता है, इससे सहसम्बन्ध की दिशा का ही ज्ञान हो पाता है इसकी संख्यात्मक माप सम्भव नहीं है, अत: इसका प्रयोग बहुत कम किया जाता है।

नोट

9.5 शब्दकोश (Keywords)

- **सह विचरण**—साथ-साथ चलना।
- **संगामी** —समवर्ती, सहयोगी, साथ-साथ।
- **निश्चयन** —दृढ़ता, निर्णायक, निर्धारक।

9.6 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. सहसंबंध की धारणा, अर्थ एवं महत्व की व्याख्या कीजिए। इसके गुणांक के निर्वचन के सामान्य नियमों का उल्लेख कीजिए।
2. सहसंबंध की परिभाषा दीजिए और धनात्मक एवं ऋणात्मक तथा पूर्व एवं आंशिक सहसंबंध में अंतर स्पष्ट कीजिए।
3. सहसंबंध गुणांक से आप क्या समझते हैं? सिद्ध कीजिए कि सहसंबंध गुणांक -1 एवं $+1$ के बीच होता है।
4. सहसंबंध का क्या अर्थ है? धनात्मक तथा ऋणात्मक सहसंबंध में भेद स्पष्ट कीजिए। केवल विक्षेप चित्रों की सहायता से आंशिक ऋणात्मक एवं पूर्ण धनात्मक सहसंबंध प्रदर्शित कीजिए।
5. सहसंबंध के विभिन्न मापों का नाम बताइए तथा संक्षेप में उनकी विवेचना कीजिए।
6. विक्षेप चित्र से आप क्या समझते हैं? दो चर मूल्यों से सहसंबंध की प्रकृति व मात्रा का ज्ञान कराने में यह किस प्रकार उपयोगी है।
7. निश्चयन गुणांक से आप क्या समझते हैं? इसका सांख्यिकीय जाँच में क्या महत्त्व है?

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1.	1. क्राक्स्टन एवं काउडेन		2. ऋणात्मक सहसंबंध	
	3. सरल सहसंबंध		4. तीन	
2.	1. $r = +.78$	2. $r = -.915$	3. $r = +.995$	4. $r = -.992$
	5. $r = +.95$	6. $r = -.94$	7. $\rho = +.93$	8. $\rho = +.76$

9.7 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
3. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा
4. साँख्यिकी, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई–10: सहसंबंध : विक्षेप-चित्र विधि, कार्ल पिर्यसन का सहसंबंध गुणांक (Correlation : Scatter Diagram Method, Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- सहसंबंध का अर्थ एवं महत्त्व को जानने में।
- विक्षेप-चित्र विधि तथा कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना करने में।
- सहसंबंध का परिणाम कैसे ज्ञात करेंगे तथा कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक को निकालने की विधि की व्याख्या करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक, सामाजिक व वैज्ञानिक क्षेत्र में अक्सर दो या दो से अधिक समंक श्रेणियों में परस्पर सम्बन्ध पाया जाता है। जिसके परिणामस्वरूप एक श्रेणी में परिवर्तन होने से दूसरी सम्बन्धित श्रेणी में भी परिवर्तन होते हैं। अधिकतर यह पाया जाता है कि देश में प्रचलित मुद्रा की मात्रा बढ़ने से सामान्य मूल्य-स्तर में भी वृद्धि हो जाती है। किसी वस्तु का उत्पादन यदि बढ़ जाये तो उस वस्तु की कीमत कम हो जाती है। जैसे लम्बे पिताओं के पुत्र भी लम्बे होते हैं तथा प्रकाश के साथ-साथ ताप भी बढ़ता है। इन सभी परिस्थितियों में द्विचर श्रेणियों में होने वाले परिवर्तन

एक-दूसरे पर अश्रित होते हैं। दो सम्बद्ध समंकमालाओं में इस प्रकार की परस्पर आश्रितता का विधिवत् सांख्यिकी अध्ययन सह-सम्बन्ध के सिद्धान्त के अन्तर्गत किया जाता है।

10.1 सहसंबंध का अर्थ एवं महत्त्व (Meaning and Importance of Correlation)

यदि यह सिद्ध हो जाता है कि अधिकतर उदाहरणों में दो चर-मूल्य सदा एक दिशा में या विपरीत दिशा में घटने-बढ़ने की प्रवृत्ति रखते हैं तो ऐसी स्थितियों में हम यह समझ सकते हैं कि उनमें एक निश्चित सम्बन्ध पाया जाता है। यह सम्बन्ध ही सह-सम्बन्ध कहलाता है। संक्षेप में, दो चर-मूल्यों में इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि एक में कमी या वृद्धि होने से दूसरे में भी उसी दर से कमी या वृद्धि हो तो वे दोनों सहम्बन्धिता कहलाती हैं।

सह-सम्बन्ध का सिद्धान्त बहुत महत्त्वपूर्ण है। इसके मूल सिद्धान्तों का प्रतिपादन सर्वप्रथम फ्रांस के खगोलशास्त्री ब्राते ने किया था परन्तु इस सिद्धान्त को आगे बढ़ाने का कार्य तथा आधुनिक रूप प्रदान करने का श्रेय प्राणिशास्त्री फ्रांसिस गाल्टन तथा कार्ल पियर्सन को प्राप्त है। इन प्रसिद्ध वैज्ञानिकों ने प्राणिशास्त्र तथा जनन-विद्या के क्षेत्र में सह-सम्बन्ध के सिद्धान्त के आधार पर अनेक समस्याओं का वैज्ञानिक विश्लेषण किया है। इस सिद्धान्त के आधार पर ही प्रत्येक क्षेत्र में दो या अधिक घटनाओं के परस्पर सम्बन्धों का स्पष्टीकरण होता है। सह-सम्बन्ध विश्लेषण से हमें यह पता चलता है कि दो सम्बन्धित इकाइयों में कितना और किस प्रकार का सम्बन्ध है। प्रतीपगमन तथा विचनण अनुपात की धारणायें सह-सम्बन्ध सिद्धान्त पर आधारित हैं। इनकी सहायता से दो सम्बन्धित श्रेणियों में से एक के दिए हुए निश्चित चर-मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के सम्भावित चर-मूल्य का विश्वसनीय अनुमान लगाया जा सकता है। सह-सम्बन्ध का प्रभाव हमारी भविष्यवाणी की अनिश्चितता के विस्तार को कम करना है। सह-सम्बन्ध विश्लेषण पर आधारित अनुमान अधिक विश्वसनीय और निश्चयात्मक होते हैं।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि व्यावहारिक जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में दो या दो से अधिक सम्बन्धित घटनाओं का तुलनात्मक अध्ययन करने, उसमें पारस्परिक सम्बन्ध का विवेचन करने तथा पूर्वानुमान लगाने में सह-सम्बन्ध का सिद्धान्त बहुत उपयोगी सिद्ध होता है।

नोट्स सह-सम्बन्ध का पूरा विषय पृथक् विशेषताओं के बीच पाये जाने वाले उस पारस्परिक सम्बन्ध की ओर संकेत करता है जिसके अनुसार वे कुछ मात्रा में साथ-साथ परिवर्तित होने की प्रवृत्ति रखते हैं।

10.2 विक्षेप-चित्र विधि (Scatter Diagram Method)

दो समंकमालाओं में सहसंबंध ज्ञात करने की यह रीति बिन्दुरेखीय रीति से मिलती-जुलती है। यहां भी सहसंबंध चित्रों की सहायता से सरलतापूर्वक दिखाया जा सकता। परन्तु यहां भी सहसंबंध का अंकात्मक माप प्राप्त नहीं किया जा सकता है।

दो अंकलित समंकों में आपस में सह-सम्बन्ध की दिशा और मात्रा का अनुमान विक्षेप-चित्र बनाकर किया जा सकता है। इस रीति के अनुसार स्वतन्त्र चर-मूल्यों (X) को बिन्दुरेखीय पत्र के भुजा X पर तथा तत्सम्बधी आश्रित चर-मूल्यों (Y) को कोटि-अक्ष Y पर अंकित किया जाता है। एक पद के X श्रेणी तथा Y श्रेणी के दो मूल्यों के लिए एक बिन्दु बनाया जाता है। इस प्रकार जितने पद-युग्म होते हैं उतने ही बिन्दु रेखा-पत्र पर अंकित हो जाते हैं जो एक निश्चित प्रवृत्ति प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार के चित्र को विक्षेप-चित्र या बिन्दु-चित्र कहते हैं।

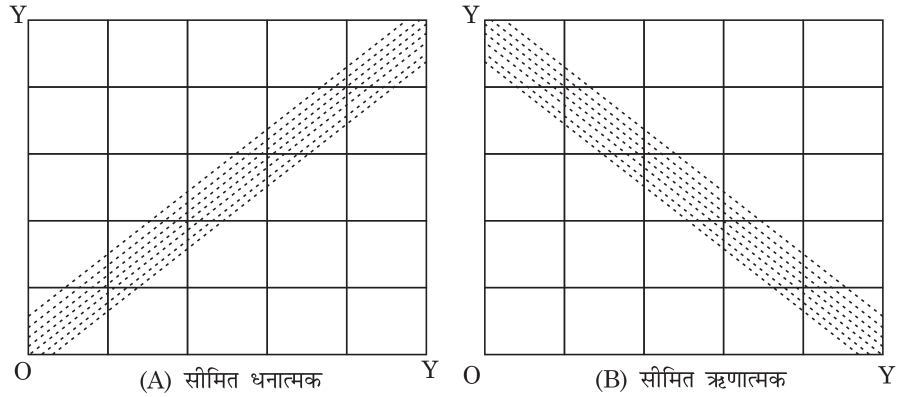
विक्षेप-चित्रों के अध्ययन—विक्षेप-चित्रों के अध्ययन से निम्न प्रकार के निष्कर्ष निकाले जाते हैं—

(*i*) सीमित सह-सम्बन्ध $(0 < r < 1 \; or -1 < r < 0)$—जब विक्षेप-चित्र पर अंकित बिन्दुओं से एक प्रकृति दृष्टिगोचर

नोट

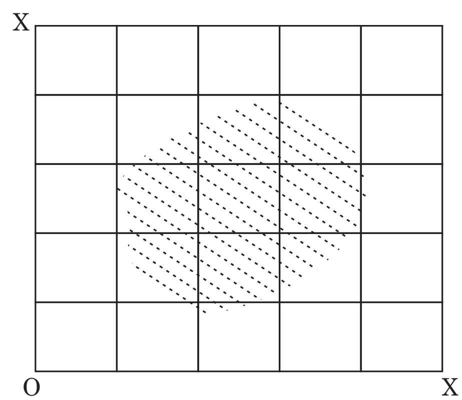
होती है तथा वे एक निश्चित दिशा में जाने वाले प्रवाह की भाँति होते हैं, तो दोनों चर मूल्यों में सीमित सह-सम्बन्ध पाया जाता है। विभिन्न बिन्दु जितने एक-दूसरे के निकट होंगे उतनी ही सह-सम्बन्ध की मात्रा अधिक होगी तथा वे जितने दूर होते जायेंगे सह-सम्बन्ध की मात्रा उतनी कम होती जायेगी।

सीमित सह-सम्बन्ध धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। जब बिन्दुओं की धारा चित्र में बायीं ओर से दाहिनी ओर बढ़ती है तो सह-सम्बन्ध धनात्मक होता है। इस स्थिति में दानों श्रेणियों के मूल्य साथ-साथ बढ़ते जाते हैं। चित्र (A) से यह दृष्टिगोचर होता है। इसके विपरीत यदि बिन्दुओं का प्रवाह बायीं ओर के ऊपर वाले कोने से दाहिनी ओर निचले कोने की ओर घटता जाता है तो सह-सम्बन्ध ऋणात्मक होता है तथा इसमें यदि एक श्रेणी में मूल्य बढ़ता है तो दूसरी श्रेणी का मूल्य घट जाते हैं।



चित्र 10.1

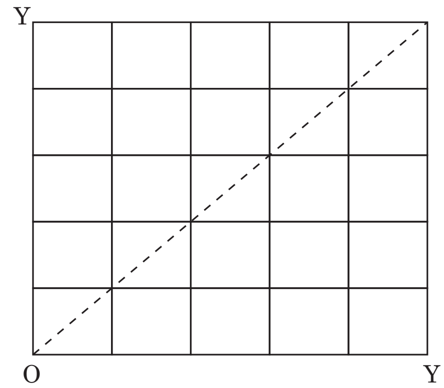
***(ii)* सह-सम्बन्ध का अभाव** ($r = 0$)–जब विक्षेप चित्र में विभिन्न बिन्दु चारों ओर बिखरे हों, उनसे कोई निश्चित प्रवृत्ति स्पष्ट न होती हो तो सह-सम्बन्ध का अभाव होता है जैसा कि चित्र 10.2 के द्वारा प्रदर्शित होता है।



चित्र 10.2 सह-सम्बन्ध का अभाव

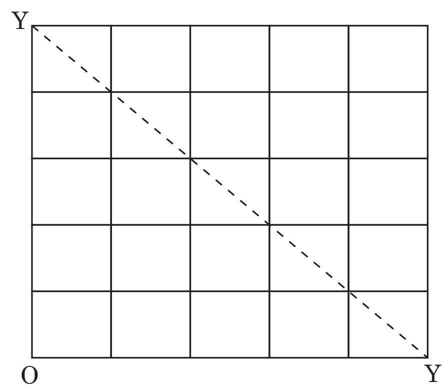
***(iii)* पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध** ($r = +1$)-यदि सभी बिन्दु बायीं ओर के निचले कोने से दाहिनी ओर के ऊपर वाले कोने तक एक सरल व सीधी रेखा के रूप में अंकित हों तो धनात्मक परिणाम निकलता है कि दोनों समंकमालाओं में पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध है जैसा कि चित्र 10.3 में समझाया गया है।

नोट



चित्र 10.3

(iv) **पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध** ($r = -1$)—जब सभी बिन्दु ऊपर से नीचे की ओर एक सीधी रेखा पर होते हैं तो चर-मूल्यों में पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध पाया जाता है जैसा कि चित्र 10.4 में दर्शाया गया है।



चित्र 10.4

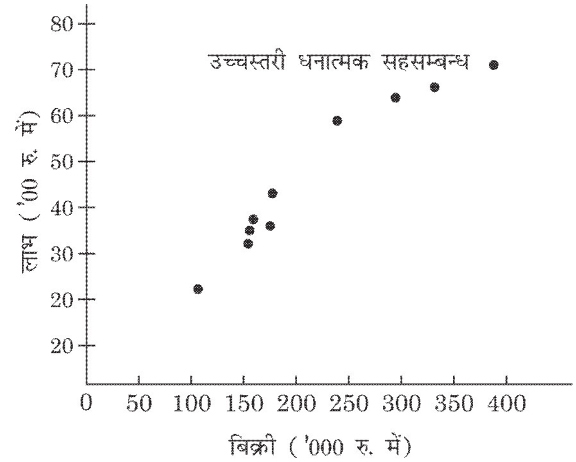
विक्षेप-चित्र पर बिन्दुओं को अंकित करने के बाद उनके बीच से गुजरने वाली एक ऐसी रेखा खींची जा सकती है जिसमें है एक ओर जितने बिन्दु हों लगभग उतने ही दूसरी ओर हों तथा दोनों ओर के बिन्दुओं का इस रेखा से लगभग समान अन्तर हो।

उदाहरण (Illustration) 1: एक औद्योगिक नगर के निम्न आंकड़ों का विक्षेप-चित्र बनाओ तथा सहसम्बन्ध का अध्ययन करो :

बिक्री ('000 रु. में)	125	170	175	180	190	210	250	300	320	400
लाभ ('000 रु. में)	20	29	32	35	34	41	55	60	64	7

नोट

हल (Solution) :



चित्र 10.5

विक्षेप-चित्र विधि के गुण-दोष

गुण—(*i*) सहसम्बन्ध की प्रवृत्ति को प्रकट करने की सरल और आकर्षक विधि है।

(*ii*) विक्षेप-चित्र को देखते ही सहसम्बन्ध का पता चल जाता है।

(*iii*) यह सहसम्बन्ध की दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) दर्शाती है।

(*iv*) गणितीय विधियों द्वारा प्राप्त निष्कर्षों की पुष्टि करने का यह अतिरिक्त साधन है।

दोष—(*i*) इसके द्वारा केवल सहसम्बन्ध की दिशा का ज्ञान होता है परिमाण का नहीं।

(*ii*) सहसम्बन्ध की मात्रा का अनुमान ही लगाया जा सकता है उसका संख्यात्मक माप ज्ञात नहीं किया जा सकता।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)—

1. ········ ने सहसंबंध सिद्धांत का प्रतिपादन किया था।
2. दो अंकलित समंकों में आपस में सहसंबंध की दिशा और मात्रा का अनुमान ········ बनाकर किया जा सकता है।
3. विक्षेप-चित्र विधि गणितीय विधियों द्वारा प्राप्त निष्कर्षों की पुष्टि करने का अतिरिक्त ········ है।
4. विक्षेप-चित्र विधि द्वारा केवल सहसंबंध की दिशा का ज्ञान होता है ········ का नहीं।

10.3 कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

यह सहसम्बन्ध ज्ञात करने की सर्वश्रेष्ठ गणितीय रीति है। पहले बतायी गयी रीतियों की भांति यहां केवल सहसम्बन्ध की दिशा व मात्रा का अनुमान ही नहीं होता बल्कि उसका अंकात्मक माप भी प्राप्त होता है। यह समान्तर माध्य (Mean) और प्रमाप विचलन (Standard Deviation) पर आधारित है इसलिए गणितीय दृष्टि से इसमें पूर्ण शुद्धता होती है। इस रीति का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने प्राणिशास्त्र की समस्याओं का अध्ययन करने के लिए 1990 में

नोट

किया था।

दोनों श्रेणियों के सह-विचरण (Co-variance) की माप को श्रेणियों के प्रमाप विचलनों (standard deviations) के गुणनफल से भाग देने पर प्राप्त भागफल को **कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक** कहा जाता है तथा इसे r से प्रदर्शित किया जाता है। अर्थात्

$$r = \frac{\text{cov}\,(x, y)}{\sigma_x, \sigma_y}$$

सह-विचरण की माप, दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्यों से लिये गये विचलनों के गुणनफलों के योग में पदों की संख्या से भाग देकर ज्ञात की जाती है। अर्थात्

जहां, $d_x = x - \overline{x}$, x श्रेणी के समान्तर माध्य से निकाले गये विचलन

$dy = y - \overline{y}$, y श्रेणी के समान्तर माध्य से निकाले गये विचलन

> *क्या आप जानते हैं* कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक को गुणा परिघात सहसम्बन्ध गुणांक (Product Moment Correlation Coefficient) भी कहते हैं।

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक के मुख्य लक्षण

(Main Characteristics of Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक के प्रमुख लक्षण निम्न है–

(1) **सह-विचरण का अच्छा माप**–यह गुणांक श्रेणी के सभी पदों पर आधारित है और सभी को महत्त्व प्रदान करता है। सह-विचरण की मात्रा, दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्यों से लिये गये विचलनों के गुणनफलों के योग में पदों की संख्या से भाग देकर ज्ञात की जाती है।

सहसम्बन्ध गुणांक को परिभाषित करते समय सह-विचरण (co-variance) की निरपेक्ष माप को गुणांक में परिवर्तित करने के लिए इसे दोनों श्रेणियों के प्रमाप विचलनों के गुणनफल से भाग दिया जाता है। अतः सहसम्बन्ध गुणांक वास्तव में सह-विचरण के माप का ही गुणांक है अर्थात् सहसम्बन्ध गुणांक सह-विचरण की मात्रा को भी स्पष्ट रूप से व्यक्त करता है।

(2) **दिशा का मान**–गुणांक के धन का चिह्न (+) धनात्मक सहसम्बन्ध तथा ऋण का चिह्न (–) ऋणात्मक सहसम्बन्ध प्रदर्शित करता हैं

(3) **सीमाओं व मात्रा का ज्ञान**– +1 और –1 के बीच सहसम्बन्ध गुणांक सदैव रहता है। +1 पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध और –1 पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध प्रकट करता है। सहसम्बन्ध गुणांक शून्य हो तो वहां सहसम्बन्ध का अभाव होता है।

(4) **आवृत्ति का महत्त्व**–यह गुणांक समंक श्रेणियों की दिशाओं (+ और –) के साथ-साथ उनकी आवृत्ति को भी महत्त्व देता है अर्थात् प्रत्येक मूल्य के विचरण की मात्रा को ध्यान में रखता है।

(5) **कार्य-कारण सम्बन्ध नहीं बताता**–यह गुणांक सहसम्बन्ध बताता है, परन्तु इस विषय पर कुछ भी प्रकाश नहीं डालता कि श्रेणियों के बीच कार्य-कारण सम्बन्ध है या नहीं।

(6) **आदर्श माप**–यह गुणांक समान्तर माध्य तथा प्रमाप विचलन पर आधारित है, अतः इसे सहसम्बन्ध का आदर्श माप कहा जा सकता है।

(7) **गणना कठिन**–इस गुणांक को निकालना कठिन है क्योंकि इसको वही निकाल सकता है जिसे गणित का सामान्य ज्ञान हो।

नोट

(8) परिमाण के निर्वचन की आवश्यकता—इसके परिमाण अगर यों ही लिख दिये जायें तो जनसाधारण के लिए समझना कठिन है। इस परिमाण को ऐसे सरल शब्दों में प्रकट करने की आवश्यकता पड़ती है जो सर्वसाधारण की समझ में सरलता से आ जाये।

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की परिकल्पनाएं

(Assumption of Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक निम्नलिखित परिकल्पनाओं पर आधारित है—

(1) जो समंकमालाएं सहसम्बन्धित होती हैं उन्हें अनेक स्वतन्त्र कारण प्रभावित करते हैं। फलस्वरूप अंक बंटन में प्रसामान्यतया (normality) और सम्भाविता (probability) होती है।

(2) समंकमाला को प्रभावित करने वाले स्वतन्त्र कारणों में आपस में कारण व प्रभाव (cause and effect) का सम्बन्ध होता है।

(3) दोनों श्रेणियों में रेखीय (linear) सम्बन्ध होता है।

10.4 सहसंबंध का परिमाण (Degree of Correlation)

सहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Correlation) द्वारा सहसम्बन्ध का अंकीय परिमाण ज्ञात किया जाता है। इसी आधार पर धनात्मक और ऋणात्मक सहसम्बन्ध के निम्नलिखित परिमाण हो सकते हैं—

(1) पूर्ण सहसम्बन्ध (Perfect Correlation)—जब दो समंकमालाओं के परिवर्तन **एक ही दिशा में और समान अनुपात में** हों तो उनमें पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध कहलायेगा। पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध गुणांक +1 के रूप में प्रकट किया जाता है। इसके विपरीत, जब दो समंकमालाओं में परिवर्तन का अनुपात तो समान हो परन्तु विपरीत दिशा में हो तो वहां पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Perfect Negative Correlation) होता है। ऐसी स्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक -1 होता है। यह ध्यान रहे कि पूर्ण सहसम्बन्ध बहुत कम मिलता है। यह भौतिक तथा गणित सम्बन्धी विज्ञानों में ही पाया जा सकता है।

(2) सहसम्बन्ध की अनुपस्थिति (Absence of Correlation)—जब दो समंकमालाओं के परिवर्तन के मध्य किसी प्रकार की आश्रितता नहीं पायी जाती अर्थात् एक श्रेणी के परिवर्तन का प्रभाव दूसरी श्रेणी पर बिल्कुल नहीं पड़ता तो वहां सहसम्बन्ध की अनुपस्थिति होती है। इसे हम सहसम्बन्ध नहीं (No Correlation) कहकर पुकारते हैं। यहां पर सहसम्बन्ध गुणांक की मात्रा शून्य (0) होती है।

(3) सहसम्बन्ध का सीमित परिमाण (Limited Degrees of Correlation)—जब दो समंकमालाओं में न तो सहसम्बन्ध का अभाव होता है और न उनमें पूर्ण सहसम्बन्ध ही होता है अर्थात् दोनों के मध्य की स्थिति होती है तब वहां सीमित मात्रा का सहसम्बन्ध होता है। यहां सहसम्बन्ध का गुणांक शून्य (0) और (1) के मध्य आता है (±1)। यह धनात्मक (positive) या ऋणात्मक (negative) हो सकता है। सामाजिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में अधि कतर इसी प्रकार का सम्बन्ध पाया जाता है।

सीमित सहसम्बन्ध भी निम्नलिखित तीन प्रकार का होता है—

(अ) उच्च स्तर का सहसम्बन्ध (High Degree of Correlation)—जब श्रेणियों में सहसम्बन्ध पूर्ण न हो परन्तु फिर भी अधिक मात्रा में हो तो वहां उच्च स्तर का सहसम्बन्ध होता है। ऐसी स्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक .75 और 1 के मध्य पाया जाता है। सामान्यत: यह .9 के समीप होता है। सहसम्बन्ध गुणांक का चिह्न ध न (+) होने पर उच्च स्तर का धनात्मक सहसम्बन्ध (High degree of positive correlation) तथा ऋण (-) होने पर उच्च स्तर का ऋणात्मक सहसम्बन्ध (High degree of negative correlation) कहलाता है।

(ब) मध्य स्तर का सहसम्बन्ध (Moderate Degree of Correlation)—जब सहसम्बन्ध की मात्रा न तो उच्च स्तर की हो न बहुत ही कम हो तो वहां मध्य स्तर का सहसम्बन्ध होता है। यहां सहसम्बन्ध का गुणांक .50 और .75 के मध्य आता है। यह धनात्मक हो सकता है या ऋणात्मक।

नोट

(स) निम्न स्तर का सहसम्बन्ध (Low Degree of Correlation)—जब दो समंकमालाओं में सहसम्बन्ध तो होता है, परन्तु बहुत ही कम मात्रा में तो वहां निम्न स्तर का सहसम्बन्ध होता है। यहां सहसम्बन्ध गुणांक शून्य (0) एवं .5 के मध्य होता है। यह भी धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है।

सहसम्बन्ध का परिमाण—एक दृष्टि में

सहसम्बन्ध परिमाण	**धनात्मक** (Positive) **सहसम्बन्ध गुणांक का मान**	**ऋणात्मक** (Negative) **सहसम्बन्ध गुणांक का मान**
पूर्ण (Perfect)	+ 1	– 1
उच्च स्तर का (High Degree)	+ .75 तथा + 1 के मध्य	– 1 तथा – .75 के मध्य
मध्य स्तर का (Moderate Degree)	+ .5 तथा .75 के मध्य	– .75 तथा – .5 के मध्य
निम्न स्तर का (Low Degree)	+ 0 तथा + .5 के मध्य	– .5 तथा 0 के मध्य
सहसम्बन्ध का अभाव (No Correlation)	0 (शून्य)	0 (शून्य)

10.5 कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक निकालने की विधि (Method of Calculation of Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)—सहसम्बन्ध गुणांक को निकालने की विधि निम्न है—

मूल सूत्र—

$$r = \frac{\text{सह- विचरण की माप}}{(x \text{ का प्रमाप विचलन}) \times (y \text{ का प्रमाप विचलन})}$$

$$= \frac{\Sigma d_x d_y / \text{N}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \text{या} \quad \frac{\Sigma d_x d_y}{\text{N}\sigma_x \sigma_y} \qquad \text{(प्रथम सूत्र)}$$

यहां $d_x = \text{X} - \overline{\text{X}}$, X के माध्य से विचलन, $d_y = \text{Y} - \overline{\text{Y}}$, Y के माध्य से विचलन

(1) दोनों श्रेणियों का समान्तर माध्य निकाल लेते हैं।

(2) समान्तर माध्यों से दोनों तत्सम्बन्धी श्रेणियों के पदों का अलग-अलग विचलन निकाल लेते हैं। सामान्यत: पहले श्रेणी के विचलन को d_x और दूसरी श्रेणी के विचलन को d_y कहते हैं।

(3) दोनों श्रेणियों के पदों के आमने-सामने के विचलन को गुणा ($d_x \times d_y$) करके उन सबका योग ($\Sigma d_x d_y$) प्राप्त कर लेते हैं।

(4) दोनों श्रेणियों का अलग-अलग प्रमाप विचलन (σ_x और σ_y) निकाल लेते हैं।

(5) अब दोनों श्रेणियों के विचलनों के गुणनफलों के योग ($\Sigma d_x d_y$) में पदों की संख्या, तथा पहली श्रेणी के प्रमाप विचलन और दूसरी श्रेणी के प्रमाप विचलन के गुणनफल ($\text{N}\sigma_x \sigma_y$) का भाग देते हैं।

प्राप्त भजनफल सहसम्बन्ध गुणांक होता है।

जहां, r = सहसम्बन्ध गुणांक (Stands for coefficient of correlation)

$\Sigma d_x d_y$ = x और y श्रेणी के विचलनों के गुणनफलों का योग (Stands for total of product of corresponding deviation of x and y series)

N = पदों की संख्या (Stands for Number of pairs of items)

σ_x = x-श्रेणी का प्रमाप विचलन (Stands for Standard Deviation of x-series)

σ_y = y-श्रेणी का प्रमाप विचलन (Stands for Standard Deviation of y-series)

नोट

गणना क्रियाएं–

सरल प्रत्यक्ष विधि (Simple Direct Method)

उपर्युक्त रीति में चौथी क्रिया में बताया गया है कि दोनों श्रेणियों के पृथक्-पृथक् प्रमाप विचलन ज्ञात करने होते हैं जिसमें काफी समय लगता है। अत: पियर्सन के सूत्र में σ_x और σ_y के स्थान पर उनके सूत्र रखकर इस कार्य को और सरल बनाया जा सकता है। इस दशा में सूत्र इस प्रकार होगा–

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y / N}{\sqrt{\dfrac{\Sigma d_x^2}{N} \times \dfrac{\Sigma d_y^2}{N}}} \qquad \text{(द्वितीय सूत्र)}$$

तथा

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{\dfrac{N}{N}\sqrt{\Sigma d_x^2 \times \Sigma d_y^2}} \quad \text{या} \quad \frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d_x^2 \times \Sigma d_y^2}} \qquad \text{(तृतीय सूत्र)}$$

स्पष्ट है कि तीनों सूत्रों के द्वारा परिणाम समान आयेगा क्योंकि तीनों ही सूत्र मूल सूत्र के रूप में है। तृतीय सूत्र अधिक सरल है, अत: व्यवहार में इसी का प्रयोग करना चाहिए।

टिप्पणी–यदि $x = X - \overline{X}$ तथा $y = Y - \overline{Y}$ लिखा जायेगा तो $r = \dfrac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$ लिखा जा सकता है।

उदाहरण (Illustration) 2:

निम्न आंकड़ों की सहायता से कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

x	:	11	10	9	8	7	6	5
y	:	20	18	12	8	10	5	4

हल (Solution):

X	$d_x = X - \overline{X}$	d_x^2	Y	$d_y = Y - \overline{Y}$	d_y^2	$d_x d_y$
11	3	9	20	9	81	27
10	2	4	18	7	49	14
9	1	1	12	1	1	1
8	0	0	8	– 3	9	0
7	– 1	1	10	– 1	1	1
6	– 2	4	5	– 6	36	12
5	– 3	9	4	– 7	49	21
$\Sigma X = 56$	0	$\Sigma d_x^2 = 28$	$\Sigma Y = 77$	0	$\Sigma d_y^2 = 226$	$\Sigma d_x d_y = 76$

$$\left.\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{\Sigma X}{N} = \frac{56}{7} = 8 \\ \overline{Y} &= \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{77}{7} = 11 \end{aligned}\right\}$$

क्योंकि $\overline{X}$ तथा $\overline{Y}$ पूर्णांक हैं, अत: वास्तविक माध्य से विचलन (प्रत्यक्ष विधि) ही उचित है।

कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक,

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d_x^2 \times \Sigma d_y^2}}$$

$$= \frac{76}{\sqrt{28 \times 226}} = \frac{76}{\sqrt{6328}} = \frac{76}{79.55} = 0.96$$

वैकल्पिक विधि

श्रेणी X का प्रमाप विचलन, $\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{N}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$

श्रेणी Y का प्रमाप विचलन, $\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma d_y^2}{N}} = \sqrt{\frac{226}{7}} = \sqrt{32.28} = 5.68$

$$\therefore \qquad r = \frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{76}{7 \times 2 \times 5.68} = \frac{76}{79.52} = 0.96$$

उदाहरण (Illustration) 3:

X तथा Y श्रेणी में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

श्रेणी (Series) X	:	17	18	19	19	20	20	21	21	22	23
श्रेणी (Series) Y	:	12	16	14	11	15	19	22	16	15	20

हल (Solution):

श्रेणी X			**श्रेणी** Y			
X	d_x	d_x^2	Y	d_y	d_y^2	$d_x d_y$
17	– 3	9	12	– 4	16	+ 12
18	– 2	4	16	0	0	0
19	– 1	1	14	– 2	4	+ 2
19	– 1	1	11	– 5	25	+ 5
20	0	0	15	– 1	1	0
20	0	0	19	+ 3	9	0
21	+ 1	1	22	+ 6	36	+ 6
21	+ 1	1	16	0	0	0
22	+ 2	4	15	– 1	1	– 2
23	+ 3	9	20	+ 4	16	+ 12
$\Sigma X = 200$	0	$\Sigma d_x^2 = 30$	$\Sigma y = 160$	0	$\Sigma d_y^2 = 108$	$\Sigma d_x d_y = 35$

X-श्रेणी

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{200}{10} = 20$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{N}} = \sqrt{\frac{30}{10}}$$

Y-श्रेणी

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{160}{10} = 16$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma d_y^2}{N}} = \sqrt{\frac{108}{10}} = 3.286$$

नोट

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x \sigma_y} = \frac{35}{10 \times 1.732 \times 3.286} = \frac{35}{56.91352} = +.6149 = 0.61$$

श्रेणी X तथा श्रेणी Y में मध्य स्तर का धनात्मक सहसम्बन्ध है।

वैकल्पिक सूत्र :

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d_x^2 \,.\, \Sigma d_y^2}}$$

$$= \frac{35}{\sqrt{30 \times 108}} = \frac{35}{\sqrt{3240}} = \frac{35}{56.92} = .6149 = 0.61$$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{610}{10} = 61 \qquad \overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{640}{10} = 64$$

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d_x^2 \times \Sigma d_y^2}}$$

$$= \frac{3{,}535}{\sqrt{3{,}490 \times 4{,}390}}$$

$$= \frac{43{,}535}{59.08 \times 66.25} = \frac{3{,}535}{3{,}914.05} = 0.903$$

उदाहरण (Illustration) 4: निम्न आंकड़ों से $\overline{X}, \overline{Y}, \sigma_x, \sigma_y$ तथा r परिकलित कीजिए–

x	:	58	50	53	60	63	55	60	59	61	51
y	:	115	110	121	120	124	112	118	115	118	117

हल (Solution):

X	$d_x = X - 57$	d_x^2	Y	$d_y = Y - 117$	d_y^2	$d_x d_y$
58	1	1	115	– 2	4	– 2
50	– 7	49	110	– 7	49	49
53	– 4	16	121	4	16	– 16
60	3	9	120	3	9	9
63	6	36	124	7	49	42
55	– 2	4	112	– 5	25	10
60	3	9	118	1	1	3
59	2	4	115	– 2	4	– 4
61	4	16	118	1	1	4
51	– 6	36	117	0	0	0
570	0	180	1,170	0	158	95

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{570}{10} = 57 \qquad \overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{1{,}170}{10} = 117$$

नोट

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{N}} = \sqrt{\frac{180}{10}} = \sqrt{18} = 4.24 \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma d_y^2}{N}} = \sqrt{\frac{158}{10}} = \sqrt{15.8} = 3.97$$

कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक,

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{95}{10 \times 4.24 \times 3.97} = \frac{95}{168.33} = 0.56$$

उदाहरण (Illustration) 5: निम्न तालिका से वास्तविक माध्यों $\overline{X} = 66$ तथा $\overline{Y} = 65$ से विचलन लेते हुए कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

x	:	84	51	91	60	68	62	86	58	53	47
y	:	78	36	98	25	?	82	90	62	65	39

हल (Solution):

माना श्रेणी y में अज्ञात मान $= a$, तब

$$\Sigma Y = N\overline{Y} \text{ से}$$

$$575 + a = 10 \times 65$$

$$\Rightarrow \quad a = 650 - 575 = 75$$

x	$d_x = x - 66$	d_x^2	y	$d_y = y - 65$	d_y^2	$d_x d_y$
84	18	324	78	13	169	234
51	– 15	225	36	– 29	841	435
91	25	625	98	33	1,089	825
60	– 6	36	25	– 40	1,600	240
68	2	4	75	10	100	20
62	– 4	16	82	17	289	– 68
86	20	400	90	25	625	500
58	– 8	64	62	– 3	9	24
53	– 13	169	65	0	0	0
47	– 19	361	39	– 26	676	494
660	65 – 65 = 0	2,224	575 + 75 = 650	98 – 98 = 0	5,398	2,704

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d_x^2 \times \Sigma d_y^2}}$$

$$= \frac{2{,}704}{\sqrt{2{,}224 \times 5{,}398}} = \frac{2{,}704}{47.16 \times 73.47} = \frac{2{,}704}{3{,}464{,}84} = 0.78$$

उदाहरण (Illustration) 6: नीचे दी गई सूचना से कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए–

Calculate Karl Pearson's correlation from the information given below :

नोट

	X	Y
माध्य (Mean)	31	61
प्रमाप विचलन (Standard Deviation)	3.25	3.35

संगत माध्यों से X तथा Y के विचलनों के गुणनफलों का योग

(Sum of the products of deviations of X and Y from their respective means) = 75

X और Y के जोड़ों की संख्या (No. of pairs of X and Y) = 10

हल (Solution):

दिया हुआ है : $N = 10, \sigma_x = 3.25, \sigma_y = 3.35$

$\Sigma d_x d_y = 75, \overline{X} = 31, \overline{Y} = 61$

अत:
$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{75}{10 \times 3.25 \times 3.35} = \frac{75}{108.875} = 0.69$$

उदाहरण (Illustration) 7: निम्न आंकड़ों से σ_x, σ_y तथा X व Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

	X श्रेणी (Series)	**Y श्रेणी (Series)**
पदों की संख्या (No. of items)	15	15
समान्तर माध्य (Arithmetic mean)	25	18
माध्य से विचलन के वर्गों का योग	136	138

X तथा Y श्रेणी के क्रमश: माध्यों से लिये गये विचलनों के गुणनफलों का योग

= 122

हल (Solution):

दिया हुआ है : $N = 15, \overline{X} = 25, \overline{Y} = 18, \Sigma d_x d_y = 122, \Sigma d_x^2 = 136, \Sigma d_y^2 = 138$

अत:
$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d_x^2 \times \Sigma d_y^2}} = \frac{122}{\sqrt{136 \times 138}} = \frac{122}{\sqrt{18,768}} = \frac{122}{136.996} = .89$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{n}} = \sqrt{\frac{136}{15}} = 3.01$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma d_y^2}{n}} = \sqrt{\frac{138}{15}} = 3.03$$

सहसम्बन्ध गुणांक निकालने की लघु रीतियां

(Short-cut Methods for Calculating Coefficient of Correlation)

सहसम्बन्ध निकालने की पहले बतायी गयी रीतियों में हमने यह देखा कि विभिन्न मूल्यों के विचलन (deviations) वास्तविक समान्तर माध्य (True Arithmetic Average) से निकाले गये। यदि माध्य पूर्णांक हों तब तो इसमें कोई असुविधा नहीं। परन्तु यह सदा सम्भव नहीं। जब माध्य भिन्न में हों तो उनसे विचलन निकालने और उन विचलनों का वर्ग करने, आदि में बड़ी असुविधा होती है। इस असुविधा से बचने के लिए लघु रीति का प्रयोग किया जाता है। इसमें कोई पूर्णांक संख्या कल्पित माध्य (Assumed Average) के रूप में ले ली जाती है और उसी से विचलन निकालकर प्रमाप विचलन (Standard Deviation) निकाल लिया जाता है। **कभी-कभी प्रश्न में से ही निश्चित संख्या कल्पित माध्य लेने के लिए कहा जाता है, अत: ऐसी स्थिति में उन्हीं संख्याओं को ही कल्पित माध्य**

मानकर विचलन लेने होंगे। जैसा कि उदाहरण 4 में है। सुविधा की दृष्टि से यह अधिक अच्छा है कि कल्पित माध्य कोई ऐसी संख्या ली जाये तो श्रेणी के बीच में हो और कोई ऐसा मूल्य हो जो श्रेणी में हो। यह ठीक उसी प्रकार से किया जाता है जैसा कि प्रमाप विचलन निकालते समय हम देख चुके हैं। परन्तु कल्पित माध्य से विचलन लेने पर दो श्रेणियों के प्रत्येक मूल्यों के विचलनों के गुणनफलों का योग ($\Sigma d_x d_y$) भी भिन्न आता है और इसके मूल्य को शुद्ध करने के लिए सूत्र में थोड़े परिवर्तन की आवश्यकता होती है। इसे ($\Sigma d_x d_y$), शुद्ध करने के लिए इसमें से दोनों समंकमालाओं के क्रमश: वास्तविक और कल्पित माध्यों के अन्तरों के गुणनफलों को पदों की कुल संख्या से गुणा करके घटा दिया जाता है। इसके निम्न सूत्र हैं–

प्रथम सूत्र–

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - N(\overline{X}_1 - A_1)(\overline{X}_2 - A_2)}{N\sigma_x \sigma_y}$$

where, $\overline{X}_1$ = Actual Mean of X-Series (X-श्रेणी का वास्तविक समान्तर माध्य)

A_1 = Assumed Mean of X-Series (X-श्रेणी का कल्पित माध्य)

$\overline{X}_2$ = Actual Mean of Y-Series (Y-श्रेणी का वास्तविक समान्तर माध्य)

A_2 = Assumed Mean of Y-Series (Y-श्रेणी का कल्पित माध्य)

$\Sigma d_x d_y$ = Sum of the products of deviations from assumed averages (कल्पित माध्यों से पदों के विचलनों के गुणनफलों का योग)

σ_x = Standard Deviation of X-Series (X-श्रेणी का प्रमाप विचलन)

σ_y = Standard Deviation of Y-Series (Y-श्रेणी का प्रमाप विचलन)

N = Number of the pairs of items (पदों के जोड़ों की संख्या)

टास्क कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने की सरल प्रत्यक्ष रीति का सूत्र लिखिए।

द्वितीय सूत्र–प्रथम सूत्र में वास्तविक समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन ज्ञात करने होते हैं जिनके कारण गणना क्रिया बढ़ जाती है। अत: सूत्र में वास्तविक और कल्पित माध्य के अन्तर और प्रमाप विचलनों के स्थान पर उनके सूत्रों से विचलनों के माध्य और विलचनों के वर्गों के माध्य का प्रयोग कर सूत्र को सरल बना लिया जाता है जो इस प्रकार है–

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - N\left(\frac{\Sigma d_x}{N}\right)\left(\frac{\Sigma d_y}{N}\right)}{N\sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_x}{N}\right)^2} \times \sqrt{\frac{\Sigma d_y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_y}{N}\right)^2}}$$

where, Σd_x = Sum of the deviations from assumed mean in X-Series (X-श्रेणी में कल्पित माध्य से मुल्यों के विचलनों का योग)

Σd_y = Sum of the deviations from assumed mean in Y-Series (Y-श्रेणी में कल्पित माध्य से मुल्यों के विचलनों का योग)

Other symbols stad for the same things as in the first formula.

नोट

तृतीय सूत्र–
$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \left(\frac{\Sigma d_x \times \Sigma d_y}{N}\right)}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{N}\right]\left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{N}\right]}}$$

चतुर्थ सूत्र–
$$r = \frac{\Sigma d_x d_y \times N - (\Sigma d_x \times \Sigma d_y)}{\sqrt{\Sigma d_x^2 \times N - (\Sigma d_x)^2} \times \sqrt{\Sigma d_y^2 \times N - (\Sigma d_y)^2}}$$

उपर्युक्त चारों ही सूत्रों से सहसम्बन्ध गुणांक समान आता है, परन्तु व्यवहार में तृतीय एवं चतुर्थ सूत्र का प्रयोग अधिक सुविधाजनक रहता है।

उदाहरण (Illustration) 8: X तथा Y के बीच कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

x	:	58	43	41	39	43	46	43	45	41	47	45	44
y	:	11	27	31	42	30	28	28	20	19	20	32	30

हल (Solution):

X	$d_x = X - 45$	d_x^2	Y	$d_y = Y - 27$	d_y^2	$d_x d_y$
58	+ 13	169	11	– 16	256	– 208
43	– 2	4	27	0	0	0
41	– 4	16	31	+ 4	16	– 16
39	– 6	36	42	+ 15	225	– 90
43	– 2	4	30	+ 3	9	– 4
46	+ 1	1	28	+ 1	1	+ 1
43	– 2	4	28	+ 1	1	– 2
45	0	0	20	–7	49	0
41	– 4	16	19	– 8	64	+ 32
47	+ 2	4	20	– 7	49	– 14
45	0	0	32	+ 5	25	0
44	– 1	1	30	+ 3	9	– 3
—	$\Sigma d_x = -5$	$\Sigma d_x^2 = 225$	—	$\Sigma d_y = -6$	$\Sigma d_y^2 = 704$	$\Sigma d_x d_y = -306$

सूत्र :
$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{N}\right\}}\sqrt{\left\{\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{N}\right\}}}$$

$$r = \frac{-306 - \frac{(-5)(-6)}{12}}{\sqrt{\left\{255 - \frac{(-5)^2}{12}\right\}}\sqrt{\left\{704 - \frac{(-6)^2}{12}\right\}}}$$

नोट

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{-306 - \frac{30}{12}}{\sqrt{\left\{255 - \frac{25}{12}\right\}}\sqrt{\left\{704 - \frac{36}{12}\right\}}}$$

$$= \frac{-306 - 2.5}{\sqrt{(255 - 2.1)(704 - 3)}}$$

$$= \frac{-308.5}{\sqrt{252.9 \times 701}} = \frac{-308.5}{\sqrt{1,77,282.9}} = \frac{-308.5}{421.05} = -0.733$$

उदाहरण (Illustration) 9: निम्न सारणी 12 स्थानों पर जाड़े में बोये जाने वाले गेहूं के लिए X (4 इंच गहराई पर भूमि का तापक्रम फारेनहाइट अंश में) तथा Y (उगने में लगा समय दिनों में) के मूल्यों को प्रदर्शित करती है :

X	:	57	42	40	38	42	45	42	40	44	46	44	43
Y	:	10	26	30	41	29	27	27	19	18	19	31	29

हल (Solution):

भूमि का तापक्रम			दिन			
X	X – 44 d_x	d_x^2	Y	Y – 26 d_y	d_y^2	$d_x d_y$
57	+ 13	169	10	– 16	256	– 208
42	– 2	4	26	0	0	0
40	– 4	16	30	+ 4	16	– 16
38	– 6	36	41	+ 15	225	– 90
42	– 2	4	29	+ 3	9	– 4
45	+ 1	1	27	+ 1	1	+ 1
42	– 2	4	27	+ 1	1	– 2
40	0	0	19	– 7	49	0
44	– 4	16	18	– 8	64	+ 32
46	+ 2	4	19	– 7	49	– 14
44	0	0	31	+ 5	25	0
43	– 1	1	29	+ 3	9	– 3
$\Sigma X = 523$	$\Sigma d_x = -5$	$\Sigma d_x^2 = 225$	$\Sigma Y = 306$	$\Sigma d_y = -6$	$\Sigma d_y^2 = 704$	$\Sigma d_x d_y = -306$

[चूंकि $\overline{X}$ तथा $\overline{Y}$ पूर्णांक नहीं हैं अत: कल्पित माध्यम से विचलन लेना सुविधाजनक रहेगा।]

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{523}{12} = 43.58$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_x}{N}\right)^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma d_y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_y}{N}\right)^2}$$

नोट

$$= \sqrt{\frac{255}{12} - \left(\frac{-5}{12}\right)^2} \qquad = \sqrt{\frac{704}{12} - \left(\frac{-6}{12}\right)^2}$$

$$= \sqrt{21.25 - (-.417)^2} \qquad = \sqrt{58.67 - (-.5)^2}$$

$$= \sqrt{21.22 - 0.17} \qquad = \sqrt{58.67 - .25}$$

$$= \sqrt{21.28} = 4.613 \qquad = \sqrt{58.42} = 7.643$$

$$\text{सह–प्रसरण} = \frac{1}{N}\Sigma d_x d_y, - \frac{\Sigma d_x}{N}.\frac{\Sigma d_x}{N}$$

$$= \frac{-306}{12} - \left(\frac{-15}{12}\right)\left(\frac{-6}{12}\right)$$

$$= -25.5 - 0.21 = 25.71$$

$\therefore$

$$r = \frac{\text{सह–प्रसरण}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-25.71}{4.613 \times 7.643} = \frac{-25.71}{35.26} = -0.729 = -0.73$$

वैकल्पिक सूत्र :

$$r = \frac{N\Sigma d_x d_y - \Sigma d_x, \Sigma d_y}{\sqrt{\{N\Sigma d_x^2 - (\Sigma d_x)^2\}}\sqrt{\{N\Sigma d_y^2 - (\Sigma d_y)^2\}}}$$

$$= \frac{12 \times (-306) - (-5)(-6)}{\sqrt{\{12 \times 255 - (-5)^2\}}\sqrt{\{12 \times 704 - (-6)^2\}}}$$

$$= \frac{-3{,}672 - 30}{\sqrt{(3{,}060 - 25)}\sqrt{8{,}448 - 36}}$$

$$= \frac{-3{,}702}{\sqrt{3{,}035} \times \sqrt{8{,}412}} = \frac{-3{,}702}{55.09 \times 91.72} = \frac{-3{,}702}{5052.8548} = -0.73$$

वैकल्पिक सूत्र :

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{N}\right\}}\sqrt{\left\{\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{N}\right\}}}$$

$$r = \frac{-306 - \frac{(-5)(-6)}{12}}{\sqrt{\left\{255 - \frac{(-5)^2}{12}\right\}}\sqrt{\left\{704 - \frac{(-6)^2}{12}\right\}}}$$

$$= \frac{-306 - 2.5}{\sqrt{(255 - 2.1)}\sqrt{(704 - 3)}}$$

$$= \frac{-308.5}{\sqrt{252.9} \times \sqrt{701}} = \frac{-308.5}{15.9 \times 26.48} = \frac{-308.5}{421.032} = -0.73$$

उदाहरण (Illustration) 10: निम्न आंकड़ों से आय और सूचकांक के बीच कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक की

नोट

गणना कीजिए–

वर्ष	:	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
आय	:	1,200	1,220	1,260	1,270	1,270	1,240	1,280	1,290	1,320	1,300
सूचकांक :	115	118	119	119	120	120	124	123	124	125	

हल (Solution):

आय X	$A_x = 1{,}270$ $d_x = X - 1{,}270$	d_x^2	**सूचकांक** Y	$A_y = 120$ $d_y = Y - 120$	d_y^2	$d_x d_y$
1,200	– 70	4,900	115	– 5	25	350
1,220	– 50	2,500	118	– 2	4	100
1,260	– 10	100	119	– 1	1	10
1,270	0	0	119	– 1	1	0
1,270	0	0	120	0	0	0
1,240	– 30	900	120	0	0	0
1,280	10	100	124	4	16	40
1,290	20	400	123	3	9	60
1,320	50	2,500	124	4	16	200
1,300	30	900	125	5	25	150
—	– 160 + 110 = – 50	12,300	—	– 9 + 16 = 7	97	910

सूत्र–

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{N}\right\}}\sqrt{\left\{\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{N}\right\}}}$$

$$= \frac{910 - \frac{(-50)(7)}{10}}{\sqrt{\left\{12{,}300 - \frac{(-50)^2}{10}\right\}}\sqrt{\left\{97 - \frac{(7)^2}{10}\right\}}}$$

$$= \frac{910 + 35}{\sqrt{(12{,}300 - 250)(97 - 4.9)}}$$

$$= \frac{945}{\sqrt{12{,}050 \times 92.1}}$$

$$= \frac{945}{\sqrt{15{,}09{,}805}}$$

$$= \frac{945}{1{,}053.47} = 0.897$$

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. निम्न में सहसंबंध ज्ञात कीजिए–

1. निम्न समंकों के लिए कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

X	:	40	45	28	42	48	20	36	40
Y	:	50	47	38	40	45	28	38	48

2. निर्यात (X) एवं आयात (Y) के निम्न आंकड़ों से कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

X	:	42	44	58	55	89	98	66
Y	:	56	49	53	58	65	76	59

3. निम्न समंकों से पिता और पुत्र की ऊंचाई के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

   पिता की ऊंचाई (सेमी में)

   165 163 167 164 168 162 170 166 168 167 169 171

   पुत्र की ऊंचाई (सेमी में)

   168 166 168 165 169 166 168 165 171 167 168 170

4. किसी फैक्टरी में कर्मचारियों को छः माह का प्रशिक्षण देने के बाद रुचि अंक (X) एवं उत्पादकता सूचकांक (Y) का अध्ययन किया गया। यादृच्छिक रूप से चुने गये सात कर्मचारियों से सम्बन्धित आंकड़े निम्न प्रकार हैं–

X	:	10	20	30	40	50	60	70
Y	:	3	5	6	8	10	11	13

   (X) तथा (Y) के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

5. विज्ञापन व्यय (X) तथा (Y) के बीच 9 माह के निम्न आंकड़ों से कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

X	:	300	350	400	450	500	550	600	650	700
Y	:	800	900	1,000	1,100	1,200	1,300	1,400	1,500	1,600

6. निम्न आंकड़ों से कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

   मजदूरी (100 रुपयों में)

   100 101 102 102 100 99 97 98 96 95

   जीवन-निर्वाह कीमत सूचकांक

   98 99 99 97 95 92 95 94 90 91

7. X तथा Y के लिए क्रमशः 65 और 70 कल्पित माध्य लेते हुए निम्न आंकड़ों से कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

X	:	45	55	56	58	60	65	68	70	75	80	85
Y	:	56	50	48	60	62	64	65	70	74	82	90

10.6 सारांश (Summary)

- दो चर-मूल्यों में इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि एक में कमी या वृद्धि होने से दूसरे में थी उसी दर से कमी या वृद्धि हो तो वे दोनों सहम्बन्धिता कहलाती हैं।
- सह-सम्बन्ध का सिद्धान्त बहुत महत्वपूर्ण है। इसके मूल सिद्धान्तों का प्रतिपादन सर्वप्रथम फ्रांस के खगोलशास्त्री ब्राते ने किया था।
- दो अंकलित समंकों में आपस में सह-सम्बन्ध की दिशा और मात्रा का अनुमान विक्षेप-चित्र बनाकर किया जा सकता है।

नोट

- दोनों श्रेणियों के सह-विचरण (Co-variance) की माप को श्रेणियों के प्रमाप विचलनों (standard deviations) के गुणनफल से भाग देने पर प्राप्त भागफल को **कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक** कहा जाता है।
- सहसम्बन्ध गुणांक को परिभाषित करते समय सह-विचरण (co-variance) की निरपेक्ष माप को गुणांक में परिवर्तित करने के लिए इसे दोनों श्रेणियों के प्रमाप विचलनों के गुणनफल से भाग दिया जाता है। अतः सहसम्बन्ध गुणांक वास्तव में सह-विचरण के माप का ही गुणांक है।
- सहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Correlation) द्वारा सहसम्बन्ध का अंकीय परिमाण ज्ञात किया जाता है।
- जब दो समंकमालाओं के परिवर्तन **एक ही दिशा में और समान अनुपात में** हों तो उनमें पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध कहलायेगा।
- जब दो समंकमालाओं में परिवर्तन का अनुपात तो समान हो परन्तु विपरीत दिशा में हो तो वहां पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Perfect Negative Correlation) होता है।
- सहसम्बन्ध निकालने की पहले बतायी गयी रीतियों में हमने यह देखा कि विभिन्न मूल्यों के विचलन (deviations) वास्तविक समान्तर माध्य (True Arithmetic Average) से निकाले गये। यदि माध्य पूर्णांक हों तब तो इसमें कोई असुविधा नहीं। परन्तु यह सदा सम्भव नहीं। जब माध्य भिन्न में हों तो उनसे विचलन निकालने और उन विचलनों का वर्ग करने, आदि में बड़ी असुविधा होती है। इस असुविधा से बचने के लिए लघु रीति का प्रयोग किया जाता है।
- कभी-कभी प्रश्न में से ही निश्चित संख्या कल्पित माध्य लेने के लिए कहा जाता है, अतः ऐसी स्थिति में उन्हीं संख्याओं को ही कल्पित माध्य मानकर विचलन लेने होंगे।

10.7 शब्दकोश (Keywords)

- **निर्वचन**—व्याख्या करना, इंटरप्रेटेशन।
- **सह**—विचरण—साथ-साथ चलना।
- **विक्षेप**— प्रसार, फैलाव।

10.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. सहसंबंध का अर्थ एवं महत्त्व समझाइए।
2. दो चरों के मध्य सहसंबंध अध्ययन करने में विक्षेप-रेखाचित्रों के प्रयोग की व्याख्या कीजिए।
3. कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक की गणना विधि समझाइए
4. कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गुणों तथा सीमाओं की विवेचना कीजिए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1.	1. ब्राते	2. विक्षेप-चित्र	3. साधन	4. परिमाण
2.	1. $r = 0.82$	2. $r = 0.904$	3. $r = 0.703$	4. $r = 0.996$
	5. $r = 1$	6. $r = 0.847$	7. $r = 0.92$	

10.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
2. साँख्यिकी, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई–11: कोटि सहसंबंध विधि (Rank Correlation Method)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- कोटि अंतर विधि की गणना करने में।
- कोटि सहसंबंध गुणांक कैसे निकालते हैं ? इसकी क्रिया-विधि को समझने में।
- संगामी विचलन रीति तथा निश्चयन गुणांक की विवेचना करने में।
- पश्चता तथा अग्रगमन की व्याख्या करने।

प्रस्तावना (Introduction)

कोटि सहसंबंध रीति ऐसी परिस्थितियों के लिए उपयुक्त है जहाँ तथ्यों का प्रत्यक्ष संख्यात्मक माप सम्भव न हो तथा उन्हें केवल एक निश्चित कोटि क्रम (Rank) के अनुसार रखा जा सके। उदाहरणार्थ, बुद्धिमत्ता, सुन्दरता, स्वास्थ्य आदि गुणात्मक तथ्यों को प्रत्यक्ष रूप में अंकों में नहीं नापा जा सकता, परन्तु विभिन्न इकाइयों की गुण की कोटि के आधार पर पहला, दूसरा, तीसरा इत्यादि कोटि-क्रम प्रदान किया जा सकता है। इन क्रमों के आधार पर ही क्रमान्तर या कोटि-अन्तर विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला जाता है।

नोट

11.1 कोटि अंतर विधि (Rank Correlation Method)

प्रोफेसर चार्ल्स स्पियरमैन ने सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की एक विधि का अन्वेषण किया है। यह कार्ल पियर्सन की रीति की तुलना में अत्यन्त सरल है। इस रीति को स्पियरमैन की श्रेणी या क्रमान्तर रीति (Spearman's Rank or Difference Method) अथवा अनुस्थिति रीति (Ranking Method) कहते हैं।

यह रीति वहाँ के लिए भी उपयुक्त है जहाँ पदों का मूल्य ज्ञात न हो बल्कि उनका क्रम ज्ञात हो। यह रीति वहाँ के लिए भी उपयुक्त है जहाँ तथ्य को निश्चित संख्या में व्यक्त करना कठिन हो परन्तु उन्हें क्रम में व्यक्त किया जा सकता हो; जैसे, गुणात्मक तथ्य। उदाहरण के लिए, कुछ व्यक्तियों में यह देखना है कि सुन्दरता व स्वास्थ्य में किस मात्रा का सहसम्बन्ध है। सुन्दरता को संख्या में व्यक्त करना कठिन है। इसलिए मान लीजिए वहाँ उन व्यक्तियों को सुन्दरता के विचार से क्रमवार रख दिया।, जैसे—पहला, दूसरा, तीसरा, आदि। इसी प्रकार शरीर का गठन, ऊँचाई, वजन, रोग, शक्ति, आदि का विचार करके स्वास्थ्य को निश्चित संख्या में व्यक्त करने की अपेक्षा क्रमवार रखना सरल है। अब सुन्दरता व स्वास्थ्य में सहसम्बन्ध गुणांक निकाला जा सकता है।

स्पियरमैन रीति की विशेषताएँ

सहसम्बन्ध गुणांक निकालने की स्पियरमैन रीति की निम्न प्रमुख विशेषताएँ हैं—

(1) **सरल—**यह रीति गणना और समझने की दृष्टि से कार्ल पियर्सन की दोनों रीतियों से बहुत सरल है।

(2) **केवल क्रम-मान पर्याप्त—**यदि पदों के वास्तविक मान न मालूम हों पर उनका क्रम पता हो, तो सहसम्बन्ध गुणांक निकाला जा सकता है।

(3) **अनियमित सामग्री के होने पर उपयुक्त—**यह रीति वहाँ के लिए उपयुक्त है जहाँ सामग्री अनियमित हो।

(4) **जहाँ पदों का मूल्य पूर्ण शुद्ध न हो—**यह रीति वहाँ के लिए उपयुक्त है जहाँ पदों का मूल्य अनुमानतः शुद्ध हो क्योंकि यहाँ तो केवल क्रम की आवश्यकता होती है। मात्रा की शुद्धता की अपेक्षा क्रम की शुद्धता अधिक आवश्यक है।

(5) **व्यक्तिगत अध्ययन में उपयुक्त—**यह वहाँ के लिए अधिक उपयुक्त है जहाँ व्यक्तिगत अध्ययनों में सहसम्बन्ध ज्ञात करना है। इसमें पद-मूल्यों के निरपेक्ष मान का उतना महत्व नहीं है जितना उनके सापेक्ष या तुलनात्मक मानों का है।

(6) **संख्याएँ बहुत अधिक नहीं—**यह रीति वहाँ सरलता व सफलतापूर्वक अपनायी जा सकती है जहाँ पदों की अधिक-से-अधिक संख्या लगभग 25 या 30 हो। पदों की संख्या बहुत अधिक होने पर इसका प्रेयोग कठिन हो जाता है।

क्या आप जानते हैं सहसम्बन्ध गुणांक निकालते समय श्रेणियों का मूल्य ज्ञात होना आवश्यक नहीं, केवल मूल्य के अनुसार **पदों का क्रम** (rank) जान लेने से ही काम चल जाता है। सबसे बड़े मूल्य को पहला क्रम (rank), उससे छोटे को दूसरा, उससे छोटे को तीसरा और इसी प्रकार क्रम दे देते हैं।

11.2 कोटि सहसम्बन्ध गुणांक निकालने की क्रियाविधि (To Find the Method of Rank Correlation Coefficient)

इस रीति से सहसम्बन्ध गुणांक निकालने की क्रिया-विधि अग्र है—

(1) दोनों श्रेणी के पद-मूल्यों को अलग-अलग क्रम प्रदान करते हैं; सबसे बड़े पद-मूल्य को 1, उससे छोटे को 2 और इसी प्रकार क्रम रहेगा।

नोट

समान पद-मूल्य होने पर—कभी-कभी ऐसा भी हो सकता है कि दो या अधिक पद-मूल्य समान हों तो इनको क्रम प्रदान करने की दो विधियाँ अपनायी जाती हैं—

(*i*) **कोष्ठ क्रम रीति** (Bracket Rank Method)—समान पद-मूल्यों को समान क्रम दिया जाये परन्तु उनके बाद वाले पद को वही क्रम दिया जायेगा जो कि पदों के समान न रहने पर दिया जाता है। उदाहरणार्थ, 20, 25, 22, 21 एवं 22 संख्याएँ हैं। यहाँ 25 को क्रम 1 और दोनों 22 को 2 एवं 3 क्रम, 21 को 4 एवं 20 को क्रम 5 दिया जायेगा।

(*ii*) **माध्य क्रम रीति** (Average Rank Method)—समस्त समान पदों को उनके क्रम पदों के माध्य क्रम से क्रम दिया जाता है। जैसे एक श्रेणी का सबसे बड़ा पद 30 है और उसमें 25 तीन बार आया है, अत: 30 को क्रम 1 तथा तीनों 25 को 3-3 क्रम दिया जायेगा क्योंकि $\frac{(2+3+4)}{3} = \frac{9}{3}$ = 3 परन्तु इस 25 के बाद वाले पद का क्रम 5वाँ होगा।

(2) दोनों श्रेणियों के क्रमों को क्रमश: घटाकर क्रम-अन्तर (D) ज्ञात कर लेते हैं। क्रमान्तर का योग (ΣD) सर्वदा 0 आता है।

(3) इन क्रमान्तरों का वर्ग निकाल लेते हैं, अर्थात् D^2।

(4) क्रमान्तरों के वर्गों को जोड़ लेते हैं। यह ΣD^2 होता है।

(5) फिर निम्न सूत्र का प्रयोग कर क्रमान्तर सहसम्बन्ध गुणांक निकालते हैं—

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

टिप्पणी—यदि सूत्र तभी सही है जब किस भी श्रेणी में समान पद-मूल्य न हों।

where r_s = Cofficient of rank correlation (श्रेणी सहसम्बन्ध गुणांक)

SD^2 = Sum of the squares of the differences in ranks (क्रमान्तर के वर्गों का योग)

N = Number of items (पदों की संख्या)

समान क्रम होने पर संशोधन—किसी श्रेणी में यदि एक से अधिक पदों का मूल्य समान होता है तो उपर्युक्त सूत्र में वृद्धि करनी पड़ती है।

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \ldots\right]}{N(N^2-1)}$$

पदमाला के जितने पदों की पुनरावृत्ति होगी, उतनी ही बार $6\Sigma D^2$ में $\frac{1}{12}(m^3 - m)$ को जोड़ेंगे। यहाँ m उस पद की आवृत्ति है तो एक से अधिक बार आया है। ऐसे प्रश्नों के लिए उदाहरण 2 एवं 3 देखिए।

उदाहरण (Illustration) 1: निम्न आँकड़ों से कोटि सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए—

कोटि (Rank) X	:	5	3	4	8	2	1	7	10	6	9
कोटि (Rank) Y	:	3	7	5	9	2	4	1	10	8	6

नोट

हल (Solution):

कोटि X (R_x)	कोटि Y (R_y)	$D = R_x - R_y$	D^2
5	3	2	4
3	7	– 4	16
4	5	– 1	1
8	9	– 1	1
2	2	0	0
1	4	– 3	9
7	1	6	36
10	10	0	0
6	8	– 2	4
9	6	3	9
N = 10	0	0	80

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 80}{10(10^2-1)}$$

$$= -\frac{6 \times 80}{10 \times 99} = 1 - \frac{48}{99} = 1 - 0.48 = 0.52$$

उदाहरण (Illustration) 2:

किसी सुन्दरता प्रतियोगिता में 10 प्रतियोगियों को तीन निर्णायकों (जजों) द्वारा निम्न क्रम में रखा गया—

प्रथम निर्णायक (First Judge)	:	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
द्वितीय निर्णायक (Second Judge)	:	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
तृतीय निर्णायक (Third Judge)	:	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

कोटि सहसम्बन्ध का प्रयोग करते हुए बताइए कि निर्णायकों (जजों) के किस जोड़े की सुन्दरता के प्रति निकटतम समान रुचि है ?

हल (Solution):

तीन निर्णायकों (जजों) के दो-दो के जोड़े बनाकर तीन कोटि सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करें—

प्रथम जज द्वारा प्रदत्त कोटि = R_1, द्वितीय जज द्वारा प्रदत्त कोटि = R_2, तृतीय जज द्वारा प्रदत्त कोटि = R_3

R_1	R_2	R_3	$D_{12} = R_1 - R_2$	D^2_{12}	$D_{23} = R_2 - R_3$	D^2_{23}	$D_{13} = R_1 - R_3$	D^2_{13}
1	3	6	– 2	4	– 3	9	– 5	25
6	5	4	1	1	1	1	2	4
5	8	9	– 3	9	– 1	1	– 4	16
10	4	8	6	36	– 4	16	2	4
3	7	1	– 4	16	6	36	2	4
2	10	2	– 8	64	8	64	0	0
4	2	3	2	4	– 1	1	1	1
9	1	10	8	64	– 9	81	– 1	1
7	6	5	1	1	1	1	2	4
8	8	7	– 1	1	2	4	1	1
योग	–	–	0	200	0	214	0	60

नोट

सूत्र $$r_s\,(\text{I, II}) = 1 - \frac{6\Sigma D_{12}^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 200}{10 \times 99} = 1 - 1.212 = -.212$$

$$r_s\,(\text{II, III}) = 1 - \frac{6\Sigma D_{23}^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 214}{10 \times 99} = 1 - 1.297 = -.297$$

$$r_s\,(\text{I, III}) = 1 - \frac{6\Sigma D_{13}^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 60}{10 \times 99} = 1 - .364 = +.636$$

स्पष्ट है कि जजों I तथा III के जोड़े की सुन्दरता के प्रति निकटतम समान रुचि है।

जजों II तथा III के जोड़े की सुन्दरता के प्रति असमान रुचि है।

उदाहरण (Illustration) 3: कोटि–अन्तर की विधि द्वारा X व Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

X	:	20	22	24	25	30	32	28	21	26	35
Y	:	16	15	20	21	19	18	22	24	23	25

हल (Solution):

X	R_x	Y	R_y	$D = R_x - R_y$	D^2
20	10	16	9	+ 1	1
22	8	15	10	– 2	4
24	7	20	6	+ 1	1
25	6	21	5	+ 1	1
30	3	19	7	– 4	16
32	2	18	8	– 6	36
28	4	22	4	0	0
21	9	24	2	+ 7	49
26	5	23	3	+ 2	4
35	1	25	1	0	0
N = 10		N = 10			$\Sigma D^2 = 112$

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 112}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{672}{10(100-1)}$$

$\Rightarrow$ $$r_s = 1 - \frac{672}{10 \times 99} = 1 - \frac{672}{990} = \frac{990-672}{990} = \frac{318}{990}$$

$\therefore$ $r_s = +.3212121$ या $+.32$ लगभग

निम्न परिमाण का धनात्मक सहसम्बन्ध।

उदाहरण (Illustration) 4: कोटि–अन्तर की विधि द्वारा X व Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

X	:	22	24	27	35	21	20	27	25	27	23
Y	:	30	38	40	50	38	25	38	36	41	32

हल (Solution):

नोट

स्पियरमैन कोटि-अन्तर विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना

श्रेणी X (X-Series)	कोटि (Rank) R_x	श्रेणी Y (Y-Series)	कोटि (Rank) R_y	कोटियों का अन्तर (Difference of Ranks) D	D^2
22	8	30	9	– 1	1
24	6	38	5	+ 1	1
27	3	40	3	0	0
35	1	50	1	0	0
21	9	38	5	+ 4	16
20	10	25	10	0	0
27	3	38	5	– 2	4
25	5	36	7	– 2	4
27	3	41	2	+ 1	1
23	7	32	8	– 1	1
N = 10		N = 10			$\Sigma D^2 = 28$

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}\left(m_1^2 - m_1\right) + \frac{1}{12}\left(m_2^3 - m_2\right)\right]}{N(N^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[28 + \frac{1}{12}(3^3 - 3) + \frac{1}{12}(3^3 - 3)\right]}{10(10^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[28 + \frac{1}{12}(27 - 3) + \frac{1}{12}(27 - 3)\right]}{10(100 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(28 + 2 + 2)}{10(99)}$$

$$= 1 = \frac{6(32)}{990} = 1 - \frac{192}{990} = \frac{798}{990} = + .81$$

उच्च परिणाम का धनात्मक सहसम्बन्ध।

उदाहरण (Illustration) 5: r_s का मान बताओ–

X	:	15	14	25	14	14	20	22
Y	:	25	12	18	25	40	10	7

नोट

हल (Solution):

X	R_x	Y	R_y	$D = R_x - R_y$ (D)	D^2
15	4	25	2.5	1.5	2.25
14	6	12	5	1	1
25	1	18	4	– 3	9
14	6	25	2.5	3.5	12.25
14	6	40	1	5	25
20	3	10	6	– 3	9
22	2	7	7	– 5	25
N = 7					$\Sigma D^2 = 83.50$

इस प्रश्न में X श्रेणी में 14 तीन बार आया है और इसी प्रकार Y श्रेणी में 25 दो बार आया है। इन उभयनिष्ठ (Common) क्रमों के कारण श्रेणी-अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक में संशोधन आवश्यक है।

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}\left(m_1^3 - m_1\right) + \frac{1}{12}\left(m_2^3 - m_2\right)\right]}{N(N^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[83.5 + \frac{1}{12}(3^3 - 3) + \frac{1}{12}(2^3 - 2)\right]}{7(7^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[83.5 + \frac{1}{12}(27 - 3) + \frac{1}{12}(8 - 2)\right]}{7(49 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(83.5 + 2 + .5)}{7(49 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 86}{7(48)}$$

$$= 1 - \frac{516}{336} = 1 - 1.54 = -.54$$

11.3 संगामी विचलन रीति (Concurrents Deviatio Methods)

कभी-कभी हमें केवल यह जानना होता है कि दो समंकमालाओं में सह-सम्बन्ध किस प्रकार का है—धनात्मक है या ऋणात्मक। जब हम यह देखना चाहते हैं कि दो चर एक ही दिशा में गतिमान हैं या विपरीत दिशा में तब हम संगामी या सहगामी विचलन रीति का प्रयोग करते हैं। इस रीति के अनुसार जब दो सम्बद्ध चर X और Y एक ही दिशा में साथ-साथ गमन करते हैं या संगामी या सहगामी हैं तो उनमें धनात्मक सह-सम्बन्ध होता है। यदि वे विपरीत दिशा में गमन करते हैं या प्रतिगामी होते हैं तो उनमें ऋणात्मक सह-सम्बन्ध पाया जाता है।

अत: इससे अल्पकालीन उच्चावचनों में सह-सम्बन्ध ज्ञात हो जाता है। परन्तु विचलनों की दिशा (+ या –) को ही ध्यान में रखा जाता है, उनके आकार की गणना नहीं की जाती। इसीलिए इस रीति द्वारा केवल यह पता चल जाता है कि सह-सम्बन्ध किस दिशा का है जिससे मात्रा का ठीक-ठीक ज्ञान नहीं हो पाता।

नोट

> नोट्स संगामी विचलन रीति सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की सबसे सरल रीति है। इस रीति में प्रत्येक मूल्य की उससे पिछले मूल्य से तुलना की जाती है।

विधि–

(*i*) X और Y श्रेणी में अलग-अलग प्रत्येक मूल्य की तुलना उससे पिछले मूल्य से की जायेगी। यदि मूल्य पिछले मूल्य से अधिक है तो उसका विचलन + होगा, यदि कम हो तो (–) और यदि समान है तो (=)। लेकिन यह ध्यान रखने योग्य बात है कि चिह्नों को लगाना चाहिए उसकी मात्रा को नहीं। विचलनों-युग्मों की संख्या कुल पद-युग्मों की संख्या से एक कम होगी $n = (N - 1)$ क्योंकि पहले पद का विचलन नहीं होता।

(*ii*) X और Y के तत्सम्वादी विचलन-चिह्नों का गुणा करके धनात्मक गुणनफलों को गिन लिया जायेगा जिसे c कहा जायेगा।

(*iii*) इस सूत्र का प्रयोग किया जायेगा–

$$r_c = \pm\sqrt{\frac{\pm 2c - n}{n}}$$

उदाहरण (Illustration) 6: निम्न समंकों से संगामी विचलन रीति द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

S.N.	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	:	89	85	98	102	100	105	96	68	85	98	76	76
Y	:	32	33	35	37	39	41	40	38	42	40	36	35

हल (Solution):

संगामी विचलन-गुणांक की गणना

X	चिह्न	Y	चिह्न	चिह्नों का गुणनफल
89		32		
85	–	33	+	–
98	+	35	+	+
102	+	37	+	+
100	–	39	+	–
105	+	41	+	+
96	–	40	–	+
68	–	38	–	+
85	+	42	+	+
98	+	40	–	–
76	–	36	–	+
75	–	35	–	+
				$c = 8$
		$n = N - 1 = 12 - 1 = 11$		

$$r_c = +\sqrt{+\frac{(2c-n)}{n}}$$

$$r_c = +\sqrt{+\frac{(2\times 8-11)}{11}} = \sqrt{\frac{5}{11}} = \sqrt{.4545}$$

$r_c = .674$

नोट

उदाहरण (Illustration) 7: निम्न सूचकांकों से संगामी विचलन गुणांक की गणना कीजिए–

वर्ष :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मांग :	100	115	116	108	108	122	122	124	112	112
पूर्ति :	106	102	102	104	98	96	97	97	95	90

हल (Solution):

संगामी विचलन-गुणांक की गणना

वर्ष	माँग (x)	चिह्न	पूर्ति (y)	चिह्न	चिह्नों का गुणनफल
1	100		106		
2	115	+	102	–	–
3	116	+	102	=	–
4	108	–	104	+	–
5	108	=	98	–	–
6	122	+	96	–	–
7	122	=	97	+	–
8	124	+	97	=	–
9	112	–	95	–	+
10	112	=	90	–	–
					$c = 1$

$$N = n - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$r_c = +\sqrt{\frac{+(2c-n)}{n}}$$

$$= +\sqrt{\frac{+(2 \times 1 - 9)}{n}} = +\sqrt{\left(\frac{-7}{9}\right)} = -\sqrt{\frac{7}{9}}$$

$$r_c = -.88$$

11.4 निश्चयन गुणांक (Coefficient of Determination)

आश्रित चर-मूल्य अर्थात् Y-श्रेणी में होने वाले विचरण को हम दो भागों में बाँट सकते हैं–

(*i*) ऐसे परिवर्तन जो X-श्रेणी में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप होते हैं। इन्हें स्पष्टीकृत या व्याख्येय प्रसरण कहते हैं।

(*ii*) ऐसे विचरण जो X श्रेणी के परिवर्तन के कारण नहीं होते वरन् अन्य कारणों से होते हैं, इनको अस्पष्टीकृत या अव्याख्येय प्रसरण कहते हैं–

कुल प्रसरण = स्पष्टीकृत प्रसरण + अस्पष्टीकृत प्रसरण

स्पष्टीकृत प्रसरण का अंकात्मक माप निश्चयन गुणांक या निर्धारण गुणांक द्वारा किया जाता है। यह वास्तव में सह-सम्बन्ध गुणांक का वर्ग होता है, जिसे इस सूत्र के द्वारा परिकलित किया जाता है–

$$c \text{ of } D = r^2 = 1 - \frac{sy^2}{oy^2} \text{ or } 1 - \frac{\text{Unexplained Variance}}{\text{Total Variance}} = \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{\Sigma(y+\bar{y})^2}$$

निश्चयन गुणांक से हमें उस प्रतिशत का पता चलता है जिस प्रतिशत से Y-श्रेणी के परिवर्तन X-श्रेणी के परिवर्तनों के कारण होते हैं। उदाहरणार्थ, यदि मुद्रा की मात्रा (X) और मूल्य-स्तर Y में 8 का सह-सम्बन्ध गुणांक r है तो

नोट

निश्चयन गुणांक r^2(.64) होगा जिससे यह निष्कर्ष निकलता है कि मूल्य-स्तर में होने वाले 64% उच्चावचन मुद्रा की मात्रा में होने वाले बदलाव के कारण होते हैं। अर्थात् यदि Y का कुल प्रसरण 1 है तो उसमें से स्पष्ट प्रसरण का अंश .64 है। बाकी (1 – .64) या 36% विचरण अन्य कारणों से है। अन्य कारणों से होने वाले विचरण को अंश कहते हैं। सूत्रानुसार–

$$u^2 = 1 - r^2 \text{ या } \frac{sy^2}{oy^2}$$

अनिश्चयन गुणांक के वर्गमूल्य (u) को असह-सम्बन्ध गुणांक भी कहते हैं।

$$\left[u = \sqrt{1-r^2} = \frac{sy}{oy}\right]$$

टास्क निश्चयन गुणांक किसे कहते हैं?

उदाहरण (Illustration) 8: निम्नांकित समंकों से (*i*) निश्चयन गुणांक, (*ii*) अस्पष्टीकृत प्रसरण, (*iii*) असह-सम्बद्ध गुणांक तथा (*iv*) अनुमान का प्रमाप विभ्रम भी ज्ञात कीजिए।

X :	7	9	5	8	6	9	7	4	8	7
Y :	10	12	6	9	8	11	10	5	10	9

हल (Solution):

Y के संगणित मूल्यों (y_c) का परिगणना

X	Y	XY	x^2	$a + bx = yc$
7	10	70	49	0.25 + 1.25 × 7 = 9.00
9	12	108	81	0.25 + 1.25 × 9 = 11.50
5	6	30	25	0.25 + 1.25 × 5 = 6.50
8	9	72	64	0.25 + 1.25 × 8 = 10.25
6	8	48	36	0.25 + 1.25 × 6 = 7.75
9	11	99	81	0.25 + 1.25 × 9 = 11.50
7	10	70	49	0.25 + 1.25 × 7 = 9.00
4	5	20	16	0.25 + 1.25 × 4 = 5.25
8	10	80	64	0.25 + 1.25 × 8 = 10.25
7	9	63	49	0.25 + 1.25 × 7 = 9.00
$\Sigma x = 70$	$\Sigma y = 90$	$\Sigma xy = 660$	$\Sigma x^2 = 514$	$\Sigma yc = 90.00$

(*i*) न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा r की गणना

प्रसामान्य समीकरण

$$\Sigma y = Na + b\Sigma x \qquad 90 = 10a + 70b \qquad ...(1)$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \quad 660 = 70a + 514b \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) में 7 का गुणा करने पर तथा उसमें से समी. (2) को घटाने पर,

$$630 = 70a + 490b$$

$$660 = 70a + 514b$$

$$- \quad - \quad -$$

$$-30 = -24b$$

$$b = \frac{30}{24} = 1.25$$

नोट

b का मान समी. (1) में रखने पर,

$$90 = 10a + 70 \times 1.25$$
$$90 = 100 + 87.5$$
$$10a = 90 - 87.5$$
$$10a = 2.5$$
$$a = \frac{2.5}{10} = a = .25$$

sy^2 व oy^2 की गणना

X	Y	y_c	$(y - y_c)$	$(y - y_c)^2$	$(y - \bar{y})$	$(y - \bar{y})^2$
7	10	9.00	1.00	1.00	+ 1	1
9	12	11.50	0.50	.2500	+ 3	9
5	6	6.50	– .50	.2500	– 3	9
8	9	10.25	– 1.25	1.5625	0	0
6	8	7.75	0.25	0.0625	– 1	1
9	11	11.50	– 0.50	– 2500	2	4
7	10	9.00	+ 1.00	1.0000	1	1
4	5	5.25	– 0.25	0.0625	– 4	16
8	10	10.25	– 0.25	0.0625	1	1
7	9	9.00	0.00	0.0000	0	0
N = 10	$\Sigma y = 90$	$\Sigma y_c = 90$	0	4.5000	0	42

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{90}{10} = 9 \quad \Sigma y^2 = \frac{\Sigma(y - y_c)^2}{N} = \frac{4.5000}{10} = 0.45$$

$$oy^2 = \frac{\Sigma(y - \bar{y})^2}{N} = \frac{42}{10} = 4.2$$

$$r = \sqrt{\left(1 - \frac{sy^2}{oy^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{0.45}{4.20}\right)} = \sqrt{\frac{4.20 - 0.45}{4.20}}$$

$$= \sqrt{\frac{3.75}{4.20}} = \sqrt{0.89286} = r = .945$$

अत: X और Y में अत्यधिक मात्रा का धनात्मक सह-सम्बन्ध है।

(*ii*) निश्चयन गुणांक (Coefficient Determination)

$$r^2 = .8929$$

अत: Y-श्रेणी में होने वाले परिवर्तनों का लगभग 89% X-श्रेणी के परिवर्तनों के कारण है तथा शेष 11% अन्य परिवर्तनों के कारण है।

(*iii*) अस्पष्टीकरण प्रसरण

$$sy^2 = \frac{\Sigma(y - y_c)^2}{N} = 0.45$$

(*iv*) असह-सम्बन्ध गुणांक

$$u = \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{1 - 0.8929} = \sqrt{0.1071} = .3273$$

(*v*) अनुमान का प्रमाप विभ्रम

$$sy = \sqrt{\frac{\Sigma(y-y_c)^2}{N}} = \sqrt{0.45} = 0.67$$

लघु रीति–प्रसामान्य समीकरणों की सहायता से a और b का मान निकालने के बाद निम्न सूत्र द्वारा अनुमान का प्रमाप विभ्रम ज्ञात किया जा सकता है–

$$sy = \frac{\sqrt{\Sigma y^2 - a\Sigma y - a\Sigma xy}}{N} = \frac{\sqrt{852-(0.25\times 90)-(1.25\times 660)}}{10}$$

$$= \frac{\sqrt{852-22.5-82.5}}{10} = \sqrt{0.45} = 0.67$$

अन्तर रीति द्वारा सह-सम्बन्ध (Correlation by Difference Method)

दोनों श्रेणियों तथा उनके पद-मूल्यों के अन्तरों के प्रसरण (variable) के आधार पर भी सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला जा सकता है। अन्तर रीति भी वास्तव में कार्ल पियर्सन की रीति का ही रूपान्तरण है। अत: परिणाम पूर्णत: कार्ल पियर्सन गुणांक के अनुरूप होता है।

विधि– (*i*) X-श्रेणी व Y-श्रेणी के प्रसरण ज्ञात किये जाते हैं। (σ_x^2 व σ_y^2)

(*ii*) X-मूल्यों में से तत्सम्वादी Y-मूल्यों को घटाकर अन्तर का प्रसरण निकाला जाता है। $(\sigma_{x-y})^2$

(*iii*) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - (\sigma_{x-y})^2}{2\sigma_x . \sigma_y}$$

11.5 पश्चता (विलम्बना) तथा अग्रगमन (Lag and Lead)

प्राय: यह देखने में आता है कि स्वतन्त्र चर (Independent variable) में होने वाले परिवर्तनों का आश्रित चर अर्थात् सम्बद्ध श्रेणी पर तुरन्त प्रभाव नहीं पड़ता वरन् कुछ समय बाद असर पड़ता है। उदाहरणार्थ, मुद्रा की मात्रा में वृद्धि होने से सामान्य मूल्य-स्तर में तुरन्त या उसी समय वृद्धि नहीं होती या किसी वस्तु की पूर्ति में परिवर्तन होने से उसका मूल्य तुरन्त ही प्रभावित नहीं होता। दोनों घटनाओं के परिवर्तनों में कुछ समय का अन्तर रह जाता है जैसे जनवरी में मुद्रा की मात्रा बढ़ने से फरवरी में मूल्य बढ़ें या 2006 में किसी वस्तु की पूर्ति बढ़ने से 2007 में उसका मूल्य कम हो। कारण और प्रभाव के बीच के इस कालान्तर या समय के अन्तर को ही पश्चता या काल-विलम्बता (Time-Lag) अथवा अग्रगमन (Lead) कहते हैं। पश्चता का अर्थ है 'पीछे रह जाना'। अत: पश्चता का अर्थ प्रभाव का कारण से पश्चगामी हो जाना या पिछड़ जाना है। इस स्थिति को 'अग्रगमन' भी कहा जाता है क्योंकि कारण प्रभाव से पहले आता है।

जहाँ दो सम्बन्धित मालाओं में कुछ पश्चता अर्थात् विलम्बता का तत्व होता है वहाँ विलम्बता की अवधि से सम्बद्ध माला या परिणाम-श्रेणी को संशोधित करना पड़ेगा। वास्तविक सह-सम्बन्ध निकालने के लिए प्रत्येक स्वतन्त्र चर-मूल्य के सामने उसके आश्रित मूल्य को समायोजित करके लिखना आवश्यक होता है।

सह-सम्बन्ध और कार्य-कारण सम्बन्ध (Correlation and Causation)

किंग के अनुसार, "सह-सम्बन्ध का अर्थ है कि दो समंक-श्रेणियों के कारण और परिणाम का कुछ सम्बन्ध पाया जाता है। यह ठीक है कि सह-सम्बन्ध दो समंक-श्रेणियों के पारस्परिक सम्बन्ध की दिशा व मात्रा का विश्लेषण करता है परन्तु सह-सम्बन्ध की उपस्थिति से यह नहीं समझ लेना चाहिए कि दोनों सम्बद्ध मालाओं में आवश्यक रूप से प्रत्यक्ष कार्य-कारण सम्बन्ध है अर्थात् एक समंकमाला दूसरी समंकमाला का प्रत्यक्ष कारण है।"

नोट

सह-सम्बन्ध के विस्तृत विश्लेषण के परिणामस्वरूप निम्न प्रकार की परिस्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं–

(1) **प्रत्यक्ष सम्बन्ध** (Direct Relationship)–दोनों श्रेणियों में कार्य-कारण सम्बन्ध हो सकता है।

(2) **तीसरा समापवर्तक कारण** (Third Common Cause)–यह हो सकता है कि दोनों श्रेणियाँ किसी तीसरे सामान्य कारण से एक ही दिशा में या विपरीत दिशाओं में प्रभावित हो रही हों।

(3) **परस्पर प्रतिक्रिया** (Mutual Interaction)–दोनों श्रेणियाँ परस्पर एक-दूसरे पर प्रभाव डाल सकती हैं। दोनों ही कारण व दोनों ही परिणाम हो सकते हैं।

(4) **निरर्थक सम्बन्ध** (Spurious or Nonsense Correlation)–कभी-कभी समग्र में दो श्रेणियों में सह-सम्बन्ध न होते हुए उनमें चुने गये छोटे प्रतिदर्शों में केवल देव के कारण सह-सम्बन्ध पाया जा सकता है जो निरर्थक है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. निम्नलिखित में सहसंबध ज्ञात कीजिए।

1. दो विषयों सांख्यिकी तथा गणित में 10 छात्रों की कोटि (क्रम) निम्न प्रकार हैं। दोनों विषय में छात्रों का ज्ञान किस हद तक सहसम्बन्धित है ?

कोटि सांख्यिकी में (Rank in Statistics) :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
कोटि गणित में (Rank in Mathematics) :	2	4	1	5	3	9	7	10	6	8

2. 10 छात्रों को आवाज परीक्षण में दो जजों द्वारा निम्न क्रम में रखा गया :

छात्राएँ (Girls) :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
जज (Judge) I :	4	8	6	7	1	3	2	5	10	9
जज (Judge) II :	3	9	6	5	1	2	4	7	1	10

क्या दो जजों की आवाज के प्रति समान पसन्द है ?

3. 15 छात्रों की दो विषयों A तथा B में कोटि निम्न प्रकार हैं। कोष्ठक में लिखी संख्या एक छात्र के क्रमशः A और B विषय की कोटि को प्रदर्शित करती है। स्पियरमैन सूत्र का प्रयोग करते हुए कोटि सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

(1, 10), (2, 7), (3, 2), (4, 6), (5, 6), (6, 8), (7, 3), (8, 1), (9, 11), (10, 15), (11, 9), (12, 5), (13, 14), (14, 12), (15, 13).

4. 8 उद्योगों के लाभ (X) की कोटि (R_x) तथा चालू पूँजी (Y) की कोटि (R_y) के बीच स्पियरमैन कोटि सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

R_x :	1	8	7	6	5	4	3	2
R_y :	8	1	3	4	2	6	5	7

5. स्पियरमैन कोटि-अन्तर विधि द्वारा निम्नलिखित आँकड़ों से सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

चाय की कीमत (रु.) [Price of Tea (Rs.)] :	75	88	95	70	60	80	81	50
कॉफी की कीमत (रु.) [Price of Corree (Rs.)] :	120	130	150	115	110	140	142	100

6. निम्न आँकड़ों से कोटि-अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

X :	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Y :	17	24	28	32	35	30	29	51	56	60	62

7. निम्न आँकड़ों से क्रमान्तर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

X :	48	33	40	9	16	16	65	24	16	57
Y :	13	13	24	6	15	4	20	9	6	19

नोट

8. निम्न आँकड़े किसी फैक्टरी के 11 कर्मचारियों की आय तथा व्यय से सम्बन्धित हैं। आय तथा व्यय में संगामी विचलन की रीति से सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए :

आय (Income)	:	65	40	35	75	63	80	35	20	80	60	50
व्यय (Exp.)	:	60	55	50	56	30	70	40	35	80	75	80

9. सहसम्बन्ध से आप क्या समझते हैं ? निम्न आँकड़ों से संगामी विचलन रीति से सहसम्बन्ध ज्ञात कीजिए :

वर्ष (Year)	:	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
पूर्ति (Supply)	:	150	154	160	172	160	165	180
मूल्य (Price)	:	200	180	170	160	190	180	172

10. निम्नलिखित समंकों से संगामी विचलन रीति से सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए :

X	:	85	82	89	95	104	108	112	100	99	95	92
Y	:	110	116	111	118	120	110	98	100	103	105	107

11.6 सारांश (Summary)

- कोटि सहसंबंध रीति ऐसी परिस्थितियों के लिए उपयुक्त है जहाँ तथ्यों का प्रत्यक्ष संख्यात्मक माप सम्भव न हो तथा उन्हें केवल एक निश्चित कोटि क्रम (RANK) के अनुसार रखा जा सके।
- प्रोफेसर चार्ल्स स्पियरमैन ने सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की एक विधि का अन्वेषण किया हैं यह कार्ल पियर्सन की रीति की तुलना में अत्यन्त सरल है। इस रीति को स्पियरमैन की श्रेणी या क्रमान्तर रीति (Spearman's Rank or Difference Method) अथवा अनुस्थिति रीति (Ranking Method) कहते हैं।
- निम्न सूत्र का प्रयोग कर क्रमान्तर सहसम्बन्ध गुणांक निकालते हैं—

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2 - 1)}$$

- कभी-कभी हमें केवल यह जानना होता है कि दो समंकमालाओं में सह-सम्बन्ध किस प्रकार का है—धनात्मक है या ऋणात्मक। जब हम यह देखना चाहते हैं कि दो चर एक ही दिशा में गतिमान हैं या विपरीत दिशा में तब हम संगामी या सहगामी विचलन रीति का प्रयोग करते हैं।
- निश्चयन गुणांक से हमें उस प्रतिशत का पता चलता है जिस प्रतिशत से Y-श्रेणी के परिवर्तन X-श्रेणी के परिवर्तनों के कारण होते हैं।
- दोनों श्रेणियों तथा उनके पद-मूल्यों के अन्तरों के प्रसरण (variable) के आधार पर भी सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला जा सकता है।
- सह-सम्बन्ध का अर्थ है कि दो समंक-श्रेणियों के कारण और परिणाम का कुछ सम्बन्ध पाया जाता है।

11.7 शब्दकोश (Keywords)

- **संगामी—** सहगामी, साथ-साथ चलने वाली।
- **निश्चयन—** (Determination)—दृढ़निश्चय, दृढ़ता।
- **प्रसरण—** फैलना, आगे बढ़ना।

11.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. स्पियरमैन की कोटि अंतर विधि को उदाहरण देकर समझाइए।

नोट

2. संगामी विचलन रीति पर प्रकाश डालिए।
3. सहसंबंध और कार्यकरण को स्पष्ट कीजिए।
4. अंतर रीति द्वारा सहसंबंध गुणांक निकालने की विधि को उदाहरण सहित समझाइए।
5. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए–
   (*i*) निश्चयन गुणांक
   (*ii*) पश्चता अथवा अग्रगमन

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answers: Self Assessment)

1. 1. $r_s = 0.76$ उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध

2. $r_s = 0.12$ समान पसन्द है बहुत कम सहसम्बन्ध के साथ

3. $r_s = -0.51$ 4. $r_s = -0.91$ 5. $r_s = 0.93$ 6. $r_s = 0.919$

7. $r_s = +.73$ 8. $r_c = .89$ 9. $r_c = -1$ 10. $r_c = .77$

11.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
2. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई—12: रेखीय प्रतीपगमन विश्लेषण : परिचय एवं प्रतीपगमन की रेखाएँ (Linear Regression Analysis : Introduction and lines of Regression)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- प्रतीपगमन का अर्थ एवं प्रतीपगमन विश्लेषण की व्याख्या करने में ।
- रेखीय प्रतीपगमन रेखाओं तथा प्रतीपगमन समीकरण की व्याख्या करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

प्रतीपगमन शब्द का अर्थ है वापस लौटना या पीछे हटना। सांख्यिकी में इस शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम सन् 1877 में सर फ्रांसिस गाल्टन नामक प्रसिद्ध वैज्ञानिक ने अपने शोध-लेख *पैतृक ऊँचाई में मध्यमता की ओर प्रतीपगमन* में किया था। उक्त शोध में लगभग एक हजार पिताओं तथा उनके पुत्रों के कद के अध्ययन के आधार पर उन्होंने यह महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष निकाला कि यद्यपि पिता-पुत्रों की ऊँचाई में परस्पर घनिष्ठ सह-सम्बन्ध था फिर भी सामान्य माध्य से दोनों के विचलनों में काफी अन्तर पाया जाता था। समस्त जाति की माध्य ऊँचाई से पिताओं की ऊँचाई के विचलनों में काफी अन्तर पाया जाता था। समस्त जाति की माध्य ऊँचाई से पिताओं की ऊँचाई के विचलनों की अपेक्षा पुत्रों की ऊँचाई के विभक्त कम थे। यदि पिताओं की माध्य ऊँचाई समग्र की माध्य ऊँचाई से 1 सेमी अधिक थी तो उनके पुत्रों की माध्य ऊँचाई समग्र की माध्य ऊँचाई से केवल 0.8 सेमी ही अधिक थी। दूसरे शब्दों में, पिताओं की ऊँचाई समग्र की सामान्य ऊँचाई से कम या अधिक होती थी परन्तु पुत्रों की ऊँचाई समग्र की ऊँचाई के काफी निकट होती जाती थी। पुत्रों की ऊँचाई के सामान्य माध्य के निकट वापस जाने की इस प्रवृत्ति को ही फ्रांसिस गाल्टन ने मध्यमता की ओर प्रतीपगमन कहा था। गाल्टन ने इस प्रवृत्ति का प्रयोग एक पिता की ऊँचाई के संगत पुत्र की ऊँचाई का सर्वोत्तम अनुमान लगाने के लिए किया था।

नोट

परन्तु आज के युग में प्रतीपगमन की धारणा केवल पितागत विशेषताओं के अध्ययन तक ही सीमित नहीं है अपितु इसका प्रयोग उन सभी क्षेत्रों में किया जाता है जिनमें दो या अधिक सम्बन्धित श्रेणियों में विभिन्न पद-मूल्यों की सामान्य माध्य की ओर वापस जाने की प्रवृत्ति पाई जाती है। प्रतीपगमन के आधार पर सामाजिक, आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्रों में विभिन्न घटनाओं के माध्य सम्बन्धों का विश्लेषण करके प्रतीपगमन-समीकरण की सहायता से एक पद-मूल्य से सम्बन्धित दूसरा आश्रित मूल्य अनुमानित किया जा सकता है।

12.1 प्रतीपगमन का अर्थ एवं प्रतीपगमन विश्लेषण (Meaning of Regression and Regression Analysis)

सांख्यिकी में 'प्रतीपगमन' का शाब्दिक अर्थ वापस आने या पीछे लौटने से है। इस शब्द के प्रयोग का श्रेय **सर फ्रांसिस गल्टन** (Sir Francis Galton) को दिया जाता है। इन्होंने ही सर्वप्रथम प्रतीपगमन का विश्लेषणात्मक अध्ययन किया। पिताओं और पुत्रों की ऊँचाइयों का अध्ययन करते समय उन्होंने यह देखा के लम्बे पिताओं के पुत्र लम्बे एवं ठिगने पिताओं के पुत्र भी ठिगने होते हैं, परन्तु लम्बे पिताओं के पुत्रों की औसत ऊंचाई उनके औसत ऊंचाई से कम होती है तथा ठिगने पिताओं के पुत्रों की औसत ऊंचाई उनके पिताओं की औसत ऊंचाई से अधिक होती है। गाल्टन ने यह पता लगाया कि मानव जाति में सामान्य औसत ऊंचाई की ओर वापस आने की प्रवृत्ति होती है, इस प्रवृत्ति को ही प्रतीपगमन (Regression) कहते हैं।

वालिस तथा रॉबर्ट्स ने कहा है कि **"प्रायः यह ज्ञात करना अधिक महत्वपूर्ण होता है कि दो घटनाओं में वास्तविक सम्बन्ध क्या है जिससे एक चल-मूल्य (स्वतंत्र चल-मूल्य) के ज्ञान के आधार पर दूसरे चल-मूल्य (आश्रित चल-मूल्य) का पूर्वानुमान लगाया जा सके और इस प्रकार की स्थिति में प्रयोग की जाने वाली उपयुक्त तकनीक 'प्रतीपगमन विश्लेषण' कहलाती है।"**[1]

प्रतीपगमन विश्लेषण के प्रकार (Kinds of Regression Analysis)

प्रतीपगमन तकनीक द्वारा स्वतंत्र चर के आधार पर आश्रित चर का अनुमान लगाया जाता है। प्रतीपगमन विश्लेषण दो प्रकार का हो सकता है–

(*i*) **रेखीय व वक्रीय प्रतीपगमन** (Linear and Curvilinear Regression)–दो सम्बन्धित समंकमालाओं में प्रतीपगमन का अध्ययन अधिकतर बिन्दुरेखीय ढंग से किया जाता है। x और y श्रेणियों के चल-मूल्यों को बिन्दुरेख- पत्र पर अंकित करने से एक विक्षेप चित्र बन जाता है। विक्षेप चित्र पर अंकित बिन्दुओं के मध्य से गुजरने वाली दो सर्वोपयुक्त रेखाएं (lines of best fit) खींची जा सकती हैं, इन्हीं को प्रतीपगमन रेखाएँ कहते हैं। जब ये रेखाएं सरल (straight) होती हैं तो इन्हें रेखीय प्रतीपगमन की संज्ञा दी जाती है। यदि बिन्दु-चित्र पर खींची जाने वाली रेखाएं वक्र के रूप में होती हैं तो प्रतीपगमन वक्ररेखीय (curvilinear) कहलाता है।

(*ii*) **सरल व बहुगुणी प्रतीपगमन** (Simple and Multiple Regression)–जब दो चरों (x और y) के मध्य प्रतीपगमन का अध्ययन किया जाता है तो सरल (Simple) प्रतीपगमन कहलाता है। इन दो चरों में से एक चर स्वतंत्र होता है, और दूसरा आश्रित। जब दो से अधिक चरों में प्रतीपगमन विश्लेषण का अध्ययन किया जाता है तब वहां बहुगुणी (Multiple) प्रतीपगमन विश्लेषण का अध्ययन करना होता है। यहां दो या दो से अधिक स्वतंत्र चर होते हैं और केवल एक आश्रित। हम यहां पर रेखीय प्रतीपगमन का अध्ययन करेंगे।

प्रतीपगमन की उपयोगिता (Utility of Regression)

1. "It is often more important to find out what the relation actually is, in order to estimate or predict one variable (the dependent variable); and the statistical technique appropriate to such a case is called Regression Analysis." —*Wallis and Roberts*

नोट

आधुनिक सांख्यिकी में प्रतीपगमन की धारणा केवल इसकी वास्तविक विशेषताओं के अध्ययन तक ही सीमित नहीं है। इसका प्रयोग उन सभी क्षेत्रों में किया जाता है जिसमें दो या दो से अधिक सम्बन्धित समंकमालाओं के पद-मूल्यों में सामान्य माध्य की ओर वापस आने की प्रवृत्ति होती है। प्रतीपगमन के आधार पर सामाजिक, आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्रों में विभिन्न तथ्यों के मध्य सम्बन्धों का विश्लेषण करके एक पदमूल्य से सम्बन्धित दूसरी (आश्रित) श्रेणी के सर्वोपयुक्त मूल्य का अनुमान किया जा सकता है।

जिन क्षेत्रों से सम्बन्धित समंकमालाओं के विविध चल-मूल्यों में सामान्य माध्य की ओर वापस आने की प्रवृत्ति पाई जाती है। वहां प्रतीपगमन विश्लेषण की व्यावहारिक उपयोगिता है।

क्या आप जानते हैं सहसम्बन्ध विश्लेषण जहाँ घटनाओं के सहपरिवर्तन के सम्बन्ध को बताता है वहाँ प्रतीपगमन विश्लेषण सम्बन्ध की प्रवृत्ति और मात्रा के आधार पर भावी अनुमान प्रदान करने में सहायता करता है।

इसकी सहायता से मूल्य के आधार पर मांग का, वर्षा की मात्रा, बीज, खाद, आदि के आधार पर कृषि उपज तथा पूंजी के बढ़ाने या घटाने पर लाभ, इत्यादि में होने वाले परिवर्तन का अनुमान लगाया जा सकता है। प्रबन्ध अधिकारियों द्वारा व्यवसाय के नियन्त्रण उपकरण (Control tool) के रूप में प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग किया जाता है। इस प्रविधि (Process) के आधार पर उचित व्यावसायिक निर्णय लेता ही सरल नहीं हो जाता है। वरन् निर्णय को व्यावहारिकता की कसौटी पर परखा भी जा सकता है। जब दो चलों के बीच कारण व प्रभाव (Cause and Effect) का सम्बन्ध होता है तो प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation) की सहायता से एक मूल्य पर आधारित दूसरा मूल्य बड़ी सरलता से निकाला जा सकता है।

नोट्स x का सर्वोत्तम माध्य मूल्य ज्ञात करना हो, तो x का y पर प्रतीपगमन समीकरण (x on y) का प्रयोग करना होगा और यदि y का सर्वोत्तम माध्य मूल्य ज्ञात करना हो, तो y का x पर प्रतीपगमन समीकरण (y on x) का प्रयोग किया जाएगा।

सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन में अन्तर (Difference Between Correlation and Regression)

"जबकि सहसम्बन्ध दो या अधिक घटनाओं में सहपरिवर्तन की घनिष्ठता का परीक्षण करता है, प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis) **इस सम्बन्ध की प्रकृति व मात्रा का माप करके हमें भावी अनुमान लगाने की क्षमता प्रदान करता है।"[1]**

सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन में अन्तर निम्न प्रकार है–

(*i*) **कारण-परिणाम सम्बन्ध** (Cause-Effect Relation)–चल-मूल्यों के कारण परिणाम सम्बन्धों को सहसम्बन्ध विश्लेषण अधिक स्पष्ट करता है, परन्तु दोनों में कौन-सा कारण और कौन-सा परिणाम है यह सहसम्बन्ध से मालूम नहीं पड़ता। इसके विपरीत, प्रतीपगमन विश्लेषण में एक चल को स्वतंत्र मानकर दूसरे आश्रित का मूल्य ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार स्वतंत्र चल कारण होता है और आश्रित परिणाम।

(*ii*) **सहसम्बन्ध की मात्रा एवं प्रकृति** (Degree and Nature of Correlation)–सहसम्बन्ध विश्लेषण के द्वारा दो चरों के मध्य सम्बन्ध की मात्रा का आभास होता है, परन्तु प्रतीपगमन विश्लेषण से सम्बन्ध की

---

1. "While correlation analysis tests the closeness with which two (or more) phenomena covary, regression analysis measures the nature and extent of the relation, thus enabling us to make predictions." —*W.Z. Hirsch*

नोट

प्रकृति का पता चलता है। इसके द्वारा इस बात का पता चलता है कि एक चर के औसत मूल्य के आधार पर उससे सम्बन्धित दूसरे चर का औसत मूल्य कितना होगा?

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)—

1. ········ ने सर्वप्रथम प्रतीपगमन का विश्लेषणात्मक अध्ययन किया।
2. प्रतीपगमन तकनीक द्वारा ········ के आधार पर आश्रित चर का अनुमान लगाया जाता है।
3. जब दो चरों के मध्य ········ का अध्ययन किया जाता है, तो यह सरल प्रतीपगमन कहलाता है।
4. प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग प्रबन्ध अधिकारियों द्वारा व्यवसाय के नियन्त्रण ········ के रूप में किया जाता है।

12.2 रेखीय प्रतीपगमन (Linear Regression)

दो सम्बन्धित आँकड़ों में प्रतीपगमन का विश्लेषण अधिकतर बिन्दुरेखीय रीति द्वारा किया जाता है। X तथा Y श्रेणी के चर-मूल्यों को बिन्दुरेखा पर अंकित करने से एक विक्षेप चित्र बन जाता है। इस चित्र पर अंकित विभिन्न बिन्दुओं के बीच से गुजरती हुई दो सर्वोपयुक्त रेखाएँ खींची जाती हैं। ये रेखाएँ ही प्रतीपगमन रेखाएँ कहलाती हैं। जब ये रेखाएँ सरल होती हैं तो प्रतीपगमन रेखीय कहलाती हैं। इस सरल प्रतीपगमन रेखाओं के समीकरण एक-घातीय प्रवृत्ति के होते हैं। x का y पर प्रतीपगमन रेखा का समीकरण $x = a + by$ होता है तथा y का x पर प्रतीपगमन रेखा का समीकरण $y = a + bx$ होता है।

दो सरल चर-मूल्यों x और y के बीच रेखीय प्रतीपगमन का अध्ययन सरलरेखीय प्रतीपगमन कहलाता है। दोनों चरों में से उस चर को स्वतन्त्र माना जाता है जो ज्ञात होता है और दूसरे चर के अनुमान का आधार होता है और वह चर आश्रित कहलाता है जिसके मूल्य का अनुमान लगाना होता है। प्रतीपगमन की विधि का प्रयोग दो से अधिक चरों के पारस्परिक सम्बन्ध का विश्लेषण करने में भी किया जा सकता है। तीन या तीन से अधिक चरों के लिए प्रयुक्त रेखीय प्रतीपगमन बहुमुखी रेखीय प्रतीपगमन कहलाता है।

प्रतीपगमन रेखाएँ (Regression Lines)

अर्थ—काल-श्रेणियों के विश्लेषण से ज्ञात होता है कि सर्वोपयुक्त रेखा (Line of best fit) द्वारा इस बात का पता चलता है कि समय की इकाई में परिवर्तन होने पर आश्रित श्रेणी में क्या परिवर्तन अपेक्षित है। **दो श्रेणियों के पारस्परिक माध्य सम्बन्ध को प्रकट करने वाली सर्वोपयुक्त रेखाएं इन दोनों श्रेणियों में क्रमशः होने वाले परिवर्तनों को प्रकट करती हैं। इन्हें हम प्रतीपगमन रेखाएं** (Regression Lines) **कहते हैं।**

दो प्रतीपगमन रेखाएं क्यों होती हैं? दो प्रतीपगमन रेखाएं होने का प्रथम कारण तो यह है कि दो सम्बन्धित श्रेणियों के लिए दो प्रतीपगमन रेखाएं होती हैं। एक रेखा y का x पर प्रतीपगमन प्रकट करती है जिसकी रचना x को स्वतंत्र चल-मूल्य (Subject or Independent Series) और y को आश्रित मानकर की जाती है। इसकी सहायता से x के दिए हुए मूल्य के समकक्ष y का मूल्य अनुमानित किया जा सकता है। दूसरी रेखा x का y पर प्रतीपगमन व्यक्त करती है जिसकी रचना में y को स्वतंत्र तथा x को आश्रित माना जाता है तथा इसके आधार पर y के दिए हुए मूल्यों के समकक्ष x के मूल्य ज्ञात किए जाते हैं। दो प्रतीपगमन रेखाएं होने का दूसरा कारण यह है कि प्रतीपगमन रेखाएं वे सर्वोपयुक्त रेखाएं होती हैं जिनकी रचना न्यूनतम वर्ग की मान्यता (Least Squares Assumptions) के आधार पर होती है। न्यूनतम वर्ग रीति के अनुसार खींची जाने वाली रेखा ऐसी होनी चाहिए जिससे विभिन्न बिन्दुओं के विचलनों के वर्गों का योग न्यूनतम हो। बिन्दुओं से रेखा तक के विचलनों को माप दो प्रकार से किया जा सकता है—एक तो क्षैतिज रूप से (Horizontally) अर्थात् भुजाक्ष के समानान्तर तथा दूसरे लम्बवत् (Vertically) अर्थात् कोटि-अक्ष के समानान्तर। दोनों प्रकार के विचलनों के वर्गों के अलग-अलग योग न्यूनतम योग न्यूनतम करने के

लिए दो रेखाओं तक के क्षैतिज विचलनों y पर प्रतीपगमन रेखा इस प्रकार बनायी जाती है कि विभिन्न बिन्दुओं से उस रेखा तक के क्षैतिज विचलनों (Horizontal deviation) के वर्गों का योग न्यूनतम हो जाए। इसी प्रकार y की x पर रेखा की रचना इस ढंग से की जाती है कि इन बिन्दुओं से उस रेखा तक लम्बवत् विचलनों (Vertical deviation) के वर्गों का योग न्यूनतम हो जाए। इस प्रकार की दो प्रतीपगमन रेखाएं होती हैं।

प्रतीपगमन रेखाओं का उपयोग—प्रतीपगमन रेखाओं की सहायता से हमें निम्न बातों का पता लग सकता है—

(1) दोनों श्रेणियों में सहसम्बन्ध है या नहीं।

(2) यदि है तो उसकी प्रकृति धनात्मक है अथवा ऋणात्मक और कम है या अधिक।

(3) एक चल के औसत मूल्य दूसरे चल के औसत मूल्यों से कितना प्रभावित होते हैं?

(4) एक चल के मूल्य पर आधारित दूसरे चल के मूल्य क्या हैं? अर्थात् इन रेखाओं की सहायता एक श्रेणी के दिए हुए मूल्यों के आधार पर दूसरी श्रेणी के तत्सम्बन्धी सर्वोपयुक्त औसत मूल्यों का अनुमान लगाया जा सकता है।

(5) किसी भी चल-बिन्दु पर विचरण का अनुपात (Ratio of Variation) क्या है?

(6) इनके कटान बिन्दु (Point of Intersection) में दोनों पक्षों पर डाले गए लम्ब x और y के समान्तर माध्य मूल्य को व्यक्त करते हैं।

प्रतीपगमन रेखाओं का खींचना

दो चरों के पारस्परिक सम्बन्धित होने पर प्रतीपगमन रेखाएं दो प्रकार से खींची जा सकती हैं—

(*i*) मुक्त-हस्त विधि द्वारा (By Free-hand Method), (*ii*) प्रतीपगमन समीकरणों द्वारा (By Regression Equations)।

जहां तक प्रथम विधि का सम्बन्ध है इसका प्रयोग नहीं होता क्योंकि मुक्त-हस्त से होने के कारण विविध व्यक्तियों द्वारा इनकी रचना भिन्न-भिन्न हो सकती है। अत: प्रतीपगमन समीकरणों के आधार पर इन रेखाओं को खींचा जाता है।

टास्क किन परिस्थितियों में केवल एक प्रतीपगमन रेखा हो सकती है?

प्रतीपगमन रेखाओं के कार्य—प्रतीपगमन रेखाओं के दो प्रमुख कार्य हैं—

(1) सर्वोपयुक्त अनुमान—जैसा कि स्पष्ट किया जा चुका है इन रेखाओं की सहायता से एक श्रेणी के दिए हुए मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के तत्संवादी सर्वोपयुक्त औसत मूल्य का सांख्यिकीय अनुमान लगाया जा सकता है। x की y पर प्रतीपगमन रेखा से x का तथा y की x पर प्रतीपगमन रेखा द्वारा y का सर्वोत्तम अनुमान लगाया जाता है।

(2) सह-सम्बन्ध की मात्रा व दिशा का ज्ञान—प्रतीपगमन रेखाओं की सहायता से निम्नलिखित नियमों के आधार पर यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि दोनों श्रेणियों में सह-सम्बन्ध कितना और कैसा है—

(*i*) **धनात्मक**—जब दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ रेखाचित्र पर बायें निचले कोने से दाहिने ऊपर के कोने की ओर बढ़ती हैं तो x और y में धनात्मक सह-सम्बन्ध होता है।

(*ii*) **ऋणात्मक**—इसके विपरीत जब ये रेखाएँ ऊपर से नीचे की ओर जाती हैं तो सह-सम्बन्ध ऋणात्मक होता है।

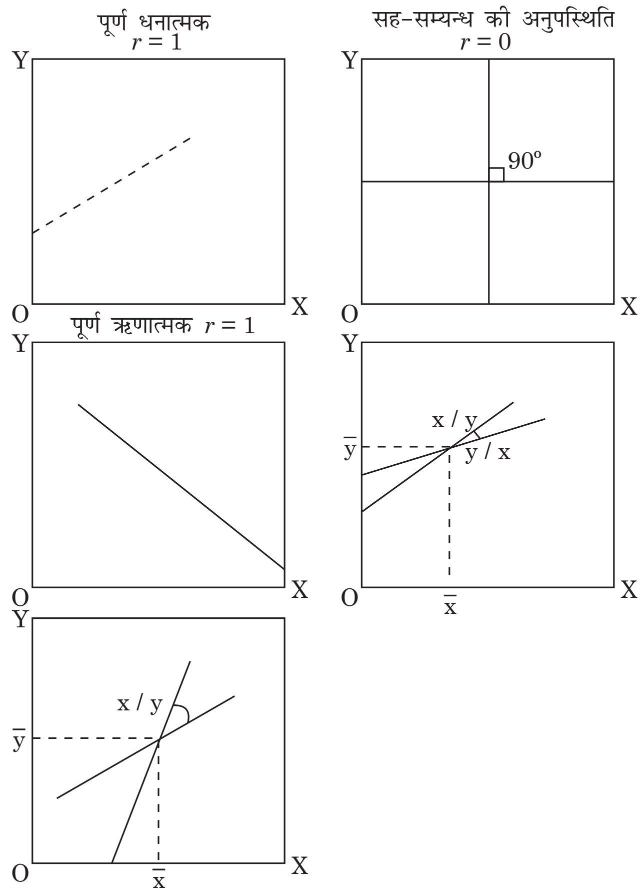
(*iii*) **पूर्ण सह-सम्बन्ध एक रेखा**—जब विक्षेप चित्र पर अंकित विभिन्न बिन्दु एक ही सीधी रेखा के रूप में हों तो दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को पूरी तरह ढक लेती हैं। ऐसी स्थिति में श्रेणियों में पूर्ण सह-सम्बन्ध होता है। दूसरे शब्दों में, x और y में पूर्ण सह-सम्बन्ध होने पर एक ही प्रतीगमन रेखा बनती है।

नोट

(*iv*) **सह-सम्बन्ध का अभाव–**यदि दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को समकोण अर्थात् 90° के कोण पर काटती हों तो x और y में बिल्कुल सह-सम्बन्ध नहीं पाया जाता। इस स्थिति में विशेष चित्र पर विभिन्न बिन्दु चारों ओर बिखरे होते हैं तथा उनमें कोई सुनिश्चित प्रवृत्ति नहीं पाई जाती।

(*v*) **सीमित सह-सम्बन्ध–**दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक-दूसरे को जितनी निकट होंगी x और y में उतना ही अधिक सह-सम्बन्ध होगा। इसके विपरीत ये रेखाएँ एक-दूसरे से जितनी दूर होती जायेंगी सह-सम्बन्ध की मात्रा उतनी ही कम होती जायेगी। ये रेखाएँ दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य के संयोग से प्रांकित बिन्दु पर एक-दूसरे को काटती हैं। अत:जहाँ पर यह मिलती हैं उस लम्ब को x तथा y के समान्तर माध्य-मूल्यों में व्यक्त करते हैं।

निम्न चित्र से प्रतीपगमन रेखाओं से सम्बन्धित उपर्युक्त नियम स्पष्ट हो जाते हैं–



चित्र 12.2

प्रतीपगमन रेखाओं की रचना दो प्रकार से की जा सकती है–(क) मुक्त-हस्त रीति द्वारा, (ख) प्रतीपगमन समीकरण द्वारा।

पहले वाली रीति का प्रयोग सामान्यत: नहीं किया जाता है।

प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation)

प्रतीपगमन समीकरण, प्रतीपगमन रेखाओं का बीजगणितीय ढंग पर वर्णन की रीति है। रेखाओं की भांति समीकरण भी दो होते हैं। प्रतीपगमन समीकरण दो समंकमालाओं के समान्तर माध्यों के सम्बन्ध में एक श्रेणी में उसके माध्य से विचरण तथा दूसरी श्रेणी के माध्य से उसके विचरण की तुलना को प्रकट करते हैं। प्रतीपगमन समीकरण

नोट

प्रतीपगमन रेखाओं को व्यक्त करते हैं। जिस प्रकार x की y पर प्रतीपगमन रेखा y के दिए हुए मूल्यों के लिए अति सम्भावित x के मूल्यों का प्रदर्शन करती है और इसी भांति y की x पर प्रतीपगमन रेखा के दिये हुए मूल्यों के समकक्ष y के मूल्य बताती है। इसी प्रकार का पर प्रतीपगमन समीकरण के मूल्यों में विचरण प्रकट करता है जो x में परिवर्तन होने पर अपेक्षित होंगे। रेखीय प्रतीपगमन समीकरण उन सर्वोपयुक्त रेखाओं के समीकरण होते हैं जिन्हें न्यूनतम वर्ग पद्धति के आधार पर बनाया जाता है—

(*i*) x का y पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation of x on y) :

$$x = c + dy$$

इसी समीकरण के द्वारा y (स्वतंत्र चर-मूल्य) के दिये हुए मूल्यों के आधार पर x (आश्रित चर-मूल्य) के तत्सम्बन्धी सर्वोत्तम माध्य मूल्य ज्ञात किए जाते हैं। इस समीकरण को सहसम्बन्ध गुणांक, प्रमाप विचलन और समान्तर माध्यों के मानों के रूप में निम्नलिखित ढंग पर लिखा जा सकता है :

$$x = \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

यहाँ पर $\bar{x}$ और $\bar{y}$ क्रमशः समंकमालाओं के समान्तर माध्यों को प्रटक करते हैं और σ_x तथा σ_y उनके प्रमाप विचलनों को और r उन दोनों के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक को प्रकट करता है।

अचर-मूल्य 'c' अन्तःखण्ड (intercept) है अर्थात् वह बिन्दु है जिस पर प्रतीपगमन रेखा $x = c + dy$ भुजा-अक्ष (x-axis) को स्पर्श करती है। अचर-मूल्य 'd' प्रतीपगमन रेखा का ढाल प्रदर्शित करता है। इसे x का y पर प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient of x on y) कहते हैं। प्रायः इसे b_{xy} से प्रकट करते हैं। इस प्रकार,

$$x = \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

के अन्तर्गत $$c = \bar{x} - d\bar{y},\ d = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = b_{xy}$$

$\bar{x} - d\bar{y}$ को अन्तःखण्ड (c) का बीजगणितीय माप कहा जा सकता है।

(*ii*) y का x पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation of y on x):

$$y = a + bx$$

इस समीकरण के द्वारा x (स्वतंत्र चर-मूल्य) के लिए हुए मूल्यों के आधार पर y (आश्रित चर-मूल्य) के तत्सम्बन्धी सर्वोत्तम मूल्य ज्ञात किए जाते हैं। इस समीकरण को निम्न प्रकार रखा जाता है :

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

जहां $$a = \bar{y} - b\bar{x},\ b = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = b_{yx}$$

इन समीकरणों में 'a' और 'b' अचर-मूल्य (constant) हैं। अचर-मूल्य 'a' अन्तःखण्ड (intercept) है अर्थात् वह बिन्दु है जिस पर प्रतीपगमन रेखा कोटि-अक्ष (y-axis) को स्पर्श करती है। रेखाचित्र पर मूलबिन्दू (O) के कोटि-अक्ष पर प्रतीपगमन रेखा के स्पर्श बिन्दु का अन्तर ही अन्तःखण्ड कहलाता है। जब a का मूल्य धनात्मक होता है तो रेखा y-axis को मूल्यबिन्दु (O) से ऊपर की ओर स्पर्श करती है तथा जब a का मूल्य शून्य हो, तो रेखा मूलबिन्दु से प्रारम्भ होती है।

दूसरा अचर-मूल्य 'b' प्रतीपगमन रेखा का ढाल (Slope of the line) प्रदर्शित करता है। इसे y का x पर प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient of y on x) कहते हैं। प्रायः इसे b_{yx} से प्रकट करते हैं। इससे यह ज्ञात होता है

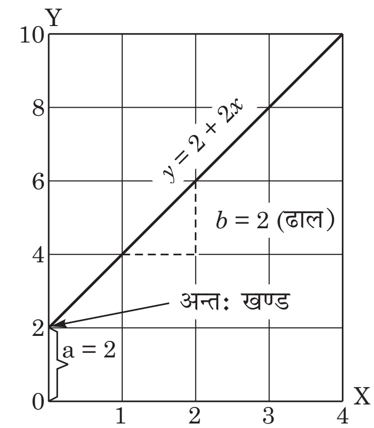
नोट

कि स्वतंत्र इकाइयों में परिवर्तन होने पर आश्रित इकाइयों में क्या परिवर्तन अपेक्षित है। यदि b का मूल्य धनात्मक हो, तो रेखा का ढलान बायें से दायें ऊपर की ओर होगा, परन्तु b के ऋणात्मक होने पर रेखा नीचे की ओर ढलान वाली होगी।

संलग्न प्रदर्शित बिन्दुरेखा चित्र में $y = a + bx(y = 2 + 2x)$ समीकरण से बनी वक्र में 'a' एवं 'b' की स्थिति को स्पष्ट किया गया है :

$y = 2 + 2x$

x	y
0	2
1	4
2	6
3	8
4	10



स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

उदाहरण (Illustration) 1: निम्न आंकड़ों से आगरा में 70 रुपये मूल्य के संगत दिल्ली में महत्तम सम्भावित मूल्य ज्ञात कीजिए :

	आगरा (Agra)	दिल्ली (Delhi)
माध्य मूल्य [Average Price (Rs.)]	65	67
प्रमाप विचलन (Standard Deviation)	2.5	3.5
दोनों स्थान के मूल्यों में सहसम्बन्ध गुणांक	+ .8	

हल (Solution):

मान लो x = आगरा के मूल्य, y = दिल्ली के मूल्य

ज्ञात है : $\bar{x} = 65$, $\bar{y} = 67$, $\sigma_x = 2.5$, $\sigma_y = 3.5$, $r = +.8$

y का x पर प्रतीपगमन समीकरण (y on x)

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

मान रखने पर, $$\bar{y} - 67 = .8\frac{3.5}{2.5}(70 - 65)$$

या $y - 67 = .8 \times 1.4 \times 5$

या $y - 67 = 5.6$ या $y = 5.6 + 67 = 72.6$

$\therefore$ दिल्ली में मूल्य = 72.6 रुपये है जबकि आगरा में मूल्य 70 रुपये हो।

उदाहरण (Illustration) 2: निम्नलिखित मान दिए हुए हैं (Given the following values :

गेहूं उपज (Yield of wheat)	**औसत** (Mean)	**प्रमाप विचलन** (Standard deviation)
क्षेत्र (किग्रा प्रति इकाई) [Area (kg per unit)]	10	8
वर्षा (सेमी. में) [Rain (in cm.)]	8	2

उत्पादन व वर्षा के बीच सहसम्बन्ध गुणांक **नोट**

$r = 0.5$

सम्भावित उत्पादन बताइए जबकि वर्षा 9 सेमी हो।

हल (Solution):

माना x = उपज, y = वर्षा

ज्ञात है : $\bar{x} = 10, \bar{y} = 8, \sigma_x = 8, \sigma_y = 2, r = 0.5$

x का y पर प्रतीपगमन समीकरण (x on y)

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

ज्ञात मान रखने पर, $x - 10 = .5 \times \frac{8}{2}(y - 8)$

या $x - 10 = 2(y - 8)$ या $x - 10 = 2y - 16$ या $x = 2y - 6$

सम्भावित उपज जबकि वर्षा 9 सेमी हो,

$x = 2 \times 9 - 6 = 18 - 6 = 12$ किग्रा प्रति इकाई क्षेत्रफल

उदाहरण (Illustration) 3: निम्न आंकड़ों के आधार पर जो प्रतीपगमन रेखाएं प्राप्त होती हैं उनसे (*i*) पति की प्रत्याशित आयु ज्ञात करें जब पत्नी की आयु 12 वर्ष है तथा (*ii*) पत्नी की प्रत्याशित आयु ज्ञात करें जब पति की आयु 33 वर्ष है।

	माध्य (Mean)	**प्रमाप विचलन** (Standard deviation)
पति की आयु (Husband's age)	25 वर्ष (years)	4 वर्ष (yeas)
पत्नी की आयु (Wife's age)	32 वर्ष (years)	5 वर्ष (years)

पति और पत्नी की आयु के बीच सहसम्बन्ध गुणांक

= 0.8

हल (Solution):

माना x = पति की आयु, y = पत्नी की आयु

दिया हुआ है : $\bar{x} = 25, \sigma = 4, \sigma = 5, r = .8$

x का y पर समीकरण (x on y)

$$x = \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

$$x - 25 = 0.8 \times \frac{4}{5}(y - 22)$$

या $x - 25 = 0.64(y - 22)$

या $x = 0.64y + 14.08$

यदि पत्नी की आयु 12 वर्ष हो तो,

पति की आयु $x = 0.64 \times 12 + 14.08$

$= 7.68 + 14.08 = 21.76$ वर्ष

y का x पर प्रतीपगमन समीकरण (y on x)

$$y = \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

$$y - 22 = 0.8 \times \frac{5}{4}(x - 25)$$

या $ny - 22 = 1.0(x - 25)$

$y = x - 25 + 22$

या $y = x - 3$

यदि पति की आयु 33 वर्ष हो, तो

पत्नी की आयु $y = 33 - 3 = 30$ वर्ष

नोट

उदाहरण (Illustration) 4: 7 कस्बों में टी.वी. सेट की मांग के एक अन्वेषण से निम्न आंकड़े प्राप्त हुए :

जनसंख्या (हजार में) [Population (in thousands)]	x :	11	14	14	17	17	21	25
टी.वी. सेटों की मांग [No. of T.V. Sets demanded)]	y :	15	27	27	30	34	38	46

y का x पर प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए। तीस हजार जनसंख्या वाले कस्बे में टी.वी. सेटों की मांग को अनुमानित कीजिए।

हल (Solution):

जनसंख्या ('000) x	d_x ($\bar{x} = 17$)	d_x^2	टी.वी. सेट y	d_y ($\bar{y} = 31$)	d_y^2	$d_x d_y$
11	–6	36	15	–16	256	+ 96
14	–3	9	27	–4	16	+ 12
14	–3	9	27	–4	16	+ 12
17	0	0	30	–1	1	0
17	0	0	34	+ 3	9	0
21	+ 4	16	38	+ 7	49	28
25	+ 8	64	46	+ 15	225	120
$\Sigma x = 119$		$\Sigma d_x^2 = 134$	$\Sigma y = 217$		$\Sigma d_y^2 = 572$	$\Sigma d_x d_y = 268$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{119}{7} = 17 \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{217}{7} = 31$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{N}} \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma d_y^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{134}{7}} = \sqrt{19.14} = 4.37 \qquad = \sqrt{\frac{572}{7}} = \sqrt{81.71} = 0.04$$

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d_x^2 \times \Sigma d_y^2}} = \frac{268}{\sqrt{134 \times 572}} = \frac{268}{\sqrt{76.648}} = \frac{268}{277} = .97$$

y का x पर प्रतीपगमन समीकरण (y on x)

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

मान रखने पर, $\quad y - 31 = .97\dfrac{9.04}{4.37}(x - 17)$

$\Rightarrow \quad y - 31 = 2.06(x - 17)$

$\Rightarrow \quad y = 2.06x - 35.02 + 31$

या $\quad y = 2.06x - 4.02$

जनसंख्या 30 हजार होने पर टी.वी. सेटों की औसत मांग निकालने के लिए समीकरण (y on x) में x के स्थान पर 30 रखते हैं :

नोट

$y = (2.06 \times 30) - 4.02 = 61.80 - 4.02 = 57.78$ या 58

टिप्पणी—$b_{yx} = \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ तथा $b_{xy} = \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ के मान निम्न सूत्र से भी ज्ञात किए जा सकते हैं :

$$b_{yx} = \frac{\Sigma d_x d_y}{\Sigma d_x^2} = \frac{268}{134} = 2, \quad b_{xy} = \frac{\Sigma d_x d_y}{\Sigma d_y^2}, \; r = r_{xy} = \frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x \sigma_y}$$

जहां, $d_x = x - \bar{x}$ तथा $d_y = y - \bar{y}$ तब $y - \bar{y} = b_{xy}(x - \bar{x})$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 57$ जबकि $x = 30$ है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए

1. निम्नलिखित आंकड़ों से दोनों प्रतीपमान रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए :

x :	6	2	10	4	8
y :	9	10	5	8	7

2. निम्नलिखित आंकड़ों से दोनों प्रतीपमान रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए :

x :	27	27	27	28	28	18	29	29	30	31
y :	18	18	19	20	21	21	22	23	24	25

3. 11 विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी में निम्नांकित अंक प्राप्त किये गये। प्रतीपमान रेखाओं के समीकरण ज्ञात करें।

प्रश्न-पत्र (Paper) I :	45	55	56	58	60	65	68	70	75	80	85
प्रश्न-पत्र (Paper) II :	56	50	48	60	62	64	65	70	74	82	90

4. निम्न श्रेणियों के लिए दोनों प्रतीपमान रेखाएं ज्ञात करें। y का अत्यधिक सम्भावित मान क्या होगा जबकि $x = 150$ हो :

x :	147	148	135	151	136	148	157	110	162
y :	191	288	410	482	513	506	468	477	541

5. पांच परिवारों के परिवार सदस्यों की संख्या (E) और उनका मासिक व्यय (N) निम्न प्रकार है :

E :	250	300	410	450	565
N :	2	3	4	5	6

E का N पर प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करो। यदि परिवार का आकार 8 हो तो सम्भावित मासिक व्यय क्या होगा?

12.3 सारांश (Summary)

- सांख्यिकी में 'प्रतीपगमन' का शाब्दिक अर्थ वापस आने या पीछे लौटने से है। इस शब्द के प्रयोग का श्रेय **सर फ्रांसिस गल्टन** (Sir Francis Galton) को दिया जाता है। इन्होंने ही सर्वप्रथम प्रतीपगमन का विश्लेषणात्मक अध्ययन किया।
- प्रतीपगमन के आधार पर सामाजिक, आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्रों में विभिन्न तथ्यों के मध्य सम्बन्धों का विश्लेषण करके एक पदमूल्य से सम्बन्धित दूसरी (आश्रित) श्रेणी के सर्वोपयुक्त मूल्य का अनुमान किया जा सकता है।

नोट

- सहसम्बन्ध दो या अधिक घटनाओं में सहपरिवर्तन की घनिष्ठता का परीक्षण करता है, प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis) इस सम्बन्ध की प्रकृति व मात्रा का माप करके हमें भावी अनुमान लगाने की क्षमता प्रदान करता है।
- दो सम्बन्धित आँकड़ों में प्रतीपगमन का विश्लेषण अधिकतर बिन्दुरेखीय रीति द्वारा किया जाता है। X तथा Y श्रेणी के चर-मूल्यों को बिन्दुरेखा पर अंकित करने से एक विक्षेप चित्र बन जाता है।
- दो श्रेणियों के पारस्परिक माध्य सम्बन्ध को प्रकट करने वाली सर्वोपयुक्त रेखाएं इन दोनों श्रेणियों में क्रमशः होने वाले परिवर्तनों को प्रकट करती हैं। इन्हें हम प्रतीपगमन रेखाएं (Regression Lines) कहते हैं।
- प्रतीपगमन समीकरण, प्रतीपगमन रेखाओं का बीजगणितीय ढंग पर वर्णन की रीति है। रेखाओं की भांति समीकरण भी दो होते हैं। प्रतीपगमन समीकरण दो समंकमालाओं के समान्तर माध्यों के सम्बन्ध में एक श्रेणी में उसके माध्य से विचरण तथा दूसरी श्रेणी के माध्य से उसके विचरण की तुलना को प्रकट करते हैं।

12.4 शब्दकोश (Keywords)

- **परिवर्तन**—परिवर्तन के साथ, परिवर्तन सहित।
- **वक्रीय**—टेढ़ा, तिरछा।
- **विचरण**—घूमना, चलना।

12.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. प्रतीपगमन की परिभाषा दीजिए तथा इसके महत्व को समझाइए।
2. प्रतीपगमन रेखाएँ दो क्यों होती हैं।
3. प्रतीपगमन के विचार की व्याख्या कीजिए। यह सहसंबंध से किस प्रकार भिन्न है?
4. प्रतीपगमन विश्लेषण पर प्रकाश डालिए।
5. प्रतीपगमन समीकरण की व्याख्या कीजिए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answers: Self Assessment)

1. 1. सर फ्रांसिस गाल्टन 2. स्वतंत्र चर 3. प्रतीपगमन 4. उपकरण।

2. 1. $x = -1.5y + 17.7$; $y = -0.55x + 11.1$

2. $x = -0.5y + 15.58$; $y = -0.26x + 13.98$

3. $x = 0.85y + 9.454$; y की x पर: $y = 0.99x + 1.03$

4. $x = -0.07y + 180.156$; $y = -1.5x + 655.8$; $y = 430.8$

5. E = 78N + 83; 707 रु.

12.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा

नोट

इकाई—13: साधारण प्रतीपगमन गुणांक विधि (Co-efficient of Simple Regression Method)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- प्रतीपगमन गुणांक तथा उसके परिकलन की विवेचना करने में।
- प्रतीपगमन रेखाओं की रचना करने में।
- द्विचर आवृत्ति बंटन में प्रतीपगमन गुणांक की गणना की व्याख्या को समझने, तथा में न्यूनतम-वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण किस प्रकार ज्ञात करेंगे के जानने में ।

प्रस्तावना (Introduction)

दो सम्बद्ध श्रेणियों का प्रतीपगमन विश्लेषण करते समय उनके दो प्रतीपगमन गुणांक भी निकाले जाते हैं। प्रतीपगमन गुणांक वह अनुपात है जो यह बतलाता है कि एक श्रेणी के चर मूल्यों में 1 का परिवर्तन होने से दूसरी श्रेणी के चर-मूल्यों में औसतन कितना परिवर्तन होगा।

नोट

13.1 साधारण प्रतीपगमन गुणांक (Co-efficient of Simple Regression)

प्रतीपगमन गुणांक यह बतलाते हैं कि एक चर में एक इकाई का परिवर्तन होने पर दूसरे चर में औसत रूप से कितना परिवर्तन होगा। प्रतीपगमन समीकरण की तरह प्रतीपगमन गुणांक भी दो होते हैं–

(*i*) **X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक**–इसे *bxy* संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है। यह गुणांक बतलाता है कि Y चर में एक इकाई का परिवर्तन होने पर X में कितना परितर्वन होगा, इसकी गणना निम्न प्रकार से की जाती है–

$$bxy = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

सूत्र में–

bxy = X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

σ_x = X चर का प्रमाप विचलन

σ_y = Y चर का प्रमाप विचलन

r = सहसम्बन्ध गुणाँक 5

bxy का माप X की Y पर प्रतीपगमन रेखा के ढाल को भी व्यक्त करता है, इसे b_1 संकेताक्षर द्वारा भी व्यक्त किया जाता है।

(*i*) **Y का X प्रतीपगमन गुणांक**–इसे *byx* संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है। यह गुणांक बतलाता है कि X चर में एक इकाई का परिवर्तन होने पर Y में कितना परिवर्तन होगा। *byx* का माप Y की X पर प्रतीपगमन रेखा के ढाल को भी व्यक्त करता है। इसकी गणना के लिए निम्न समीकरण का प्रयोग किया जाता है–

$$byx = r\frac{\sigma_y}{\sigma_z}$$

byx = Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक।

इस गुणांक की b_2 संकेताक्षर द्वारा भी व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 1: निम्न समंकों की सहायता से प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात कीजिए–

$$r = 0.6 \quad \sigma_x = 16 \quad \sigma_y = 48$$

हल (Solution): X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$bxy = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = .6\frac{16}{48} = .2$$

अर्थात् Y में एक इकाई का परिवर्तन होने पर X में औसत रूप से .2 के बराबर परिवर्तन होगा। Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$byx = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = .6\frac{48}{16} = 1.8$$

अर्थात् X में एक इकाई का परिवर्तन होने पर Y में औसत रूप से 1.8 का परिवर्तन होगा।

प्रतीपगमन गुणांक से सहसम्बन्ध गुणांक की गणना–प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात होने पर सहसम्बन्ध गुणांक (*r*) की गणना सरलता से की जा सकती है। सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है–

(*i*) सर्वप्रथम दोनों प्रतीपगमन गुणांकों का गुणनफल ज्ञात किया जाता है–

$$(\overline{bxy} \times byx)$$

(*ii*) गुणनफल का वर्गमूल ज्ञात किया जाता है। वर्गमूल से प्राप्त मूल्य ही सहसम्बन्ध गुणांक होगा—
समीकरण के रूप में—

$$r = \sqrt{bxy \times byx}$$

$$= \sqrt{r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \times r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$$

$$= \sqrt{r^2} = r$$

उदाहरण संख्या 5 में प्रतीपगमन गुणांक क्रमश: 2 और 1.8 है। सहसम्बन्ध गुणांक—

$$r = \sqrt{.2 \times 1.8}$$

$$= \sqrt{.36} = 6 \text{ होगा।}$$

उदाहरण (Illustration) 2: किन्हीं आँकड़ों के लिए

$$Y = 1.3X \quad \text{तथा}$$
$$X = 0.7Y$$

दो प्रतीपगमन रेखाएँ हैं। x व y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक निकालिए।

हल Solution: $r = o$

प्रश्न में $b_1 = 0.7$ तथा $b_2 = 1.3$ है

अत: $r = \sqrt{0.7 \times 1.3}$

$$= \sqrt{.91} = .95$$

$$r = .95$$

चूंकि सहसम्बन्ध गुणांक का मूल्य 1 से अधिक नहीं होता है, अत: bxy एवं byx का गुणनफल भी 1 से अधिक नहीं होगा। यदि गुणनफल 1 से अधिक हुआ तो उसका वर्गमूल भी 1 से अधिक होगा; अर्थात् r का मूल्य 1 से अधिक होगा जो कि असम्भव है। b_1 एवं b_2 दोनों ऋणात्मक होने पर r भी ऋणात्मक होगा।

उदाहरण (Illustration) 3: दो रेण्डम चरों का प्रतीपगमन $3X + 2Y - 26 = 0$ तथा $6X + Y - 31 = 0$ समीकरणों से सूचित किया जाता है। X व Y के माध्य तथा इनके बीच सहसम्बन्ध गुणांक निकालिए।

हल (Solution): (अ) समान्तर माध्य मूल्य

$$3x + 2y = 26 \qquad ...(i)$$

$$6x + y = 31 \qquad ...(ii)$$

समीकरण (*i*) को 2 से गुणा करने पर—

$$6x + 4y = 52 \qquad ...(iii)$$

समीकरण (*ii*) को (*iii*) में से घटाने पर—

$$6x + 4y = 52$$
$$6x + y = 31$$
$$- \quad - \quad -$$
$$3y = 21$$

$$\therefore \quad y = 7$$

समीकरण (*i*) में y मान रखने पर—

$$3x + (2 \times 7) = 26 \quad \text{or} \quad 2x + 14 = 26$$

$$3x = 26 - 14 \quad \text{or} \quad 3x = 12 \quad \therefore \quad x = 4$$

नोट

अर्थात् $\overline{x} = 4$ एवं $\overline{y} = 7$

(ब) x तथा y का सहसम्बन्ध गुणांक–

$6x + y = 31$ or $6x = -y + 31$

$$x = \frac{-y}{6} + \frac{31}{6} \qquad x = -.167y + 5.167$$

अर्थात् bxy या $b_1 = -.167$

$3x + 2y = 26$ or $2y = -3x + 26$

$$y = \frac{-3x}{2} + \frac{26}{2} \qquad \text{or} \quad y = -1.5x + 13$$

अर्थात् byx या $b_2 = -1.5$

$$r = \sqrt{bxy \times byx} \quad \text{or} \quad \sqrt{-.167 \times -1.5}$$

$$= -\sqrt{.2505} = -.5$$

अर्थात् सहसम्बन्ध गुणांक $= -.5$

> नोट्स प्रतीपगमन समीकरण की तरह प्रतीपगमन गुणांक भी दो होते हैं।

13.2 प्रतीपगमन गुणांक का परिकलन (Calculation of Regression Co-efficients)

दो सम्बद्ध श्रेणियों के अलग-अलग चर मूल्य दिए होने पर प्रतीपगमन गुणांकों की गणना को सरल बनाने के लिए निम्न विधियों का प्रयोग किया जाता है, ये विधियाँ प्रमाप विचलन एवं सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की रीतियों पर आधारित हैं।

(1) जब वास्तविक अंकगणितीय माध्य से विचलन लिए गए हों–जब गणना करते समय विचलन वास्तविक अंकगणितीय माध्य से लिए गए हों तो निम्नांकित सूत्रों के प्रयोग द्वारा प्रतीपगमन गुणांक का परिकलन किया जा सकता है–

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक (bxy या b_1)

$$bxy = r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{\Sigma dxdy}{n.\sigma x \sigma y} \times \frac{\sigma x}{\sigma y} \qquad \left[\text{चूंकि } r = \frac{\Sigma dxdy}{n.\sigma x.\sigma y}\right]$$

$$= \frac{\Sigma dxdy}{n.\sigma y^2}$$

$$= \frac{\Sigma dxdy}{n \times \frac{\Sigma dy^2}{n}} \qquad \left[\text{चूंकि } \sigma y^2 = \frac{\Sigma dy^2}{n}\right]$$

$$= \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dy^2}$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक (byx या b_2)

$$byx = r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{\Sigma dxdy}{x.\sigma x.\sigma y} \times \frac{\sigma y}{\sigma x}$$

नोट

$$= \frac{\Sigma dxdy}{n.\sigma x^2} = \frac{\Sigma dxdy}{n \times \frac{\Sigma dx^2}{n}} = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dx^2}$$

अर्थात् $$b_1 = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dy^2}; \quad b_2 = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dx^2}$$

$\Sigma dxdy$ = X एवं Y के वास्तविक माध्य से ज्ञात विचलनों के गुणनफल का योग

Σdy^2 = Y श्रेणी के वास्तविक माध्य से ज्ञात विचलनों के वर्ग का योग

Σdx^2 = X श्रेणी के वास्तविक माध्य से ज्ञात विचलनों के वर्ग का योग

(2) जब कल्पित माध्य से विचलन लिए गए हो—जब वास्तविक अंकगणितीय माध्य पूर्णांक में न हों तो ऐसे समय कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात कर प्रतीपगमन गुणांकों का परिकलन किया जाना चाहिए। कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किए गए हों तो निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जाना चाहिए—

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$bxy = r\frac{\sigma x}{\sigma y}$$

$$= \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N.\sigma x.\sigma y} \times \frac{\sigma x}{\sigma y}$$

$$= \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N.\sigma y^2}$$

$$= \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N\left[\frac{\Sigma dy^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma dy^2 - \left(\frac{\Sigma dy}{N}\right)^2}$$

$$= \frac{N.\Sigma dxdy - (\Sigma dx)\,(\Sigma dy)}{N.\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$byx = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$$

$$= \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N.\sigma x.\sigma y} \times \frac{\sigma y}{\sigma x}$$

नोट

$$= \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N\sigma x^2}$$

$$= \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{N\left[\frac{\Sigma dx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma dx^2 - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$$

$$= \frac{N.\Sigma dxdy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N.\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}$$

सूत्र में–

$\Sigma dxdy$ = X व Y श्रेणी के कल्पित माध्यों से ज्ञात विचलनों के गुणनफल का योग।

Σdx^2 = X श्रेणी के कल्पित माध्य से ज्ञात विचलनों के वर्ग का योग।

Σdy^2 = Y की श्रेणी के कल्पित माध्य से ज्ञात विचलनों के वर्ग का योग।

Σdx = X श्रेणी के कल्पित माध्य से ज्ञात विचलनों का योग।

Σdy = Y श्रेणी के कल्पित माध्य से ज्ञात विचलनों का योग।

प्रतीपगमन गुणांकों के आधार कर प्रतीपगमन समीकरणों को निम्न प्रकार व्यक्त किया जाएगा–

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$X - \overline{X} = bxy\,(Y - \overline{Y})$ या $X - \overline{X} = b_1\,(Y - \overline{Y})$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

$Y - \overline{Y} = b_2\,(X - \overline{X})$

उदाहरण (Illustration) 4: निम्न सारणी से Y का X पर एवं X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त कीजिए एवं जब आयु (X) 50 वर्ष हो तो रक्तचाप का अनुमान लगाइए–

Age (आयु) (X)	**Blood Pressure (रक्तचाप) (Y)**
56	147
42	125
72	160
36	118
63	149
47	128
55	150
49	145
38	115
42	140
68	152
60	155

नोट

हल (Solution) :

प्रतीपगमन गुणांकों का परिकलन

Age X	(X – A) A = 62 dx	dx^2	Blood Pressure Y	(Y – A) A = 140 dy	dy^2	$dxdy$
56	– 6	36	147	+ 7	49	– 42
42	– 20	400	125	– 15	225	+ 300
72	+ 10	100	160	+ 20	400	+ 200
36	– 26	676	118	– 22	484	+ 572
63	+ 1	1	149	+ 9	81	+ 9
47	– 15	225	128	– 12	144	+ 180
55	– 7	49	150	+ 10	100	– 70
49	– 13	169	145	+ 5	25	– 65
38	– 24	576	115	– 25	625	+ 600
42	– 20	400	140	0	0	0
68	+ 6	36	152	+ 12	144	+ 72
60	– 2	4	155	+ 15	225	– 30
628	– 116	2672	1684	4	2502	1726
Σx	Σdx	Σdx^2	Σy	Σdy	Σdy^2	$\Sigma dxdy$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$$X - \overline{X} = bxy\,(Y - \overline{Y})$$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{628}{12} = 52.33$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{1684}{12} = 140.33$$

$$bxy = \frac{N.\Sigma dxdy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N.\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}$$

$$= \frac{12 \times 1726 - (\bar{1}16)(4)}{12 \times 2502 - (4)^2}$$

$$= \frac{20712 + 464}{30024 - 16}$$

$$= \frac{21176}{30008} = .706$$

$$X - \overline{X} = bxy\,(Y - \overline{Y})$$

$$X - 52.33 = .706\,(Y - 140.33)$$

$$X - 52.33 = .706Y - 99.07 + 52.33$$

$$X = .706Y - 99.07 + 52.33$$

$$X = .706Y - 46.74$$

नोट

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

$$Y - \overline{Y} = byx\,(X - \overline{X})$$

byx की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाएगी–

$$byx = \frac{N.\Sigma dxdy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N.\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}$$

$$byx = \frac{12 \times 1726 - \bar{(}116)(4)}{12 \times 2672 - (-116)^2}$$

$$= \frac{20712 + 464}{32064 - 13456}$$

$$= \frac{21176}{18608} = 1.138$$

$$Y - \overline{Y} = byx\,(X - \overline{X})$$

$$Y - 140.33 = 1.138(X - 52.33)$$

$$Y - 140.33 = 1.138\,X - 59.55$$

$$Y = 1.138X - 59.55 + 140.33$$

$$Y = 1.138X + 80.78$$

जब आयु (X) 50 है तो रक्तचाप

$$Y = 1.138 \times 50 + 80.78$$

$$= 56.90 + 80.78 = 137.68$$

13.3 प्रतीपगमन रेखाओं की रचना (Forming of Regression Lines)

प्रतीपगमन रेखाओं की रचना प्रतीपगमन समीकरणों की सहायता से की जाती है। प्रतीपगमन रेखाओं की रचना की विधि निम्न प्रकार है–

(*i*) **X की Y पर प्रतीपगमन रेखा–**X की Y पर प्रतीपगमन रेखा की रचना के लिए X के Y पर प्रतीपगमन समीकरण का प्रयोग किया जाता है, इस समीकरण की सहायता से Y के दिए हुए सभी मूल्यों के लिए X के सर्वोत्तम सम्भावित मूल्य ज्ञात कर लिए जाते हैं। Y के वास्तविक मूल्यों एवं उनसे सम्बन्धित X के सर्वोत्तम सम्भावित मूल्यों को रेखाचित्र पर प्रांकित किया जाता है, प्राप्त बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त रेखा X की Y पर प्रतीपगमन रेखा कहलाती है। पिछले उदाहरण में X की Y पर प्रतीपगमन रेखा की रचना के लिए X के सर्वोत्तम मूल्य निम्न प्रकार ज्ञात किए जाएंगे–

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण X = .706 Y – 46.74

Y के वास्तविक या प्रदत्त मूल्य	X के संगणित मूल्य
147	.706 × 147 – 46.74 = 57.04
125	.706 × 125 – 46.74 = 41.51
160	.706 × 160 – 46.74 = 66.22
118	.706 × 118 – 46.74 = 36.57
149	.706 × 149 – 46.74 = 58.45
128	.706 × 128 – 46.74 = 43.63
150	.706 × 150 – 46.74 = 59.16
145	.706 × 145 – 46.74 = 55.63

115	.706 × 115 – 46.74 = 34.45
140	.706 × 140 – 46.74 = 52.10
152	.706 × 152 – 46.74 = 60.57
155	.706 × 155 – 46.74 = 62.69

इन मूल्यों को रेखाचित्र 3 में प्रांकित कर X की Y पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त की गई है। इस रेखा की सहायता से Y के अन्य मूल्यों के लिए भी X के सर्वोत्तम मूल्यों का अनुमान लगाया जा सकता है।

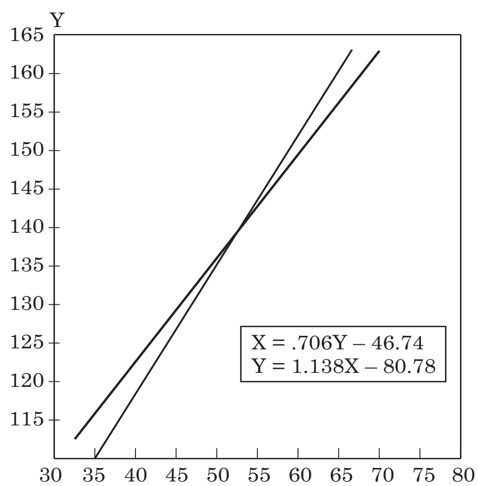
(*ii*) **Y की X पर प्रतीपगमन रेखा**—Y की X पर प्रतीपगमन रेखा की रचना के लिए Y के X पर प्रतीपगमन समीकरण का प्रयोग किया जाता है, इस समीकरण की सहायता से X के दिए हुए सभी मूल्यों के लिए Y के सर्वोत्तम सम्भावित मूल्य ज्ञात कर लिए जाते हैं। X के वास्तविक मूल्यों एवं उनसे सम्बन्धित Y के सर्वोत्तम सम्भावित मूल्यों को रेखाचित्र पर अंकित किया जाता है। प्राप्त बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त रेखा Y की X पर प्रतीपगमन रेखा कहलाती है। पिछले उदाहरण संख्या 7 में Y की X पर प्रतीपगमन रेखा की रचना के लिए Y के सर्वोत्तम मूल्यों की गणना निम्न प्रकार की जाएगी—

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण Y = 1.138X + 80.78

X के वास्तविक या प्रदत्त मूल्य	Y के संगणित मूल्य
56	1.138 × 56 + 80.78 = 144.51
42	1.138 × 42 + 80.78 = 128.58
72	1.138 × 72 + 80.78 = 162.72
36	1.138 × 36 + 80.78 = 121.75
63	1.138 × 63 + 80.78 = 152.47
47	1.138 × 47 + 80.78 = 134.27
55	1.138 × 55 + 80.78 = 143.37
49	1.138 × 49 + 80.78 = 136.54
39	1.138 × 39 + 80.78 = 125.16
42	1.138 × 42 + 80.78 = 128.58
68	1.138 × 68 + 80.78 = 158.16
60	1.138 × 60 + 80.78 = 149.06

Y की X पर प्रतीपगमन रेखा को निम्न चित्र में दर्शाया गया है। इस रेखा की सहायता X के अन्य मूल्यों के लिए भी Y के सर्वोत्तम मूल्यों की गणना की जा सकती है।

दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ जहाँ काटती हैं वह दोनों श्रेणियों के अंकगणितीय माध्य से प्राप्त बिन्दु है।



नोट

> रेखीय प्रतीपगमन के समीकरण उन सर्वोपयुक्त रेखाओं के समीकरण होते हैं जिन्हें न्यूनतम वर्ग पद्धति के आधार पर खींचा जाता है।

13.4 द्विचर आवृत्ति बंटन में प्रतीपगमन गुणांकों की गणना (Calculation of Co-efficients Regression in Binomial Frequency Distribution)

द्विचर आवृत्ति बंटन में प्रतीपगमन गुणांकों को ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है–

(*i*) सर्वप्रथम सहसम्बन्ध-सारणी की रचना की जाती है। इस सारणी के निर्माण की प्रक्रिया का विश्लेषण सहसम्बन्ध वाले अध्याय में किया जा चुका है।

(*ii*) सहसम्बन्ध सारणी में पद विचलन रीति का प्रयोग कर $\Sigma fdxdy, \Sigma fdx^2, \Sigma fdy^2, \Sigma fdx$ तथा Σfdy की गणना की जाती है।

(*iii*) निम्न सूत्रों के प्रयोग द्वारा b_1 तथा b_2 की गणना की जाती है–

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक (b_1)

$$b_1 = \frac{i_x}{i_y} \frac{\left[\Sigma fdxdy - \frac{\Sigma fdx.\Sigma fdy}{N}\right]}{\left[\Sigma fdy^2 - \frac{(\Sigma fdy)^2}{N}\right]}$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक (b_2)

$$b_2 = \frac{i_y}{i_x} \frac{\left[\Sigma fdxdy - \frac{(\Sigma fdx.\Sigma fdy)}{N}\right]}{\left[\Sigma fdx^2 - \frac{(\Sigma fdx)^2}{N}\right]}$$

उहाहरण (Illustration) 5:

निम्न सारणी में 50 पति-पत्नियों की आयु के आधार पर वर्गित आवृत्ति बंटन को दिखाया गया है–

पत्नि की आयु (Y)	पति की आयु (X)			योग
	20—25	25—30	30—35	
16—20	9	14	—	23
20—24	6	11	3	20
24—28	—	—	7	7
योग	15	25	10	50

प्रतीपगमन रेखाएं ज्ञात कीजिए तथा (*i*) पति की आयु जबकि पत्नी की आयु 20 वर्ष हो तथा (*ii*) पत्नी की आयु जबकि पति की आयु 30 वर्ष हो, का अनुमान लगाइए।

नोट

हल (Solution):

प्रतीपगमन गुणांकों की गणना

पत्नी की आयु (वर्ष) Y	पति की आयु (वर्ष) X			योग	*dy*	*fdy*	*fdy*^{2}	*fdxdy*
	20–25	25–30	30–35					
16–20	1 9 9	0 14 0	—	23	– 1	– 23	23	9
20–24	0 6 0	0 11 0	0 3 0	20	0	0	0	0
24–28	–	–	1 7 7	7	1	7	7	7
योग	15	25	10	50		– 16	30	16
dx	– 1	0	+ 1		Σ*fdy*	Σ*fdy*2	Σ*fdxdy*	
fdx	– 15	0	0	– 5	Sfdx			
fdx^2	15	0	10	25	Σ*fdx*^{2}		*ix* = 6	
fdxdy	9	0	7	16	Σ*fdxdy*		*iy* = 4	

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$bxy = \frac{ix}{iy}\frac{\left[\Sigma fdxdy - \dfrac{\Sigma fdx.\Sigma fdy}{N}\right]}{\left[\Sigma fdy^2 - \dfrac{(\Sigma fdy)^2}{N}\right]}$$

$$= \frac{5}{4}\frac{\left[16 - \dfrac{-5\times -16}{50}\right]}{\left[30 - \dfrac{(-16)^2}{50}\right]}$$

$$= \frac{5}{4}\frac{(16-1.6)}{(30-5.12)}$$

$$= \frac{5}{4}\times\frac{14.4}{24.88}$$

$$= \frac{7200}{99.52} = .72$$

X की Y पर प्रतीपगमन रेखा

$$X - \overline{X} = bxy\,(Y - \overline{Y})$$

नोट

$$\overline{X} = Ax \pm \frac{\Sigma fdx}{N} \times ix$$

$$= 27.5 + \frac{-5}{50} \times 5$$

$$= 27.5 - 0.5 = 27$$

$$\overline{Y} = Ay \pm \frac{\Sigma fdy}{N} \times iy$$

$$= 22 + \frac{-16}{50} \times 4$$

$$= 22 - 1.28 = 20.72$$

$$\overline{X} = 27, Y = 20.72, bxy = .72$$

अतः

$$X - 27 = .72\,(Y - 20.72)$$

$$X - 27 = .72y - 14.92$$

$$X = .72y - 14.92 + 27$$

$$X = .72y + 12.08 \qquad \ldots(i)$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$byx = \frac{iy}{ix}\frac{\left[\Sigma fdxdy - \frac{\Sigma fdx.\Sigma fdy}{N}\right]}{\left[\Sigma fdx^2 - \frac{(\Sigma fdx)^2}{N}\right]}$$

$$= \frac{4}{5}\frac{\left[16 - \frac{-5 \times -16}{50}\right]}{\left[25 - \frac{(-5)^2}{50}\right]}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{(16 - 1.6)}{(25 - 0.5)}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{14.4}{24.5}$$

$$= \frac{57.6}{122.5} = .47$$

Y की X पर प्रतीपगमन रेखा

$$Y - \overline{Y} = bxy(X - \overline{X})$$

$$\overline{Y} = 20.72, X = 27, byx = .47$$

$$Y - 20.72 = .47(X - 27)$$

$$Y - 20.72 = .47X - 12.69$$

$$Y = .47X - 12.96 + 20.72$$

$$Y = .47X + 8.03$$

पत्नी (Y) की आयु 20 वर्ष हो तो पति (X) की आयु–

$$X = .72Y + 12.08$$

$$X = .72 \times 20 + 12.08$$
$$X = 14.4 + 12.08$$
$X = 26.48$ वर्ष होगी।

पति (X) की आयु 30 वर्ष हो तो पत्नी (Y) की आयु—

$$Y = .47X + 8.03$$
$$Y = .47 \times 30 + 8.03$$
$$Y = 14.10 + 8.03$$
$Y = 22.13$ वर्ष होगी।

टास्क गुणांक किसे कहते हैं?

13.5 न्यूनतम-वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करना (Find the Equation of Regression by Least-Square Method)

सर्वोपयुक्त रेखाएँ न्यूनतम वर्ग पद्धति द्वारा खींची जाती हैं, प्रतीपगमन समीकरण इन रेखाओं के ही समीकरण होते हैं, अतः पद्धति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण भी ज्ञात किए जा सकते हैं। इस पद्धति का वर्णन सहसम्बन्ध वाले अध्याय में भी किया जा चुका है। प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है—

(*i*) दिए हुए मूल्यों की सहायता से $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma XY, \Sigma Y^2$ तथा ΣX^2 ज्ञात कर लिए जाते हैं।

(*ii*) '*a*' एवं '*b*' की गणना निम्न प्रसामान्य समीकरणों की सहायता से की जाती है—

X का Y पर प्रतीपगमन

$$X = a + by$$
$$\Sigma x = Na + b\Sigma y \qquad ...(i)$$
$$\Sigma xy = a\Sigma y + b\Sigma y^2 \qquad ...(ii)$$

Y का X पर प्रतीपगमन

$$Y = a + bx$$
$$\Sigma y = Na + b\Sigma x \qquad ...(i)$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \qquad ...(ii)$$

निम्न उदाहरण द्वारा इस प्रक्रिया को स्पष्ट किया गया है—

उहाहरण (Illustration) 6: द्विचर समंक दिए हुए हैं—

X	Y
1	6
5	1
3	0
2	0
1	1
1	2
7	1
3	5

नोट

(*a*) Y की X पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त कीजिए एवं Y ज्ञात कीजिए जबकि X = 10 हो।

(*b*) X की Y पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त कीजिए एवं X ज्ञात कीजिए जबकि Y = 2.5 हो।

(*c*) कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक का परिकलन कीजिए।

हल (Solution):

न्यूनतम-वर्ग रीति

X	Y	X^2	Y^2	XY
1	6	1	36	6
5	1	25	1	5
3	0	9	0	0
2	0	4	0	0
1	1	1	1	1
1	2	1	4	2
7	1	49	1	7
3	5	9	25	15
23	16	99	68	36
ΣX	ΣY	ΣX^2	ΣY^2	ΣXY

Y की X पर प्रतीपगमन रेखा

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X2$$

$$16 = 8a + 23b \qquad ...(i)$$

$$36 = 23a + 99b \qquad ...(ii)$$

समीकरण (*i*) को 23 व समीकरण (*ii*) को 8 से गुणा कर घटाने पर–

$$368 = 184a + 529b$$

$$288 = 184a + 792b$$

$$- \quad - \quad -$$

$$80 = -263b$$

$$\therefore \qquad b = -\frac{80}{263} = -.304$$

समीकरण (*i*) में *b* का मान रखने पर–

$$16 = 8a + (23 \times -.304)$$

$$16 = 8a - 6.992 \quad \text{or} \quad -8a = -6.992 - 16$$

$$-8a = -22.992 \quad \text{or} \quad a = 2.874$$

$$Y = a + bX \quad \text{or} \quad Y = 2.874 - .304X$$

जब X = 10 है तो Y का मान

$$Y = 2.874 - .304 \times 10 = 2.874 - 3.04 = -.166$$

X की Y पर प्रतीपगमन रेखा

$$\Sigma X = Na + b\Sigma Y$$

$$\Sigma XY = a\Sigma Y + b\Sigma Y^2$$

$$23 = 8a + 16b \qquad ...(i)$$

$$36 = 16a + 68b \qquad ...(ii)$$

समीकरण (*i*) को 2 से गुणा करके (*ii*) में से घटाने पर–

नोट

$$36 = 16a + 68b$$
$$46 = 16 + 32b$$
$$- \quad - \quad -$$
$$-10 = 36b$$
$$b = -\frac{10}{36} = -.278$$

समीकरण (i) में b का मान रखने पर

$$23 = 8a + (16 \times -.278) \text{ or } 23 = 8a - 4.448$$
$$-8a = -4.448 - 23 \quad \text{or} \quad -8a = 27.448 \text{ or } a = 3.431$$
$$X = a + bY$$
$$X = 3.431 - .278Y$$

जब Y का मूल्य 2.5 है तो X का मूल्य

$$X = 3.431 - .278Y \times 2.5 = 3.431 - .695 = 2.736$$

कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक

$$r = \sqrt{b_1 \times b_2}$$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण $X = 3.431 - .278Y$ है अर्थात्

$$b_1 = -.278$$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण $Y = 2.874 - .304X$ है अर्थात्

$$b_2 = .304$$
$$r = -\sqrt{278 \times .304} = -\sqrt{.084512} = -.2907$$

उहाहरण (Illustration) 7: निम्न जानकारी के आधार पर, प्रतीपगमन समीकरणों की गणना कीजिए—

$$\Sigma X = 30 \qquad \Sigma Y = 40 \qquad \Sigma XY = 214$$
$$\Sigma X^2 = 220 \qquad \Sigma Y^2 = 340 \qquad N = 5$$

सहसम्बन्ध गुणांक भी ज्ञात कीजिए।

हल (Solution): इसे न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा हल किया जाएगा।

$$X = a + by$$

a तथा b का मान निम्न प्रकार ज्ञात किया जाएगा—

$$\Sigma X = Na + b\Sigma Y \qquad ...(i)$$
$$\Sigma XY = a\Sigma Y + b\Sigma Y^2 \qquad ...(ii)$$
$$30 = 5a + 40b$$
$$\cancel{214 = 40a + 340b}$$

समीकरण (i) को 8 से गुणा करने पर

$$240 = 40a + 320b$$
$$- \quad - \quad - \qquad \text{घटाने पर}$$
$$-26 = 20b$$
$$b = -1.3$$

b का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$30 = 5a + 40 \times -1.3$$
$$30 = 5a - 52$$

नोट

$$a = \frac{82}{5} = 16.4$$

प्रतीपगमन समीकरण $X = 16.4 - 1.3Y$

$$Y = a + bx$$

a तथा b का मान निम्न प्रकार ज्ञात किया जाएगा–

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X \quad ...(i)$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 \quad ...(ii)$$

$$40 = 5a + 30b$$

$$214 = 30a + 220b$$

समीकरण (i) को 6 से गुणा करने पर

$$240 = 30a + 180b$$

$-$ $-$ $-$ घटाने पर

$$-26 = 40b$$

$$b = -\frac{26}{40} = -.65$$

समीकरण (i) में b का मान रखने पर–

$$40 = 5a + 30 \times (-.65)$$

$$40 = 5a - 19.5$$

$$40 + 19.5 = 5a$$

$$a = \frac{59.5}{5} = 11.9$$

प्रतीपगमन समीकरण– $Y = 11.9 - .65X$

सहसम्बन्ध गुणांक $= \sqrt{b_1 \times b_2}$

$$= -\sqrt{1.3 \times .65} = -\sqrt{.845}$$

$$= -.92$$

उहाहरण (Illustration) 8: नीचे आय और उपभोग व्यय के आँकड़े दिए गए हैं, ज्ञात करो–

(i) उपभोग फलन अर्थात् उपभोग व्यय का आय पर समाश्रयण।

(ii) औसत उपभोग व्यय और औसत आय स्तर पर औसत उपभोग प्रवृत्ति।

(iiii) उपभोग व्यय जब आय 450 रु. हो।

आय (Income)	उपभोग व्यय (Consumption expenditure)
200	180
300	270
400	320
600	480
900	700

हल (Solution): नोट

आय को X तथा उपभोग व्यय को Y मानने पर—

X	Y	$\overline{X} = 480$ dx	$\overline{Y} = 390$ dy	dx^2	$dxdy$
200	180	– 280	– 210	78400	58800
300	270	– 180	– 120	32400	21600
400	320	– 80	– 70	6400	5600
600	480	120	90	14400	10800
900	700	420	310	176400	130200
ΣX = 2400	ΣY = 1950			308000	227000

$$\overline{X} = \frac{2400}{5} = 480$$

$$\overline{Y} = \frac{1950}{5} = 390$$

(*i*) उपभोग फलन या y का x पर प्रतीपगमन समीकरण

$$byx = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dx^2} = \frac{227000}{308000} = .74$$

$$Y - \overline{Y} = byx\,(X - \overline{X})$$
$$Y - 390 = .74\,(X - 480)$$
$$Y = .87X - 355.20 + 390$$
$$Y = .87X + 34.80$$

उपभोग फलन के रूप में $C = .87Y + 34.80$

(*ii*) औसत उपभोग व्यय = 390

औसत आय = 480

$$\text{औसत उपभोग की प्रवृत्ति} = \frac{C}{Y} = \frac{390}{480} = .81$$

(*iii*) उपभोग व्यय जब आय = 450

$$C = .74Y + 34.80$$
$$= 333 + 34.80 = 367.80$$

जब 450 रु. आय है तो उपभोग 367.80 होगा।

प्रतीपगमन समीकरण में a तथा b का मान निम्न समीकरणों की सहायता से भी ज्ञात किया जा सकता है—

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} \qquad ...(i)$$

$$b = \frac{\Sigma XY - N\overline{X}\overline{Y}}{\Sigma X^2 - N\overline{X}^2} \qquad ...(ii)$$

उपरोक्त उदाहरण संख्या 12 को इन समीकरणों के प्रयोग द्वारा सरलता से हल किया जा सकता है, पहले b का मूल्य ज्ञात किया जाएगा—

$$b = \frac{214 - 5 \times 6 \times 8}{220 - 5 \times 36}$$

$$= \frac{214 - 240}{220 - 180} = -\frac{26}{40} = -.65$$

b का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$a = 8 - (-.65 \times 6)$$
$$= 8 + 3.9 = 11.9$$

यही मूल्य प्रसामान्य समीकरण की सहायता से ज्ञात किए गए थे।

यदि श्रेणी में अंकगणितीय माध्य से विचलन ज्ञात किए गए हैं तो a तथा b का मूल्य निम्न प्रकार ज्ञात किया जाएगा–

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \quad ...(i)$$

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \quad ...(ii)$$

यहाँ $x = (X - \overline{X})$

$y = (Y - \overline{Y})$

अनुमान की प्रमाप त्रुटि–प्रतीपगमन रेखाओं से एक श्रेणी के लिए दिए हुए चर-मूल्य से सम्बद्ध दूसरी आश्रित श्रेणी के चर-मूल्य का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाया जाता है। यह ज्ञात करने के लिए कि हमारा अनुमान यर्थाथता के जितना निकट है, अनुमान की प्रमाप त्रुटि निकालनी आवश्यक होती है।

दूसरे शब्दों में, आश्रित श्रेणी के वास्तविक मूल्यों और संगणित या प्रवृत्ति-मूल्यों के विचलनों का औसत माप ही अनुमान की प्रमाप त्रुटि है। यह अस्पष्ट विचरण मापांक का वर्गमूल होता है। अन्तर केवल इतनाहै कि इसमें वास्तविक मूल्यों के संगणित प्रवृत्ति मूल्यों से विचलन लिए जाते हैं, समानतर माध्य से नहीं।

दोनों प्रतीपगमन रेखाओं के अनुपात की प्रमाप त्रुटियाँ निम्नलिखित सूत्रों द्वारा निकाली जायेंगी–

x का y पर $\quad S_{xy} = \sqrt{\Sigma \frac{(x - x_c)^2}{N}}$

y का x पर $\quad S_{yx} = \sqrt{\frac{\Sigma(y - y_c)^2}{N}}$

यदि सह-सम्बन्ध गुणांक दिया हो तो प्रमाप त्रुटि निकालने में इस सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\Sigma xy = \sigma_x \sqrt{1 - r^2} \qquad \Sigma yx = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}$$

गणना की दृष्टि से यह सूत्र सरल नहीं है क्योंकि उनके लिए x और y के संगणित मूल्य x_c और y_c या ox व oy ज्ञात करने पड़ते हैं। अनुमान के प्रमाप विभ्रम सूत्रों से भी प्रत्यक्ष रूप से आकलित किये जा सकते हैं–

x का y पर $\quad S_{xy} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - a\Sigma x - b\Sigma xy}{N}}$

y का xy पर $\quad S_{yx} = \sqrt{\frac{\Sigma y^2 - a\Sigma y - b\Sigma xy}{N}}$

उहाहरण (Illustration) 9: निम्न आँकड़ों से दोनों रीतियों द्वारा प्रतीपगमन रेखाओं के अनुमान की प्रमाप त्रुटियाँ ज्ञात कीजिए–

x	:	1	2	3	4	5
y	:	2	5	3	8	7

नोट

हल (Solution): y के दिए हुए मूल्यों को x के y पर समीकरण में तथा x के मूल्यों को y के x पर समीकरण में आदिष्ट करने पर क्रमश: x और y के संगणित मूल्य x_c व y_c निकाल लिए जायेंगे फिर निम्नलिखित सारणी बनाई जाएगी—

अनुमान-प्रमाप त्रुटि (न्यूनतम वर्ग रीति)

x	न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा गणित मूल्य $x_c = 0.5 + 0.5y$	विचलन $(x - x_c)$	विचलन $(x - x_2)^2$	y	y_c	विचलन $(y - y_c)$	$(y - y_c)^2$
1	.5	– 0.5	0.25	2	2.4	– 0.4	0.16
2	3.0	– 1.0	1.00	5	3.7	1.3	1.69
3	2.0	+ 1.0	1.00	3	5.0	– 2.0	4.00
4	4.5	– 0.5	0.25	8	6.3	1.7	2.89
5	4.0	+ 1.0	1.00	7	7.6	– 0.6	0.36
			3.50				9.10

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\Sigma(x - x_c)^2}{N}} = \sqrt{\frac{3.50}{5}}$$

$$S_{xy} = \sqrt{0.70} = .84$$

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\Sigma(y - y_c)^2}{N}} = \sqrt{\frac{9.10}{5}}$$

$$S_{yx} = \sqrt{1.82} = 1.35$$

प्रदत्त समीकरणों से माध्य-मूल्य प्रतीपगमन ज्ञात करना (Find the mean-value Regression by given Equation)

गुणांकों की गणना—यदि दोनों प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात हों तो उनको हल करके x और y के माध्य ($\bar{x}$ व $\bar{y}$) निकाले जाते हैं। परन्तु x के y पर समीकरण से bxy और y के x पर समीकरण से byx भी ज्ञात किये जा सकते हैं। परन्तु कभी-कभी समीकरण इस प्रकार दिए जाते हैं कि उनके निरीक्षण से यह निश्चित नहीं किया जा सकता है कि उनमें से कौन-सा x का y पर और y का x पर प्रतीपगमन प्रस्तुत करता है। ऐसी स्थिति में किसी एक को x का y पर प्रतीपगमन समीकरण मानकर byx ज्ञात कर लिया जाता है और इसी प्रकार दूसरे समीकरण की सहायता से byx निकाल लिया जाता है। यदि bxy और byx का गुणनफल 1 से अधिक है तो हमारी परिकल्पना गलत है क्योंकि $r^2 > 1$. यदि ऐसा हो तो प्रश्न को फिर से हल करना पड़ता है। इस बार उस समीकरण को Y का X पर समीकरण मानना होगा जिसे पहले X का Y पर माना था। इस प्रकार byx और bxy की गुणा 1 से अधिक नहीं होगी और परिणाम शुद्ध होंगे।

उहाहरण (Illustration) 10: यदि दो प्रतीपगमन समीकरण निम्न प्रकार हों तो x व y के माध्य मूल्य निकालिए और सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिए—

$$4y - 15x + 530 = 0$$
$$20x - 3y - 975 = 0$$

हल (Solution): x व y के माध्य मूल्य

$$4y - 15x \pm - 530 \qquad ...(1)$$
$$- 3y + 20x = 975 \qquad ...(2)$$

समी. (1) में 3 तथा समी. (2) में y का गुणा करने पर,

$$12y - 45x = - 1590$$
$$- 12y + 80x = 3900$$

$$35x = 2310$$

नोट

$$x = \frac{2310}{35}$$

$$\bar{x} = 66$$

x का मान समी. (1) में रखने पर,

$$12y - 45x = -1590$$
$$12y - 45 \times 66 = -1590$$
$$12y - 2970 = -1590$$
$$12y = 1380$$
$$y = \frac{1380}{12}$$
$$\bar{y} = 115$$

सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना–सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए दोनों प्रतीपगमन गुणांक निकालने होंगे। समीकरण स्पष्ट रूप से नहीं दिये हैं। अत: पहले को y का x पर और दूसरे को x का y पर प्रतीपगमन समीकरण मानकर दोनों गुणांक निकाले जायेंगे।

y का x पर प्रतीपगमन	**x का y पर प्रतीपगमन**
$4y - 15x + 530 = 0$	$-3y + 20x = 975$
$4y = 15x$	$20x = 3y$
$byx = \frac{15}{4}$	$bxy = \frac{3}{20}$
$byx = 3.75$	$bxy = 0.15$

$$r = \sqrt{byx - bxy}$$
$$= \sqrt{3.75 \times 0.15}$$
$$r = .75$$

उहाहरण (Illustration) 11: दो यादृच्छिक चर-मूल्य x और y से सम्बन्धित प्रतीपगमन समीकरण निम्न प्रकार हैं–

$$3x + 2y - 26 = 0$$
$$6x + y - 31 = 0$$

ज्ञात कीजिए–

(क) x और y के मध्यक मूल्य

(ख) x और y में निश्चयन गुणांक तथा सह-सम्बन्ध गुणांक

(ग) y का प्रमाप विचलन σ_y यदि x का प्रसरण $\sigma_{x^2} = 25$

हल (Solution): सर्वप्रथम x और y के मूल्य की गणना करने पर,

$$3x + 2y = 26 \qquad ...(1)$$
$$6x + y = 31 \qquad ...(2)$$

समी. (2) में 2 का गुणा करने पर

$$3x + 2y = 26$$
$$12x + 2y = 62 \qquad \text{(घटाने पर)}$$
$$- \quad - \quad -$$
$$-9x = -36$$
$$x = \frac{-36}{-9}$$

नोट

$\overline{x} = 4$

x का मान समी. (1) में रखने पर,

$$3x + 2y = 26$$
$$3 \times 4 + 2y = 26$$
$$12 + 2y = 26$$
$$2y = 26 - 12$$
$$2y = 14$$
$$y = \frac{14}{2}$$
$$\overline{y} = 7$$

सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए *bxy* और *byx* की गणना

byx	bxy
$3x + 2y = 26$	$12x + 2y = 62$
$2y = -3x + 26$	$12x = -2y + 62$
$byx = \frac{-3}{2}$	$bxy = -\frac{2}{12}$
$byx = -1.5$	$bxy = .167$

$$r = \sqrt{byx \times bxy}$$
$$= \sqrt{-1.5 \times -.167}$$
$$= \sqrt{.2505}$$
$$r = -.50$$

y का प्रमाप विचलन $= \sigma_y$

$\sigma_x^2 = 25, \sigma_x = 5, byx = -1.5$

$$byx = r\frac{oy}{ox}$$
$$-1.5 = -0.5\frac{oy}{5}$$
$$\frac{-1.5}{-0.5} \times 5 = oy$$
$$oy = 15$$

उहाहरण (Illustration) 12: (1) निम्नलिखित सूचना से गणित कीजिए–

(*i*) दोनों प्रतीपगमन गुणांक, (*ii*) सह-सम्बन्ध गुणांक, (*iii*) दोनों प्रतीपगमन समीकरण।

$N = 10 \quad \Sigma x = 350 \quad \Sigma y = 310 \quad \Sigma x^2 = 162 \quad \Sigma y^2 = 222 \quad \Sigma xy = 92$

(2) निम्नलिखित आँकड़ों के आधार पर y का x पर और x का y पर प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात कीजिए–

$\Sigma x = 50 \quad \overline{x} = 5 \quad \Sigma y = 60 \quad \overline{y} = 6 \quad \Sigma xy = 350$

Variance of x Variance of $y = 9$

x का प्रसरण $= 4$ y का प्रसरण $= 9$

हल (Solution):

(*i*) x और y के विचलन उनके समान्तर माध्य से लिए गए हैं–

y का x पर प्रतीपगमन गुणांक

नोट

$$byx = \frac{\Sigma xy}{(\Sigma x)^2} = \frac{92}{162} = 0.568$$

x का y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$bxy = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} = \frac{92}{222} = 0.414$$

(*ii*) सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना

$$r = \sqrt{bxy \times byx}$$

$$= \sqrt{.568 \times .414} = .4849$$

(*iii*) समीकरणों की गणना

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{350}{10} = 35 \qquad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{310}{10} = 31$$

x का y पर समीकरण

$$x - \overline{x} = bxy\,(y - \overline{y})$$
$$x - 35 = 0.414\,(y - 3)$$
$$x - 35 = 0.414y - 12.834$$
$$x = 0.414y + 12.834 + 35$$
$$x = 0.414y + 22.166$$

y का x पर समीकरण

$$y - \overline{y} = byx\,(x - \overline{x})$$
$$y - 31 = 0.568\,(x - 35)$$
$$y - 31 = 0.568x - 19.88$$
$$y = 0.568x - 19.88 + 31$$
$$y = 0.568x + 11.12$$

प्रतीपगमन गुणांकों को ज्ञात करने के लिए N Σx^2 व Σy^2 के मान ज्ञात करना आवश्यक है।

$$N = \frac{\Sigma x}{\overline{x}} = \frac{.50}{5} = 10$$

$$ox^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2$$
$$4 = \frac{\Sigma x^2}{10} - \left(\frac{50}{10}\right)^2$$
$$4 = \frac{\Sigma x^2}{10} - 25$$
$$4 = \frac{\Sigma x^2 - 250}{10}$$
$$40 + 250 = \Sigma x^2$$
$$\Sigma x^2 = 290$$

$$\sigma^2 y = \frac{\Sigma y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma y}{N}\right)^2$$
$$9 = \frac{\Sigma y^2}{10} - \left(\frac{60}{10}\right)^2$$
$$9 = \frac{\Sigma y^2}{10} - (6)^2 = \frac{\Sigma y^2 - 360}{10}$$
$$90 = \Sigma y^2 - 360$$
$$90 + 360 = \Sigma y^2$$
$$\Sigma y^2 = 450$$

x का y पर

$$bxy = \frac{\Sigma xy \times N - \Sigma x \times \Sigma y}{\Sigma y^2 \times N - (\Sigma y)^2}$$
$$= \frac{350 \times p - 50 \times 60}{450 \times 10 - (60)^2}$$
$$= \frac{3{,}500 - 3{,}000}{4{,}500 - 3{,}600}$$

x का y पर

$$bxy = \frac{\Sigma xy \times N - \Sigma x \times \Sigma y}{\Sigma x^2 \times N - (\Sigma x)^2}$$
$$= \frac{350 \times 10 - 50 \times 60}{290 \times 10 - (50)^2}$$
$$= \frac{3{,}500 - 3{,}000}{2{,}900 - 2{,}500}$$

नोट

$= \frac{500}{900}$	$= \frac{500}{400}$
$= .556$	$byx = 1.25$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

निम्नलिखित में प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात कीजिए—

1. निम्न से प्रतीपगमन गुणांक व सह-संबंध गुणांक की गणना कीजिए—

X	:	10	20	30	40	50
Y	:	20	50	30	80	70

2. निम्नलिख्सित आँकड़ों से प्रतीपगमन गुणांक तथा सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए—

x	:	10	20	30	40	50
y	:	20	50	30	80	70

3. निम्न आँकड़ों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा दोनों समीकरणों की गणना कीजिए और प्रतीपगमन गुणांक द्वारा परिणाम की जाँच कीजिए—

x	:	1	2	3	4	5
y	:	2	4	5	3	6

13.6 सारांश (Summary)

- प्रतीपगमन गुणांक वह अनुपात है जो यह बतलाता है कि एक श्रेणी के चर मूल्यों में 1 का परिवर्तन होने से दूसरी श्रेणी के चर-मूल्यों में औसतन कितना परिवर्तन होगा।
- प्रतीपगमन समीकरण की तरह प्रतीपगमन गुणांक भी दो होते हैं।
- दो सम्बद्ध श्रेणियों के अलग-अलग चर मूल्य दिए होने पर प्रतीपगमन गुणांकों की गणना को सरल बनाने के लिए निम्न विधियों का प्रयोग किया जाता है, ये विधियाँ प्रमाप विचलन एवं सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की रीतियों पर आधारित हैं।
- प्रतीपगमन रेखाओं की रचना प्रतीपगमन समीकरणों की सहायता से की जाती है।
- सर्वोपयुक्त रेखाएँ न्यूनतम वर्ग पद्धति द्वारा खींची जाती हैं, प्रतीपगमन समीकरण इन रेखाओं के ही समीकरण होते हैं, अतः पद्धति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण भी ज्ञात किए जा सकते हैं।
- सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए दोनों प्रतीपगमन गुणांक निकालने होंगे।

13.7 शब्दकोश (Keywords)

- **प्रदत्त—** दिया हुआ।
- **गुणांक—** किसी चर के गुणन का जो अंक हो।
- **प्रमाप—** प्रमाणित करने वाला, आकृति, रूप।

13.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. प्रतीपगमन गुणांक की व्याख्या कीजिए।
2. प्रतीपगमन गुणांक का परिकलन करने की विधि बताइए।
3. प्रतीपगमन रेखाओं की रचना किस प्रकार की जाती है। समझाइए।

नोट

4. न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करने की विधि बताइए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. $bxy = 0.5$, $byx = 1.3$, $r = +0.806$ 2. 0.81

3. $x = .2 + 7y$, $y = 1.9 + .7x$

13.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
3. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई–14: सहसंबंध विश्लेषण बनाम प्रतीपगमन विश्लेषण (Correlation Analysis Vs. Regression Analysis)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- सहसंबंध विश्लेषण तथा उसके महत्व को समझने में।
- प्रतिगमन विश्लेषण का महत्त्व एवं उपयोग को जानने में।
- सहसंबंध तथा प्रतीपगमन विश्लेषण के अंतर को स्पष्ट करने में।
- प्रतीपगमन गुणांको द्वारा सहसंबंध गुणांक का निर्धारण किस प्रकार होता है? इसकी व्याख्या करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

सहसम्बन्ध (Correlation) का सिद्धान्त केवल यह स्पष्ट करता है कि दो परस्पर सम्बद्ध श्रेणियों में कितना और किस प्रकार (दिशा) का संबंध है। परन्तु यदि एक स्वतन्त्र श्रेणी के किसी निश्चित (या ज्ञात) मूल्य के आधार पर दूसरी आश्रित श्रेणी के तत्संवादी मूल्य का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाना हो तो उसके लिए सहसम्बन्ध के बजाए प्रतीपगमन विश्लेषण का सहारा लेना पड़ता है। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु की कीमत और उसकी माँग के बीच सहसम्बन्ध गुणांक द्वारा यह तो पता चल जाता है कि इन दो चरों या श्रेणियों में किस प्रकार का और कितना सम्बन्ध

नोट

है परन्तु किसी निश्चित कीमत के दिए होने पर मांग कितनी होगी, यह अनुमान केवल प्रतीपगमन (समीकरण) द्वारा ही लगाया जा सकता है न कि सहसम्बन्ध गुणांक द्वारा। इस प्रकार प्रतीपगमन विश्लेषण दो चरों के बीच औसत-सम्बन्ध (Average relationship) को व्यक्त करता है और इससे पूर्वानुमान या भविष्यवाणी (Estimation or Prediction) सम्भव हो पाती है।

14.1 सहसंबंध विश्लेषण (Correlation Analysis)

दो चरों के बीच में पाये जाने वाले सम्बन्ध की मात्रा का विवरण सहसम्बन्ध विश्लेषण के अन्तर्गत आता है। सहसम्बन्ध विश्लेषण से अभिप्राय यह है कि सम्बन्धित चरों में किस प्रकार का और कितना सम्बन्ध है। सहसम्बन्ध विश्लेषण पर आधारित अनुमान अधिक विश्वसनीय एवं वास्तविकता के निकट होते हैं।

सहसम्बन्ध के गहन अध्ययन हेतु निम्नलिखित बातों पर ध्यान देना आवश्यक है–

(1) **प्रत्यक्ष सम्बन्ध** (Direct Relationship)–दोनों समंकमालाओं में प्रत्यक्ष कार्य-करण सम्बन्ध हो सकता है। कुछ घटनाएं ऐसी होती हैं कि वे किसी के कारणवश होती हैं। उदाहरण के लिए, मूल्य और मांग में प्राय: ऋणात्मक सम्बन्ध होता है। इसका तात्पर्य यह है कि मूल्य के परिवर्तन के कारण ही मांग में परिवर्तन होते हैं।

(2) **सहसम्बन्ध का अन्य कोई समापवर्तक कारण** (Correlation due to any other Common Cause)–यह भी सम्भव हो सकता है कि दोनों श्रेणियों में प्रत्यक्ष सम्बन्ध न होकर किसी अन्य समापवर्तक कारण (common cause) के परिणामस्वरूप ऐसा हो सकता है। उदाहरण के लिए, मोटर कार एवं टेलीफोन दोनों में धनात्मक सहसम्बन्ध होने का यह आशय कदापि नहीं है कि प्रत्येक मोटर कार वाला अनिवार्य रूप से टेलीफोन भी रखता है। वास्तव में आय तीसरा ऐसा कारण है जो दोनों को प्रभावित करता है। अर्थात् अधिक आय वाले ही सामान्यत: कार एवं टेलीफोन रखते हैं।

(3) **परस्पर प्रतिक्रिया** (Mutual Reaction)–यह सर्वदा आवश्यक नहीं है कि एक श्रेणी ही दूसरी को प्रभावित करे, यह सम्भव हो सकता है कि दोनों समंकमालाएं आपस में ही एक-दूसरे से प्रभावित हों। ऐसी स्थिति में यह ज्ञात करना कठिन हो जाता है कि कौन-सी कारण है और कौन-सी परिणाम। वास्तव में दोनों ही कारण हो सकती हैं और दोनों ही परिणाम। उदाहरण के लिए, आय और शिक्षा पर व्यय के मध्य इसी प्रकार का सम्बन्ध होता है। आय बढ़ने पर शिक्षा पर व्यय बढ़ता है और शिक्षा बढ़ने पर आय बढ़ती है। अत: ये दोनों अन्योन्याश्रित हैं।

(4) **निरर्थक सम्बन्ध** (Useless or Nonsense Spurious Correlation)–यदि दो चरों के बीच सहसम्बन्ध पाया जाता है, परन्तु कारण-परिणाम सम्बन्ध नहीं पाया जाता तो उस सहसम्बन्ध को **निरर्थक सहसम्बन्ध** (useless or nonsense or spurious correlation) कहा जाता है। कभी-कभी समग्र की दो समंकमालाएं सम्बन्धित नहीं होतीं, परन्तु दैवयोग के कारण उनके निदर्शनों में सहसम्बन्ध पाया जाता है तो इस प्रकार का सम्बन्ध निरर्थक होगा। उदाहरण के लिए, सैलानियों (Tourists) की संख्या में वृद्धि और अधिक चीनी उत्पादन में धनात्मक सम्बन्ध है, तो यह सम्बन्ध सार्थक नहीं कहलायेगा वरन् यह बेकार होगा।

इस प्रकार, यदि भारत में कोयले का मूल्य कम हो जाये और साथ ही अमेरिका में स्वर्ण का मूल्य कम हो जाये तो यहां सहसम्बन्ध स्पष्ट होने पर भी सहसम्बन्ध नहीं कहलायेगा। इसका कारण यह है कि ऐसा दैवयोग से हुआ है।

उपर्युक्त विवेचन से स्पष्ट है कि सहसम्बन्ध की विद्यमानता का पता बड़े गहन विश्लेषण से ही लगाया जा सकता है। **प्रो. बॉडिंगटन** के शब्दों में, "**जब कभी दो या अधिक समूहों अथवा वर्गों अथवा समंकमालाओं में निश्चित सम्बन्ध विद्यमान हो तो उनमें सहसम्बन्ध का होना कहा जाता है।**"[1] **प्रो. डेवनपोर्ट** के मतानुसार, "सहसम्बन्ध का सम्पूर्ण विषय पृथक् विशेषताओं के मध्य पाये जाने वाले उस पारस्परिक सम्बन्ध की ओर संकेत करता है, जिसके अनुसार वे कुछ सीमा तक साथ-साथ परिवर्तित होने की प्रवृत्ति रखती हैं।"[2] **डॉ. बॉडिंगटन** के मतानुसार, "यदि सारे प्रमाण यह संकेत करते हैं (सहसम्बन्ध की उपस्थिति के सारे प्रमाण क्यों न हों?) कि (दोनों

श्रेणियों में) कुछ सम्बन्ध पाया जाता है और पाया जा सकता है तो भी इन प्रमाणों की बड़ी सावधानी से जांच करनी चाहिए।" तभी सही निष्कर्ष पर पहुंचा जा सकता है। सांख्यिकी में सहसम्बन्ध का सिद्धान्त बहुत महत्त्वपूर्ण है। **इस सिद्धान्त को विकसित करने व आधुनिक रूप देने का श्रेय फ्रांसिस गाल्टन तथा कार्ल पियर्सन को है।** इस सिद्धान्त के आधार पर प्रत्येक क्षेत्र में दो या अधिक घटनाओं के परस्पर सम्बन्धों का स्पष्टीकरण होता है। सहसम्बन्ध विश्लेषण से हमें यह पता चलता है कि दो सम्बन्धित चल-मूल्यों में कितना व किस प्रकार का सम्बन्ध है। प्रतीपगमन (Regression) और विचरण अनुपात (Ratio of Variation) की धारणाएं सहसम्बन्ध सम्बन्धी सिद्धान्त पर ही आधारित हैं। इनकी सहायता से दो सम्बन्धित श्रेणियों में से एक में दिये हुए निश्चित चल-मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के सम्भावित चल-मूल्यों का विश्वसनीय अनुमान लगाया जा सकता है। इस प्रकार व्यावहारिक जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में दो या दो से अधिक सम्बन्धित घटनाओं के पारस्परिक सम्बन्ध का विवेचन करने में यह सिद्धान्त बहुत उपयोगी सिद्ध होता है।

नोट्स सहसम्बन्ध का प्रभाव हमारी भविष्यवाणी की अनिश्चितता के विस्तार को कम करता है।

14.2 सहसम्बन्ध विश्लेषण का महत्त्व (Importance of Correlation Analysis)

सहसम्बन्ध विश्लेषण का प्रयोग उन समस्त क्षेत्रों (आर्थिक, सामाजिक, व्यावसायिक, आदि) में किया जाता है जहां दो या अधिक चरों के मध्य कारण-परिणाम सम्बन्ध पाया जाता है परन्तु अर्थशास्त्र में इस तकनीक का विशेष महत्त्व है। मूल्य तथा मांग, उत्पादन तथा रोजगार, मजदूरी तथा मूल्य सूचकांक, विनियोजित पूंजी एवं अर्जित लाभ तथा अन्य ऐसे ही तथ्यों में निकट का सम्बन्ध पाया जाता है। अर्थशास्त्र मे सहसम्बन्ध के उपयोग के बारे में **नीसवैंगर** (Neiswanger) लिखते हैं, "सहसम्बन्ध विश्लेषण आर्थिक व्यवहार को समझने में योग देता है, विशेष महत्त्वपूर्ण चरों जिन पर अन्य चर निर्भर करते हैं, को खोजने में सहायता देता है, अर्थशास्त्री उन सम्बन्धों को स्पष्ट करता है जिनसे गड़बड़ी फैलती है तथा उसे उन उपायों के सुझाव देता है जिनके द्वारा स्थिरता लाने वाली शक्तियां प्रभावी हो सकती हैं।"

14.3 प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis)

प्रतीपगमन या समाश्रयण का शाब्दिक अर्थ है—वापिस लौटना या पीछे हटना (going back or returning)। इस अवधारणा का प्रयोग सर्वप्रथम प्रसिद्ध वैज्ञानिक सर फ्रांसिस गाल्टन (Sir Francis Galton) ने सन् 1877 में अपने शोधपत्र—'पैतृक ऊँचाई में मध्यमता की ओर प्रतीपगमन अर्थात् वापसी' (Regression towards Mediocrity in Heriditary Stature) में किया था। गाल्टन द्वारा किए गए एक हजार पिताओं और उनके पुत्रों की ऊँचाई के अध्ययन से एक रोचक एवं महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष यह निकल कर आया कि यद्यपि लम्बे पिताओं के पुत्र लम्बे और छोटे पिताओं के पुत्र छोटे होते हैं (अर्थात् दोनों में घनिष्ठ सहसम्बन्ध होता है)। परन्तु लम्बे पिताओं वाले समूह के पुत्रों की औसत लम्बाई पिताओं से कम होती है और छोटे पिताओं वाले समूह के पुत्रों की औसत लम्बाई पिताओं से अधिक होती है। दूसरे शब्दों में, यद्यपि पिता एवं पुत्रों की ऊँचाई में घनिष्ठ सहसम्बन्ध था परन्तु फिर भी सामान्य या समग्र-माध्य से दोनों के विचलनों में पर्याप्त अन्तर था। जहाँ समग्र की माध्य-ऊँचाई से पिताओं की ऊँचाई के विचलन अधिक थे, वहाँ पुत्रों की ऊँचाई के विचलन अपेक्षाकृत कम थे। यदि पिताओं की माध्य-ऊँचाई समग्र की माध्य-ऊँचाई से माना 1 सेमी. अधिक थी तो उनके पुत्रों (आश्रित श्रेणी) की माध्य-ऊँचाई समग्र की माध्य-ऊँचाई

1. "Whenever some definite connections exist between the two or more groups, classes or series of data. there is said to be correlation."
   —A. L. Boddington
2. "The whole subject of correlation refers to that inter-relation between separate character by

नोट

से मात्र 7 या 8 सेमी. ही अधिक थी (अर्थात् 1 सेमी. से कम थी)। सरल शब्दों में, जहाँ पिताओं की माध्य-ऊँचाई समग्र की माध्य-ऊँचाई से कम या अधिक होती थी भी वहाँ पुत्रों की माध्य-ऊँचाई समग्र की माध्य-ऊँचाई के सन्निकट होने की थी। अत: निष्कर्ष रूप में पुत्रों की ऊँचाई के सामान्य या समग्र-माध्य के निकट होने या वापिस लौटने की इस प्रवृत्ति को ही गाल्टन ने **'मध्यमता की और प्रतीपगमन अर्थात् वापसी'** (Regression towards Mediocrity) का नाम दिया है।

पारिभाषिक रूप में, **या-लुन चाऊ** (Ya-Lun Chou) के अनुसार "प्रतीपगमन विश्लेषण चरों के बीच 'सम्बन्ध की प्रकृति' का निरूपण करने का प्रयास करता है—अर्थात् यह चरों में फलनात्मक सम्बन्ध का अध्ययन करता है और उनके बारे में भविष्यवाणी या पूर्वानुमान हेतु रचनातन्त्र प्रस्तुत करता है।"[1]

14.4 प्रतीपगमन विश्लेषण का महत्त्व एवं उपयोग (Importance and Uses of Regression Analysis)

प्रतीपगमन विश्लेषण सांख्यिकीय सिद्धान्त की एक महत्वपूर्ण शाखा है जिसका अनुप्रयोग लगभग सभी प्राकृतिक, भौतिक तथा सामाजिक विज्ञानों में किया जाता है। यह तकनीक अब केवल पैत्तृक विशेषताओं तक ही सीमित नहीं है बल्कि इसका प्रयोग उन सभी क्षेत्रों में किया जाने लगा है जहाँ दो या अधिक परस्पर सम्बद्ध श्रेणियों में विभिन्न पद-मूल्यों की सामान्य माध्य की ओर वापिस लौटने की प्रवृत्ति पायी जाती है। अर्थशास्त्र तथा व्यावसायिक जगत में यह आर्थिक चरों के बीच सम्बन्ध मापने या अनुमानित करने की एक आधारभूत तकनीक है जो वस्तुत: आर्थिक सिद्धान्त एवं आर्थिक जीवन का सार है। उदाहरण के तौर पर, यदि हम जानते हैं कि दो चार जैसे कीमत (X) तथा मांग (Y) परस्पर घनिष्ठ रूप से सम्बन्धित हैं तो इस तकनीक से हम Y के किसी निश्चित या प्रदत्त मूल्य के लिए X का सर्वोपयुक्त मान ज्ञात कर सकते हैं अथवा इसी प्रकार X के लिए Y का सर्वोपयुक्त मान अनुमानित किया जा सकता है। इसी प्रकार किसी वस्तु के उत्पादन या पूर्ति में निश्चित मात्रा में परिवर्तन (वृद्धि या कमी) होने पर उसके मूल्य में सम्भावित परिवर्तन का अनुमान लगाया जा सकता है। इसी प्रकार वर्षा की मात्रा, बीज, उर्वरक आदि के आधार पर कृषि उपज का और पूँजी के आधार पर लाभ आदि का अनुमान लगाने में यह तकनीक अत्यधिक उपयोगी है। सच तो यह है कि व्यावसायिक जगत में प्रतीपगमन विश्लेषण एक **'नियन्त्रण उपकरण'** (Control Tool) की भाँति कार्य करता है। इसके द्वारा पूर्वानुमान तथा निर्णयन (Forecasting and Decision-making) में पर्याप्त सुविधा होती है और साथ-ही लिए गए निर्णयों को व्यावहारिकता की कसौटी पर रखा जा सकता है और यह समूची-प्रक्रिया किसी भी व्यवसाय की आधारशिला है। हाँ! स्मरण रहे, यदि दो श्रेणियों में परस्पर घनिष्ठ सहसम्बन्ध नहीं है तो फिर अनुमान अधिक यथार्थ नहीं होते। प्रतीपगमन विश्लेषण के विभिन्न **उपयोग** (Uses) इस प्रकार हैं—

(1) प्रतीपगमन विश्लेषण का एक महत्वपूर्ण उपयोग प्रतीपगमन रेखा (Regression Line) के उपाय के रूप में स्वतन्त्र चर के मूल्यों से आश्रित चर के मूल्यों के अनुमान उपलब्ध कराना है। प्रतीपगमन रेखा X तथा Y चरों के बीच विद्यमान औसत सम्बन्धों की व्याख्या करती है अर्थात् यह Y के प्रदत्त मूल्यों के लिए X के माध्य मूल्यों को दर्शाती है। इस रेखा का समीकरण, जिसे प्रतीपगमन समीकरण कहते हैं, में स्वतन्त्र चर के मूल्य आदिष्ट करने पर आश्रित चर के अनुमान उपलब्ध हो जाते हैं।

(2) प्रतीपगमन विश्लेषण का दूसरा ध्येय उस विभ्रम (त्रुटि) का माप करना है जो अनुमान लगाते समय प्रतीपगमन रेखा के प्रयोग के कारण उत्पन्न होता है। इसके लिए अनुमान का प्रमाप विभ्रम ज्ञात किया जाता है।

(3) तीसरा, हम प्रतीपगमन गुणांकों की सहायता से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कर सकते हैं। सहसम्बन्ध गुणांक (r) का वर्ग, निश्चियन-गुणांक (Coefficient of Determination, r^2) कहलाता है और यह दो चरों के बीच विद्यमान सहसम्बन्ध की परस्पर घनिष्ठता की मात्रा का माप करता है और आश्रित चर में प्रसरण (Variance) के अनुपात को बताता है। सामान्य रूपों में, r का मूल्य जितना अधिक होता है अन्वायोजन

1. "Regression analysis attempts to establish the 'nature of the relationship' between variables—that is, to study the functional relationship between the variables and thereby provide a mechanism for prediction or forecasting." **—Ya-Lun Chou**

नोट

(Fit) उतना ही उत्कृष्ट माना जाता है और प्रतीपगमन समीकरण एक भविष्यवाची उपाय (Predictive device) के रूप में उतनी ही अधिक उपयोगी समझी जाती है।

टास्क सहसंबंध विश्लेषण का प्रयोग कहाँ किया जाता है?

14.5 सहसम्बन्ध तथा प्रतीपगमन विश्लेषण में अन्तर (Difference between Correlation and Regression Analysis)

सहसम्बन्ध तथा प्रतीपगमन विश्लेषण की न केवल मान्यताएँ भिन्न हैं बल्कि यह दोनों माप भिन्न प्रकार की सूचनाएँ प्रदान करते हैं। इस प्रकार यह सदैव स्पष्ट नहीं हो पाता कि किसी प्रदत्त समस्या के लिए किस माप का प्रयोग किया जाए। इन दोनों में अन्तर के प्रमुख बिन्दु इस प्रकार हैं–

(1) **सम्बन्ध की मात्रा व प्रकृति** (Degree and Nature of Relationship)—सहसम्बन्ध विश्लेषण दो चरों के बीच सह-विचरणशीलता की मात्रा (Degree of Covariability) का माप है जबकि प्रतीपगमन विश्लेषण का उद्देश्य दो चरों के बीच औसत-सम्बन्ध की प्रकृति (Nature of Average Relationship) का अध्ययन करना है ताकि एक चर के आधार पर दूसरे चर का पूर्वानुमान लगाया जा सके। **वर्नर जेड हर्श** के शब्दों में, "जबकि सहसम्बन्ध विश्लेषण दो (या अधिक) घटनाओं के सह-परिवर्तन की घनिष्ठता की जाँच करता है, प्रतीपगमन विश्लेषण इस सम्बन्ध की प्रकृति व मात्रा का माप करके हमें पूर्वानुमान की क्षमता प्रदान करता है।" ध्यान रहे, चरांकों के बीच सम्बन्ध जितना अधिक घनिष्ठ होता है पूर्वानुमान उतने ही अधिक विश्वसनीय होते हैं।

(2) **कारण व परिणाम सम्बन्ध** (Cause and Effect Relationship)—सहसम्बन्ध दो चरों के बीच सम्बन्ध की मात्रा की माप तो करता है परन्तु यह कारण-परिणाम सम्बन्ध की व्याख्या नहीं करता। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु की कीमत और मांग के बीच उच्च-स्तरीय सहसम्बन्ध इस बात को स्पष्ट नहीं करता कि दोनों चरों में से कौन-सा कारण है और कौन-सा परिणाम है। परन्तु इसके विपरीत प्रतीपगमन विश्लेषण में जहाँ एक चर को आश्रित चर के रूप में लिए जाता है वहाँ दूसरे चर को स्वतन्त्र चर माना जाता है—और इस प्रकार यह कारण-परिणाम सम्बन्ध के अध्ययन को सम्भव बनाता है। ध्यान देने योग्य बात यह है कि साहचर्य की उपस्थिति का अर्थ कारणतत्व का होना नहीं है, परन्तु कारणतत्व के अस्तित्व का सदैव अर्थ है साहचर्य का होना (The presence of association does not imply causation, but the existence of causation always imply association)।

(3) **स्वतन्त्र तथा आश्रित चर** (Independent and Dependent Variable)—चूँकि सहसम्बन्ध दो चरों X तथा Y के बीच रेखीय सम्बन्ध (Linear relationship) की दिशा व मात्रा का एक माप है इसलिए इस विश्लेषण में स्वतन्त्र तथा आश्रित चर का कोई महत्व नहीं होता। दूसरे शब्दों में, X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक (r_{xy}) वही होगा जो Y और X के बीच (r_{yx}) होगा अर्थात् यह दोनों सममित (Symmetric) होते हैं ($r_{xy} = r_{yx}$) अर्थात् X और Y में से कौन-सा चर स्वतन्त्र है और कौन-सा आश्रित, यह जानना महत्वहीन होता है। इसके विपरीत प्रतीपगमन विश्लेषण में दोनों गुणांक b_{xy} तथा b_{yx} सममित नहीं होते ($b_{xy} \neq b_{yx}$)। इसका कारण यह है कि एक प्रतीपगमन गुणांक b_{xy} (अर्थात् X का Y पर), Y को स्वतन्त्र चर मान लेता है और दूसरा गुणांक b_{yx} (अर्थात् Y का X पर), X को स्वतन्त्र चर मानता है।

(4) **माप की प्रकृति** (Nature of Measurement)—सहसम्बन्ध गुणांक X तथा Y चरों के बीच रेखीय सम्बन्ध (linear relationship) की माप है जबकि प्रतीपगमन गुणांक ऐसे गणितीय माप हैं जो चरों के बीच औसत सम्बन्ध (average relationship) को व्यक्त करते हैं।

नोट

(5) **माप का प्रकार** (Type of Measurement)—सहसम्बन्ध गुणांक एक सापेक्ष (relative) माप है और इस प्रकार यह मापन-इकाइयों के प्रति स्वतन्त्र होता है। इसके विपरीत प्रतीपगमन गुणांक दो चरांकों के बीच सम्बन्ध ज्ञात करने का निरपेक्ष (absolute) माप है।

(6) **निरर्थक सम्बन्ध** (Nonsense or Absurd Relation)—कभी-कभी दो चरों के बीच निरर्थक सहसम्बन्ध हो सकता है जो विशुद्ध रूप से संयोगवश होता है और जिसकी कोई व्यावहारिक प्रासंगिकता भी नहीं होती जैसे लोगों की आय में वृद्धि होना और उनके भार में वृद्धि होना। इसके विपरीत प्रतीपगमन कभी भी निरर्थक नहीं होता।

(7) **मूल-बिन्दु और पैमाने में परिवर्तन** (Change of Origin and Scale)—सहसम्बन्ध गुणांक एक विमाहीन (Dimensionless) गुणांक होने के कारण मूल-बिन्दु तथा पैमाने (तुलना मापदण्ड) में परिवर्तन के प्रति स्वतन्त्र होता है। इसके विपरीत प्रतीपगमन गुणांक मूल-बिन्दु (origin) में परिवर्तन के प्रति स्वतन्त्र होते हैं परन्तु पैमाने (scale) के प्रति स्वतन्त्र नहीं होते।

(8) **अनुप्रयोग** (Application)—सहसम्बन्ध का अनुप्रयोग सीमित है क्योंकि यह दो चरों के बीच केवल रेखीय सम्बन्ध का अध्ययन है। इसके विपरीत प्रतीपगमन का अनुप्रयोग व्यापक है क्योंकि यह दो चरांकों के बीच गैर-रेखीय (non-linear) सम्बन्ध का भी अध्ययन करता है।

क्या आप जानते हैं सांख्यिकीय प्रमाण से दो चरों के बीच साहचर्य की केवल उपस्थिति या अनुपस्थिति तो सिद्ध हो सकती है परन्तु कारणतत्व मौजूद है या नहीं, यह बात विशुद्ध रूप से तर्कपण्यता (reasoning) पर निर्भर है।

14.6 प्रतीपगमन एवं सहसम्बन्ध (Regression and Correlation)

जब दो श्रेणियों में पूर्ण सहसम्बन्ध होता है तो उनके मध्य एक ही प्रतीपगमन रेखा होती है। कारण स्पष्ट है क्योंकि उस अवस्था में x और y के मूल्यों को प्रांकित करने से सभी बिन्दु एक ही रेखा के रूप में होते हैं।

इन रेखाओं की सहायता से सहसम्बन्ध की मात्रा व दिशा जानने में भी सहायता मिलती है जिसके लिए निम्न नियम हैं—

(1) यदि दोनों रेखाएं **एक-दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लें** तो श्रेणियों में **पूर्ण सहसम्बन्ध** होता है। इस प्रकार x और y के मध्य पूर्ण सहसम्बन्ध होने पर एक ही प्रतीपगमन रेखा बनती है।

(2) यदि ये रेखाएं **एक-दूसरे को समकोण पर काटें** तो सहसम्बन्ध का **सर्वथा अभाव प्रकट** होता है अर्थात् दोनों के मध्य सहसम्बन्ध की मात्रा शून्य है।

(3) रेखाएं एक-दूसरे से जितनी पास होंगी, सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही अधिक होगी।

(4) रेखाएं एक-दूसरे से जितनी दूर होंगी, सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही कम होगी।

नोट—इसमें x तथा y को Capital अक्षरों में भी ले सकते हैं।

14.7 प्रतीपगमन गुणांकों द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक का निर्धारण (Determination of Correlation Coefficient By Regression Coefficients)

नोट

प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient) **वह मान दर्शाता है जो एक श्रेणी के चल-मूल्यों में इकाई परिवर्तन** (unit change) **होने से दूसरी श्रेणी के चल-मूल्यों में औसतन परिवर्तन होगा।** यह प्रतीपगमन रेखाओं के सम्बन्ध में रेखा ढलान (slope) का बीजगणितीय माप है। जब दो प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात हों तो इनकी सहायता से सहसम्बन्ध गुणांक (r) ज्ञात किया जा सकता है। सहसम्बन्ध गुणांक (r) दोनों प्रतीपगमन गुणांकों (b_{xy} एवं b_{yx}) के गुणनफलों का वर्गमूल होता है अर्थात् सहसम्बन्ध गुणांक दो प्रतीपगमन गुणांकों का गुणोत्तर माध्य होता है।

$$\sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \times r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} = \sqrt{r^2} = r$$

टिप्पणी—

(1) ध्यान रहे कि b_{xy}, b_{yx} तथा r का चिह्न समान रहता है। तीनों धनात्मक होंगे या तीनों ऋणात्मक होंगे।

(2) दोनों प्रतीपगमन गुणांक सामान्यत: एक से अधिक मूल्य के नहीं हो सकते। यदि b_{xy} और b_{yx} दोनों का मूल्य 1 से अधिक होगा तो दोनों का गुणनफल r^2 भी 1 से अधिक होगा जिसके फलस्वरूप r भी 1 से अधिक होगा जो असम्भव है। हां, यह सम्भव है कि एक गुणांक का मान 1 से अधिक हो सकता है, परन्तु इस अवस्था में दूसरे गुणांक का मान इतना कम होना चाहिए कि दोनों का आपस में गुणा करने पर गुणनफल 1 से अधिक न हो।

उदाहरण (Illustration) **6**

(*i*) यदि $b_{yx} = 0.64$ तथा $b_{xy} = 1$ हो तो r का मान बताइए।

Find out the value of r if $b_{yx} = 0.64$ and $b_{xy} = 1$.

(*ii*) यदि दो प्रतीपगमन गुणांक – 0.9 तथा – 0.5 हों तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान बताइए।

If the two regression coefficient are – 0.9 and – 0.5, find out the value of correlation coefficient.

हल (Solution)

(*i*) $b_{yx} = .64, b_{xy} = 1$

$$\therefore \quad r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}} = \sqrt{.64 \times 1} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

(*ii*) माना $b_{yx} = -0.9$ तथा $b_{xy} = -0.5$

तब $r = -\sqrt{0.9 \times 0.5} = -\sqrt{0.45} = -.671$

स्व-मूल्यांकन (Salf Assessment)

1. सही विकल्प चुनिए

1. यदि दो चरों के बीच सहसंबंध पाया जाता है परंतु कारण परिणाम संबंध नहीं पाया जाता तो उस सहसंबंध को कहा जाता है–

(क) प्रत्यक्ष संबंध (ख) निरर्थक संबंध

(ग) अपत्यक्ष संबंध (घ) इनमें से कोई नहीं।

नोट

2. जहाँ दो या अधिक चरों के मध्य कारण परिणाम संबंध पाया जाता है वहाँ पर प्रयोग किया जाता है–
   (घ) प्रतीपगमन विश्लेषण (ख) सहसंबंध गुणांक
   (ग) सहसंबंध विश्लेषण (घ) इनमें से कोई नहीं।
3. प्रतीपगमन विश्लेषण अवधारणा का प्रयोग सर्वप्रथम किसने किया था–
   (क) सर फ्रांसिस गाल्टन (ख) प्रो. डेवनपोर्व
   (ग) डॉ बॉडिंगटन (घ) इनमें से कोई नहीं।
4. जब दो क्षेणियों में पूर्ण सहसंबंध होता है तो उनके मध्य प्रतीपगमन रेखा होती है–
   (क) एक (ख) दो
   (ग) तीन (घ) इनमें से कोई नहीं।
5. दो प्रतीपगमन गुणांको का गुणोत्तर मध्य होता है–
   (क) प्रतीपगमन गुणांक (ख) सहसंबंध गुणांक
   (ग) प्रतीपगमन विश्लेषण (घ) इनमें से कोई नहीं।

14.8 सारांश (Summary)

- सहसम्बन्ध (Correlation) का सिद्धान्त केवल यह स्पष्ट करता है कि दो परस्पर सम्बद्ध श्रेणियों में कितना और किस प्रकार (दिशा) का सम्बन्ध है। परन्तु यदि एक स्वतन्त्र श्रेणी के किसी निश्चित (या ज्ञात) मूल्य के आधार पर दूसरी आश्रित श्रेणी के तत्संवादी मूल्य का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाना हो तो उसके लिए सहसम्बन्ध के बजाए प्रतीपगमन विश्लेषण का सहारा लेना पड़ता है।
- सहसम्बन्ध विश्लेषण का प्रयोग उन समस्त क्षेत्रों (आर्थिक, सामाजिक, व्यावसायिक, आदि) में किया जाता है जहां दो या अधिक चरों के मध्य कारण-परिणाम सम्बन्ध पाया जाता है परन्तु अर्थशास्त्र में इस तकनीक का विशेष महत्त्व है।
- प्रतीपगमन विश्लेषण सांख्यिकीय सिद्धान्त की एक महत्वपूर्ण शाखा है जिसका अनुप्रयोग लगभग सभी प्राकृतिक, भौतिक तथा सामाजिक विज्ञानों में किया जाता है। यह तकनीक अब केवल पैतृक विशेषताओं तक ही सीमित नहीं है बल्कि इसका प्रयोग उन सभी क्षेत्रों में किया जाने लगा है जहाँ दो या अधिक परस्पर सम्बद्ध श्रेणियों में विभिन्न पद-मूल्यों की सामान्य माध्य की ओर वापिस लौटने की प्रवृत्ति पायी जाती है।
- सहसम्बन्ध गुणांक X तथा Y चरों के बीच रेखीय सम्बन्ध (linear relationship) की माप है जबकि प्रतीपगमन गुणांक ऐसे गणितीय माप हैं जो चरों के बीच औसत सम्बन्ध (average relationship) को व्यक्त करते हैं।
- सहसम्बन्ध का अनुप्रयोग सीमित है क्योंकि यह दो चरों के बीच केवल रेखीय सम्बन्ध का अध्ययन है। इसके विपरीत प्रतीपगमन का अनुप्रयोग व्यापक है क्योंकि यह दो चरांकों के बीच गैर-रेखीय (non-linear) सम्बन्ध का भी अध्ययन करता है।
- जब दो श्रेणियों में पूर्ण सहसम्बन्ध होता है तो उनके मध्य एक ही प्रतीपगमन रेखा होती है। कारण स्पष्ट है क्योंकि उस अवस्था में x और y के मूल्यों को प्रांकित करने से सभी बिन्दु एक ही रेखा के रूप में होते हैं।

नोट

14.9 शब्दकोश (Keywords)

1. **समापवर्तक** : वह राशि जिससे दो या अधिक राशियों के अलग-अलग भाग देने पर शेष कुछ भी न बचे
2. **अन्योन्याश्रित** : अन्य पर आश्रित

14.10 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. सहसंबंध विश्लेषण से आप क्या समझते है? इसका महत्त्व बताइए।
2. प्रतीपगमन विश्लेषण को परिभाषित कीजिए तथा इसके महत्त्व एवं उपयोग की व्याख्या कीजिए।
3. सहसंबंध तथा प्रतीपगमन विश्लेषण में अंतर स्पष्ट कीजिए।
4. प्रतीपगमन गुणांको द्वारा सहसंबंध गुणांक निर्धारण की विधि समझाइए।

उत्तर: स्व-मूल्यांकन (Answer Self Assessment)

1. (ख) 2. (ग) 3. (क) 4. (क) 5. (ख)

14.11 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055

नोट

इकाई–15: सूचकांक: सूचकांक का परिचय एवं उपयोग तथा उनके प्रकार (Index Number : Introduction and Use of Index Numbers and their Types)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- सूचकांक के परिचय, परिभाषाओं तथा उपयोग को समझने में।
- सूचकांक के प्रकार एवं सीमाओं का विवेचन करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

सूचकांक वे युक्तियाँ हैं जिनसे एक परस्पर सम्बन्धित चर-मूल्य के आकार (Magnitude) में होने वाले परिवर्तनों की माप की जा सकती है। ये परिवर्तन वस्तुओं की कीमत, उत्पादन की मात्रा, बिक्री की मात्रा आदि के रूप में हो सकते हैं। इस प्रकार के परिवर्तन विभिन्न इकाइयों के रूप में होता है, अत: इनकी माप एवं तुलना के लिए सूचकांकों का प्रयोग किया जाता है। तुलना दो समयावधियों दो स्थान विशेष तथा दो समान श्रेणियों के मध्य की जा सकती है। दो शहरों या विभिन्न समयों के मध्य उपभोग की तुलना जीवन-निर्वाह सूचकांकों द्वारा की जा सकती है, इसी प्रकार विभिन्न वर्षों के भौतिक उत्पादन की तुलना के लिए भौतिक मात्राओं के सूचकांकों का प्रयोग किया जा सकता है।

नोट

15.1 सूचकांक का परिचय एवं परिभाषाएं (Introduction and Definitions of Index Number)

सूचकांक का सर्वप्रथम प्रयोग 1764 में इटली के प्रसिद्ध संख्याशास्त्री कार्ली (Carli) ने अनाज, तेल तथा शराब आदि के मूल्यों पर अमरीका की खोज का प्रभाव जानने के लिए किया था। इसके बाद जैवन्स (Jevons), मार्शल (Marshall), इरविंग फिशर (Irving Fisher), एजवर्थ (Edgeworth) आदि विद्वानों ने मुद्रा की क्रय-शक्ति की माप के लिए सूचकांकों का सहारा लिया था, तब से ही सूचकांकों का प्रयोग निरन्तर बढ़ता गया और वर्तमान में आर्थिक, व्यावसायिक एवं अन्य क्षेत्रों में होने वाले परिवर्तनों की माप के लिए सूचकांकों का ही प्रयोग किया जाता है।

सूचकांक (*Index Number*) *से तात्पर्य वह उपकरण है जो चरों के मूल्य एवं मात्रा मे होने वाले परिवर्तन को दर्शाता है।* दूसरे शब्दों में यह एक सांख्यिकी (Statistical) दर्पण है, जोकि संबंधित चरों (Variables) के अंतर एवं परिवर्तन को दर्शाता है। कुछ स्थितियों में परिवर्तन का प्रत्यक्ष माप उपयुक्त नहीं होता, इसलिए सूचकांक द्वारा चरों के परिवर्तन को प्रतिशत में दर्शाना उपयुक्त होता है। उदाहरणस्वरूप, यदि 1995 के जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक 100 की तुलना में 2002 का जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक 160 हो जाता है, तो इस प्रकार 2002 से सामान्य कीमत का स्तर 60% अधिक समझा जाएगा।

यदि दी गई शृंखलाएँ एवं चरों की इकाइयाँ भिन्न हों तो समांतर के माप अनुपयुक्त नहीं होते हैं। इस प्रकार, इन स्थितियों में परिवर्तन का माप करने के लिए सूचकांक (Index Number) को उपयुक्त समझा जाता है। आइये, अब हम एक उदाहरण से इसे अच्छी तरह समझते हैं। मान लीजिए हमें सामान्य कीमत स्तर (General Price Level) में परिवर्तन का माप करना है। यह परिवर्तन प्रत्यक्ष रूप से मापे नहीं जा सकते, क्योंकि कीमतों में होने वाले परिवर्तन विभिन्न वस्तुओं के कारण विभिन्न इकाइयों में हैं, जैसे—गेहूँ के लिए प्रति क्विंटल, कपड़ा प्रति मीटर अथवा प्रति थान, दूध प्रति लीटर, कागज प्रति दस्ता (रिम) आदि। इसलिए विभिन्न इकाइयों में दिए गए मूल्यों की गणना एवं तुलना प्रत्यक्ष रूप से नहीं की जा सकती। इनकी गणना केवल प्रतिशत में की जा सकती है अथवा केवल कुछ आँकड़ों की गणना कर सकते हैं। इसलिए इन समस्त आँकड़ों का प्रतिशत ज्ञात करने के लिए प्रत्येक वस्तु का प्रतिशत परिवर्तन ज्ञात किया जाता है। तत्पश्चात, इस प्रतिशत से एक औसत प्रतिशत ज्ञात करके समस्त इकाइयों का कीमत परिवर्तन प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार के प्राप्त औसत (समांतर) **को सामान्य सूचकांक (General Index Number) या थोक विक्रय कीमत सूचकांक (Wholesale Price Index Number) कहा जाता है।**

परिभाषाएँ (Definitions)

1. *"सूचकांक एक सांख्यिकी माप है, जो समय, स्थान या अन्य विशेषताओं के आधार पर किसी चर या चर-मूल्यों के समूहों में होने वाले परिवर्तनों को प्रदर्शित करता है।"*
2. *"सूचकांक, संबंधित चर-मूल्यों के आकार में होने वाले अंतरों का माप करने का साधन है।"*

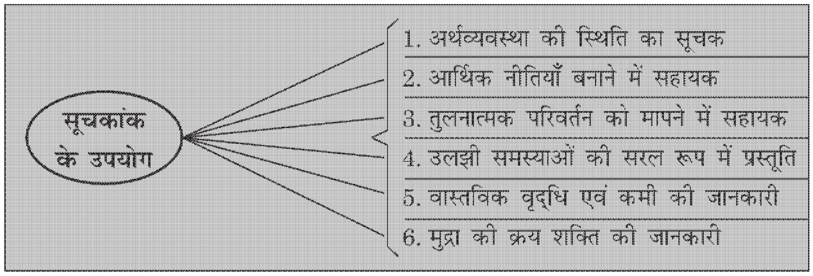
   —क्रक्सटन तथा काउडन
3. *"सूचकांक का उपयोग कुछ विशेषताओं में होने वाले परिवर्तनों के माप के लिए किया जाता है, जोकि हम प्रत्यक्ष रूप से नहीं माप सकते हैं।"* **—डॉ. ए. एल. बौले (Dr. A.L. Bowley)**

नोट्स सूचकांक (Index Number) की रचना मज़दूरी, रोजगार, जीवन निर्वाह व्यय (Cost of living) विक्रय, उत्पादन, आयात, निर्यात, अंश, भंडार, निवेश, व्यावसायिक क्रियाएँ एवं अन्य विचारों के परिवर्तन को मापने के लिए भी की जाती है।

नोट

15.2 सूचकांक के उपयोग (Uses of Index Number)

सूचकांक का उपयोग निम्नलिखित रूप से किया जा सकता है–



1. **अर्थव्यवस्था की स्थिति का सूचक** (Measures of pulse of the economy)–सूचकांक अर्थव्यवस्था की सामान्य स्थिति को जानने के लिए उपयोग किया जाता है, क्योंकि इसके द्वारा मज़दूरी, कीमत, उत्पाद, बैंक जमा, विदेश विनिमय आदि के परिवर्तन की गणना की जाती है।
2. **आर्थिक नीतियाँ बनाने में सहायक** (Helping the formulation of suitable economic policies)–सूचकांक का उपयोग व्यवसाय एवं आर्थिक नीतियों का निर्माण करने में किया जाता है। इसके द्वारा मज़दूरी, वेतन, जीवन निर्वाह व्यय आदि की गणना समझाई जा सकती है। सरकारी कर्मचारियों के महँगाई भत्ते का संबंध भी जीवन निर्वाह सूचकांक से होता है। यदि महँगाई भत्तों में वृद्धि कर दी जाए तो सरकारी कर्मचारियों के जीवन निर्वाह व्यय (Cost of living) में भी वृद्धि हो जाती है, जिससे हड़ताल घेराव आदि स्थितियों पर नियंत्रण किया जा सकता है।
3. **तुलनात्मक परिवर्तन को मापने में सहायक** (Measure of comparative changes)–सूचकांक (Index Number) का मुख्य कार्य दो विभिन्न चरों वाली श्रृंखलाओं के तुलनात्मक परिवर्तन को मापना है। उदाहरणस्वरूप, हम कृषि में होने वाली वृद्धि द्वारा औद्योगिक उत्पाद की वृद्धि की तुलनात्मक माप कर सकते हैं।
4. **उलझी समस्याओं की सरल रूप से प्रस्तुति** (Inteligible presentation of complex problems)– उत्पादन, आय, कीमत, विदेशी विनिमय आदि से संबंधित उलझे हुए आँकड़ों एवं समस्याओं को सूचकांक द्वारा सरलता से प्रस्तुत किया जा सकता है।
5. **वास्तविक वृद्धि एवं कमी की जानकारी** (Knowledge of real increase or decrease)–वास्तविक आय (Real Income) में होने वाले परिवर्तन की गणना निम्नलिखित सूत्र की सहायता से की जा सकती है–

$$\text{वास्तविक आय} = \frac{\text{वर्तमान आय}}{\text{सूचकांक}} \times 100$$

6. **मुद्रा की क्रय शक्ति की जानकारी** (Knowledge of purchasing power of money)–थोक विक्रय कीमत सूचकांक (Wholesale Price Index) में होने वाली परिवर्तन की सहायता से मुद्रा की क्रय शक्ति के परिवर्तन को ज्ञात किया जा सकता है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)–

1. सूचकांक एक सांख्यिकी ········ है।
2. सूचकांक का सर्वप्रथम प्रयोग इटली के प्रसिद्ध संख्याशास्त्री ········ ने किया था।

नोट

3. सूचकांक अर्थव्यवस्था की स्थिति के ········ के रूप में उपयोग होता है।

4. वास्तविक आय = $\frac{\text{वर्तमान आय}}{\text{सूचकांक}} \times$ ········ होता है।

5. 'सूचकांक' संबंधित चर-मूल्यों के आकार में होने वाले अंतरों का माप करने का ········ है।

15.3 सूचकांक के प्रकार (Types of Index Number)

सूचकांक की मुख्य प्रकार निम्नलिखित हैं—

सूचकांक के प्रकार

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक | थोक व्यापार मूल्य सूचकांक | औद्योगिक उत्पादन सूचकांक

1. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index Number)

उपभोक्ताओं द्वारा वस्तुओं तथा सेवाओं की प्राप्ति के लिए भुगतान की जाने वाली कीमत के औसत परिवर्तन को दर्शाने वाला सूचकांक, उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index Number) कहलाता है। यह सूचकांक व्यक्तियों के विभिन्न वर्गों के व्यक्तियों में भिन्नता होती है, जैसे—आवश्यक वस्तुओं का स्वभाव (गुण) तथा मात्रा, उपभोग की आदत, व्यक्तिगत एवं श्रेत्रीय प्राथमिकता आदि। इसके अतिरिक्त, उपभोक्ताओं की आय एवं उपभोग का स्थान भी वस्तुओं तथा सेवाओं के उपभोग को प्रभावित करता है। इसलिए उच्च, मध्यम तथा निचले वर्ग के व्यक्तियों के व्यय का तरीका भी भिन्न होता है। देहाती एवं शहरी व्यक्तियों के व्यय में भी भिन्नता होती है। वस्तुओं की कीमत में होने वाली वृदधि एवं कमी विभिन्न वर्गों के उपभोक्ताओं को विभिन्न अनुपात में प्रभावित करती है। इसलिए, उपभोक्ता कीमत सूचकांक विभिन्न वस्तुओं की कीमत में होने वाली वृद्धि अथवा कमी का विभिन्न वर्गों के उपभोक्ताओं पर होने वाले प्रभाव का अध्ययन है। इसके लिए **ग्रिफिन (Griffin)** ने ठीक ही कहा है, *"उपभोक्ता कीमत सूचकांक केवल कीमत के परिवर्तन का ही माप करता है। इसके द्वारा परिवारों द्वारा वस्तुओं और सेवाओं के क्रय एवं जीवन निर्वाह के लिए व्यय की गई राशि की मात्रा के परिवर्तन का अध्ययन नहीं किया जा सकता है।"*

(*a*) उपभोक्ता कीमत सूचकांक की मुख्य विशेषताएँ

(Special Features of Consumer Price Index Number)

(*i*) उपभोक्ता कीमत सूचकांक की *जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक* (Cost of living index), *फुटकर कीमत सूचकांक अथवा जीवन मूल्य सूचकांक* (Price of living index) *भी कहा जाता है।*

(*ii*) उपभोक्ता कीमत सूचकांक द्वारा *केवल कीमत के परिवर्तन को मापा जाता है।*

(*iii*) उपभोक्ता कीमत सूचकांक द्वारा केवल इस बात का पता लगाया जा सकता है कि आधार वर्ष की तुलना में *उपभोक्ता किसी विशेष वस्तु तथा सेवा की वर्तमान कीमतों पर कितनी मात्रा का क्रय करेंगे।*

(*iv*) *उपभोक्ता कीमत सूचकांक की गणना समाज के विभिन्न समूहों एवं वर्गों के लिए व्यक्तिगत रूप से की जाती है,* जैसे—सरकारी कर्मचारी, औद्योगिक कर्मचारी, कृषि श्रमिक आदि। यह विभिन्न भौगोलिक क्षेत्रों में भिन्न हो सकती है जैसे—शहरी, देहाती अथवा पहाड़ी क्षेत्र।

(*v*) उपभोक्ता कीमत सूचकांक की गणना निम्नलिखित दो विधियों के आधार पर की जाती है—

(*a*) समूहन व्यय विधि अथवा समूहन विधि (Aggregative expenditure method or aggregative method)

(*b*) परिवार बजट अथवा भारित अनुपात विधि (Family Budgt or weighted relative method)

नोट

(b) उपभोक्ता कीमत सूचकांक का महत्व
(Significance of Consumer Price Index)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक के निम्नलिखित महत्व हैं–

(i) मज़दूरी निर्धारण में सहायक (Helpful in wage negotiations)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक द्वारा कर्मचारियों की सेवाओं के बदले दी जाने वाली मज़दूरी का निर्धारण किया जा सकता है। इसके द्वारा जीवन निर्वाह व्यय का भी अनुमान लगाया जा सकता है। इस कारण, उपभोक्ता कीमत सूचकांक द्वारा मज़दूरों एवं श्रमिकों की मज़दूरी का निर्धारण किया जा सकता है।

सरकारी कर्मचारियों की स्थिति में जीवन-निर्वाह व्यय सूचकांक (Cost of living index) में वृद्धि के साथ-साथ उनके वेतन में महँगाई भत्तों की वृद्धि हो जाती है।

(ii) क्रय शक्ति में परिवर्तन का माप (Measure for changing purchasing power)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक का उपयोग रुपये की क्रय शक्ति के परिवर्तन को मापने के लिए भी किया जाता है। यह कर्मचारियों की वास्तविक मज़दूरी (Real wages) निर्धारित करने में भी सहायक होता है।

3. बाज़ार के विश्लेषण में सहायक (Helpful in analysing market)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक का उपयोग विशेष वस्तुओं के बाज़ार विश्लेषण के लिए भी किया जाता है। इसके द्वारा विभिन्न क्षेत्रों के व्यक्तियों की क्रय शक्ति एवं विशेष वस्तुओं के क्रय की क्षमता का अध्ययन भी किया जा सकता है।

(iii) सरकारी नीति निर्धारित करने में सहायक (Heplful in determining government policy)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक सरकार को निम्नलिखित नीतियों का निर्धारण करने में भी सहायता प्रदान करता है–

(i) मज़दूरी नीति (Wage Policy)
(ii) कीमत नीति (Price Policy)
(iii) कर नीति (Taxation Policy)
(iv) लगान नियंत्रण नीति (Rent Control Policy)
(v) सामान्य सहायक नीति (General Economic Policy)

(c) उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना के चरण
(Steps for Construction of Consumer Price Index Number)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना करते समय निम्नलिखित चरण अपनाये जाते हैं–

(i) व्यक्तियों के वर्गों का निर्धारण (Determining the Class of People Under Study)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक (Consumer Price Index Number) की रचना के लिए सर्वप्रथम व्यक्तियों का वर्ग निर्धारित करना पड़ता है। इसलिए, सूचकांक की रचना का उद्देश्य स्पष्ट होना चाहिए। यदि सूचकांक की गणना शिक्षकों के लिए की जानी है, तो यह स्पष्ट होना चाहिए कि शिक्षक प्राथमिक, माध्यमिक, उच्चतर माध्यमिक के हैं अथवा विश्वविद्यालय के। इसके अतिरिक्त वे शहरी क्षेत्र के हैं अथवा देहाती क्षेत्र के।

(ii) परिवार बजट सर्वेक्षण (Conducting Family Budget Enquiry)

सूचकांक का उद्देश्य एवं विचार निर्धारित करने के उपरांत, विभिन्न वर्गों के परिवार बजट का सर्वेक्षण करना चाहिए। इस प्रकार का सर्वेक्षण निदर्शन (random) आधार पर अथवा परिवारों की निदर्शन विधि द्वारा किया जा सकता है। चयन किये गये परिवारों के व्यय का पूर्ण विवरण प्राप्त किया जाता है। इन खर्चों का वर्गीकरण निम्नलिखित शीर्षकों में किया जाता है–

(i) भोजन (Food)
(ii) कपड़ा (Clothing)
(iii) ईंधन तथा प्रकाश (Fuel and lighting)

नोट

(*iv*) निवास किराया (House rent)

(*v*) विविध (Miscellaneous) व्यय।

उपरोक्त प्रत्येक शीर्षकों को उप शीर्षकों में विभाजित किया जा सकता है, जैसे—भोजन में गेहूँ, चावल, दाल, चीनी आदि।

(*iii*) कीमत निर्ख की प्राप्ति (Obtaining Price Quotations)

वस्तुओं के मूल्य निर्ख उस क्षेत्र से प्राप्त करने चाहिए जहाँ अध्ययन से संबंधित लोग रहते हों, क्योंकि विभिन्न स्थानों, दुकानों तथा व्यक्तियों के लिए मूल्य भिन्न-भिन्न होते हैं। इसलिए कीमत का चुनाव तर्कसंगत होना चाहिए। कीमत का निर्धारण करते समय निम्नलिखित नियमों का पालन करना चाहिए—

(*i*) फुटकर कीमतें स्थिर सूची से होनी चाहिए, जिनके साथ-साथ वस्तु का गुण भी दर्शाया गया हो।

(*ii*) यदि ग्राहकों को कटौती (छूट-Discount) दिया गया हो तो उसे भी दर्शाना चाहिए।

(*iii*) प्राप्त किया गया मूल्य ग्राहकों से प्राप्त किया गया वास्तविक मूल्य होना चाहिए।

(*iv*) नियंत्रित कीमतों के साथ गैर-कानूनी कीमतों का भी ध्यान रखना चाहिए।

कीमतों का संकलन विशिष्ट एजेंट (कर्मचारियों) द्वारा किया जाना चाहिए। कीमतों का सकंलन डाक द्वारा प्रश्नावली भेजकर भी किया जा सकता है। आँकड़ों के सकंलन में संकलित करने वाले कर्मचारी की नीयत सही होनी चाहिए। अंत में संकलित विभिन्न, फुटकर कीमतों की प्रत्येक मद की औसत की गणना करनी चाहिए।

सूचकांक की रचना के लिए संकलित कीमतों को भार प्रदान करना चाहिए। मदों को भार प्रदान करना आवश्यक है, क्योंकि विभिन्न मदों का महत्व भिन्न होता है। साथ ही यह भी ध्यान रखना चाहिए कि जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक (Cost of living index) की गणना सदैव भार से की जाती है।

(*iv*) सूचकांक की रचना (Construction of Index Number)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना निम्नलिखित विधियों द्वारा की जा सकती है—

उपभोक्ता कीमत सूचकांक का विधियां
(Methods of Constructing Consumer Price Index Number)

(*a*) समूहन व्यय विधि अथवा समूहन विधि

(*b*) परिवार बजट विधि अथवा भारित अनुपात विधि

(*i*) समूहन व्यय विधि अथवा समूहन विधि

(Aggregative Expenditure Method or Aggregative Method)

इस विधि के अनुसार उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना के लिए, आधार वर्ष में विभिन्न वर्ग के व्यक्तियों द्वारा वस्तुओं की उपभोग की गई मात्रा की पहचान की जाती है। इस मात्रा से आधार वर्ष की कीमतों को गुणा करके कुल व्यय (Aggregative expenditure) प्राप्त किया जाता है। इसी प्रकार वर्तमान वर्ष का कुल व्यय ज्ञात करके प्राप्त परिणाम को आधार वर्ष के कुल व्यय से भाग करके 100 से गुणा कर दिया जाता है। इस क्रिया को निम्नलिखित रूप से दर्शाया गया है—

सूत्र के रूप में (Symbolically),

उपभोक्ता कीमत सूचकांक (Consumer Price Index) $= \dfrac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0} \times 100$

यह वास्तव में सूचकांक की रचना की लेस्पेयर विधि (Laspeyer's Method) है, जोकि बहुत प्रसिद्ध है।

नोट

(b) परिवार बजट विधि अथवा भारित अनुपात विधि

(Family Budget Method or Weighted Relatives Method)

इस विधि के अंतर्गत हम किसी विशेष वर्ग के विभिन्न परिवारों के बजट का अध्ययन करके, परिवारों द्वारा विभिन्न वस्तुओं पर किये जाने वाले व्यय का कुल व्यय (Aggregative Expenditure) ज्ञात करते हैं। इसके उपरांत भार को निर्धारित करने के लिए कुल मात्रा को कीमतों से गुणा कर दिया जाता है अर्थात् P_0q_0 की गणना की जाती है। प्रत्येक वस्तु के मूल्यानुपात प्राप्त करके उसे प्रत्येक मद के भार के मूल्य से गुणा किया जाता है एवं गुणनफल को भार के योग से भाग कर दिया जाता है। इसे निम्नलिखित रूप से दर्शाया जा सकता है–

उपभोक्ता कीमत सूचकांक (Consumer Price Index) $= \dfrac{\sum PV}{\sum V}$

यहाँ,

$P = \dfrac{P_1}{P_0} \times 100$, प्रत्येक मद के लिए

V = भार का मूल्य (Value Weights) अर्थात (P_0q_0)

यह विधि भारित अनुपात की मूल्यानुपात विधि (Price Relative Method) के समान है।

[**नोट**–समूहन व्यय विधि (Aggregative expenditure method) एवं परिवार बजट विधि (Family budget method) द्वारा प्राप्त उत्तर समान होने चाहिए।]

उदाहरण 1. *निम्नलिखित सूचकांकों से उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना कीजिए। भोजन का भार 60; किराया 25; कपड़ा 20; ईंधन एवं प्रकाश 20; विविध 10.*

वर्ष (Year)	भोजन (Food)	किराया (Rent)	कपड़ा (Clothing)	ईंधन एवं विद्युत (Fuel and lighting)	विविध (Miscellaneous)
2001	100	100	100	100	100
2002	110	110	95	100	110
2003	120	115	105	105	115
2004	115	120	110	110	120

हल–

मदें (Items)	भार (Weights)	2002 का सूचकांक (2002 Index No.)	भारित मूल्य (Weighted relatives)	2003 का सूचकांक (2003 Index No.)	भारित मूल्य (Weighted relatives)	2004 का सूचकांक (2004 Index No.)	भारित मूल्य (Weighted relatives)
1. **भोजन** (Food)	60	110	6,600	120	7,200	115	6,900
2. **किराया** (Rent)	25	110	2,750	115	2,875	120	3,000
3. **कपड़ा** (Clothing)	20	95	1,900	105	2,100	110	2,200
3. **ईंधन तथा प्रकाश** (Fuel and lighting)	20	100	2,000	105	2,100	110	2,200
5. **विविध** (Miscellaneous)	10	110	1,100	115	1,150	120	1,200
कुल (Total)	135		14,350		15,425		15,500

नोट

वर्ष 2002 का उपभोक्ता कीमत सूचकांक (जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक) $= \dfrac{14,350}{135} = 106.3$

वर्ष 2003 का उपभोक्ता कीमत सूचकांक (जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक) $= \dfrac{15,425}{135} = 114.25$

वर्ष 2004 का उपभोक्ता कीमत सूचकांक (जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक) $= \dfrac{15,500}{135} = 114.8$

उदाहरण 2. *निम्नलिखित आँकड़ों से परिवार बजट विधि (Family budget method) के अनुसार 1990 के आधार पर 2004 के लिए उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना कीजिए–*

मदें (Items)	1990 की कीमतें (Price in 1990)	2004 की कीमतें (Price in 2004)	भार (Weight)
भोजन (Food)	200	280	30
किराया (Rent)	100	200	20
कपड़ा (Clothing)	150	120	20
ईंधन तथा प्रकाश (Fuel and lighting)	50	100	10
विविध (Miscellaneous)	100	200	20

हल–वर्ष 2004 के उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना

(आधार वर्ष 1990 = 100→परिवार बजट विधि)

मदें (Items)	भार (Weights) W	1990 की कीमतें (Prices in 1990) P_0	2004 की कीमतें (Prices in 2004) P_1	$\frac{P_1}{P_0} \times 100$ P	P_0w V $(P_0 \times W)$	Pv $(P \times V)$
भोजन (Food)	30	200	280	140	6000	8,40,000
किराया (Rent)	20	100	200	200	2000	4,00,000
कपड़ा (Clothing)	20	150	120	80	3000	2,40,000
ईंधन तथा प्रकाश (Fuel and lighting)	10	50	100	200	500	1,00,000
विविध (Miscellaneous)	20	100	200	200	2000	4,00,000
					$\Sigma V = 13,500$	$\Sigma PV = 19,80,000$

2004 का उपभोक्ता कीमत सूचकांक (Consumer Price Index for 2004)

$$= \frac{\sum PV}{\sum V} = \frac{19,80,000}{13,500} = 146.67$$

उपभोक्ता कीमत सूचकांक उपयोग करते समय अपनाई जाने वाली सावधानियाँ

(Precautions while using Consumer Price Index)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक का उपयोग करते समय निम्नलिखित सावधानियाँ अपनानी चाहिए–

(*i*) उपभोक्ता कीमत सूचकांक जीवन निर्वाह व्यय को नहीं दर्शाता, यह केवल आधार वर्ष की तुलना में फुटकर कीमतों में होने वाला परिवर्तन दर्शाता है।

नोट

(*ii*) सूचकांक की गणना करते समय यह मान लिया जाता है कि आधार वर्ष एव वर्तमान वर्ष में उपयोग होने वाली वस्तुएँ तथा सेवाएँ समान है।

(*iii*) सूचकांक वस्तुओं के गुण में होने वाले परिवर्तन का ध्यान नहीं रख सकता, परंतु वास्तव में परिवर्तन होता रहता है। इसलिए गुण में परिवर्तन न होने की मान्यता के अनुसार सूचकांक की गणना की जाती है। यह एक खोखली मान्यता है।

(*iv*) उपभोग संरचना में होने वाले परिवर्तन का भी ध्यान नहीं रखा जाता।

(*v*) निदर्शन का अत्यधिक उपयोग करके वस्तुओं, परिवार, कीमत आदि का चुनाव किया जाता है, जोकि सूचकांक की विश्वसनीयता को प्रभावित करता है।

उदाहरण 3. *निम्नलिखित विधियों के अनुसार 2001 को आधार वर्ष मानकर 2002 के उपभोक्ता कीमत सूचकांक की गणना कीजिए–*

(*i*) *समूहन व्यय विधि* (*Aggregative Expenditure Method*)

(*ii*) *परिवार बजट विधि* (*Family Budget Method*)

वस्तुएँ (Commodities)	*भार (Weight)*	*2001 की प्रति इकाई कीमत (Price 2001 per unit)*	*2002 की प्रति इकाई कीमत (Price 2002 per unit)*
गेहूँ (Wheat)	20	50	70
चावल (Rice)	30	20	25
दालें (Pulses)	5	2	3
घी (Ghee)	20	5	5
तेल (Oil)	10	3	3

हल–(*i*) **समूहन व्यय विधि** (Aggregative Expenditure Method)

वस्तुएँ (Commodities)	*भार (Weight)* (q_0)	*2001 की इकाई कीमत (Price 2001 per unit)* (P_0)	*2002 की प्रति इकाई कीमत (Price 2002 per unit)* (P_1)	(P_0q_0)	(P_1q_0)
गेहूँ (Wheet)	20	50	70	1000	14,00
चावल (Rice)	30	20	25	600	750
दालें (Pulses)	5	2	3	10	15
घी (Ghee)	20	5	5	100	100
तेल (Oil)	10	3	3	30	30
				$\Sigma P_0q_0 = 1740$	$\Sigma P_1q_0 = 2295$

2001 का उपभोक्ता कीमत सूचकांक (Consumer Price Index for 2001)

$$= \frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma P_0q_0} \times 100 = \frac{2295}{1740} \times 100 = \mathbf{131.89}$$

(*ii*) **परिवार बजट विधि** (Family Budget Method)

नोट

वस्तुएँ (*Commodities*)	*भार* (*Weight*) (*W*)	*2001 की प्रति इकाई कीमत* (*Price per unit 2001*) (P_0)	*2002 की प्रति इकाई कीमत* (*Price per unit 2002*) (P_1)	$\frac{P_1}{P_0} \times 100$ (*P*)	*V* ($P_0 \times W$)	*PV* ($P \times V$)
गेहूँ (Wheat)	20	50	70	140	1000	1,40,000
चावल (Rice)	30	20	25	125	600	75,000
दालें (Pulses)	5	2	3	150	10	1,500
घी (Ghee)	20	5	5	100	100	10,000
तेल (Oil)	10	3	3	100	30	3,000
	$\Sigma W = 35$				1740	2,29,500

2002 का जीवन निर्वाह सूचकांक (Cost of Living Index for 2002) $= \frac{\sum PV}{\sum PV} = \frac{2,29,500}{1,740} = 131.89$

थोक व्यापार मूल्य सूचकांक (Wholesale Price Index Number)

वस्तुओं की थोक व्यापार कीमतों में सामान्य परिवर्तन दर्शाने वाला सूचकांक, थोक व्यापार, कीमत सूचकांक कहलाता है। थोक व्यापार कीमत सूचकांक, अर्थव्यवस्था के सामान्य कीमत स्तर में परिवर्तन दर्शाता है। भारत में प्रथम थोक व्यापार कीमत सूचकांक की रचना वाणिज्य एवं उद्योग मंत्रालय द्वारा 1947 में की गई। इसके उपरांत 1953-53 को आधार वर्ष मानकर, वर्ष 1956 में सूचकांक की रचना गई। थोक व्यापार औद्योगिक कीमत पुनर्विचार कमेटी (Wholesale Industrial Price Review Committee) के आग्रह पर सूचकांक रचना की गई श्रृंखला प्रारंभ की गई, जोकि 225 बाज़ार एवं 139 वस्तुओं पर आधारित थी। इसका आधार वर्ष 1970-71 था, जोकि 774 निर्ख (quotations) पर निर्भर है। थोक व्यापार कीमत सूचकांक (Wholesale Price Index Number) की रचना औद्योगिक वस्तुओं के आधार पर की जाती है *भारत में सरकारी कर्मचारियों के महँगाई भत्ते, थोक व्यापार कीमत सूचकांक से संबंधित होते हैं।* इसलिए थोक व्यापार, कीमत सूचकांक के आधार पर ही सरकारी कर्मचारियों को वर्ष में दो बार (जनवरी तथा जून माह में) अतिरिक्त महँगाई भत्ते प्रदान किए जाते हैं।

भारत में थोक व्यापार कीमत सूचकांक की रचना साप्ताहिक आधार पर की जाती है। भारत में वर्तमान थोक व्यापार कीमत सूचकांक की गणना 1993-94 को आधार वर्ष मानकर की गई। पुरानी श्रृंखला का आधार वर्ष 1981-82 था। यदि आधार वर्ष एवं वर्तमान वर्ष में अधिक अंतर पाया जाता है तो आधार वर्ष परिवर्तित कर दिया जाता है, जिससे नवीन वस्तुओं एवं पारंपरिक वस्तुओं (जिन्हें वर्तमान में छोड़ दिया गया है) का अध्ययन सरलता पूर्वक करके उचित सूचकांक की गणना की जा सके।

टास्क कीमत नर्ख की प्राप्ति कहाँ से होती है?

(*a*) थोक व्यापार कीमत सूचकांक की रचना में सम्मिलित समूह

(Groups for the Construction of Wholesale Price Index)

(*i*) **प्राथमिक वस्तुएँ** (Primary Articles)—इन वस्तुओं (समूह) में गेहूँ, चावल, दालें, फल तथा सब्जियाँ सम्मिलित होती हैं। इनमें गैर-खाद्यान्न वस्तुएँ जैसे—रूई, जूट, तेल, गन्ना एवं खनिज आदि भी सम्मिलित होती हैं। इस श्रेणी मे नई श्रृंखला के अनुसार मदों की संख्या 98 एवं भार 22.02 अथवा 32.30% है।

नोट

(*ii*) **शक्ति उत्पादक वस्तुएँ** (Energy Articles)—इस समूह में विद्युत, कोयला, पेट्रोल वस्तुएँ एवं ईंधन सम्मिलित है। नई श्रृंखला के अनुसार इस श्रेणी में मदों की संख्या 19 एवं भार 14.23 अथवा 10.66% है।

(*iii*) **निर्माता वस्तुए–औद्योगि वस्तुएँ** (Manufactured Articles–Industrial Products)—इस समूह में चीनी, खाद्य (edible) तेल, कपड़ा मशीन, उपकरण, कागज़ की वस्तुएँ, चमड़ा एवं चमड़े की वस्तुएँ, रसायन तथा उर्वरक आदि सम्मिलित हैं। नई श्रृंखला (New Series) के अनुसार इस समूह में वस्तुओं की संख्या 318 एवं भार 63.75 और 57.04% है।

(*b*) थोक व्यापार कीमत सूचकांक के उपयोग

(Uses of Wholesale Price Index Number)

(*i*) व्यापारिक स्थितियों में परिवर्तन के पूर्वानुमान में उपयोगी (Useful for forecasting changes in trade conditions)—व्यापार परिस्थितियाँ, बाज़ार (अर्थव्यवस्था) में वस्तु की माँग तथा पूर्ति द्वारा प्रस्तुत की जाती हैं। एक वर्ष में थोक व्यापार कीमत सूचकांक में वृद्धि से तात्पर्य वस्तु की पूर्ति की तुलना में उसकी माँग की अधिकता है। यदि थोक व्यापार कीमत सूचकांक में कमी हो जाती है तो यह स्थिति माँग पर पूर्ति की अधिकता वाली मानी जाएगी। इस प्रकार, वर्तमान थोक व्यापार कीमत सूचकांक से पूर्व थोक व्यापार कीमत सूचकांक की तुलना करके भविष्य की व्यापार स्थितियों का अनुमान लगाया जा सकता है।

(*ii*) कीमतों में परिवर्तन के प्रभाव को कम करने में सहायक (Useful in eliminating effects of price changes on aggrgates)—एक देश की राष्ट्रीय आय, एक वर्ष में उत्पादित वस्तुओं तथा सेवाओं के मौद्रिक मूल्य (monetary value) का योग है। वस्तुओं तथा सेवाओं के मूल्य की गणना उसी वर्ष की कीमतों के आधार पर की जाती है, जिसे वर्तमान वर्ष कहते हैं। इसी प्रकार, आधार वर्ष की कीमतों के आधार पर भी गणना की जा सकती है। आधार वर्ष की कीमतों पर वस्तुओं तथा सेवाओं के मूल्य की गणना वास्तविक राष्ट्रीय आय (Real National Income) कहलाती है। इस प्रकार, थोक व्यापार कीमत सूचकांक समस्त समूह पर परिवर्तन दर्शाता है, जैसे—राष्ट्रीय आय, राष्ट्रीय व्यय आदि। इसलिए, थोक व्यापार कीमत सूचकांक में परिवर्तन ज्ञात करने के लिए राष्ट्रीय आय की गणना वर्तमान तथा स्थिर (आधार वर्ष) कीमतों पर की जाती है।

(*ii*) अर्थव्यवस्था का सूचक (Indicator of the economy)—थोक व्यापार कीमत सूचकांक अर्थव्यवस्था में स्फीति (Inflation) का सूचक है। स्फीति का निर्धारण अर्थव्यवस्था में एक वर्ष में कीमत में होने वाले परिवर्तन की सहायता से किया जाता है। मान लीजिए, 2000-01 को थोक व्यापार सूचकांक 120 एवं 2001-02 का थोक व्यापार कीमत सूचकांक 132 है।

इस प्रकार स्फीति की दर $= \dfrac{132}{120} \times 100 - 100 = 10\%$ होगी।

(*iv*) प्रोजेक्ट की लागत की गणना में उपयोगी (Useful in computing the cost of project)—प्रोजेक्ट एक दीर्घ कालीन प्रक्रिया है, जिसमें भविष्य में विभिन्न स्तरों पर अधिक व्यय की आवश्यकता होती है। उदाहरणस्वरूप, दिल्ली मेट्रो रेल प्रोजेक्ट एक दीर्घ कालीन प्रोजेक्ट है। इसके पूरा होने में बहुत वर्ष लगेंगे। जिस पर विभिन्न वर्षों में होने वाले व्यय का निर्धारण थोक व्यापार कीमत सूचकांक के आधार पर किया जा सकता है। इस प्रकार, वास्तविक अनुमानित कीमत, थोक व्यापार कीमत सूचकांक द्वारा निर्धारित स्फीति दर द्वारा बढ़ जाती है।

थोक व्यापार कीमत सूचकांक की रचना, उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना के समान की जाती है।

3. औद्योगिक उत्पादन सूचकांक (Index Number of Industrial Production)

किसी विशेष अवधि में आधार वर्ष की तुलना में उद्योगों के उत्पादन स्तर में वृद्धि अथवा कमी को मापने का सूचकांक औद्योगिक उत्पादन सूचकांक (Index Number of industrial production) *कहलाता है।* यह बात ध्यान करने योग्य है कि **औद्योगिक उत्पादन सूचकांक उत्पादन की केवल मात्रा परिवर्तन का माप है।** इसके द्वारा गुणों के परिवर्तन का माप नहीं किया जा सकता। इस प्रकार, इस सूचकांक की रचना के लिए आधार वर्ष एवं

नोट

वर्तमान वर्ष के औद्योगिक उत्पादन के संदर्भ में आँकड़ों की आवश्यकता होती है। सामान्यतया, औद्योगिक उत्पादन के आँकड़ों का संकलन निम्नलिखित शीर्षकों के अंतर्गत किया जाता है—

(*a*) औद्योगिक उत्पादन के आँकड़ों के संकलन के शीर्षक

(Heads under which Data of Industrial Production are Callected)

(*i*) **तकनीकी उद्योग** (Technical Industries)—कपड़ा, ऊन, रेशम आदि।

(*ii*) **खनन उद्योग** (Mining Industries)—लोहा, कोयला, ताँबा, पेट्रोल आदि।

(*iii*) **धात्विक उद्योग** (Metallurgical Industries)—लोहा तथा स्टील आदि।

(*iv*) **मेकैनिकल उद्योग** (Mechanical Industries)—रेल इंजन (Lacomotives), जलयान, वायुयान आदि।

(*v*) **उत्पादक कर वाले उद्योग** (Industires Subject to Excise Duty)—चीनी, तंबाकू, माचिस आदि।

(*vi*) **विविध उद्योग** (Miscellaneous Industries)—कांच, साबुन, रसायन, सीमेंट आदि।

उपरोक्त शीर्षक के अंतर्गत औद्योगिक उत्पादन से संबंधित आँकड़े वार्षिक, छः माह, तीन माह अथवा मासिक रूप में संकलित किये जाते हैं। उद्योग को कुछ विशिष्ट आधार पर भार प्रदान किये जाते हैं। भार का आधार उत्पादन, विक्रय एवं निवेश पूँजी आदि हो सकता है। सामान्यतया, यह शुद्ध उत्पादन (Net output) के आधार पर होता है। भारत में इस प्रकार के सूचकांक की रचना वार्षिक रूप में होती है। वर्तमान श्रृंखला का आधार वर्ष 1993-94 है, जिसमें तीन मुख्य समूह हैं—खनन (भार 10.47), निर्माण (भार 79.36) एवं विद्युत (भार 10.17)। इस प्रकार का भार प्रतिवर्ष परिवर्तित होता रहता है।

(*b*) औद्योगिक उत्पादन सूचकांक की रचना की विधियाँ

(Methods of Constructing Index Number of Industrial Production)

सामान्यतया, औद्योगिक उत्पादन सूचकांक की रचना के लिए सरल समांतर माध्य (Simple Arithmetic mean) अथवा संबंधित ज्यामितीय माध्य (Geometirc mean of relatives) का उपयोग किया जाता है। औद्योगिक उत्पादन सूचकांक की रचना के लिए सरल समांतर माध्य का उपयोग करते समय निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करना चाहिए—

$$\text{औद्योगिक उत्पादन सूचकांक} = \frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{q_0}\right)W}{\Sigma W}$$

यहाँ, P_1 = वर्तमान वर्ष की कीमतें

q_1 = वर्तमान अवधि में उत्पादित वस्तुओं की मात्रा

q_0 = आधार वर्ष में उत्पादित वस्तुओं की मात्रा

W = विभिन्न उत्पादन का सापेक्ष महत्व

15.4 मुद्रा प्रसार एवं सूचकांक (Inflation and Index Number)

मुद्रा प्रसार से तात्पर्य सामान्य रूप से वस्तुओं के मूल्य में वृद्धि है। मुद्रा प्रसार का स्वरूप अत्यधिक बड़ा होने पर मुद्रा के मूल्य में कमी होती है और वह परंपरागत रूप से विनिमय का माध्यम और लेखे की इकाई का कार्य नहीं कर पाती है। इसका प्रारंभिक प्रभाव मुद्रा के मूल्य में कमी होना है। साप्ताहिक मुद्रा स्फीति की दर का मूल्यांकन इस प्रकार किया जाता है—

$$\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \times 100$$

नोट

यहाँ, x_t और x_{t-1} t th और $(t-1)^{th}$ सप्ताह के थोक मूल्य सूचकांक से संबंधित है।

15.5 उभोक्ता मूल्य सूचकांक एवं क्रय शक्ति (Consumer Price Index and Purchasing Power)

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का उपयोग मुद्रा की क्रय-शक्ति एवं वास्तविक मजदूरी की गणना के लिए किया जाता है।

(*i*) **मुद्रा की क्रय शक्ति** = 1/जीवन स्तर सूचकांक की लागत (1/Cost of Living Index)

(*ii*) **वास्तविक मज़दूरी** = (मैट्रिक मज़दूरी/जीवन स्तर सूचकांक की लागत) × 100

उदाहरण के लिए, यदि उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (1982 = 100) जनवरी 2005 में 526 है तो जनवरी, 2005 में 1 रुपये के मूल्य की गणना इस प्रकार की जाएगी $\frac{100}{526}$ ₹ = 0.19। इससे तात्पर्य यह है कि वर्तमान 1 रुपये 1982 के 19 पैसे के बराबर है।

वास्तविक मज़दूरी की गणना

यदि किसी उपभोक्ता के मुद्रा के रूप में मज़दूरी 10,000 रुपए है तो उसकी वास्तविक मज़दूरी निम्नलिखित होगी–

$$10{,}000 \text{ ₹} \times \frac{100}{526} = 1{,}901$$

इससे तात्पर्य यह है कि वर्ष 1982 का 1,901 रुपए की क्रय शक्ति उतनी ही होगी जितनी कि जनवरी 2005 के 10,000 रुपए की। यदि कोई व्यक्ति 1982 में तीन हज़ार रुपये मज़दूरी प्राप्त कर रहा था तो मूल्य में वृद्धि के कारण उसकी आर्थिक स्थिति अस्वस्थ होगी। 1982 का जीवन-स्तर बनाए रखने के लिए उसकी मज़दूरी को 15,780 रुपये तक बढ़ाया जाए। इसकी गणना के लिए आधार वर्ष के 3,000 रुपए की मज़दूरी को 526/100 से गुणा करेंगे।

क्या आप जानते हैं थोक मूल्य सूचकांक का अत्यधिक उपयोग मुद्रा प्रसार की दर मापने के लिए किया जाता है।

15.5 सूचकांक की सीमाएँ (Limitations of Index Numbers)

सूचकांक, व्यक्तियों की आर्थिक स्थिति एवं अन्य विचारों को ज्ञात करने में अत्यंत उपयोगी है, परंतु सूचकांक के कुछ दोष/सीमाएँ भी हैं। सूचकांक की मुख्य सीमाएँ निम्नलिखित हैं–

1. **अंतर्राष्ट्रीय अध्ययन संभव नहीं** (International Comparative Study not Possible)–सूचकांक (Index Number) केवल किसी अर्थव्यवस्था की झलक दर्शाता है। इसलिए, इसके आधार पर हम अंतर्राष्ट्रीय तुलना नहीं कर सकते।
2. **निदर्शन पर आधारित** (Heavily based on Samples)–सूचकांक सामान्यतया नमूनों पर निर्भर होता है। यदि प्राप्त किया गया नमूना संपूर्ण क्षेत्र/मूल्य/श्रेणी का प्रतिनिधित्व नहीं करता, तो ज्ञात किया गया सूचकांक गलत हो सकता है।
3. **संभावित संकेतक** (Approximate Indicators)–सूचकांक द्वारा समस्याओं का समाधान स्पष्ट नहीं होता है। इसके द्वारा प्राप्त होने वाले परिणाम लगभग (Approximate) ठीक होते हैं, इसलिए इसके द्वारा प्राप्त परिणाम पूर्ण रूप से विश्वसनीय नहीं होते।
4. **विशिष्ट उद्देश्य** (Specific Purpose)–सूचकांक की रचना केवल विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए की जाती है, जैसे-मूल्य परिवर्तन, मात्रा परिवर्तन, भार परिवर्तन, आदि। इसलिए इसका उपयोग अन्य उद्दश्यों के लिए नहीं किया जा सकता।

5. **गड़बड़ी की संभावना** (Chance of Manipulation)—सूचकांक की रचना करते समय ग़लत आधार वर्ष अनुपयुक्त भार, गलत सूत्र आदि उपयोग होने पर गड़बड़ी की अधिक संभावना होती है। इस प्रकार की गई रचना का परिणाम ग़लत हो सकता है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

2. सही विकल्प चुनिए (Choose the correct option)–

1. सूचकांक कितने प्रकार के होते हैं–

   (क) 3 प्रकार (ख) 4 प्रकार

   (ग) 5 प्रकार (घ) इनमें से कोई नहीं।

2. उपभोक्ता कीमत सूचकांक केवल माप करता है–

   (क) कीमत में वृद्धि की (ख) कीमत में कमी की

   (ग) कीमत में परिवर्तन का (घ) इनमें से कोई नहीं।

3. औद्योगिक उत्पादन सूचकांक उत्पादन की केवल माप है–

   (क) मात्रा परिवर्तन का (ख) मात्रा वृद्धि का

   (ग) (क) और (ख) दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं।

4. वास्तविक मजदूरी बराबर होता है–

   (क) $\frac{\text{जीवन स्तर सूचकांक की लागत}}{\text{मैट्रिक मजदूरी}} \times 100$ (ख) $\frac{\text{मैट्रिक मजदूरी}}{\text{जीवन स्तर सूचकांक की लागत}} \times 100$

   (ग) उपर्युक्त दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं।

5. औद्योगिक उत्पादन सूचकांक की रचना के लिए उपयोग किया जाता है–

   (क) सरल समांतर माध्य (ख) ज्यामितीय माध्य

   (ग) (क) और (ख) दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं।

15.6 सारांश (Summary)

- सूचकांक वे युक्तियाँ हैं जिनसे एक परस्पर सम्बन्धित चर-मूल्य के आकार (Magnitude) में होने वाले परिवर्तनों की माप की जा सकती है।
- सूचकांक का सर्वप्रथम प्रयोग 1764 में इटली के प्रसिद्ध संख्याशास्त्री कार्ली (Carli) ने अनाज, तेल तथा शराब आदि के मूल्यों पर अमरीका की खोज का प्रभाव जानने के लिए किया था।
- सूचकांक अर्थव्यवस्था की सामान्य स्थिति को जानने के लिए उपयोग किया जाता है, क्योंकि इसके द्वारा मज़दूरी, कीमत, उत्पाद, बैंक जमा, विदेश विनिमय आदि के परिवर्तन की गणना की जाती है।
- उपभोक्ताओं द्वारा वस्तुओं तथा सेवाओं की प्राप्ति के लिए भुगतान की जाने वाली कीमत के औसत परिवर्तन को दर्शाने वाला सूचकांक, उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index Number) कहलाता है।
- वस्तुओं की थोक व्यापार कीमतों में सामान्य परिवर्तन दर्शाने वाला सूचकांक, थोक व्यापार, कीमत सूचकांक कहलाता है।
- सूचकांक, व्यक्तियों की आर्थिक स्थिति एवं अन्य विचारों को ज्ञात करने में अत्यंत उपयोगी है,

नोट

- सूचकांक की रचना केवल विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए की जाती है, जैसे-मूल्य परिवर्तन, मात्रा परिवर्तन, भार परिवर्तन, आदि। इसलिए इसका उपयोग अन्य उद्देश्यों के लिए नहीं किया जा सकता।
- सूचकांक की रचना करते समय ग़लत आधार वर्ष अनुपयुक्त भार, गलत सूत्र आदि उपयोग होने पर गड़बड़ी की अधिक संभावना होती है। इस प्रकार की गई रचना का परिणाम ग़लत हो सकता है।

15.7 शब्दकोश (Keywords)

- **निदर्शन–** नमूना, उदाहरण।
- **समूहन–** बटोरना, ढेर लगाना।
- **भारित–** बोझायुक्त, ऋणयुक्त।
- **निर्ख–** दर, भाव, विक्रेय वस्तु।

15.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. सूचकांक की परिभाषा दीजिए और उसके उपयोगों पर प्रकाश डालिए।
2. सूचकांक कितने प्रकार के होते हैं? विवेचन कीजिए।
3. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की व्याख्या कीजिए।
4. थोक व्यापार मूल्य सूचकांक क्या है? थोक व्यापार मूल्य सूचकांक के उपयोग बताइए।
5. औद्योगिक उत्पादन सूचकांक पर प्रकाश डालिए तथा इसकी रचना विधि समझाइए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answers: Self Assessment)

1.	1. (क)	2. (घ)	3. (क)	4. (क)
	5. (ख)			
2.	1. प्रश्नों	2. दो	3. प्रकाशित	4. जाँच समिति
	5. समाचार-पत्र।			

15.9 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
2. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

इकाई—16: सरल (आभारित) समूही रीति एवं भारित व्यय रीति (Methods: Simple (Unweighted) Aggregate Method, Weighted Aggregate Method)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- सरल समूही रीति की व्याख्या करने में।
- भारित समूही व्यय रीति की विवेचना करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक एवं व्यावसायिक जगत में होने वाल परिवर्तनों का विश्लेषण करने में सूचकांक अत्यंत उपयोगी उपकरण है। सूचकांक आर्थिक जगत का प्राण है क्योंकि उत्पादन-उपभोग, मुद्रा-मूल्य, माँग-पूर्ती, मजदूरी, आयात-निर्यात मूल्य स्तर जैसी प्रमुख समस्याओं का समाधान सूचकांको द्वारा ही किया जाता है इसके निर्माण के लिए विभिन्न रीतियों का प्रयोग किया जाता है।

16.1 सरल समूही रीति (Simple Aggregate Method)

इसमें चुनी हुई विभिन्न वस्तुओं के मूल्य प्रति इकाई में दिये होते हैं। आधार वर्ष और चालू वर्ष की सभी वस्तुओं के मूल्यों का अलग-अलग योग ज्ञात कर लेते हैं। चालू वर्ष के योग में आधार वर्ष के योग का भाग देकर प्राप्त संख्या को 100 से गुणा कर दिया जाता है। इस प्रकार के निर्देशांक की रचना सरल है तथा इनका समझना भी आसान है। परन्तु वस्तुओं की मात्रा पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता तथा मूल्य भी वस्तुओं की इकाई के लिए होते हैं, अतः ये तुलनीय नहीं होते हैं। यदि इकाई बदल दी जाये तो निर्देशांक का मान भी बदल सकता है।

नोट

आभारित सूचकांकों के निर्माण करने की यह सबसे सरल रीति है। इस रीति के अनुसार, प्रचलित या चालू वर्ष के विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों के योग (aggregate) को, आधार वर्ष के मूल्यों के योग से भाग देकर 100 से गुणा कर दिया जाता है। **ध्यान रहे**, इस रीति में 'मूल्यानुपात' नहीं निकाले जाते हैं।, सूत्रानुसार

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 \quad \text{या} = \frac{\text{प्रचलित वर्ष के मूल्यों का योग}}{\text{आधार वर्ष के मूल्यों का योग}} \times 100$$

P_{01} आधार वर्ष (0) के मूल्यों के आधार पर प्रचलित वर्ष (1) के मूल्यों का सूचकांक।

P_1 = प्रचलित वर्ष के मूल्य, P_0 = आधार वर्ष के मूल्य

उदाहरण (Illustration) 1—निम्न समंकों से सरल समूही रीति (Simple Aggregative Method) द्वारा 1971 को आधार वर्ष मानकर 1972 तथा 1973 के मूल्य-सूचकांक ज्ञात कीजिये—

इकाई मूल्य रु. (Unit Price Rs.)

मदें	*1971*	*1972*	*1973*
A	0.70	0.85	1.00
B	0.25	0.35	0.50
C	0.50	0.65	0.75
D	0.60	0.80	0.95

हल (Solution.)

मूल्य-सूचकांक की रचना (सरल-समूही रीति) (आधार 1871 = 100)

मद	*1971*	*1972*	*1973*
A	0.70	0.85	1.00
B	0.25	0.35	0.50
C	0.50	0.65	0.75
D	0.60	0.80	0.95
योग	$\Sigma P_0 = 2.05$	$\Sigma P_1 = 2.65$	$\Sigma P_2 = 3.20$

वर्ष 1971 का सूचकांक $P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 = \frac{2.05}{2.05} \times 100 = \mathbf{100}$

वर्ष 1972 का सूचकांक $P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 = \frac{2.65}{2.05} \times 100 = \mathbf{129.3}$

वर्ष 1973 का सूचकांक $P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 = \frac{3.20}{2.05} \times 100 = \mathbf{156.1}$

वर्ष (Years)	:	1971	1972	1973
मूल्य सूचकांक (आधार 1971 = 100)	:	100	129.3	156.1

तकनीकी टिप्पणी (Technical Note)—इस रीति का प्रयोग तभी किया जा सकता है जब सभी वस्तुओं के मूल्य एक-ही इकाई के रूप में व्यक्त किए गए हों। यदि इकाइयाँ (units) भिन्न-भिन्न हैं तो परिणाम भ्रमात्मक होंगे। वैसे, व्यवहार में इस रीति का प्रयोग नहीं किया जाता है। यह सूचकांक मूल्यों के आकार से बेहद प्रभावित होता है।

नोट

क्या आप जानते हैं इस निर्देशांक द्वारा वर्तमान वर्ष के मूल्य की तुलना आधार वर्ष के कुल मूल्य से की जाती है।

16.2 भारित समूही व्यय रीति (Weighted Aggregate Method)

भारित समूही रीति या समूही व्यय रीति द्वारा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक बनाने की प्रक्रिया निम्नानुसार है–

(*i*) चालू वर्ष का समूही व्यय ज्ञात करने के लिए आधार वर्ष में उपभोग की गई मात्रा (q_0) तथा चालू वर्ष की कीमत (P_1) को गुणा कर गुणनफल का योग ($\Sigma P_1 q_0$) ज्ञात कर लिया जाता है।

(*ii*) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\text{उपभोक्ता मूल्य सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का समूही व्यय}}{\text{आधार वर्ष का समूही व्यय}} \times 100$$

या

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

P_{01} = चालू वर्ष का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक

$\Sigma P_1 q_0$ = चालू वर्ष का समूही व्यय

$\Sigma P_0 q_0$ = आधार वर्ष का समूही व्यय

नोट्स आधार वर्ष का समूही व्यय ज्ञात करने के लिए आधार वर्ष में उपभोग की गई मात्रा (q_0) तथा आधार वर्ष की कीमत (P_0) को गुणा किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 2. 1960 के कीमत स्तर के आधार पर निम्न आँकड़ें से 1978 के लिए समूही व्यय रीति द्वारा जीवन निर्वाह व्यय सूचकांकों की गणना कीजिए।

वस्तु	*आधार वर्ष 1960 में उपभोग की गई मात्रा*	*इकाई*	*1960 की कीमत (रु.)*	*1978 की कीमत (रु.)*
चावल	2 क्विंटल	प्रति क्विंटल	200	400
गेहूँ	4 क्विंटल	प्रति क्विंटल	100	200
अरहर	50 किलो	प्रति किलो	1.00	3.00
चना	50 किलो	प्रति किलो	1.00	2.50
घी	5 किलो	प्रति किलो	10.00	20.00
गुड़	50 किलो	प्रति किलो	0.50	1.00
चीनी	80 किलो	प्रति किलो	2.00	5.00
तेल	10 किलो	प्रति किलो	4.00	8.00
वस्त्र	25 मीटर	प्रति मीटर	2.00	5.00
केरोसीन	20 लीटर	प्रति लीटर	0.50	1.50
ईंधन	5 क्विंटल	प्रति क्विंटल	10.00	20.00
मकान किराया	–	प्रति मकान	20.00	50.00

नोट

Solution:

जीवन-निर्वाह व्यय सूचकांक की गणना

वस्तु	आधार वर्ष 1960 में उपभोग की गई मात्रा q_0	इकाई	आधार वर्ष 1960 की कीमत P_0	चालू वर्ष 1978 की कीमत P_1	आधार वर्ष 1960 का समूही व्यय P_0q_0	चालू वर्ष 1978 का समूही व्यय P_1q_0
चावल	2 क्विंटल	प्रति क्विंटल	200.00	400.00	400.00	800.00
गेहूँ	4 क्विंटल	प्रति क्विंटल	100.00	200.00	400.00	800.00
अरहर	50 किलो	प्रति किलो	1.00	3.00	50.00	150.00
चना	50 किलो	प्रति किलो	1.00	2.50	50.00	125.00
घी	5 किलो	प्रति किलो	10.00	20.00	50.00	100.00
गुड़	50 किलो	प्रति किलो	0.50	1.00	25.00	50.00
चीनी	80 किलो	प्रति किलो	2.00	5.00	160.00	400.00
तेल	10 किलो	प्रति किलो	4.00	8.00	40.00	80.00
वस्त्र	25 मीटर	प्रति मीटर	2.00	5.00	50.00	125.00
केरोसीन	20 लीटर	प्रति लीटर	0.50	1.50	10.00	10.00
ईंधन	5 क्विंटल	प्रति क्विंटल	10.00	20.00	50.00	100.00
मकान किराया	–	प्रति मकान	20.00	50.00	20.00	50.00
योग					1305.00 ΣP_0q_0	2790.00 ΣP_1q_0

$$1978 \text{ का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{2790}{1305} \times 100 = 225.2$$

(*i*) प्रत्येक वस्तु के लिए चालू वर्ष का मूल्यानुपात ज्ञात किया जाता है–

$$\text{चालू वर्ष का मूल्यानुपात (R)} = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

(*ii*) आधार वर्ष में किए जाने वाले व्यय को भार मान लिया जाता है ($P_1q_0) = W$) और इनका योग (ΣW) कर लिया जाता है।

(*iii*) भार से प्रत्येक मूल्यानुपात को गुणा कर गुणनफलों का योग (ΣRW) ज्ञात किया जाता है।

(*iv*) ΣRW में ΣW का भाग करके चालू वर्ष का जीवन-निर्वाह व्यय सूचकांक ज्ञात किया जाता है।

सूत्रानुसार–

$$\text{उपभोक्ता मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma RW}{\Sigma W}$$

ΣRW = चालू वर्ष के मूल्यानुपात एवं भार के गुणनफल का योग

ΣW = भार का कुल योग

नोट

टास्क प्रत्येक वस्तु के लिए चालू वर्ष का मूल्यानुपात कैसे ज्ञात करते हैं?

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. **रिक्त स्थानों की पूर्ती करें (Fill in the blanks):**
    1. सरल समूही रीति में आधार वर्ष और .... की सभी वस्तुओं के मूल्यों का अलग-अलग योग ज्ञात करते हैं।
    2. सरल समूही रीति में .... नहीं निकाले जाते।
    3. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक = $\frac{\text{चालू वर्ष का समूही व्यय}}{\text{आधार वर्ष का समूही व्यय}}$ × .... होता है।
    4. .... सूचकांकों के निर्माण की यह सबसे सरल और आसान विधि है।

16.3 सारांश (Summary)

- आभारित सूचकांकों के निर्माण करने की यह सबसे सरल रीति है। इस रीति के अनुसार, प्रचलित या चालू वर्ष के विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों के योग (aggregate) को, आधार वर्ष के मूल्यों के योग से भाग देकर 100 से गुणा कर दिया जाता है। **ध्यान रहे**, इस रीति में 'मूल्यानुपात' नहीं निकाले जाते हैं।
- इस रीति का प्रयोग तभी किया जा सकता है जब सभी वस्तुओं के मूल्य एक-ही इकाई के रूप में व्यक्त किए गए हों। यदि इकाइयाँ (units) भिन्न-भिन्न हैं तो परिणाम भ्रमात्मक होंगे।
- चालू वर्ष का समूही व्यय ज्ञात करने के लिए आधार वर्ष में उपभोग की गई मात्रा (q_0) तथा चालू वर्ष की कीमत (P_1) को गुणा कर गुणनफल का योग (SP_1q_0) ज्ञात कर लिया जाता है।
- प्रत्येक वस्तु के लिए चालू वर्ष का मूल्यानुपात ज्ञात किया जाता है—

  चालू वर्ष का मूल्यानुपात (R) = $\frac{P_1}{P_0} \times 100$

  SRW में SW का भाग करके चालू वर्ष का जीवन-निर्वाह व्यय सूचकांक ज्ञात किया जाता है।

  सूत्रानुसार—

  उपभोक्ता मूल्य सूचकांक = $\frac{\Sigma RW}{\Sigma W}$

16.4 शब्दकोश (Keywords)

1. **आधार वर्ष** : थोक मूल्य सूचकांक के आधार पर सरकार द्वारा निर्धारित वित्तीय वर्ष
2. **चालू वर्ष** : चालू वित्तिय वर्ष

16.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. सूचकांक ज्ञात करने की सरल समूही रीति का विवेचन कीजिए।
2. भारित समूही व्यय रीति पर प्रकाश डालिए।

नोट

उत्तरः स्व-मूल्यांकन (Answer Self Assessment)

1. चालू वर्ष 2. मूल्यानुपात 3. 100 4. अभारित

16.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

इकाई—17: सरल (आभारित) समूही रीति (Method: Simple (Unweighted) Aggregate Method)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- सूचकांक क्या होता है? इसे समझने में।
- सूचकांक की सरल समुही रीति को जानने में।

प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक एवं व्यवसायिक क्षेत्र में होने वाले परिवर्तनों की माप के लिए सूचकांकों का निर्माण आवश्यक हो जाता है। उदाहरणार्थ, जीवन-निर्वाह व्यय पर होने वाले परिवर्तनों की माप किसी इकाई विशेष में नहीं की जा सकती है क्योंकि सभी वस्तुओं की माप की इकाइयाँ अलग-अलग होती हैं, जैसे गेहूँ का मूल्य प्रति क्विटल, कपड़े का मूल्य प्रति मीटर, दूध का मूल्य प्रति लीटर, माचिस का मूल्य प्रति दर्जन के रूप में दिया जाता है। ऐसे समय में एक समस्या उत्पन्न हो जाती है कि इन वस्तुओं के उपभोग में होने वाले परिवर्तनों को किस प्रकार सरल संख्या के रूप में प्रदर्शित किया जाए। इस समस्या के समाधान के लिए ही उपभोक्ता मूल्य सूचकांक या जीवन-निर्वाह लागत सूचांक का निर्माण आवश्यक हो जाता है। सूचकांकों के निर्माण में एक वर्ष को आधार मान कर अन्य वर्षों के सूचकांकों का निर्माण किया जाता है। यदि सूचकांक 100 से अधिक मात्रा आता है, तो इसका तात्पर्य होगा जीवन निर्वाह व्यय में वृद्धि हुई है और 100 से कम होने पर जीवन-निर्वाह व्यय में कमी। उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों के समान ही थोक मूल्य सूचकांक का निर्माण सामान्य मूल्य स्तर के अध्ययन के लिए एवं भौतिक मात्राओं के सूचकांक का निर्माण उत्पत्ति की मात्रा में होने वाले परिवर्तनों के अध्ययन के लिए आवश्यक हो जाता है।

17.1 सूचकांक (Index Number)

सूचकांक (Index Number) से तात्पर्य यह उपकरण है जो चरों के मूल्य एवं मात्रा में होने वाले परिवर्तन को दर्शाता है। दूसरे शब्दों में यह एक सांख्यिकी (Statistical) दर्पण है, जोकि संबंधित चरों (Variables) के अंतर एवं परिवर्तन

को दर्शाता है। कुछ स्थितियों में परिवर्तन का प्रत्यक्ष माप उपयुक्त नहीं होता, इसलिए सूचकांक द्वारा चरों के परिवर्तन को प्रतिशत में दर्शाना उपयुक्त होता है। उदाहरणस्वरूप, यदि 1995 के जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक 100 की तुलना में 2002 का जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक 160 हो जाता है, तो इस प्रकार 2002 के सामान्य कीमत का स्तर 60% अधिक समझा जाएगा।

यदि दी गई श्रृंखलाएँ एवं चरों की इकाइयाँ भिन्न हों तो समांतर के माप अनुपयुक्त नहीं होते हैं। इस प्रकार, इन स्थितियों में परिवर्तनों का माप करने के लिए सूचकांक (Index Number) को उपयुक्त समझा जाता है। आइये, अब हम एक उदाहरण से इसे अच्छी तरह समझते हैं। मान लिजिए हमें सामान्य कीमत स्तर (General Price Level) में परिवर्तन का माप करना है। यह परिवर्तन प्रत्यक्ष रूप से मापे नहीं जा सकते, क्योंकि कीमतों में होने वाले परिवर्तन विभिन्न वस्तुओं के कारण विभिन्न इकाइयों में हैं, जैसे-गेहूँ के लिए प्रति क्विंटल, कपड़ा प्रति मीटर अथवा प्रति थान, दूध प्रति लीटर, कागज प्रति दस्ता (रिम) आदि। इसलिए विभिन्न इकाइयों में दिए गए मूल्यों की गणना एवं तुलना प्रत्यक्ष रूप से नहीं की जा सकती। इनकी गणना केवल प्रतिशत में की जा सकती है अथवा केवल कुछ आँकड़ों की गणना कर सकते हैं। इसलिए इस प्रतिशत से एक औसत प्रतिशत ज्ञात करके समस्त इकाइयों का कीमत परिवर्तन प्राप्त किया जाता है इस प्रकार से प्राप्त औसत (समांतर) **को सामान्य सूचकांक (General Index Number) या थोक विक्रय कीमत सूचकांक (Wholesale Price Index) कहा जाता है।** सूचकांक (Index Number) की रचना मज़दूरी, रोज़गार जीवन निर्वाह व्यय (Cost of living) विक्रय, उत्पादन, आयात, निर्यात, अंश, भंडार, निवेश, व्यवसायिक क्रियाएँ एवं अन्य विचारों के परिवर्तन को मापने के लिए भी की जाती है।

> *नोट्स* कुछ स्थितियों में परिवर्तन का प्रत्यक्ष माप उपयुक्त नहीं होता, इसलिए सूचकांक द्वारा चरों के परिवर्तन को प्रतिशत में दर्शाना उपयुक्त होता है।

17.2 सूचकांक की सरल समूही रीति (Simple Aggregate Method of Index Number)

इसमें चुनी हुई विभिन्न वस्तुओं के मूल्य प्रति इकाई में दिये होते हैं। आधार वर्ष और चालू वर्ष की सभी वस्तुओं के मूल्यों का अलग-अलग योग ज्ञात कर लेते हैं। चालू वर्ष के योग में आधार वर्ष के योग का भाग देकर प्राप्त संख्या को 100 से गुणा कर दिया जाता है। इस निर्देशांक द्वारा वर्तमान वर्ष के मूल्य की तुलना आधार वर्ष के कुल मूल्य से की जाती है। इस प्रकार के निर्देशांक की रचना सरल है तथा इनको समझना भी आसान है। परन्तु वस्तुओं की मात्रा पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता तथा मूल्य भी वस्तुओं की इकाई के लिए होते हैं, अत: ये तुलनीय नहीं होते हैं। यदि इकाई बदल दी जाये तो निर्देशांक का मान भी बदल सकता है।

आभारित सूचकांकों के निर्माण करने की यह सबसे सरल रीति है। इस रीति के अनुसार, प्रचलित या चालू वर्ष के विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों के योग (aggregate) को, आधार वर्ष के मूल्यों के योग से भाग देकर 100 से गुणा कर दिया जाता है। ध्यान रहे, इस रीति में 'मूल्यानुपात' नहीं निकाले जाते हैं।, सूत्रानुसार

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 \quad \text{या} = \frac{\text{प्रचलित वर्ष के मूल्यों का योग}}{\text{आधार वर्ष के मूल्यों का योग}} \times 100$$

P_{01} आधार वर्ष (0) के मूल्यों के आधार पर प्रचलित वर्ष (1) के मूल्यों का सूचकांक।

P_1 = प्रचलित वर्ष के मूल्य, P_0 = आधार वर्ष के मूल्य

> *टास्क* सूचकांक ज्ञात करने की सरल समूही रीति का सूत्र लिखिए।

उदाहरण (Illustration) 1—निम्न समंकों से सरल समूही रीति (Simple Aggregative Method) द्वारा 1971 को आधार वर्ष मानकर 1972 तथा 1973 के मूल्य-सूचकांक ज्ञात कीजिये—

इकाई मूल्य रु. (Unit Price Rs.)

मदें	*1971*	*1972*	*1973*
A	0.70	0.85	1.00
B	0.25	0.35	0.50
C	0.50	0.65	0.75
D	0.60	0.80	0.95

हल (Solution).

मूल्य-सूचकांक की रचना (सरल-समूही रीति) (आधार 1871 = 100)

मद	*1971*	*1972*	*1973*
A	0.70	0.85	1.00
B	0.25	0.35	0.50
C	0.50	0.65	0.75
D	0.60	0.80	0.95
योग	$\Sigma P_0 = 2.05$	$\Sigma P_1 = 2.65$	$\Sigma P_2 = 3.20$

वर्ष 1971 का सूचकांक $P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 = \frac{2.05}{2.05} \times 100 = \mathbf{100}$

वर्ष 1972 का सूचकांक $P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 = \frac{2.65}{2.05} \times 100 = \mathbf{129.3}$

वर्ष 1973 का सूचकांक $P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 = \frac{3.20}{2.05} \times 100 = \mathbf{156.1}$

वर्ष (Years)	:	1971	1972	1973
मूल्य सूचकांक (आधार 1971 = 100)	:	100	129.3	156.1

क्या आप जानते हैं सरल समूही रीति में मूल्यानुपात नहीं निकाले जाते।

तकनीकी टिप्पणी (Technical Note)—इस रीति का प्रयोग तभी किया जा सकता है जब सभी वस्तुओं के मूल्य एक-ही इकाई के रूप में व्यक्त किए गए हों। यदि इकाइयाँ (units) भिन्न-भिन्न हैं तो परिणाम भ्रमात्मक होंगे। वैसे, व्यवहार में इस रीति का प्रयोग नहीं किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 2—नीचे दिए गये आँकड़ो से सरल समूही रीति द्वारा चालू वर्ष के लिए थोक मूल्य सूचकांक की गणना किजिए।

वस्तु	1977 (मूल्य रु. में)	1978 (मूल्य रु. में)
A	15	30
B	22	25
C	38	57
D	25	35
		63

नोट

हल (Solution).

वस्तु	1977 (मूल्य रु. में)	1978 (मूल्य रु. में)
A	15	30
B	22	25
C	38	57
D	25	35
	50	63
	150	210
	ΣP_0	ΣP_1

1977 को आधार-वर्ष मानकर 1978 के मूल्य सूचकांक की गणना की जाएगी-

$$P_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$$

$$= \frac{210}{130} \times 100 = 140$$

अर्थात चालू वर्ष का सूचकांक 140 होगा।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. निम्नलिखित से सूचकांक की रचना किजिए-

1. निम्न समंको का सरल समूही द्वारा 1986 के आधार पर 1987 तथा 1988 के लिए सूचकांक की रचना कीजिए।

मदें	A	B	C	D
1986 कीमत (रु.)	15	20	38	25
1987 कीमत (रु.)	30	25	57	35
1988 कीमत (रु.)	42	35	57	55

2. निम्नलिखित आँकडों से 1995 को आधार वर्ष मानकर 2001 वर्ष का सूचकांक ज्ञात कीजिए। सूचकांक की रचना सरल समूहन विधि की सहायता से कीजिए।

वस्तुएँ	A	B	C	D	E	F
1995 की कीमत	30	40	80	110	40	70
2001 की कीमत	70	60	90	120	60	70

17.3 सारांश (Summary)

- *सूचकांक (Index Number) से तात्पर्य यह उपकरण है जो चरों के मूल्य एवं मात्रा में होने वाले परिवर्तन को दर्शाता है।*
- यदि दी गई श्रृंखलाएँ एवं चरों की इकाइयाँ भिन्न हों तो समांतर के माप अनुपयुक्त नहीं होते हैं। इस प्रकार, इन स्थितियों में परिवर्तनों का माप करने के लिए सूचकांक (Index Number) को उपयुक्त समझा जाता है।

नोट

- आभारित सूचकांकों के निर्माण करने की यह सबसे सरल रीति है। इस रीति के अनुसार, प्रचलित या चालू वर्ष के विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों के योग (aggregate) को, आधार वर्ष के मूल्यों के योग से भाग देकर 100 से गुणा कर दिया जाता है।

17.4 शब्दकोश (Keywords)

1. थोक : राशि, ढेर, माल की बड़ी राशि।

17.5 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. सूचकांक किसे कहते है? उदाहरण सहित समझाइए।

2. सूचकांक की सरल समूही रीति की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

उत्तर: स्व-मूल्यांकन (Answer: Self-Assessment)

1. (150, 192.9) 2. (150, 192.9)

17.6 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055

नोट

इकाई–18: मूल्यानुपात की सरल माध्य रीति (Methods: Simple Average of Price Relatives)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- मूल्यानुपात की सरल माध्य रीति एवं श्रृंखला-आधार रीति को समझने में।
- आधार परिवर्तन और आधार वर्ष परिवर्तन की व्याख्या करने में।
- शिरोबन्धन का विवेचन करने में ।
- माध्य का चुनाव किस प्रकार किया जाए? इसकी विवेचना करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

सूचकांकों का निर्माण सर्वप्रथम इटली के सांख्यिक कर्ली (Carli) ने किया था। जिन्होंने 1764 में मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों के माप हेतु सन् 1500 ई. को आधार वर्ष मानकर सन् 1750 के लिए मूल्य सूचकांक का निर्माण किया। आरम्भ में सूचकांकों का उद्देश्य केवल मूल्य स्तर तथा मुद्रा की क्रय-शक्ति का माप करना था, परन्तु वर्तमान समय में प्रत्येक तथ्य या पहलू में सूचकांकों का प्रयोग किया जाता है। इस इकाई में सूचकांकों की गणना करने के लिए मूल्यानुपात की माध्य रीति का वर्णन किया गया है।

नोट

18.1 मूल्यानुपात की सरल-माध्य रीति (Simple Average of Price Relatives Methods)

इस रीति के अनुसार सबसे पहले प्रत्येक वस्तु का मूल्यानुपात (R) निकाला जाता है। स्थिर आधार के मूल्य को 100 मानकर निकाला गया चालू वर्ष का प्रतिशत ही, मूल्यानुपात कहलाता है। सूत्र–

एक-वर्षीय आधार (One Year Base)	**माध्य-अवधि आधार** (Average Price Base)
$R = \dfrac{\text{प्रचलित वर्ष का मूल्य}}{\text{आधार वर्ष का मूल्य}} \times 100$	$R = \dfrac{\text{प्रचलित वर्ष का मूल्य}}{\text{औसत मूल्य}} \times 100$
या $R = \dfrac{p_1}{p_0} \times 100$	$R = \dfrac{p_1}{p_{\overline{X}}} \times 100$

R = मूल्यानुपात, p_1 = चालू वर्ष का मूल्य, p_0 = आधार वर्ष का मूल्य, $p_{\overline{X}}$ = औसत मूल्य।

उदाहरण (Illustration) 1—किसी वस्तु के 6 वर्षों के मूल्य निम्नांकित हैं–(*i*) वर्ष 1982 को आधार मानकर तथा (*ii*) छः वर्षों के औसत मूल्य को आधार मानकर कीमत सूचकांक ज्ञात कीजिए–

वर्ष	:	1982	1983	1984	1985	1986	1987
मूल्य	:	40	50	45	55	65	105

हल (Solution)—(*i*) आधार वर्ष (1982 = 100)—1982 में वस्तु के मूल्य (40 रु.) को 100 मानकर प्रत्येक वर्ष का मूल्यानुपात (R) निकाला जाएगा। यही मूल्य सूचकांक हैं।

(*ii*) औसत मूल्य आधार—पहले सभी 6 वर्षों में वस्तु के मूल्यों के जोड़ को उनकी संख्या अर्थात् 6 से भाग देकर औसत मूल्य निकाल लिया जाएगा अर्थात्–

$$\text{औसत मूल्य} = \frac{40 + 50 + 45 + 55 + 65 = 105}{6} = \frac{360}{6} = 60 \text{ रु.}$$

फिर, 60 रु. को 100 मानते हुए प्रत्येक वर्ष का मूल्यानुपात निकाला जाएगा। वास्तव में, यही अभीष्ठ सूचकांक है।

मूल्यानुपातों का परिकलन (Calculation of Price Relatives)

वर्ष	*मूल्य*	*आधार 1982 = 100*		*आधार औसत मूल्य = 60*	
Year	*(रु. प्रति कुन्तल)*	*परिकलन*	*मूल्यानुपात*	*परिकलन*	*मूल्यानुपात*
1982	40	–	100.0	$\frac{40}{60} \times 100$	66.7
1983	50	$\frac{50}{40} \times 100$	125.0	$\frac{50}{60} \times 100$	83.3
1984	45	$\frac{45}{40} \times 100$	112.5	$\frac{45}{60} \times 100$	75.0
1985	55	$\frac{55}{40} \times 100$	137.5	$\frac{55}{60} \times 100$	91.7
1986	65	$\frac{65}{40} \times 100$	162.5	$\frac{65}{60} \times 100$	108.3
1987	105	$\frac{105}{40} \times 100$	262.5	$\frac{105}{60} \times 100$	175.0

नोट

व्याख्यात्मक टिप्पणी (Explanatory Note)—जब एक ही वस्तु के विभिन्न वर्षों के मूल्य दिये हुए हों तो प्रत्येक वर्ष का मूल्यानुपात ही अभीष्ट सूचकांक होता है। इसके विपरीत जब प्रत्येक वर्ष के कई वस्तुओं के मूल्य दिये हों तो उन सभी वस्तुओं के मूल्यानुपातों का समान्तर माध्य ही सम्बन्धित चालू वर्ष का सरल या अ-भारिक सूचकांक होता है। अर्थात्–

$$\text{चालू वर्ष का सूचकांक} = \frac{\Sigma R}{N} = \frac{\text{मूल्यानुपातों का योग (Total of Price Relatives)}}{\text{वस्तुओं की संख्या (No. of Items)}}$$

उदाहरण (Illustration) 2—निम्न समंकों से 1992 के मूल्यों के आधार पर 1997 के लिए मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए–

Articles	:	A	B	C	D	E
Prices in 1992	:	12	25	10	5	6
Prices in 1997	:	15	20	12	10	15

हल (Solution)—पाठकों की सुविधा हेतु प्रश्न को दो रीतियों द्वारा हल किया गया है। वैसे ऐसे प्रश्नों के लिए सदैव मूल्यानुपात रीति का ही प्रयोग करना चाहिए।

वस्तु (Article)	*मूल्यानुपात रीति*				*सरल समूह रीति*	
	1992 Base		*1997*		*1992 Base*	*1997*
	Price P_0	*Relative R*	*Price P_1*	*Relatives R*	*Price P_0*	*Price P_1*
A	12	100	15	125	12	15
B	25	100	20	80	25	20
C	10	100	12	120	10	12
D	5	100	10	200	5	10
E	6	100	15	250	6	15
N = 5				$\Sigma R = 775$	$\Sigma P_0 = 58$	$\Sigma P_1 = 72$

मूल्यानुपात रीति—प्रत्येक वस्तु के मूल्यानुपात का आगणन $(P_1/P_0) \times 100$ सूत्र द्वारा किया है।

$$\text{1997 Index No.} = \frac{\Sigma R}{N} = \frac{775}{5} = \mathbf{155}$$

सरल समूही रीति द्वारा सूचकांक $1997 = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 = \frac{72}{58} \times 100 = \mathbf{124.14}$

उदाहरण (Illustration) 3—निम्न समंकों से (*i*) सरल समूही रीति और (*ii*) मूल्यानुपात माध्य-रीति द्वारा 1986 के आधार पर 1987 तथा 1988 के लिये साधारण सूचकांकों की रचना कीजिए–

मद	A	B	C	D
1986 कीमत (रु.)	15	20	38	25
1987 कीमत (रु.)	30	25	57	35
1988 कीमत (रु.)	42	35	57	55

सरल या अ-भारित सूचकांकों की रचना

मद	*मूल्य 1986*	*मूल्य 1987*	*मूल्य 1988*	*मूल्यानुपात रीति*	
	P_0	*P_1*	*P_2*	*R(1987)*	*R(1988)*
A	15	30	42	$\frac{30}{15} \times 100 = 200$	$\frac{42}{15} \times 100 = 280$
B	20	25	35	$\frac{25}{20} \times 100 = 125$	$\frac{35}{20} \times 100 = 175$

C	38	57	57	$\frac{57}{38} \times 100 = 150$	$\frac{57}{38} \times 100 = 150$
D	25	35	55	$\frac{35}{25} \times 100 = 140$	$\frac{55}{25} \times 100 = 220$
योग	$\Sigma P_0 = 98$	$\Sigma P_1 = 147$	$\Sigma P_2 = 189$	$\Sigma R_1 = 615$	$\Sigma R_2 = 825$

टास्क मूल्यानुपात रीति से आप क्या समझते है? इसका क्या सूत्र है?

(*i*) सरल समूही सूचकांक (1986 = 100)

वर्ष 1987 $P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100 = \frac{147}{98} \times 100 = \mathbf{150}$

वर्ष 1988 $P_{01} = \frac{\Sigma P_2}{\Sigma P_0} \times 100 = \frac{189}{98} \times 100 = \mathbf{192.9}$

(*ii*) मूल्यानुपात सरल माध्य सूचकांक (1986 = 100)

वर्ष 1987 $P_{01} = \frac{\Sigma R_1}{N} = \frac{615}{4} = \mathbf{153.75}$

वर्ष 1988 $P_{01} = \frac{\Sigma R_2}{N} = \frac{825}{4} = \mathbf{206.25}$

उदाहरण (Illustration) 4—औसत मूल्य को आधार मानकर 3 वर्ष के मूल्य सूचकांकों की रचना कीजिये—

प्रति रु. मूल्य दर (Rate Per Rupee)

Year	*Wheat*	*Rice*	*Oil*
I	10 kg.	5 kg.	2 kg.
II	8 kg.	4 kg.	1.33 kg.
III	6.67 kg.	3.33 kg.	1 kg.

हल (Solution)—चूँकि प्रश्न में मूल्य **'परिमाण प्रति रुपया'** रूप में दिए हुए हैं। अत: सर्वप्रथम इन्हें मुद्रा-मूल्यों अर्थात् **'रुपये प्रति क्विण्टल'** में बदला जायेगा। इस प्रकार गेहूँ के मूल्य तीन वर्षों के लिए क्रमश: निम्नांकित होंगे—

$$\frac{100}{10} = 10, \frac{100}{8} = 12.5, \frac{100}{6.67} = 14.99$$ रु. प्रति क्विण्टल होंगे।

इसी प्रकार चावल के मुद्रा-मूल्य क्रमश: 20, 25, 30.03 और तेल के मूल्य क्रमश: 50, 75.19, 100 प्रति कुन्तल होंगे। इसके बाद प्रत्येक वस्तु के तीन वर्षों के मूल्यों का **'औसत'** अर्थात् समान्तर माध्य निकाला जायेगा जो **आधार वर्ष** का काम करेगा। अन्त में, मूल्यानुपातों की गणना करके, सूचकांक प्राप्त कर लिया जायेगा।

सरल सूचकांकों का परिगणना (माध्य-मूल्य आधार)

वस्तु	*आधार माध्य मूल्य = 100*	*वर्ष I*		*वर्ष II*		*वर्ष III*	
		P	*R*	*P*	*R*	*P*	*R*
गेहूँ	12.50	10	80	12.5	100	14.99	119.9
चावल	25.01	20	80	25	100	30.03	120.1
तेल	75.06	50	66.6	75.19	100.2	100	133.2
ΣR			226.6		300.2	373.2	
Index Nos.			**75.5**		**100.1**		**124.4**

नोट

गेहूँ का औसत मूल्य = 10 + 12.5 + 14.99 = 37.49 ÷ 3 = 12.50

चावल का औसत मूल्य = 20 + 25 + 30.03 = 75.03 ÷ 3 = 25.01

तेल का औसत मूल्य = 50 + 75.19 + 100 = 225.19 ÷ 3 = 75.06

मूल्यानुपातों की गणना = 10 × 100/12.5 = 80 और इसी प्रकार……।

उदाहरण (Illustration) 5—नीचे 1967-68 वर्ष से अगले 5 वर्षों के लिए आस्ट्रेलिया तथा विश्व में ऊन का उत्पादन करोड़ किलोग्राम में दिया हुआ है। 1967-70 को औसत आधार मानते हुए विश्व उत्पादन में आस्ट्रेलिया के हिस्से का सूचकांक तैयार कीजिये—

		1967-68	1968-69	1969-70	1970-71	1971-72
Australia	:	80	88	92	89	87
World	:	272	281	279	276	267

हल (Solution)—सर्वप्रथम विश्व के कुल उत्पादन पर आस्ट्रेलिया का प्रतिशत उत्पादन निकाला जायेगा और 1967-70 अर्थात् प्रथम चार वर्षों के उत्पादन का औसत निकाल करके उसे आधार मान लिया जायेगा।

वर्ष	*आस्ट्रेलिया*	*विश्व*	*आस्ट्रेलिया का %*	*सूचकांक*
1967-68	80	272	29.4	93.3
1968-69	88	281	31.3	99.4
1969-70	92	279	33.0	104.8
1970-71	89	276	32.2	102.2
1971-72	87	267	32.6	103.5

$$\text{विश्व उत्पादन में आस्ट्रेलिया का \% भाग} = \frac{\text{आस्ट्रेलिया का उत्पादन}}{\text{विश्व का उत्पादन}} \times 100$$

$$\text{औसत आधार} = \frac{29.4 + 31.3 + 33.0 + 32.2}{4} = 31.5$$

$$\text{1967-68 का सूचकांक} = \frac{\text{आस्ट्रेलिया का \% भार}}{\text{औसत आधार}} \times 100 = \frac{29.4}{31.5} \times 100 = \mathbf{93.3}$$

इसी प्रकार अगले वर्षों का भी सूचकांक निकाल लिया जायेगा।

18.2 शृंखला-आधार रीति (Chain Base-Method)

इस रीति के अनुसार **प्रत्येक चालू वर्ष के लिए उससे पिछला वर्ष, आधार वर्ष की भाँति काम करता है।** इस प्रकार आधार और चालू वर्ष में एक शृंखला-सी बनी रहने के कारण इसको शृंखला आधार रीति कहते हैं। इस रीति का प्रमुख गुण यह है कि इसके द्वारा **अल्पकालीन** तथा **तत्कालीन** परिवर्तनों का पता चलता रहता है। इतना ही नहीं, बल्कि इसमें पुरानी वस्तुओं के परित्याग तथा नवीन वस्तुओं के समावेश की सम्भावना भी बनी रहती है। **दोष** की दृष्टि से यह रीति दीर्घकालीन परिवर्तनों के अध्ययन के लिए सर्वथा अनुपयुक्त समझी जाती है।

शृंखला आधार सूचकांकों की निर्माण-विधि—सबसे पहले सभी वस्तुओं के शृंखला मूल्यानुपात निकाले जाते हैं जिसका सूत्र इस प्रकार है—

$$\text{L.R.} = \frac{\text{Current Year's Price}}{\text{Previous Year's Price}} \times 100 \text{ या } = \frac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{पिछले वर्ष का मूल्य}} \times 100$$

इस प्रकार निकाले गए शृंखला-मूल्यानुपातों के योग को वस्तुओं की संख्या से भाग देने पर **'शृंखला-मूल्यानुपातों का माध्य'** (Average of Link Relatives) ज्ञात हो जाता है। (देखिए Illustration 5)

नोट

क्या आप जानते हैं स्थिर-आधार रीति के विपरीत शृंखला-आधार रीति में आधार वर्ष निश्चित व स्थिर न रहकर बदलता रहता है।

स्थिर-आधार से शृंखला सूचकांक ज्ञात करना—जब हम उपर्युक्त रीति द्वारा शृंखला-मूल्यानुपात निकालते हैं तो इससे विभिन्न वर्षों में एक निकटवर्ती सम्बन्ध या कड़ी का ज्ञान तो होता है, परन्तु कभी-कभी इन समस्त कड़ियों का सम्बन्ध हम एक निश्चित तथा स्थिर वर्ष से भी करना चाहते हैं ताकि सभी वर्षों के परिवर्तन एक निश्चित वर्ष से शृंखलाबद्ध हो जायें। इसका प्रयोग वास्तव में परिवर्तन की दर को शीघ्र समझने के लिए किया जाता है। इस प्रकार से शृंखलित मूल्यानुपातों को, **शृंखला-अनुपात** (Chain Relative or Chain Indices Chained to a Fixed Base) भी कहते हैं। इसका सूत्र इस प्रकार है—

या $$\text{चालू वर्ष का शृंखलित सूचकांक} = \frac{\text{गत वर्ष का शृंखलित सूचनांक} \times \text{चालू वर्ष का औसत शृंखला मूल्यानुपात}}{100}$$

उदाहरण (Illustration) 6—1965 से 1969 के लिये तीन वस्तु-समूहों के निम्न मूल्यों से 1965 से शृंखलाबद्ध शृंखला-सूचकांक (chain base index numbers chained to 1965) परिकलित कीजिए—

समूह (Group)	1965	1966	1967	1968	1969
I	2	3	4	5	6
II	8	10	12	15	18
III	4	5	8	10	12

हल (Solution): शृंखला-आधार सूचकांकों की रचना

Group	*1965*		*1966*		*1967*		*1968*		*1969*	
	P	*L.R.*	*P*	*L.R.*	*P*	*L.R.*	*P*	*L.R.*	*P*	*L.R.*
I	2	100	3	150	4	133.3	5	125	6	120
II	8	100	10	125	12	120.0	15	125	18	120
III	4	100	5	125	8	160.0	10	125	12	120
योग		300		400		413.3		375		360
औसत शृंखला मूल्यानुपात	$\frac{300}{3}$ = **100**		$\frac{400}{3}$ = **133.3**		$\frac{413.3}{3}$ = **137.8**		$\frac{375}{3}$ = **125**		$\frac{360}{3}$ = **120**	
1965 से शृंखलित सूचकांक	$\frac{300}{3} = 100$ **100**		$\frac{100 \times 133.3}{100}$ **= 133.3**		$\frac{133.3 \times 137.8}{100}$ **= 183.7**		$\frac{183.7 \times 125}{100}$ **=229.6**		$\frac{229.6 \times 120}{100}$ **= 275.5**	

18.3 आधार परिवर्तन (Base Conversion)

आधार परिवर्तन दो प्रकार का होता है—(अ) स्थिर आधार से शृंखला आधार में परिवर्तन तथा (ब) शृंखला आधार से स्थिर आधार में परिवर्तन।

नोट

(अ) स्थिर आधार से श्रृंखला आधार में परिवर्तन (From Fixed Base to Chain Base)—इसके लिए (*i*) **प्रथम वर्ष** के श्रृंखला आधार सूचकांक को 100 माना जाता है। (*ii*) **अगले वर्षों** के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{चालू या प्रचलित वर्ष का श्रृंखला सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक}}{\text{गत वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक}} \times 100$$

उदाहरण (Illustration) 7—निम्न स्थिर आधार सूचकांकों से श्रृंखला आधार सूचकांक तैयार कीजिए—

Year	1993	1994	1995	1996	1997	1998
F.B.I.	94	98	102	95	98	100

हल (Solution): स्थिर-आधार से श्रृंखला-आधार सूचकांकों की रचना

वर्ष *(Year)*	*स्थित आधार सूचकांक* *(Fixed base)*	*परिवर्तन* *(Conversion)*	*श्रृंखला सूचकांक* *(Chain Base)*
1993	94	–	100
1994	98	$\frac{98}{94} \times 100$	104.26
1995	102	$\frac{102}{98} \times 100$	104.08
1996	95	$\frac{95}{102} \times 100$	93.14
1997	98	$\frac{98}{95} \times 100$	103.16
1998	100	$\frac{100}{98} \times 100$	102.04

(ब) श्रृंखला आधार से स्थिर आधार में परिवर्तन (From Chain Base to Fixed Base)—इसमें (*i*) **प्रथम वर्ष** का स्थिर आधार सूचकांक वही माना जाता है जो उस वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक है।

विशेष टिप्पणी—यदि प्रथम वर्ष को स्थिर मानकर सूचकांक तैयार करने हों तो उसे 100 ही माना जाएगा

(*ii*) अगले वर्षों के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{चालू वर्ष का स्थिर सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का श्रृंखला सूचकांक} \times \text{गत वर्ष का स्थिर सूचकांक}}{100}$$

उदाहरण (Illustration) 8—निम्नलिखित श्रृंखला आधार सूचकांकों से स्थिर सूचकांक तैयार कीजिए—

Year	1995	1996	1997	1998	1999	2000
C.B.I.	92	102	104	98	103	101

(हल) Solution: श्रृंखला आधार से स्थिर आधार सूचकांकों की रचना

वर्ष *(Year)*	*श्रृंखला आधार सूचकांक* *(Chain Base Index)*	*परिवर्तन* *(Conversion)*	*स्थिर आधार सूचकांक* *(Fixed Base Index)*
1995	92	–	92
1996	102	$\frac{102}{92} \times 100$	93.84
1997	104	$\frac{104}{98.84} \times 100$	97.59

नोट

1998	98	$\frac{98}{97.59} \times 100$	95.64
1999	103	$\frac{103}{95.64} \times 100$	98.51
2000	101	$\frac{101}{98.51} \times 100$	99.50

18.4 आधार-वर्ष परिवर्तन (Base Shifting)

स्मरण रहे, आधार-वर्ष परिवर्तन (Base Shifting), आधार-परिवर्तन (Base Conversion) से भिन्न अवधारणा है। जब दो सूचकांक मालाओं की तुलना करनी हो तो यह अवश्य देख लेना चाहिए कि उन दोनों का आधार-वर्ष एक है या अलग अलग हैं। यदि आधार-वर्ष भिन्न हों तो उनमें परिवर्तन करके उन्हें तुलना योग्य बना लिया जाता है। आधार-वर्ष परिवर्तन की निम्न दो रीतियाँ हैं–

(अ) प्रत्यक्ष अथवा पुनर्निर्माण रीति–इस रीति के अनुसार नए आधार-वर्ष के मूल्यों को 100 मानकर, नए सिरे से सभी चालू वर्षों के लिए मूल्यानुपात ज्ञात कर लिए जाते हैं। इसके बाद इन मूल्यानुपातों का माध्य निकाल लिया जाता है। गणन-क्रिया की जटिलता के कारण इस रीति का प्रयोग प्राय: कम किया जाता है।

(ब) परोक्ष अथवा संक्षिप्त रीति–इस रीति के अनुसार नए आधार-वर्ष के पुराने सूचकांक को 100 मानकर, बाकी सभी वर्षों के पुराने सूचकांकों को निम्न सूत्र द्वारा बदल दिया जाता है लेकिन ध्यान रहे, इस रीति का प्रयोग तभी किया जा सकता है जब सूचकांकों की रचना गुणोत्तर माध्य के आधार पर की गयी हो। सूत्रानुसार–

$$\text{नए आधार वाला सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का पुराना सूचकांक}}{\text{नए आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}} \times 100$$

उदाहरण (Illustration) 9—नीचे दी गयी सूचकांक-श्रेणी में 1969 आधार के स्थान पर 1971 आधार-वर्ष परिवर्तन (Base shifting) कीजिए–

वर्ष :	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
सूचकांक :	100	115	125	130	140	185	200

(हल) Solution: परिवर्तित आधार पर सूचकांकों का परिकलन

वर्ष	*सूचकांक आधार (1969 = 100)*	*आधार वर्ष परिवर्तन*	*सूचकांक आधार (1971 = 100)*
1969	100	$\frac{100}{125} \times 100$	80
1970	115	$\frac{115}{125} \times 100$	92
1971	125	$\frac{125}{125} \times 100$	100
1972	130	$\frac{130}{125} \times 100$	104
1973	140	$\frac{140}{125} \times 100$	112
1974	185	$\frac{185}{125} \times 100$	148
1975	200	$\frac{200}{125} \times 100$	160

नोट

18.5 शिरोबन्धन (Splicing)

शिरोबंधन की प्रक्रिया वास्तव में आधार-वर्ष परिवर्तन का ही एक प्रारूप है। जब कभी किसी निश्चित आधार-वर्ष पर आश्रित सूचकांक को किसी कारणवश बन्द कर दिया जाता है तब ऐसी हालत में उस सूचकांक के "बन्द होने वाले वर्ष" को **आधार मानकर** एक नयी सूचकांक माला की रचना की जाती है ताकि पिछले और नये, दोनों आधारों में तुलनात्मक सम्बन्ध बना रहे। अत: तुलना योग्य स्थिति बनाए रखने की दृष्टि से यह आवश्यक हो जाता है कि नई सूचकांक-माला की पुरानी श्रेणी से सम्बन्धित कर दिया जाए। वास्तव में यह क्रिया ही शिरोबन्धन **अथवा संयोजन** कहलाती है।

उदाहरण (Illustration) 10— मान लीजिए एक सूचकांक-श्रेणी (X) की रचना 1934 के आधार पर की गयी है। वर्ष 1945 में यह श्रेणी समाप्त कर दी गयी और एक नई श्रेणी (Y) 1945 के आधार पर चालू की गयी। नयी-श्रेणी (Y) का पुरानी श्रेणी से शिरोबन्धन (Splicing) कीजिये—

Year	:	1934	1935	... ...	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953
Index (X)	:	100	105	... ...	300	*stopped*	–	–	–	–	–	–	–
Index (Y)	:	–	–	*started*	100	108	110	115	116	120	124	112	121

हल (Solution): **शिरोबन्धन (Spilicing)**

वर्ष	*सूचकांक X*	*सूचकांक Y*	*शिरोबन्धित श्रेणी*
1934	100	–	
1935	105	–	
......	...	...	
......	...	शुरू	
1945	300	100	$\frac{300}{100} \times 100 = 300$
1946	समाप्त	108	$\frac{300}{100} \times 100 = 324$
1947	–	110	$\frac{300}{100} \times 110 = 330$
1948	–	115	$\frac{300}{100} \times 115 = 345$
1949	–	116	$\frac{300}{100} \times 116 = 348$
1950	–	120	$\frac{300}{100} \times 120 = 360$
1951	–	124	$\frac{300}{100} \times 124 = 372$
1952	–	112	$\frac{300}{100} \times 112 = 336$
1953	–	121	$\frac{300}{100} \times 121 = 363$

नोट्स शिरोबंधन क्रिया के लिये सर्वप्रथम दोनों श्रेणियों के सामान्य वर्ष (common year) के सूचकांकों का अनुपात निकाला जाता है और तत्पश्चात् इस अनुपात से नई श्रेणी के सूचकांकों की गुणा कर दी जाती है। ध्यान रहे, शिरोबंधन के लिये दो श्रेणियों का दिया होना आवश्यक है—एक पुराने आधार की श्रेणी और दूसरी नये आधार की श्रेणी सूत्रानुसार—

$$\text{शिरोबंधित सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का सूचकांक} \times \text{नए आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}}{100}$$

18.6 माध्य का चुनाव (Selection of Average)

सूचकांक विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपातों (price relatives) का माध्य (average) होता है अतः इस बात का निश्चय किया जाना कि किस माध्य का प्रयोग किया जाये, अत्यन्त आवश्यक है। सैद्धान्तिक रूप से तो किसी भी माध्य का प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु व्यवहार में समान्तर माध्य या माध्यिका या गुणोत्तर माध्य इन तीनों में से किसी एक का ही प्रयोग करना चाहिये। इन माध्यों की सापेक्ष विवेचना नीचे की गयी है–

समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)—निसन्देह यह सरल तथा बुद्धिगम्य माध्य है परन्तु, यह अति सीमान्त पदों से अत्यधिक प्रभावित होता है सरल शब्दों में, यह माध्य बड़े मूल्यों को अधिक महत्व देने के कारण केवल निरपेक्ष माप के लिए ही उपयुक्त है। फिर, इसमें उत्क्राम्यता (reversibility) का गुण भी नहीं होता। इन दोषों के बावजूद अपनी सरलता के कारण, अधिकांश सूचकांकों में इसी माध्य का प्रयोग किया जाता है।

मध्यका या माध्यिका (Median)—यह एक सरल माध्य है और समान्तर माध्य की तरह चरम पदों से यह प्रभावित भी नहीं होता। परन्तु इसका एक मुख्य दोष यह है कि यह कभी-कभी अवास्तविक तथा अनिश्चित हो जाता है। फिर, इससे सापेक्ष परिवर्तनों का माप तो सम्भव है जबकि निरपेक्ष परिवर्तनों का नहीं। यही कारण है कि सूचकांक-रचना में इस माध्य का प्रयोग कम किया जाता है।

गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)—सूचकांक-रचना हेतु गुणोत्तर माध्य निम्न कारणों से एक आदर्श माध्य समझा जाता है–**प्रथम,** समान्तर माध्य के विपरीत यह छोटे मूल्यों को अधिक और बड़े मूल्यों को कम महत्व देकर सन्तुलन-कारक की भूमिका अदा करता है। **द्वितीय,** यह सापेक्ष परिवर्तनों के माप का सर्वोत्तम माध्य है। **तृतीय,** इसमें उत्क्राम्यता का गुण भी है। हाँ! इस माध्य का प्रमुख दोष यह है कि इसकी गणना-क्रिया काफी जटिल होती है।

उदाहरण (Illustration) 11—1977 को आधार वर्ष मानकर मूल्यानुपातों का (*i*) समान्तर माध्य, (*ii*) मध्यिका तथा (*iii*) गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हुए 1983 वर्ष का मूल्य-सूचकांक ज्ञात कीजिये–

मद	:	A	B	C	D	E	F
मूल्य 1977	:	40	25	50	8.62	24.60	15
मूल्य 1983	:	60	31.25	37.50	8.62	18.45	11.25

हल (Solution): **सूचकांक-रचना: विभिन्न माध्यों का प्रयोग**

वस्तु	*आधार = 1977*		*चालू वर्ष = 1983*		*लघुगणक*
	मूल्य	*R*	*मूल्य*	*R*	
A	40	100	60	150	2.1761
B	25	100	31.25	125	2.0969
C	50	100	37.50	75	1.8751
D	8.62	100	8.62	100	2.0000
E	24.60	100	18.45	75	1.8751
F	15	100	11.25	75	1.8751
अनुपातों का योग		600		600	11.8983
अनु. का समान्तर माध्य		100		**100**	
अनुपातों का माध्य		100		**87.5**	
अनु. का गुणोत्तर माध्य		100		**96.2**	

टिप्पणी—मध्यका के लिये मूल्यानुपातों को पहले आरोही क्रम में अनुविन्यासित किया गया है जैसे–75, 75, 75, 100, 125, 150.

टिप्पणी—गुणोत्तर माध्य के लिये 1983 वर्ष के मूल्यानुपातों के लघुगणक लिये गए हैं (देखिये अन्तिम कॉलम)। फिर, गुणोत्तर माध्य की गणना की गयी है।

नोट

(6) भारों का निर्धारण (System of Weighting)–सूचकांकों की रचना के सम्बन्ध में सबसे महत्त्वपूर्ण समस्या भारों के निर्धारण की होती है। अभी तक वर्णित विभिन्न प्रकार के सूचकांकों में हमने एक बात देखी है कि उनमें सभी वस्तुओं को एक समान महत्त्व दिया गया है जबकि वास्तविक जीवन में सभी वस्तुएँ समान महत्त्व की नहीं होती हैं। वस्तुओं का महत्त्व सदैव सापेक्षिक होता है। उदाहरणार्थ गेहूँ दूध के मुकाबिले में अधिक महत्त्वपूर्ण वस्तु है यदि हम निर्वाह व्यय-सूचनांक बनाते समय दोनों वस्तुओं को समान महत्त्व देते हैं तो यह सर्वथा गलत होगा। **अतः विभिन्न वस्तुओं के तुलनात्मक एवं सापेक्षिक महत्त्व को प्रकट करने के लिए, हम प्रायः भारों का प्रयोग करते हैं।** और भारों को ध्यान में रखकर जो सूचकांक तैयार किये जाते हैं उन्हें **भारित सूचकांक** (Weighted Index Numbers) कहते हैं।

भारों का दिया जाना किसी शिष्टाचार का पूरा करना नहीं बल्कि विभिन्न वस्तुओं के तुलनात्मक महत्त्व को स्पष्ट करना है। इसलिए आवश्यकता इस बात की है कि भार सदैव सन्तुलित हों, तर्कयुक्त हों तथा भार देने वाले व्यक्ति के विवेकपूर्ण चिन्तन का परिणाम हों।

भार देने की रीतियाँ–भार मुख्यतः दो प्रकार से दिये जाते हैं–प्रत्यक्ष एवं परोक्ष भार। जब हम वस्तुओं पर किये जाने वाले व्यय या उनके उपभोग को ध्यान में रखकर, भार देते हैं तो इसको **प्रत्यक्ष भारांकन** (Explicit weighing) कहते हैं। इसके विपरीत जब किन्हीं मदों या वस्तुओं के महत्त्व को स्पष्ट करने के लिए, उनकी अनेक किस्में सूचकांक में सम्मिलित की जाती हैं तो इसे **परोक्ष भारांकन** (Implicit weighting) कहा जाता है। उदाहरणार्थ निर्वाह-व्यय सूचकांक में गेहूँ की चार किस्मों को तथा दूध की एक किस्म को रखना, परोक्ष भार के अन्तर्गत आयेगा। व्यवहार में अधिकतर प्रत्यक्ष भारों को ही स्वीकार किया जाता है। प्रत्यक्ष भारांकन विधि को स्पष्ट करने के लिए नीचे एक प्रश्न हल किया गया है।

भारित सूचकांकों की रचना करते समय प्रत्यक्ष भार दो रीतियों से दिये जा सकते हैं–(अ) **समूही रीति** (Aggregative Method) तथा (ब) **मूल्यानुपातों का भारित माध्य** (Weighted Average of Relatives)। इनका वर्णन आगे किया जायेगा।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

1. .... के अनुसार सबसे पहले प्रत्येक वस्तु का मूल्यानुपात निकाला जाता है।
2. जब एक ही वस्तु के विभिन्न वर्षों के मूल्य दिए हुए हों, तो प्रत्येक वर्ष का मूल्यनुपात ही .... होता है।
3. .... के अनुसार प्रत्येक चालू वर्ष के लिए उससे पिछला वर्ष, आधार वर्ष की भांति काम करता है।
4. आधार वर्ष परिवर्तन .... से भिन्न अवधारणा है।
5. .... की प्रक्रिया वास्तव में आधार वर्ष परिवर्तन का ही एक प्रारूप है।
6. समान्तर माध्य में .... का गुण भी नहीं होता।

18.7 सारांश (Summary)

- जब एक ही वस्तु के विभिन्न वर्षों के मूल्य दिये हुए हों तो प्रत्येक वर्ष का मूल्यानुपात ही अभीष्ट सूचकांक होता है जैसाकि उदाहरण-2 से स्पष्ट है इसके विपरीत जब प्रत्येक वर्ष के कई वस्तुओं के मूल्य दिये हों तो उन सभी वस्तुओं के मूल्यानुपातों का समान्तर माध्य ही सम्बन्धित चालू वर्ष का सरल या अ-भारिक सूचकांक होता है।

$$\text{चालू वर्ष का सूचकांक} = \frac{\Sigma R}{N} = \frac{\text{मूल्यानुपातों का योग (Total of Price Relatives)}}{\text{वस्तुओं की संख्या (No. of Items)}}$$

- प्रत्येक वस्तु के मूल्यानुपात का आगणन $(P_1/P_0) \times 100$ सूत्र द्वारा किया है।

नोट

1997 Index No. = $\frac{\Sigma R}{N} = \frac{775}{5}$ = **155**

- इस रीति के अनुसार **प्रत्येक चालू वर्ष के लिए उससे पिछला वर्ष, आधार वर्ष की भाँति काम करता है।** इस प्रकार आधार और चालू वर्ष में एक श्रृंखला-सी बनी रहने के कारण इसको श्रृंखला आधार रीति कहते हैं।
- इस प्रकार निकाले गए श्रृंखला–मूल्यानुपातों के योग को वस्तुओं की संख्या से भाग देने पर **'श्रृंखला-मूल्यानुपातों का माध्य'** (Average of Link Relatives) ज्ञात हो जाता है।
- जब हम उपर्युक्त रीति द्वारा श्रृंखला–मूल्यानुपात निकालते हैं तो इससे विभिन्न वर्षों में एक निकटवर्ती सम्बन्ध या कड़ी का ज्ञान तो होता है, परन्तु कभी-कभी इन समस्त कड़ियों का सम्बन्ध हम एक निश्चित तथा स्थिर वर्ष से भी करना चाहते हैं ताकि सभी वर्षों के परिवर्तन एक निश्चित वर्ष से श्रृंखलाबद्ध हो जायें। इसका प्रयोग वास्तव में परिवर्तन की दर को शीघ्र समझने के लिए किया जाता है। इस प्रकार से श्रृंखलित मूल्यानुपातों को, **श्रृंखला-अनुपात** (Chain Relative or Chain Indices Chained to a Fixed Base) भी कहते हैं।
- **प्रथम वर्ष** का स्थिर आधार सूचकांक वही माना जाता है जो उस वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक है। **विशेष टिप्पणी**–यदि प्रथम वर्ष को स्थिर मानकर सूचकांक तैयार करने हों तो उसे 100 ही माना जाएगा
- स्मरण रहे, आधार-वर्ष परिवर्तन (Base Shifting), आधार-परिवर्तन (Base Conversion) से भिन्न अवधारणा है। जब दो सूचकांक मालाओं की तुलना करनी हो तो यह अवश्य देख लेना चाहिए कि उन दोनों का आधार-वर्ष एक है या अलग अलग हैं। यदि आधार-वर्ष भिन्न हों तो उनमें परिवर्तन करके उन्हें तुलना योग्य बना लिया जाता है।
- शिरोबंधन की प्रक्रिया वास्तव में आधार-वर्ष परिवर्तन का ही एक प्रारूप है। जब कभी किसी निश्चित आधार-वर्ष पर आश्रित सूचकांक को किसी कारणवश बन्द कर दिया जाता है तब ऐसी हालत में उस सूचकांक के "बन्द होने वाले वर्ष" को **आधार मानकर** एक नयी सूचकांक माला की रचना की जाती है ताकि पिछले और नये, दोनों आधारों में तुलनात्मक सम्बन्ध बना रहे। अत: तुलना योग्य स्थिति बनाए रखने की दृष्टि से यह आवश्यक हो जाता है कि नई सूचकांक-माला की पुरानी श्रेणी से सम्बन्धित कर दिया जाए। वास्तव में यह क्रिया ही शिरोबन्धन **अथवा संयोजन** कहलाती है।
- सैद्धान्तिक रूप से तो किसी भी माध्य का प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु व्यवहार में समान्तर माध्य या माध्यिका या गुणोत्तर माध्य इन तीनों में से किसी एक का ही प्रयोग करना चाहिये।
- **समान्तर माध्य** (Arithmetic Mean)–निसन्देह यह सरल तथा बुद्धिगम्य माध्य है परन्तु, यह अति सीमान्त पदों से अत्यधिक प्रभावित होता है सरल शब्दों में, यह माध्य बड़े मूल्यों को अधिक महत्व देने के कारण केवल निरपेक्ष माप के लिए ही उपयुक्त है।
- **मध्यका या माध्यिका** (Median)–यह एक सरल माध्य है और समान्तर माध्य की तरह चरम पदों से यह प्रभावित भी नहीं होता। परन्तु इसका एक मुख्य दोष यह है कि यह कभी-कभी अवास्तविक तथा अनिश्चित हो जाता है।
- **गुणोत्तर माध्य** (Geometric Mean)–सूचकांक-रचना हेतु गुणोत्तर माध्य निम्न कारणों से एक आदर्श माध्य समझा जाता है–**प्रथम,** समान्तर माध्य के विपरीत यह छोटे मूल्यों को अधिक और बड़े मूल्यों को कम महत्व देकर सन्तुलन-कारक की भूमिका अदा करता है। **द्वितीय,** यह सापेक्ष परिवर्तनों के माप का सर्वोत्तम माध्य है। **तृतीय,** इसमें उत्क्राम्यता का गुण भी है।

नोट

- अभी तक वर्णित विभिन्न प्रकार के सूचकांकों में हमने एक बात देखी है कि उनमें सभी वस्तुओं को एक समान महत्त्व दिया गया है जबकि वास्तविक जीवन में सभी वस्तुएँ समान महत्त्व की नहीं होती हैं। वस्तुओं का महत्त्व सदैव सापेक्षिक होता है। उदाहरणार्थ गेहूँ दूध के मुकाबिले में अधिक महत्त्वपूर्ण वस्तु है यदि हम निर्वाह व्यय-सूचनांक बनाते समय दोनों वस्तुओं को समान महत्त्व देते हैं तो यह सर्वथा गलत होगा। **अतः विभिन्न वस्तुओं के तुलनात्मक एवं सापेक्षिक महत्त्व को प्रकट करने के लिए, हम प्रायः भारों का प्रयोग करते हैं।** और भारों को ध्यान में रखकर जो सूचकांक तैयार किये जाते हैं उन्हें **भारित सूचकांक** (Weighted Index Numbers) कहते हैं।

18.8 शब्दकोश (Keywords)

1. **समावेश** : शामिल होना, व्याप्त होना, प्रवेश
2. **परोक्ष** : छिपा हुआ, अप्रत्यक्ष संबंध वाला

18.9 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. सूचकांको के गणना करने की मूल्यानुपात की सरल माध्य रीति को उदाहरण देकर समझाइए।
2. श्रंखला आधार रीति की विवेचना किजिए।
3. निम्नलिखित पर टिप्पणी लिखिए
   (*i*) आधार परिवर्तन
   (*ii*) आधार वर्ष परिवर्तन
   (*iii*) शिरोबन्ध

उत्तर: स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. मूल्यानुपात की सरल माध्यरीति
2. अभीष्ट सूचकांक
3. श्रृंखला आधार नीति
4. आधार परिवर्तन
5. उत्क्राम्यता

18.10 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
2. साँख्यिकी, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई—19: भारित समूही मूल्य रीति
(Methods: Weight Average of Price)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- भारित समूही मूल्य विधि की गणना प्रक्रिया को समझने में।
- लैस्पियरे, पाशे, मार्शल, फिशर तथा डॉरबिश-बाउले की सूचकांक विधियों को जानने में।

प्रस्तावना (Introduction)

सूचकांक का प्रयोग प्राचीन काल से ही किया जाता रहा है फिर भी वर्तमान युग में आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में परिवर्तनों की माप के लिए इनका बहुत अधिक प्रयोग किया जाता है। सूचकांक की गणना के लिए विभिन्न विधियों का प्रयोग किया जाता है जिसमें से भरित समूही मूल्य विधि भी एक है।

19.1 भारित समूही मूल्य विधि (Weighted Aggregative Price Method)

इस विधि में प्रत्येक वस्तु के संगत भार लिया जाता है जिसे निर्धारित करने के बहुत-से तरीके हैं। यहाँ संगत भार को w से प्रदर्शित किया जाता है।

(*i*) चालू वर्ष की प्रत्येक कीमत (p_1) को w से गुणा करके उनका जोड़ ($\Sigma p_1 w$) ज्ञात किया जाता है।

(*ii*) आधार वर्ष की प्रत्येक कीमत (p_0) को w से गुणा करके उनका जोड़ ($\Sigma p_0 w$) ज्ञात किया जाता है।

नोट

(iii) चालू वर्ष के योग $\Sigma p_1 w$ को आधार वर्ष के योग $\Sigma p_0 w$ से भाग दिया जाता है।

(iv) इस भागफल को 100 से गुणा कर दिया जाता है। इस प्रकार,

$$\text{अभीष्ट निर्देशांक, } I_{01} = \frac{\Sigma p_1 w}{1} \times 100$$

उदाहरण (Illustration) **1:** निम्नलिखित समंकों से भारित समूही रीति द्वारा वर्ष 1990 को आधार वर्ष मानकर 1995 वर्ष के लिए मूल्य निर्देशांक तैयार कीजिए :

वस्तु (Items)	*भार (Weight)*	*मूल्य (Price)*	
		1990	*1995*
A	40	16.00	20.00
B	25	40.00	60.00
C	5	0.50	0.50
D	20	5.12	6.25
E	10	2.00	1.50

हल (Solution)

वस्तु	*भार (w)*	*1990 p_0*	*1995 p_1*	p_1w	p_0w
A	40	16.00	20.00	800.00	640.00
B	25	40.00	60.00	1,500.00	1,000.00
C	5	0.50	0.50	2.50	2.50
D	20	5.12	6.25	125.00	102.40
E	10	2.00	1.50	15.00	20.00
योग				2,442.50	1,764.90

$$\text{1995 के लिए भारित समूही निर्देशांक } = \frac{\Sigma p_{1w}}{\Sigma p_0 w} \times 100 = \frac{2{,}442.50}{1{,}764.90} \times 100 = 138.39$$

उदाहरण (Illustration) **2**: निम्नलिखित समंकों से 1995 को आधार मानते हुए भारित समूही निर्देशांक की गणना कीजिए :

वस्तु (Commodity)	मात्रा (Quantity) इकाइयाँ (Units)	प्रति इकाई मूल्य रु. में (Price per unit in Rs.)				
		1995	*1996*	*1997*	*1998*	*1999*
A	12	0.30	0.33	0.36	0.36	0.39
B	10	0.25	0.24	0.30	0.32	0.30
C	20	0.20	0.25	0.28	0.32	0.30
D	1	2.00	2.40	2.50	2.50	2.60

हल (Solution)

नोट

q	1995		1996		1997		1998		1999	
	p_0	p_0q	p_1	p_1q	p_2	p_2q	p_3	p_3q	p_4	p_4q
12	0.30	3.60	0.33	3.96	0.36	4.32	0.36	4.32	0.39	4.68
10	0.25	2.50	0.24	2.40	0.30	3.00	0.32	3.20	0.30	3.00
20	0.20	4.00	0.25	5.00	0.28	5.60	0.32	6.40	0.30	6.00
1	2.00	2.00	2.40	2.40	2.50	2.50	2.50	2.50	2.60	2.60
		12.10		13.76		15.42		16.42		16.28

भारित समूही निर्देशांक 1995 के आधार पर–

$$1996 \text{ के लिए } = \frac{\Sigma p_1 q}{\Sigma p_0 q} \times 100 = \frac{13.96}{12.10} \times 100 = 113.7$$

$$1997 \text{ के लिए } = \frac{\Sigma p_2 q}{\Sigma p_0 q} \times 100 = \frac{15.42}{12.10} \times 100 = 127.4$$

$$1998 \text{ के लिए } = \frac{\Sigma p_3 q}{\Sigma p_0 q} \times 100 = \frac{16.42}{12.10} \times 100 = 135.7$$

$$1999 \text{ के लिए } = \frac{\Sigma p_4 q}{\Sigma p_0 q} \times 100 = \frac{16.28}{12.10} \times 100 = 134.5$$

टिप्पणी—विभिन्न विद्वानों ने निर्देशांक की रचना करने के लिए भार देने की अलग-अलग विधियों का प्रतिपादन किया है। इनमें से कुछ का वर्णन किया जा रहा है–

19.2 लैस्पियरे की विधि (Laspeyre's Method)

प्रो. लैस्पियरे ने आधार वर्ष की मात्रा q_0 को दोनों वर्षों के लिए भार माना है। लैस्पियरे का सूत्र इस प्रकार है–

$$\text{लैस्पियरे निर्देशांक, } {}^{L}P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

जहाँ p_1 = चालू वर्ष का मूल्य (Current year price),

p_0 = आधार वर्ष का मूल्य (Base year price),

q_0 = आधार वर्ष की मात्रा (Base year quantity)

उदाहरण (Illustration) **3**: निम्न आंकड़ों से लैस्पियरे निर्देशांक परिकलित कीजिए :

वस्तु (Commodity)	*मात्रा (Quantity)*	*कीमत (Price)*	
		1996	*1997*
A	25	3	38
B	9	5	12
C	12	2	15

नोट

हल (Solution):

चूंकि वर्ष 1996 की मात्रा दी हुई है, अत: 1996 को आधार वर्ष मानकर 1997 का निर्देशांक ज्ञात करें :

वस्तु	1996 p_0	1996 q_0	1997 p_0	p_0q_0	p_1q_0
A	25	3	38	75	114
B	9	5	12	45	60
C	12	2	15	24	30
योग	–	–	–	144	204

$$^{L}P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{204}{144} \times 100 = 141.67$$

19.3 पाशे विधि (Paasche's Method)

इस विधि के अन्तर्गत चालू वर्ष तथा आधार वर्ष दोनों के लिए चालू वर्ष की मात्रा को भार माना जाता है। सूत्र के अनुसार–

$$\text{पाशे निर्देशांक, } {}^{P}P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

जहाँ, p_1 = चालू वर्ष का मूल्य (Current year price),

q_1 = चालू वर्ष की मात्रा (Current year quantity),

p_0 = आधार वर्ष का मूल्य (Base year price)।

उदाहरण (Illustration) **4**: निम्न आंकड़ों से पाशे कीमत निर्देशांक परिकलित कीजिए :

मद (Items)	*मात्रा इकाई में (Qty. in Unity)*	*कीमत रुपये प्रति इकाई (Price Rupees per Unit)*	
	1995	*1995*	*1996*
A	8	25	30
B	20	15	20
C	5	18	25
D	3	12	15
E	2	8	10
F	1	4	5

हल (Solution)

वस्तु	q_1	1995 p_0	1996 p_1	p_1q_1	p_0q_1
A	8	25	30	240	200
B	20	15	20	400	300
C	5	18	25	125	90
D	3	12	15	45	36
E	2	8	10	20	16
F	1	4	5	5	4
योग				835	646

नोट

$$^{P}P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \frac{835}{646} \times 100 = 129.26$$

> *टास्क* पाशे की उपयोगिता बताइए।

19.4 मार्शल-एजबर्थ विधि (Marshall-Edgeworth's Method)

इस विधि के अन्तर्गत आधार वर्ष और चालू वर्ष दोनों की मात्राओं के माध्य को भार माना जाता है। सूत्र के अनुसार,

मार्शल-एजवर्थ निर्देशांक, $^{M}P_{01} = \dfrac{\Sigma p_1\left(\dfrac{q_0 + q_1}{2}\right)}{\Sigma p_0\left(\dfrac{q_0 + q_1}{2}\right)} \times 100$

$$= \frac{\Sigma p_1(q_0 + q_1)}{\Sigma p_0(q_0 + q_1)} \times 100 \quad \text{अथवा} \quad \frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1} \times 100$$

उदाहरण (Illustration) **5:** अग्र आंकड़ों से मार्शल-एजवर्थ कीमत निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

वस्तु	*आधार वर्ष*		*चालू वर्ष*	
(Commodity)	*कीमत (Price)*	*मात्रा (Quantity)*	*कीमत (Price)*	*मात्रा (Quantity)*
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

हल (Solution):

वस्तु	*आधार वर्ष*		*चालू वर्ष*					
(Commodity)	*कीमत*	*मात्रा* q_0	*कीमत* p_1	*मात्रा* q_1	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1	p_0
A	6	50	10	56	300	336	500	560
B	2	100	2	120	200	240	200	240
C	4	60	6	60	240	240	360	360
D	10	30	12	24	300	240	360	288
E	8	40	12	36	320	288	480	432
योग	–	–	–	–	1,360	1,344	1,900	1,880

$$^{M}P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1} \times 100 = \frac{1{,}900 + 1{,}880}{1{,}360 + 1{,}344} \times 100 = \frac{3{,}780}{2{,}704} = 129.8$$

नोट

क्या आप जानते हैं मार्शल-एजबर्थ विधि में चालू और आधार वर्ष की मात्राओं के माध्य को भार माना जाता है।

19.5 डॉरबिश-बॉउले विधि (Dorbish-Bowley's Method)

इस विधि के अन्तर्गत लैस्पियरे तथा पाशे के सूत्रों का समान्तर माध्य लिया जाता है। सूत्र के अनुसार,

$$\text{डॉरबिश-बॉउले निर्देशांक, } {}^{D}P_{01} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1}\right) \times 100$$

उदाहरण (Illustration) **6**: निम्न आंकड़ों से डॉरबिश-बॉउले रीति द्वारा कीमत निर्देशांक की रचना कीजिए :

वस्तु (Commodity)	*1985* कीमत (Price)	*1985* मात्रा (Quantity)	*1986* कीमत (Price)	*1986* मात्रा (Quantity)
A	2	8	4	6
B	5	10	6	5
C	4	14	5	10
D	2	19	2	13

हल (Solution)

वस्तु	1985 p_0	1985 q_0	1986 p_1	1986 q_1	p_1q_0	p_0q_0	q_1p_1	p_0p_1
A	2	8	4	6	32	16	24	12
B	5	10	6	5	60	50	30	25
C	4	14	5	10	70	56	50	40
D	2	19	2	13	38	38	26	26
योग	–	–	–	–	200	160	130	103

डॉरबिश-बॉउले सूत्र :

$$ {}^{D}P_{01} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} + \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}\right) \times 100$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{200}{160} + \frac{130}{103}\right) \times 100$$

$$= \frac{1}{2}(1.25 + 1.262) \times 100 = \frac{2.512 \times 100}{2} = \frac{251.2}{2}$$

$$= 125.6$$

वैकल्पिक विधि

$${}^{D}P_{01} = \frac{1}{2}\,(\text{लैस्पियरे सूत्र + पाशे सूत्र})$$

$$= \frac{1}{2}\left({}^{L}P_{01} + {}^{P}P_{01}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(125 + 126.2) = \frac{251.2}{2} = 125.6$$

19.6 फिशर विधि (Fisher's Method)

नोट

इस विधि के अन्तर्गत लैस्पियरे तथा पाशे के सूत्रों का गुणोत्तर माध्य लिया जाता है। सूत्र के अनुसार,

फिशर निर्देशांक, $\begin{cases} {}^{F}P_{01} = \sqrt{{}^{L}P_{01} \times {}^{P}P_{01}} \\ {}^{F}P_{01} = \left(\dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}\right)^{1/2} \times 100 \end{cases}$

गुण (Merits)

1. इस सूत्र में आधार वर्ष तथा चालू वर्ष की कीमत तथा मात्रा दोनों को सम्मिलित किया जाता है।
2. यह सूत्र अभिनति (Bias) से स्वतन्त्र है।

दोष (Demerits)

1. इस सूत्र का निर्वचन कठिन है।
2. इसमें आधार तथा चालू वर्ष दोनों की कीमत व मात्रा की आवश्यकता होती है।
3. यह व्यावहारिक निर्देशांक सूत्र नहीं है।

बॉडिंगटन के अनुसार, "दुर्भाग्यवश, जबकि यह सूत्र पूर्ण निर्देशांक सूत्र की अधिकांश गणितीय विशेषताओं को सामान्य रूप से पूरा करता है, परन्तु इसके विरोध का कारण यह है कि यह स्पष्ट नहीं है कि यह क्या मापता है। अर्थात् परिणाम में मूल्य तथा मात्रा दोनों के परिवर्तन शामिल होते हैं, जबकि हम सामान्यत: एक को दूसरे से पृथक् रखना चाहते हैं।"

उदाहरण (Illustration) 7: निम्न आंकड़ों से फिशर आदर्श सूत्र द्वारा 1885 के आधार पर 1995 का कीमत निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

वस्तु (Commodity)	*1985*		*1995*	
	कीमत (Price)	*मात्रा (Quantity)*	*कीमत (Price)*	*मात्रा (Quantity)*
A	12	100	20	120
B	4	200	4	240
C	8	120	12	150
D	20	60	24	50

हल (Solution)

वस्तु	*1985*		*1995*		p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
	p_0	q_0	p_1	q_1				
A	12	100	20	120	1,200	1,440	2,000	2,400
B	4	200	4	240	800	960	800	960
C	8	120	12	150	960	1,200	1,440	1,800
D	20	60	24	50	1,200	1,000	1,440	1,200
योग					4,160	4,600	5,680	6,360

लैस्पियरे सूत्र $= \dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \dfrac{5{,}680}{4{,}160} \times 100 = 136.5$

पाशे सूत्र $= \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \dfrac{6{,}360}{4{,}600} \times 100 = 138.3$

फिशर आदर्श कीमत निर्देशांक $= \sqrt{136.5 \times 138.3} = 137.397 = 137.4$

नोट

नोट्स फिशर निर्देशांक सूत्र समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test) तथा तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test) दोनों की कसौटी पर खरा उतरता है। यही कारण है कि इसे आदर्श सूत्र (Ideal Formula) कहा जाता है।

वैकल्पिक विधि

$$\text{फिशर आदर्श कीमत निर्देशांक} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{5{,}680}{4{,}160} \times \frac{6{,}360}{4{,}600}} \times 100 = \sqrt{1.365 \times 1.383} \times 100$$

$$= \sqrt{1.888} \times 100 = 1.374 \times 100 = 137.4$$

उदाहरण (Illustration) **8:** निम्न आंकड़ों की सहायता से फिशर आदर्श कीमत निर्देशांक की रचना कीजिए :

वस्तु (Commodity)	*आधार वर्ष (Base year)*		*प्रचलित वर्ष (Current year)*	
	कीमत (Price)	*मात्रा (Quantity)*	*कीमत (Price)*	*मात्रा (Quantity)*
A	8	50	20	60
B	2	15	6	10
C	1	20	2	25
D	2	10	5	8
E	1	40	3	30

हल (Solution)

वस्तु	*आधार वर्ष*		*प्रचलित वर्ष*		p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_0q_1
	p_0	q_0	p_1	q_1				
A	8	50	20	60	400	480	1,000	1,200
B	2	15	6	10	30	20	90	60
C	1	20	2	25	20	25	40	50
D	2	10	5	8	20	16	50	40
E	1	40	3	30	40	30	120	90
योग					510	571	1,300	1,440

$$\text{फिशर आदर्श कीमत निर्देशांक} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}300}{510} \times \frac{1{,}440}{571}} \times 100$$

$$= \sqrt{2.549 \times 2.522} \times 100$$

$$= \sqrt{6.4286} \times 100 = 2.535 \times 100 = 253.5$$

नोट

उदाहरण (Illustration) **9:** निम्नलिखित आंकड़ों से लैस्पियरे, पाशे, मार्शल-एजवर्थ, डॉरबिश-बॉउले तथा फिशर निर्देशांकों की रचना कीजिए :

वस्तु (Items)	1977		1987	
	मूल्य (Price)	मात्रा (Quantity)	मूल्य (Price)	मात्रा (Quantity)
A	4	20	6	10
B	3	15	5	20
C	2	25	3	15
D	5	10	4	40

हल (Solution)

वस्तु	1977		1987					
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	4	20	6	10	80	40	120	60
B	3	15	5	20	45	60	75	100
C	2	25	3	15	50	30	75	45
D	5	10	4	40	50	200	40	160
योग					225	330	310	365

$$\text{लैस्पियरे निर्देशांक} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{310}{225} \times 100 = 137.78$$

$$\text{पाशे निर्देशांक} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \frac{365}{330} \times 100 = 110.61$$

$$\text{मार्शल-एजवर्थ निर्देशांक} = \frac{\Sigma p_1 q_1 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{310 + 365}{225 + 330} \times 100 = \frac{675}{555} \times 100 = 121.62$$

$$\text{डॉरबिश-बॉउले निर्देशांक} = \frac{137.78 + 110.61}{2} = \frac{248.39}{2} = 124.195$$

$$\text{फिशर निर्देशांक} = \sqrt{137.78 \times 110.61} = \sqrt{15,239.8458} = 123.45$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. निम्नलिखित में सूचकांक की गणना कीजिए-

1. निम्न आँकडों से फिशर का सूचकांक ज्ञात कीजिए-

वस्तु	आधार वर्ष		प्रचलित वर्ष	
	कीमत प्रति इकाई	कुल व्यय (रु. में)	कीमत प्रति इकाई	कुल व्यय (रु. में)
1	2	40	5	75
2	4	16	8	40
3	1	10	2	24
4	5	25	10	60

नोट

2. निम्न आँकडों दिये हुए है–

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	कीमत प्रति इकाई (रु. में)	मात्रा	कीमत प्रति इकाई (रु. में)	मात्रा
A	1	10	1.5	8
B	5	12	6	10
C	8	5	10	2

चालू वर्ष के लिए कीमत सूचकांक की गणना को दर्शाइए–

(*a*) लैस्पियरे सूत्र द्वारा

(*b*) पाशे के सूत्र द्वारा

(*c*) कीमत सापेक्ष के भारित समान्तर माध्य द्वारा जिसमें आधार वर्ष के मूल्य भार हों

3. निम्न दिये हुए आंकड़ो से (*i*) लैस्पियरे सूत्र (*ii*) पाशे सूत्र (*iii*) फिशर का प्रयोग करते हुए मात्रा निदेशांक परिकलित कीजिए–

मद (*Items*)	आधार वर्ष (*Base year*)		चालू वर्ष (*Current year*)	
	मूल्य (*Price*)	मात्रा (*Quantity*)	मूल्य (*Price*)	मात्रा (*Quantity*)
A	5	50	10	56
B	3	100	4	120
C	4	60	6	60
D	11	30	14	24
E	7	40	10	36

19.7 सारांश (Summary)

- इस विधि में प्रत्येक वस्तु के संगत भार लिया जाता है जिसे निर्धारित करने के बहुत-से तरीके हैं। यहाँ संगत भार को w से प्रदर्शित किया जाता है।

  (*i*) चालू वर्ष की प्रत्येक कीमत (p_1) को w से गुणा करके उनका जोड़ ($\sum p_1w$) ज्ञात किया जाता है।

  (*ii*) आधार वर्ष की प्रत्येक कीमत (p_0) को w से गुणा करके उनका जोड़ ($\sum p_0w$) ज्ञात किया जाता है।

  (*iii*) चालू वर्ष के योग $\sum p_1w$ को आधार वर्ष के योग $\sum p_0w$ से भाग दिया जाता है।

  (*iv*) इस भागफल को 100 से गुणा कर दिया जाता है। इस प्रकार,

  अभीष्ट निर्देशांक, $I_{01} = \frac{\Sigma p_1 w}{1} = 100$

19.8 शब्दकोश (Keywords)

1. **संगत** : उपर्युक्त, मिला हुआ, मेल रखने वाला
2. **अभिनति** : झुकाव, भीतर की ओर झुकाव
3. **उत्क्राम्यता** : विपरीत

नोट

19.9 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. सूचकांक ज्ञात करने की भारित समूही मूल्य विधि की गणना प्रक्रिया समझाइए।

2. फिशर विधि की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

3. निम्नलिखित पर टिप्पणी लिखिए–

(*i*) लैस्पियरे की विधि

(*ii*) पाशे विधि

(*iii*) डारबिश बाउले विधि।

उत्तर: स्व-मूल्यांकन (Answer: Self-Assessment)

1. P_{01} = 219.12   2. 124.55, 124.2, 124.55   3. 99.7, 100.8, 100.2

19.10 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा

2. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई–20: अविरोध का परिक्षणः इकाई मापदण्ड, समय उत्क्रम्यता परीक्षण, तत्व उत्क्रम्यता परीक्षण, चक्रीय परीक्षण (Test of Consistency: Unit Test, Time Reversal Test, Factor Reversal Test and Circular Test)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- अनुकूलता के परीक्षण की विस्तृत व्याख्या करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

सूचकांक एक ऐसा सांख्यिकीय माप है जो समय, स्थान या किसी अन्य विशेषता के आधार पर एक चर मूल्य अथवा चर मूल्यों के एक समूह में होने वाले परिवर्तनों को प्रदर्शित करता है। इन परिवर्तनों का परिक्षण करने के लिए सांख्यकी में अविरोध परिक्षणों के प्रयोग का महत्त्व है।

20.1 अनुकूलता का परीक्षण (Test of Consistency)

एक आदर्श सूचकांक का महत्त्वपूर्ण गुण यह है कि वह अविरोध के परीक्षणों पर खरा उतरे। उत्क्राम्यता-परीक्षण चार प्रकार के होते हैं–

(*i*) इकाई मापदण्ड (Unit Test)

(*ii*) समय-उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test)

(*iii*) तत्व-उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test)

(*iv*) चक्रीय परीक्षण (Circular Test)

***(i)* इकाई मापदण्ड** (Unit Test)—इस मापदण्ड के अनुसार सूत्र इकाई स्वातंत्र होनी चाहिए अर्थात मूल्य और मात्राएँ किसी भी इकाई में व्यक्त की जा सकती है, सरल समूही सूचकांक को छोड़कर शेष सभी सूत्र इस मापदण्ड को सतुष्ट कर सकते हैं।

***(ii)* समय-उत्क्राम्यता परीक्षण** (Time Reversal Test)—समय-उत्क्राम्यता का यह अर्थ है कि यदि आधार वर्ष पर आधारित करते हुए चालू वर्ष का सूचकांक निकाला जाये और इसी प्रकार चालू वर्ष पर आधारित, आधार वर्ष का सूचकांक निकाला जाये तो इन दोनों का गुणनफल 1 होना चाहिये अर्थात् दोनों सूचकांक एक दूसरे के व्युत्क्रम (Reciprocal) होने चाहिये। सूत्रानुसार—

$$P_{01} = P_{01} \times P_{10} = 1 \text{ या } \qquad P_{01} = \frac{1}{P_{10}}$$

P_{01} = आधार-वर्ष मूल्यों पर आधारित चालू-वर्ष का सूचकांक

P_{10} = चालू-वर्ष के मूल्यों पर आधारित आधार-वर्ष का सूचकांक

उदाहरण—यदि 1985 के आधार पर तैयार किया गया। 1988 का सूचकांक यह व्यक्त करे कि वस्तु का मूल्य दुगुना हो गया है, तो 1988 के आधार पर निर्मित 1985 के सूचकांक को यह स्पष्ट करना चाहिए कि 1985 में वस्तु का मूल्य 1988 की तुलना में आधा रह गया है अर्थात् $2 \times 1/2 = 1$

टिप्पणी—फिशर का आदर्श सूचकांक इस परीक्षण को पूरा करता है जबकि लास्पेयर, पाशे आदि कोई भी अन्य सूत्र इस परीक्षण को पूरा नहीं करता।

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \qquad P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}}$$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}} = 1$$

***(iii)* तत्त्व उत्क्राम्यता परीक्षण** (Factor Reversal Test)—तत्त्व-उत्क्राम्यता परीक्षण का अर्थ है कि यदि 'मूल्य' के स्थान पर 'मात्रा' और मात्रा के स्थान पर मूल्य रखकर सूचकांक (Q_{01}) तैयार किया जाये तो उसका और मूल्य-सूचकांक (P_{01}) का गुणनफल, चालू वर्ष के कुल मूल्य ($\Sigma p_1 q_1$) और आधार वर्ष के कुल मूल्य ($\Sigma p_0 q_0$) के अनुपात के बराबर होना चाहिए।

फिशर ने स्वयं इस सम्बन्ध में लिखा है कि **"...जिस प्रकार दो समयों के परस्पर परिवर्तन करने से असंगत फल न प्राप्त हों ठीक उसी प्रकार यह भी सम्भव होना चाहिए कि मूल्यों तथा मात्राओं के प्रतिस्थापन करने पर भी असंगत फल प्राप्त न हों अर्थात् दोनों परिणामों की आपस में गुणा करने पर वास्तविक मूल्य अनुपात प्राप्त हों।"**

उदाहरण—यदि 1988 में 1985 की अपेक्षा मूल्य दुगने हो जायें और मात्रा ड्योढ़ी हो जाये तो 1988 में कुल मूल्य 1985 की तुलना में तीन गुणा हो जाना चाहिए। सरल शब्दों में, यदि मूल्य के स्थान पर मात्रा और मात्रा के स्थान पर मूल्य रखकर सूचकांक (Q_{01}) तैयार किया जाए तो उसका और मूल्य सूचकांक (P_{01}) का गुणनफल चालू-वर्ष के कुल मूल्य ($\Sigma p_1 q_1$) और आधार वर्ष के कुल मूल्य ($\Sigma p_0 q_0$) के अनुपात के बराबर होना चाहिए। सूत्रानुसार—

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \qquad \text{(वास्तविक मूल्य-अनुपात)}$$

नोट

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 p_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \qquad Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 p_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 p_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 p_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 p_1}{\Sigma p_0 q_0}} = \frac{\Sigma p_1 p_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

नोट्स फिशर का आदर्श सूचकांक तत्व उत्क्रम्यता परीक्षण को पूरा करता है जबकि लास्पेयर, पाशे आदि कोई भी अन्य सूत्र इस परीक्षण को पूरा नहीं करता।

(*iv*) चक्रीय परीक्षण (Circular Test)—यह परीक्षण समय-उत्क्राम्यता परीक्षण का ही एक विस्तृत रूप है। इस परीक्षण के अनुसार, सूचकांक चक्र के रूप में तैयार किये जाते हैं और उन सब का गुणनफल 1 होना चाहिए। सूत्रानुसार—

$$P_{01} \times P_{12} \times P_{21} = 1$$

उदाहरण—यदि 1988 का सूचकांक 1985 के आधार पर बनाया जाये और 1985 का सूचकांक 1982 के आधार पर तैयार किया जाये, तो 1982 के आधार पर प्रत्यक्ष रूप से बनाया गया 1988 का सूचकांक असंगत नहीं होना चाहिए। सरल शब्दों में, यदि 1988 का सूचकांक 1985 के सूचकांक से दुगुना है और 1985 का सूचकांक 1982 के सूचकांक से तिगुना है तो 1982 के आधार पर तैयार किया गया 1988 का सूचकांक, छः गुना होना चाहिए।

टिप्पणी—यह परीक्षण केवल तभी पूरा होता है जब भारों का प्रयोग न किया जाये। यदि प्रयोग किया भी जाये तो भार स्थिर होने चाहिएँ जोकि न तो सम्भव है और न औचित्यपूर्ण। यही कारण है कि यह परीक्षण किसी भी भारित सूचकांक द्वारा पूरा नहीं किया जाता। यहाँ तक कि फिशर का आदर्श सूत्र भी इसे पूरा नहीं करता।

उदाहरण (Illustration) 1. निम्न समंकों से फिशर का आदर्श सूचकांक तैयार कीजिए। क्या यह सूचकांक 'समय' तथा 'तत्व' उत्क्राम्यता दोनों परीक्षण पूरा करता है?

मद (Item)	*1990 आधार वर्ष (Base Year)*		*1992 चालू वर्ष (Current Year)*	
	मूल्य (Price)	*मात्रा (Quantity)*	*मूल्य (Price)*	*मात्रा (Quantity)*
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

नोट

हल (Solution).

फिशर के आदर्श सूचकांक का परिकलन

Item	*1990*		*1992*		*Product*			
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	6	50	10	56	300	500	336	560
B	2	100	2	120	200	200	240	240
C	4	60	6	60	240	360	240	360
D	10	30	12	24	300	360	240	288
E	8	40	12	36	320	480	288	432
				Total	**1360** Σp_0q_0	**1900** Σp_1q_0	**1344** Σp_0q_1	**1880** Σp_1q_1

फिशर का आदर्श सूचकांक : सूत्र–

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.397 \times 1.399} \times 100 = \sqrt{1.954} \times 100$$

$$= 1.398 \times 100 \qquad \therefore \quad P_{01} = \mathbf{139.8}$$

लघुगणक रीति (Logrithms method) द्वारा हल करने पर–

$$\text{Log } P_{01} = \frac{1}{2}[(\log 1900 - \log 1360) + (\log 1880 - \log 1344)] + \log 100$$

$$= \frac{1}{2}[(3.2788 + 3.1335) + (3.2742 - 3.1284)] + 2.0000$$

$$= \frac{1}{2}[(0.1453 + 0.1458) + 2 \quad \text{or} \quad = \text{Antilog } 0.1455 + 2$$

$$= \text{Antilog } 2.1455 \qquad \therefore \quad P_{01} = \mathbf{139.8}$$

समय-उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test):

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \qquad P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}}$$

ज्ञात मूल्यों को सूत्र में आदिष्ट करने पर–

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1360}{1900} \times \frac{1344}{1880}} = \sqrt{1} = 1$$

अत: फिशर का आदर्श सूचकांक इस परीक्षण को पूरा करता है।

टिप्पणी—गणना-क्रिया को सरल करने के लिए 100 की गुणा नहीं की जाती है।

तत्व-उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test):

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

$$= \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1344}{1360} \times \frac{1880}{1900}} = \sqrt{\frac{1880}{1360} \times \frac{1880}{1360}} = \frac{1880}{1360} \qquad \text{(Proved)}$$

नोट

उदाहरण (Illustration) 2. निम्न समंकों से फिशर के आदर्श सूचकांक की रचना कीजिए–
Compute the Fisher's Idex Number from the following data.

वस्तुएँ	*आधार वर्ष (Base Year)*		*प्रचलित वर्ष (Current Year)*	
(Items)	*मूल्य प्रति इकाई*	*कुल व्यय (रु. में)*	*मूल्य प्रति इकाई*	*कुल व्यय (रु. में)*
A	2	40	5	75
B	4	16	8	40
C	1	10	2	24
D	5	25	10	60

हल (Solution). कुल व्यय, मूल्य व मात्रा का गुणनफल है। अत: मात्रा निकालने के लिए कुल व्यय को उस वर्ष में वस्तुओं की कीमतों से भाग दिया जाएगा–

वस्तुएँ	आधार वर्ष (Base Year)			प्रचलित वर्ष (Current Year)		
(Items)	मूल्य प्रति इकाई	कुल व्यय (रु. में)	मात्रा	मूल्य प्रति इकाई	कुल व्यय (रु. में)	मात्रा
	p_0	(p_0q_0)	q_0	p_1	(p_1q_1)	q_1
A	2	40	20	5	75	15
B	4	16	4	8	40	5
C	1	10	10	2	24	12
D	5	25	5	10	60	6

फिशर के आदर्श सूचकांक का परिकलन

वस्तुएँ	आधार वर्ष (Base Year)		प्रचलित वर्ष (Current Year)		भारित समूह (Weighted Groups)			
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	2	20	5	15	40	100	30	75
B	4	4	8	5	16	32	20	40
C	1	10	2	12	10	20	12	24
D	5	5	10	6	25	50	30	60
				Total	**91**	**202**	**92**	**199**

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{202}{91} \times \frac{199}{92}} \times 100 = \sqrt{4.8015} \times 100$$

= 2.1912 × 100 = **219.1** अत: फिशर का आदर्श सूचकांक **219.1** है।

उदाहरण (Illustration) 3. निम्न समंकों से फिशर के सूत्र द्वारा मात्रा सूचकांक ज्ञात कीजिए–

वस्तुएँ Item	1993		1995	
	कीमत (Price)	कुल व्यय (Total Value)	कीमत (Price)	कुल व्यय (Total Value)
A	5	50	4	48
B	8	48	7	49
C	6	18	5	20

नोट

हल (Solution). इस प्रश्न में वस्तुओं के 'मूल्य' तथा 'कुल व्यय' दिए गए हैं जबकि 'मात्राएँ' नहीं दी गयीं। अत: मात्रा निकालने के लिए कुल व्यय को मूल्य से भाग दिया जाएगा। स्मरण रहे, हमें मात्राओं का सूचकांक निकालना है, अत: संकेताक्षरों में भी अन्तर करना होगा।

फिशर रीति द्वारा मात्रा का सूचकांक (Quantity Index)

वस्तुएँ	p_0	q_0	p_1	q_1	q_1p_0	p_0p_0	q_1p_1	q_0p_1
A	5	10	4	12	60	50	48	40
B	8	6	7	7	56	48	49	42
C	6	3	5	4	24	18	20	15
				Total	**140**	**116**	**117**	**97**

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{140}{116} \times \frac{117}{97}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.4557} \times 100 = 1.2065 \times 100 \quad \therefore \quad Q_{01} = \mathbf{120.65}$$

सूचकांकों के अन्य सूत्र (Other Formulate for Index Numbers)—

फिशर महोदय के अलावा कुछ अन्य सांख्यिकों ने भी सूचकांक रचना के विभिन्न सूत्र प्रतिपादित किए हैं जिनमें से कुछ प्रमुख सूत्र इस प्रकार हैं—

(*i*) **लास्पेयर सूत्र (Laspeyre Formula)**

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

(*ii*) **पाशे सूत्र (Pasche Formula)**

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

(*iii*) **ड्रोबिश व बाऊले सूत्र (Drobisch and Bowley's Formula)**

$$P_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} + \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}\right] \times 100$$

(*iv*) **मार्शल-एजवर्थ सूत्र (Marshall-Edgeworth Formula)**

$$P_{01} = \frac{\Sigma (q_0 + q_1) p_1}{\Sigma (q_0 + q_1) p_0} \times 100$$

(*v*) **वाल्श सूत्र (Walsh Formula)**

$$P_{01} = \frac{\Sigma \sqrt{q_0 (q_1 p_1)}}{\Sigma \sqrt{q_0 (q_1 p_0)}} \times 100$$

(*vi*) **कैली सूत्र (Kelly Formula)**

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q}{\Sigma p_0 q} \times 100$$

टास्क समय उत्क्राम्पता परीक्षण का सूत्र लिखिए।

नोट

सूत्रों की व्याख्या–पहले दोनों सूत्रों में क्रमश: आधार वर्ष की मात्रा आधार वर्ष की मात्रा और प्रचलित वर्ष की मात्रा के भार प्रयोग किए गए हैं। वैसे, पाशे की तुलना में लास्पेयर सूत्र अधिक सरल तथा लोकप्रिय है क्योंकि इसमें भार प्रतिवर्ष बदलने नहीं पड़ते। **तीसरा सूत्र,** पहले दोनों सूत्रों (लास्पेयर व पाशे) का समान्तर माध्य है जबकि फिशर का सूत्र, इन दोनों सूत्रों का गुणोत्तर माध्य है। **चौथा सूत्र,** फिशर का वैकल्पिक सूत्र (Alternative Formula) कहलाता है और मार्शल-एजवर्थ ने इसी का समर्थन व प्रयोग किया है। ध्यान रहे, फिशर का सूत्र समय व तत्व उत्क्राम्यता इन दोनों परीक्षणों को सन्तुष्ट करता है। (चक्रीय परीक्षण को पूरा नहीं करता) जबकि मार्शल-एजवर्थ सूत्र केवल समय-उत्क्राम्यता परीक्षण को सन्तुष्ट करता है अन्य किसी परीक्षण को नहीं। **वाल्श** का सूत्र गुणोत्तर माध्य पर आधारित भारित समूहों का सूचकांक है जो गणन-क्रिया की दृष्टि से काफी जटिल है।

क्या आप जानते हैं **कैली** के सूत्र में आधार वर्ष या प्रचलित वर्ष के भारों के स्थान पर एक प्रमापित-वर्ष (q) के भार लिए गए हैं।

उदाहरण (Illustration) 4. निम्नलिखित समंकों से (*i*) लास्पेयर, (*ii*) पाशे, (*iii*) मार्शल-एजवर्थ, (*iv*) ड्रोबिश एवं बाऊले तथा (*v*) फिशर रीति द्वारा, 1980 को आधार मानकर 1990 के कीमत सूचकांक (Price index) ज्ञात कीजिए। साथ ही लास्पेयर तथा पाशे रीति से 1990 के 'मात्रा सूचकांक' (Quantity index) भी बनाइए–

Commodity	*Year 1980*		*Year 1990*	
	Price	*Quantity*	*Price*	*Quantity*
A	20	8	40	6
B	50	10	60	5
C	40	15	50	15
D	20	20	20	25

विभिन्न सूत्रों द्वारा मूल्य तथा मात्रा सूचकांकों का परिकलन

वस्तु	*1980*		*1990*		*भारित समूह (Aggregates)*			
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	20	8	40	6	160	120	320	240
B	50	10	60	5	500	250	600	300
C	40	15	50	15	600	600	750	750
D	20	20	20	25	400	500	400	500
				Total	**1660** Σp_0q_0	**1470** Σp_0q_1	**2070** Σp_1q_0	**1790** Σp_1q_1

(*i*) **लास्पेयर** (Laspeyre's) रीति द्वारा 'मूल्य' तथा 'मात्रा' सूचकांक–

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{2070}{1660} \times 100 = \mathbf{124.7}$$

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times 100 = \frac{1470}{1660} \times 100 = \mathbf{88.6}$$

(*ii*) **पाशे** (Paasche) रीति द्वारा 'मूल्य' तथा 'मात्रा' सूचकांक–

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \frac{1790}{1470} \times 100 = \mathbf{121.8}$$

नोट

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \times 100 = \frac{1790}{2070} \times 100 = \mathbf{86.5}$$

(*iii*) **मार्शल-एजवर्थ** (Marshall-Edgeworth) रीति द्वारा मूल्य सूचकांक—

$$P_{01} = \frac{\Sigma(q_0 + q_1)p_1}{\Sigma(q_0 + q_1)p_0} \times 100 = \frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{2070 + 1790}{1660 + 1470} \times 100 = \frac{3860}{3130} \times 100 = \mathbf{123.3}$$

(*iv*) **ड्रोबिश एवं बाऊले** (Drobisch-Bowley) रीति द्वारा मूल्य-सूचकांक—

$$P_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} + \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}\right] \times 100 = \frac{1}{2}\left[\frac{2070}{1660} + \frac{1790}{1470}\right] \times 100$$

(*v*) **फिशर** (Fisher) रीति द्वारा मूल्य-सूचकांक (Price Index):

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{2070}{1600} \times \frac{1790}{1470}} \times 100 = \mathbf{123.2}$$

उदाहरण (Illustration) 5. किसी नगर विशेष के एक श्रमजीवी वर्ग के उपभोक्ता कीमत सूचकांक में विभिन्न वस्तु-वर्ग के अनुसार भार निम्नलिखित थे—

भोजन (Food) 55, ईंधन (Fuel) 15, वस्त्र (Clothes) 10, किराया (Rent) 8, विविध (Misc.) 12

अक्टूबर 1999 में उस नगर की एक मिल ने अपने कामगारों के लिए महँगाई भत्ता उनकी मजदूरी के 182 प्रतिशत पर नियत किया, जिससे भोजन और किराये में हुई महँगाई (मूल्य-वृद्धि) की क्षतिपूर्ति तो हो गयी किन्तु अन्य मदों की क्षतिपूर्ति नहीं हो पायी। उसी नगर की एक अन्य मिल ने 46.5 प्रतिशत का महँगाई भत्ता दिया जिससे ईंधन और विविध समूह में हुई मूल्य-वृद्धि प्रतिकारित हो गई। यह ज्ञात है कि भोजन में मूल्य-वृद्धि ईंधन की वृद्धि से दोगुनी है और विविध-समूह में मूल्य-वृद्धि, किराए में वृद्धि से दोगुनी है। भोजन, ईंधन, किराया तथा विविध-समूह में हुई (महँगाई) ज्ञात कीजिए।

हल (Solution). माना, ईंधन में हुई महँगाई = X तब भोजन में महँगाई = 2X

किराये में हुई महँगाई = Y तब विविध-वर्ग में महँगाई = 2Y

चूँकि पहले कारखाने द्वारा 'भोजन' तथा 'किराये' के सम्बन्ध में हुई महँगाई की पूर्णरूप से क्षतिपूर्ति कर दी गयी है। अत: श्रमिकों को 100 रु. के स्थान पर अब 282 रु. प्राप्त होने पर इस मिल का सूचकांक महँगाई के बाद निम्न होगा—

Item	*Index No.*	*W*	*W.I.*
Food	2X	55	110X
Fuel	100	15	1500
Clothing	100	10	1000
Rent	Y	8	8Y
Miscellaneous	100	12	1200
Total		ΣW = 100	ΣWI = 3700 + 110X + 8Y

$$\text{Index No.} = \frac{3700 + 110X + 8Y}{100} \quad \text{or} \quad 282 = \frac{3700 + 110X + 8Y}{100}$$

$$28200 = 3700 + 110X + 8Y \quad \text{or} \quad 110X + 8Y = 24500 \qquad ...(i)$$

नोट

दूसरी मिल द्वारा 'ईंधन' और 'विविध' वर्ग में हुई महंगाई की पूर्ण रूप से क्षतिपूर्ति की गयी है जिससे श्रमिकों को 46.5% महंगाई भत्ता देने पर उन्हें 100 रु. के स्थान पर 146.5 रु. प्राप्त हुए। इस वृद्धि के बाद सूचकांक निम्न होगा–

Item	*Index No.*	*W*	*W.I.*
Food	100	55	5500
Fuel	X	15	15X
Clothing	100	10	1000
Rent	100	8	800
Miscellaneous	2Y	12	24Y
Total		$\Sigma W = 100$	$\Sigma WI = 7300 + 15X + 24Y$

$$\text{Index No.} = \frac{7300 + 15X + 24Y}{100} \quad \text{or} \quad 146.5 = \frac{7300 + 15X + 24Y}{100}$$

$$14650 = 7300 + 15X + 24Y \quad \text{or} \quad 15X + 24Y = 7350 \qquad ...(ii)$$

दोनों समीकरणों को हल करने के लिए समी. (*i*) को 3 से गुणा करके उसमें से समी. (*ii*) को घटाने पर–

$$\begin{array}{r} 330X + 24Y = 73500 \\ 15X + 24Y = 7350 \\ - \quad - \qquad - \\ \hline 315X = 66150 \end{array} \qquad \therefore \quad \mathbf{X = 210}$$

अब X का मान समी. (*i*) में रखने पर–

$$(110 \times 210) + 8Y = 24500 \quad \text{or} \quad 8Y = 1400 \quad \therefore \quad \mathbf{Y = 175}$$

इस प्रकार विभिन्न मदों में हुई महंगाई निम्न प्रकार रही–

मद	भोजन (Food)	ईंधन (Fuel)	किराया (Rent)	विविध (Misc.)
महँगाई	2X = 210 × 2 = 420	X = 210	Y = 175	2Y = 175 × 2 = 350

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए-

1. निम्न आँकड़ो से P_{01} तथा P_{10} का आगणन कीजिए तथा बताइए कि फिशर का आर्दश सूचकांक समय-उत्क्राम्पता जाँच किस प्रकार पूरी करता है-

Year	*A Commodity*		*A Commodity*	
	Price	*Quantity*	*Price*	*Quantity*
1974	10	3	3	4
1984	20	4	15	3

2. निम्न समंको से फिशर का आदर्श सूचकांक निकालिए तथा समय उत्क्राम्यता परीक्षण एवं तत्व उत्क्राम्पता परिक्षण कीजिए-

नोट

वर्ष	चावल		गेहूँ		बाजरा	
	P	*Q*	*P*	*Q*	*P*	*Q*
2000	4	50	3	10	2	5
2005	10	40	8	8	4	4

20.2 सारांश (Summary)

- इस मापदण्ड के अनुसार सूत्र इकाई स्वातंत्र होनी चाहिए अर्थात मूल्य और मात्राएँ किसी भी इकाई में व्यक्त की जा सकती है, सरल समूही सूचकांक को छोड़कर शेष सभी सूत्र इस मापदण्ड को सतुष्ट कर सकते हैं।
- समय-उत्क्राम्यता का यह अर्थ है कि यदि आधार वर्ष पर आधारित करते हुए चालू वर्ष का सूचकांक निकाला जाये और इसी प्रकार चालू वर्ष पर आधारित, आधार वर्ष का सूचकांक निकाला जाये तो इन दोनों का गुणनफल 1 होना चाहिये
- यह परीक्षण समय-उत्क्राम्यता परीक्षण का ही एक विस्तृत रूप है। इस परीक्षण के अनुसार, सूचकांक चक्र के रूप में तैयार किये जाते हैं और उन सब का गुणनफल 1 होना चाहिए।
- वैसे, पाशे की तुलना में लास्पेयर सूत्र अधिक सरल तथा लोकप्रिय है क्योंकि इसमें भार प्रतिवर्ष बदलने नहीं पड़ते।
- फिशर का वैकल्पिक सूत्र (Alternative Formula) कहलाता है और मार्शल-एजवर्थ ने इसी का समर्थन व प्रयोग किया है।
- फिशर का सूत्र समय व तत्व उत्क्राम्यता इन दोनों परीक्षणों को सन्तुष्ट करता है। (चक्रीय परीक्षण को पूरा नहीं करता) जबकि मार्शल-एजवर्थ सूत्र केवल समय-उत्क्राम्यता परीक्षण को सन्तुष्ट करता है

20.3 शब्दकोश (Keywords)

1. **उत्क्रम्यता** : उलटाव, विपयर्य, उत्क्रमण
2. **भारित** : बोझ युक्त, ऋणयुक्त

20.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. क्या फिशर का सूचकांक समय उत्क्राम्यता तथा तत्व-उत्क्राम्यता परिक्षणों को संतुष्ट करता है? उदाहरण देकर समझाइए।
2. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए-

1. इकाई मापदण्ड	2. समय उत्क्राम्यता परीक्षण
3. तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण	4. चक्रीय परीक्षण

उत्तरः स्व-मूल्यांकन (Answer: Self-Assessment)

1. P01 = 270, P10 = 37, (2.7 × 0.37 = 1)   2. 250, 1, $\frac{480}{240}$

नोट

20.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई—21: निर्वाह-व्यय सूचकांक एवं उसका प्रयोग: सूचकांक की सीमाएँ (Cost of Living Index and its Uses: Limitation of Index Number)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांक को जानने में।
- निर्वाह-व्यय सूचकांक निर्माण के चरण की विवेचना करने में।
- पारिवारिक बजट अथवा भारित मूल्यानुपात विधि की व्याख्या करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक किसी स्थान विशेष पर वर्ग विशेष के व्यक्तियों के जीवन-निर्वाह-व्यय में होने वाले परिवर्तनों की दिशा व मात्रा को प्रकट करते हैं। यों तो जब वस्तुओं का मूल्य बढ़ता है तो सभी वर्गों के व्यक्तियों का जीवन-निर्वाह-व्यय बढ़ जाता है और जब मूल्य घटता है तब सभी का जीवन-निर्वाह-व्यय घट जाता है, परन्तु यह घट-बढ़ सभी के लिए बराबर नहीं रहती—किसी के लिए अधिक होती है और किसी के लिए कम। इसका मुख्य कारण यह है कि विभिन्न व्यक्ति विभिन्न वस्तुओं का उपभोग करते हैं और सब वस्तुओं के मूल्यों में परिवर्तन अलग-अलग होते हैं। इसलिए इसकी रचना से स्थान विशेष और वर्ग विशेष के व्यक्तियों के जीवन-निर्वाह-व्यय में हुए परिवर्तन की मात्रा का अनुमान लगाया जा सकता है।

नोट

21.1 जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांक या उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Cost of living Index Number or Consumber's Price Index Number)

निर्वाह व्यय सूचकांक को जीवन-निर्वाह सूचकांक अथवा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक अथवा फुटकर मूल्य सूचकांक (Retail Price Index Numbers) अथवा जीवन-निर्वाह लागत सूचकांक (Cost of Living Price Index Numbers) अथवा जीवनयापन सूचकांक (Price of Living Index Numbers) कहा जाता है।

किसी स्थान विशेष से सम्बन्धित किसी वर्ग विशेष के उपभोक्ताओं पर मूल्य परिवर्तनों के प्रभाव अथवा रहन-सहन के व्यय में होने वाले अन्तर का माप करने के लिए जो सूचकांक बनाये जाते हैं उन्हें निर्वाह-व्यय सूचकांक कहते हैं।

आवश्यकता एवं उद्देश्य–सामान्य मूल्य सूचकांक केवल सामान्य मूल्य-स्तर में होने वाले विचरणों की माप करते हैं और लोगों के जीवन-निर्वाह पर मूल्यों के विचरणों का प्रभाव नहीं दर्शाते हैं। अत: विभिन्न वर्गों के व्यक्तियों के जीवन-निर्वाह पर विविध वस्तुओं के मूल्यों में होने वाली वृद्धि या कमी के प्रभावों का अध्ययन करने के लिए पृथक् सूचकांकों का निर्माण करना जरूरी होता है। ये सूचकांक वर्ग विशेष के व्यक्तियों द्वारा उपभोग की जाने वाली वस्तुओं के 'फुटकर मूल्यों' में होने वाले बदलाव व उनके प्रभाव के अध्ययन के उद्देश्य से बनाये जाते हैं। इसके द्वारा यह ज्ञात करते हैं कि वर्ग विशेष के उपभोक्ताओं को वस्तुओं एवं सेवाओं की एक निश्चित मात्रा खरीदने के लिए आधार अवधि की तुलना में दी हुई अवधि में कितना अधिक या कितना कम भुगतान करना पड़ता है।

(अ) उपयोगिता (Utility)–विभिन्न दृष्टिकोणों से जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक बहुत ही उपयोगी होता है। इसकी उपयोगिता निम्न प्रकार है–

(1) **व्यय के परिवर्तन की मात्रा का अनुमान**–इसकी सहायता से उस वर्ग के व्यक्तियों के रहन-सहन के व्यय में परिवर्तन की मात्रा का अनुमान किया जा सकता है।

(2) **मूल्यों पर नियन्त्रण**–व्यय में परिवर्तन का अनुमान होने पर आवश्यकता के अनुसार मूल्यों को नियन्त्रित किया जा सकता है अर्थात् यदि अधिक है तो कम किया जा सकता है और यदि कम है तो बढ़ाया जा सकता है–

(3) **महंगाई-भत्ता, न्यूनतम वेतन, आदि का निश्चय करना**–जीवन-निर्वाह-व्यय के परिवर्तन का अनुमान करके महंगाई-भत्ता या न्यूनतम वेतन, आदि का निश्चय किया जा सकता हैं।

(4) **राशनिंग व्यवस्था चलाना**–इसी के आधार पर राशनिंग व्यवस्था चालू की जा सकती है और उचित मूल्यों की दुकानें खोली जा सकती हैं।

(ब) मान्यताएँ (Assumptions)–जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक कुछ मान्यताओं पर आधारित होते हैं जो निम्न प्रकार हैं–

(1) **आवश्यकताएँ समान**–सर्वप्रथम मान्यता यह है कि जिस वर्ग का निर्देशांक बनाया जा रहा है उसकी आवश्यकताएं समान हैं। अगर यह मानकर न चला जाये तो फिर प्रत्येक परिवार और फिर प्रत्येक व्यक्ति के जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक अलग-अलग बनेंगे।

(2) **वस्तुएँ समान**–उपभोग की जाने वाली वस्तुएं भी आधार वर्ष व चालू वर्ष में समान हैं।

(3) **वस्तुओं की समान मात्रा**–सामान्यत: यह मान्यता लेकर भी चलना पड़ता है कि आधार वर्ष और चालू वर्ष में उपभोग की जाने वाली वस्तुओं की मात्रा में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है।

(4) **विभिन्न स्थानों पर एक ही भाव**–यदि निर्देशांक विभिनन स्थानों के लिए हैं तो यह मान्यता है कि सभी स्थानों पर लगभग वही भाव हैं और उनमें कोई उल्लेखनीय अन्तर नहीं हुआ है।

(5) **औसत रूप से सत्य**–निर्देशांक प्रत्यक व्यक्ति या परिवार के लिए पूर्ण रूप से सत्य नहीं होते बल्कि औसत रूप से सत्य होते हैं।

नोट

(6) **प्रतिनिधि वस्तुएँ**—सम्मिलित की जाने वाली वस्तुएं प्रतिनिधि हैं अर्थात् उस वर्ग के लोग सामान्यतः वही वस्तुएं प्रयोग करते हैं।

(स) रचना में कठिनाइयाँ—जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक रचना में प्रायः निम्न कठिनाइयां आती हैं—

(1) **रहन-सहन के स्तर में अन्तर**—मनुष्य के रहन-सहन का स्तर आय, शिक्षा एवं पेशों के अनुसार भिन्न-भिन्न होता है इसलिए भिन्न-भिन्न आय व पेशों के लोगों के लिए भिन्न-भिन्न निर्देशांक रचना करने की आवश्यकता होती है। एक ही पेशे तथा आय के लोगों के रहन-सहन में स्थान व जलवायु के कारण भी अन्तर होना स्वाभाविक है।

(2) **मूल्यों में अन्तर**—कुछ वस्तुएं ऐसी होती हैं जिनके मूल्यों में स्थान-स्थान पर बड़ा अन्तर होता है, जैसे मकान के किराये में मुम्बई और इलाहाबाद में बहुत अन्तर है। ऐसी दशा में यदि एक स्थान का जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक बनाकर दूसरे के लिए भी लागू किया जाये तो परिणाम भ्रम उत्पन्न करेगा। फुटकर मूल्यों में भी स्थान-स्थान पर भिन्नता होती है। इसलिए प्रतिनिधि मूल्यों का संकलन भी एक कठिन प्रक्रिया होती है।

(3) **व्यय के अनुपात में अन्तर**—एक ही वर्ग के व्यक्ति एक ही समय में अपनी आयों को एक ही ढंग से व्यय नहीं करते। यह बहुत कुछ आदत, समय, रुचि और परिस्थितियों पर निर्भर करता है। इसलिए एक निर्देशांक पूरे वर्ग के लिए ठीक होगा यह सोचना ठीक नहीं।

(4) **मूल्यों में शीघ्र परिवर्तन**—प्राय: प्रयोग में लायी जाने वाली वस्तुओं के मूल्यों में बड़ी शीघ्रता से परिवर्तन होता है, इसलिए निर्देशांक ठीक स्थिति को नहीं प्रकट कर पाते।

(द) जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक की रचना के समय ध्यान रखने योग्य बातें—जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांकों की रचना में निम्न प्रमुख बातें ध्यान में रखनी आवश्यक हैं—

(1) **सजातीय वर्ग का चुनाव** (Selection of Homogeneous Group)—किसी विशेष भू-भाग में जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक की रचना का सर्वप्रथम कार्य सजातीय वर्ग का चुनाव होता है। यह कार्य कठिन है। सजातीय वर्ग का चुनाव मुख्यतः दो आधारों पर किया जाता है—

(अ) आय की समानता, (ब) पेशे की समानता।

परन्तु इसके अतिरिक्त सामान्य परिस्थितियों का अध्ययन भी आवश्यक है। सजातीय वर्ग के चुनाव में गणक का अनुभव एवं सामान्य ज्ञान का प्रमुख हाथ रहता है।

(2) **आधार वर्ष का चयन**—आधार वर्ष आर्थिक स्थिरता का समय होना चाहिए। सामान्यतः आधार समयावधि एक पूरा वर्ष ही उपयुक्त होता है क्योंकि इसमें सामयिक परिवर्तनों के उच्चावचन निष्क्रिय हो जाते हैं।

(3) **वस्तुओं का चुनाव** (Selection of Commodities)—विभिन्न वर्गों के व्यक्ति विभिन्न प्रकार की वस्तुओं का प्रयोग करते हैं। इसलिए जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक बनाने के लिए वस्तुएं वही होनी चाहिए जिनका उपभोग उस वर्ग के व्यक्ति करते हों, जिनके विषय में निर्देशांक बनाये जा रहे हैं। इसलिए पारिवारिक बजटों का सर्वेक्षण किया जाता है जिससे निम्नलिखित सूचनाएं प्राप्त होती हैं—

(*i*) वर्ग की औसत आय।

(*ii*) प्रत्येक परिवार में सदस्यों की औसत संख्या।

(*iii*) विभिन्न वस्तुओं की मात्रा।

(*iv*) विभिन्न वस्तुओं पर खर्च किया जाने वाला आय का भाग।

वस्तुओं को मुख्यतः निम्न वर्गों में बांट लेते हैं—(क) खाद्य पदार्थ, (ख) वस्त्र, (ग) ईंधन तथा प्रकाश, (घ) मकान किराया, (ङ) अन्य।

(4) **मूल्य उद्धरण** (Price Quotations)—प्रायः चुनी हुई वस्तुओं के फुटकर मूल्य प्राप्त करने पड़ते हैं। ये मूल्य उस स्थान के बाजार मूल्य होने चाहिए, जहाँ से वह वर्ग उन वस्तुओं को खरीदता है। भाव उस स्थान की

नोट

उच्च कोटि की पत्रिकाओं, सरकारी एवं अर्द्ध-सरकारी प्रकाशनों, व्यापार-परिषदों या प्रसिद्ध व्यापारियों की सहायता से प्राप्त करने चाहिए।

(5) **भार** (Weights)–वस्तुओं को उनके महत्व के अनुसार भारित करना चाहिए। सभी वस्तुएँ समान महत्व की नहीं होतीं। भार दो प्रकारों में से किसी एक ढंग से दिये जा सकते हैं–

(क) **आधार वर्ष में प्रत्येक वस्तु पर किये गये व्यय के अनुपात में**–इस रीति में आधार वर्ष में उपभोग की गयी **वस्तु की मात्रा** के अनुसार भार दिया जाता है।

(ख) **आधार वर्ष में प्रत्येक वस्तु पर किये गये व्यय के अनुपात में**–इस रीति में आधार वर्ष में उपभोग की गयी **वस्तु के मूल्य** के अनुसार भार दिया जाता है।

रचना में कठिनाइयाँ (Difficulties in Construction)–निर्वाह-व्यय सूचकांक की रचना कोई सरल कार्य नहीं है। इसकी रचना में निम्न कठिनाइयाँ होती हैं–

(1) जीवन-स्तर में अन्तर के कारण सभी वर्गों व स्थानों के लिए सर्वमान्य निर्वाह-व्यय सूचकांक तैयार नहीं किया जा सकता।

(2) किसी भी वर्ग विशेष के सभी उपभोक्ता एक ही समय या विभिन्न अवधियों में वस्तुओं पर एक समान अनुपात में व्यय नहीं करते हैं।

(3) **उपभोग की वस्तुओं में अन्तर**–उपभोग वस्तुओं की किस्म व मात्रा में भी समय तथा मूल्य परिवर्तनों के साथ-साथ अंतर होते रहते हैं जिसके कारण इन सूचकांकों में तुलनीयता का अभाव बना रहता है।

(4) **फुटकर मूल्यों में अन्तर**–निर्वाह-व्यय सूचकांक वस्तुओं के फुटकर मूल्यों पर आधारित होते हैं क्योंकि फुटकर मूल्य विभिन्न स्थानों पर अलग-अलग होते हैं।

नोट्स वह निर्देशांक (या सूचकांक) जो कीमतों के परिवर्तनों का उपभोक्ताओं पर पड़ने वाले प्रभाव का आकलन करता है, उपभोक्ता कीमत निर्देशांक कहलाता है।

21.2 निर्वाह-व्यय सूचकांक निर्माण के चरण (Stages of Construction of cost of Living Index Numbers)

इसके निम्न चरण हैं–

1. **वर्ग का निर्धारण**–सबसे पहले यह तय कर लेना चाहिए कि उपभोक्ता मूल्य सूचकांक किस वर्ग विशेष के लिए बनाया जायेगा।
2. **पारिवारिक बजट अनुसन्धान**–अब उस वर्ग में से दैव प्रतिचयन के अनुसार कुछ परिवार छाँटकर उनके पारिवारिक बजट ज्ञात करते हैं जिससे उनकी आय-व्यय की मदें, वस्तुओं की मात्रा, मूल्य परिवार के आकार आदि का पता चल जाये। इसमें पाँच श्रेणियाँ होती हैं–(1) खाद्य सामग्री, (2) वस्त्र, (3) ईंधन व प्रकाश, (4) मकान का किराया, (5) विविध व्यय।
3. **मूल्य उद्धरण प्राप्त करना**–चुनी हुई वस्तुओं के उन स्थानों के विश्वस्त सूत्रों से फुटकर मूल्य ज्ञात किये जाते हैं जहाँ से उस वर्ग के व्यक्ति उन्हें खरीदते हैं।
4. **मूल्यों का औसत**–संकलन के बाद प्रत्येक वस्तु मद का औसत मूल्य ज्ञात कर लेना चाहिए।
5. **भारांकन**–उपभोग की जाने वाली विभिन्न वस्तुओं का अलग-अलग सापेक्षिक महत्व स्पष्ट करने के लिए उन्हें तर्कसंगत रीति द्वारा भारित किया जाता है। भार दो प्रकार से दिया जा सकता है–(A) आधार वर्ष में

उपभोग की गयी वस्तु की मात्रा (q_0) के अनुपात में, (B) आधार वर्ष में प्रत्येक वस्तु पर किये जाने वाले व्यय के मूल्य (W या P_0q_0) के अनुपात में।

टास्क पारिवारिक बजट किसे कहते हैं?

जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक निकालने की समस्त व्यय विधि

(Aggregative Expenditure Method for Construction of Cost of Living Index Number)

इस विधि के अन्तर्गत आधार वर्ष में उपभोग की गयी वस्तुओं की मात्राओं को भार के रूप में प्रयोग करते हैं। इसमें निम्न क्रियाएं करनी होती हैं–

(*i*) प्रत्येक वस्तु के चालू वर्ष के मूल्य में आधार वर्ष की मात्रा का गुणा करते हैं अर्थात् (P_1q_0)।

(*ii*) प्रत्येक वस्तु के आधार वर्ष के मूल्य में आधार वर्ष की मात्रा का गुणा करते हैं अर्थात् (P_0q_0)।

(*iii*) दोनों वर्षों के गुणनफलों को अलग-अलग जोड़ लेते हैं अर्थात् ΣP_1q_0 एवं ΣP_0q_0)।

(*iv*) चालू वर्ष के गुणनफलों के योग में आधार वर्ष के गुणनफलों के योग का भाग देते हैं।

(*v*) प्राप्त भजनफल में 100 का गुणा कर देते हैं।

इसका सूत्र निम्न है–

$$\text{निर्देशांक},\quad P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

जहाँ, p_1q_0 = Price of the Current year × Quantity of the Base year (चालू वर्ष का मूल्य × आधार वर्ष की मात्रा)

p_0q_0 = Price of the Base year × Quantity of the Base year (आधार वर्ष का मूल्य × आधार वर्ष की मात्रा)

उदाहरण (Illustration) 1

अग्रलिखित आंकड़ों से समस्त व्यय विधि द्वारा 1990 को आधार वर्ष मानकर वर्ष 1997 के लिए जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक ज्ञात कीजिए–

वस्तु (Commodity)	1990		1997
	मात्रा इकाई में (Quantity in Units)	**कीमत प्रति इकाई** (Price per Unit)	**कीमत प्रति इकाई** (Price per Unit)
1	100	8.00	12.00
2	25	6.00	7.50
3	10	5.00	5.25
4	20	48.00	52.00
5	65	15.00	16.50
6	30	19.00	27.00

नोट

हल (Solution)

वस्तु	आधार वर्ष (1990)		चालू वर्ष (1997)	p_1q_0	p_0q_0
	q_0	p_0	p_1		
1	100	8.00	12.00	1,200.00	800.00
2	25	6.00	7.50	187.50	150.00
3	10	5.00	5.25	52.50	50.00
4	20	48.00	52.00	1,040.00	960.00
5	65	15.00	16.50	1,072.50	975.00
6	30	19.00	27.00	810.00	570.00
योग				4,362.50	3,505.00

$$\text{अभीष्ट निर्देशांक} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{4{,}362.50}{3{,}505.00} \times 100 = 124.47$$

उदाहरण (Illustration) 2: 1994 को आधार मानकर निम्नलिखित आंकड़ों से वर्ष 1995 के उपभोक्ता मूल्य सूचकांक को तैयार कीजिए :

वर्ग	भार	कीमत रुपयों में (Price in Rupees)	
(Group)	(Weight)	1994	1995
A	5	40.0	48.0
B	4	2.5	3.0
C	3	10.0	15.0
D	2	4.0	6.0
E	2	20.0	25.0

हल (Solution)

सामान्य संकेतन में,

वर्ग	भार	1994	1995	p_0q_0	p_1q_0
	q_0	p_0	p_1		
A	5	40.0	48.0	200.0	240.0
B	4	2.5	3.0	10.0	12.0
C	3	10.0	15.0	30.0	45.0
D	2	4.0	6.0	8.0	12.0
E	2	20.0	25.0	20.0	25.0
योग				268.0	334.0

$$\text{1995 का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{334.0}{268.0} \times 100 = 124.63$$

उदाहरण (Illustration) 3: समस्त व्यय निर्देशांक विधि से जीवन-निर्वाह-व्यय की रचना निम्न समंकों की सहायता से कीजिए :

नोट

वस्तु (Articles)	आधार वर्ष में उपभोग की गई वस्तुओं की मात्रा (Quantity Consumed in Base Year)	इकाई (Unit)	मूल्य प्रति इकाई (Price per Unit)	
			आधार वर्ष (Base Year) 1972	चालू वर्ष (Current Year) 1988
गेहूँ (Wheat)	4 क्विण्टल (Quintals)	क्विण्टल (Qtl.)	50	120
चावल (Rice)	1 ”	”	80	200
चना (Gram)	1 ”	”	40	100
दालें (Pulses)	2 ”	”	80	200
घी (Ghee)	50 किलोग्राम (Kilogram)	किलोग्राम (kg.)	10	20
चीनी (Sugar)	50 ”	”	1	3
जलाऊ लकड़ी (Fire Wood)	5 क्विण्टल (Quintals)	क्विण्टल (Qtl.)	10	25
मकान किराया (House Rent)	1 मकान (House)	मकान (House)	50	100

हल (Solution)

वस्तुएँ	q_0	p_0	p_1	p_1q_0	p_0q_0
गेहूँ	4	50	120	200	480
चावल	1	80	200	80	200
चना	1	40	100	40	100
दालें	2	80	200	160	400
घी	50	10	20	500	1,000
चीनी	50	1	3	50	150
जलाऊ लकड़ी	5	10	25	50	125
मकान किराया	1	50	100	50	100
योग				Σp_0q_0 = 1,130	Σp_1q_0 = 2,555

$$\text{निर्देशांक, } P_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{2,555}{1,130} \times 100 = 226.1$$

उदाहरण (Illustration) 4: वर्ष 1990 को आधार वर्ष मानकर 1991 तथा 1992 के लिए भारित समूही रीति द्वारा जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक निर्मित कीजिए :

नोट

समूह (Group)	इकाई (Unit) Base Year)	1990 में उपभोग की गई मात्रा (Qty. consumed) in 1990	मूल्य प्रति इकाई (Price per Unit)		
			1990	1991	1992
खाद्य पदार्थ (Foodgrains)	प्रति 40 किग्रा (per 40 kgs.)	6	16.00	18.00	20.00
कपड़ा (Clothing)	प्रति मीटर (per metre)	4	2.00	1.80	2.20
ईंधन (Fuel)	प्रति 40 किग्रा (per 40 kgs.)	2	4.00	5.00	5.50
विद्युत् (Electricity)	प्रति ईकाई (per unit)	2	0.20	0.25	0.25
मकान किराया (House Rent)	प्रति मकान (per House)	4	10.00	12.00	15.00
विविध (Miscellaneous)	प्रति इकाई (per unit)	2	0.50	0.60	0.75

हल (Solution)

वस्तुएं	q_0	1990 p_0	1991 p_1	1992 p_2	p_0q_0	p_1q_0	p_2q_0
खाद्य पदार्थ	6	16.00	18.00	20.00	96.00	108.00	120.00
कपड़ा	4	2.00	1.90	2.20	8.00	7.20	8.80
ईंधन	2	4.00	5.00	5.50	8.00	10.00	11.00
विद्युत्	2	0.20	0.25	0.25	0.40	0.50	0.50
मकान किराया	4	10.00	12.00	15.00	40.00	48.00	60.00
विविध	2	0.50	0.60	0.75	1.00	1.20	1.50
योग					153.40	174.90	201.80

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{174.90}{153.40} \times 100 = 114.02$$

$$P_{02} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{201.80}{153.40} \times 100 = 131.55$$

21.3 पारिवारिक बजट (Family Budget)

इस विधि में मूल्यानुपातों का साधारण माध्य नहीं निकाला जाता वरन् उचित भारांकन विधि द्वारा भारित माध्य निकालते हैं। इस विधि के अन्तर्गत निर्देशांक निकालने के लिए निम्नलिखित क्रियाएँ करनी होती हैं :

(1) प्रत्येक वस्तु के मूल्य का मूल्यानुपात निकालते हैं $\left(l \text{ या } R = \frac{p_1}{p_0} \times 100\right)$।

नोट

(2) प्रत्येक वस्तु के आधार वर्ष के मूल्य और आधार वर्ष में उपभोग की गयी मात्रा का गुणा करते हैं। यही गुणनफल प्रत्येक वस्तु के लिए भार मान लिया जाता है (W या $V = p_0q_0$)।

(3) प्रत्येक मूल्यानुपात को उसके भार से गुणा करते हैं (R × W या I × V)।

(4) इन गुणनफलों को जोड़ लेते हैं (ΣRW या ΣIV)।

(5) भारों का योग निकाल लेते हैं (ΣW या ΣV)।

(6) गुणनफलों के योग में भारों के योग का भाग दे देते हैं $\left(\frac{\Sigma RW}{\Sigma W} \text{ या } \frac{\Sigma IV}{\Sigma V}\right)$।

प्राप्त भजनफल निर्देशांक होता है। इस प्रकार,

$$\text{निर्देशांक (Index Number)} = \frac{\Sigma RW}{\Sigma W} \text{ अथवा } \frac{\Sigma IV}{\Sigma V}$$

पारिवारिक बजट विधि तथा समस्त व्यय विधि से निकाले गये निर्देशांकों के मान समान होते हैं। क्योंकि गणितीय रूप में दोनों सूत्र एक ही हैं :

$$\frac{\Sigma RW}{\Sigma W} = \frac{\Sigma \frac{p_1}{p_0} \times 100(p_1q_0)}{\Sigma p_0q_0} = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

उदाहरण (Illustration) 5: पारिवारिक बजट विधि का प्रयोग करते हुए तथा 1990 को आधार वर्ष मानकर अग्र आंकड़ों से वर्ष 1995 के लिए जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक का रचना कीजिए :

वस्तु (Commodity)	**मात्रा इकाई में** (Quantity in Units)	**कीमत प्रति इकाई** (रु. में) [Price per Units (in Rs.)]	
	1990	1990	1995
A	50	6	10
B	100	2	2
C	60	4	6
D	30	10	12
E	60	8	12

हल (Solution)

वस्तु	1990		1995	$V = p_0q_0$	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	IV
	q_0	p_0	p_1			
A	50	6	10	300	167	50,100
B	100	2	2	200	100	20,000
C	60	4	6	240	150	36,000
D	30	10	12	300	120	36,000
E	60	8	12	320	150	48,000
योग				1,360		1,90,100

$$\text{अभीष्ट निर्देशांक, } p = \frac{\Sigma IV}{\Sigma V} = \frac{1,90,100}{1,360} = 139.78$$

नोट

उदाहरण (Illustration) 6: निम्नलिखित तालिका से वर्ष 1994 का जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक 1993 को आधार वर्ष मानकर मालूम कीजिए (पारिवारिक बजट विधि से) :

	1993		1994
मद (Items)	**मात्रा** (Quantity)	**कीमत** (Price)	**कीमत** (Price)
चावल (Rice)	20 किग्रा (kg.)	1.00	2.00
गेहूं (Wheat)	50 ″	0.60	1.10
तेल (Oil)	10 ″	2.00	4.00
घी (Ghee)	0.5 ″	8.00	15.00
शक्कर (Sugar)	5 ″	1.00	1.80
कपड़ा (Clothing)	40 मीटर (metre)	2.00	3.75
मकान भाड़ा (House Rent)	एक मकान (One House)	40.00	75.00

हल (Solution)

सामान्य संकेतन में,

मद	1993		1994	$V = p_0q_0$	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	IV
	q_0	p_0	p_1			
चावल	20	1.00	2.00	20.00	200.00	4,000.00
गेहूं	50	0.60	1.10	30.00	183.33	5,499.90
तेल	10	2.00	4.00	20.00	200.00	4,000.00
घी	0.5	8.00	15.00	4.00	187.50	750.00
शक्कर	5	1.00	1.80	5.00	180.00	900.00
कपड़ा	40	2.00	3.75	80.00	187.50	15,000.00
मकान	1	40.00	75.00	40.00	187.50	7,500.00
योग				$\Sigma V =$ 199.00		$\Sigma IV =$ 37,649.90

$$1994 \text{ का निर्देशांक } = \frac{\Sigma IV}{\Sigma V} = \frac{37,649.90}{199.00} = 189.19$$

उदाहरण (Illustration) 7: निम्न आंकड़ों से 1991 को आधार मानकर 1992 के लिए उपभोक्ता कीमत निर्देशांक—(*i*) समस्त व्यय विधि द्वारा तथा (*ii*) पारिवारिक बजट विधि द्वारा ज्ञात कीजिए :

वस्तु (Commodity)	**मात्रा** (Quantity) 1991	**इकाई** (Unit)	**कीमत** (Price) 1991	**कीमत** (Price) 1992
A	6 कुन्तल (Qtl.)	कुन्तल (Qtl.)	5.75	6.00
B	6 कुन्तल (Qtl.)	कुन्तल (Qtl.)	5.00	8.00
C	1 कुन्तल (Qtl.)	कुन्तल (Qtl.)	6.00	9.00
D	6 कुन्तल (Qtl.)	कुन्तल (Qtl.)	8.00	10.00
E	4 किग्रा. (kg.)	किग्रा. (kg.)	1.80	1.50
F	1 कुन्तल (Qtl.)	कुन्तल (Qtl.)	3.75	15.00

नोट

हल (Solution)

वस्तु	**मात्रा** q_0	**इकाई** p_0	1991 p_1	1992	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	$V = p_0 q_0$	$p_1 q_0$	IV
A	6 Q	Q	5.75	6.00	104	34.50	36.00	3,588
B	6 Q	Q	5.00	8.00	160	30.00	48.00	4,800
C	1 Q	Q	6.00	9.00	150	6.00	9.00	900
D	6 Q	Q	8.00	10.00	125	48.00	60.00	6,000
E	4 kg	kg	1.80	1.50	75	8.00	6.00	600
F	1 Q	Q	3.75	15.00	75	20.00	15.00	1,500
योग						146.50	174.00	17,388

(*i*) समस्त व्यय विधि द्वारा :

$$\text{निर्देशांक} = \frac{\Sigma p_1 p_0}{\Sigma p_0 p_0} \times 100 = \frac{174.00}{146.50} \times 100 = 118.77$$

(*ii*) समस्त व्यय विधि द्वारा :

$$\text{निर्देशांक} = \frac{\Sigma IV}{\Sigma V} = \frac{17,388}{146.50} = 118.69$$

टिप्पणी—दोनों परिणामों का बहुत थोड़ा अन्तर गणना में उपसादन के कारण है।

उदाहरण (Illustration) 8: किसी शहर में एक मध्यवर्गीय परिवार के बजट के सम्बन्ध में निम्न सूचनाएँ प्राप्त हुईं :

मद (Items)	**व्यय का प्रतिशत** (Percentage Exp.)	**कीमत** (Price) 1985	1992
खाद्य पदार्थ (Food)	29%	140	147
किराया (Rent)	15%	30	30
कपड़ा (Clothing)	25%	75	66
ईंधन (Fuel)	10%	25	20
विविध (Misc.)	21%	40	52

1985 की तुलना में 1992 के जीवन-निर्वाह-व्यय आंकड़ों में क्या परिवर्तन दिखाई देते हैं?

हल (Solution): प्रतिशत व्यय को भार (V) मानें जहाँ $\Sigma V = 29 + 15 + 25 + 10 + 21 = 100$

मद	1985 p_0	1992 p_1	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	**भार** V	IV
खाद्य पदार्थ	140	147	105	29	3,045
किराया	30	30	100	15	1,500
कपड़ा	75	66	88	25	2,200
ईंधन	25	20	80	10	800
विविध	40	52	13	21	273
योग				100	7,818

नोट

$$\text{जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक} = \frac{\Sigma IV}{\Sigma V} = \frac{7{,}818}{100} = 78.18$$

अतः 100 – 78.18 = 21.82

⇒ जीवन निर्वाह-व्यय आंकड़ों में 21.82 प्रतिशत की कमी आ गयी।

उदाहरण (Illustration) 9: एक औसत भारतीय मजदूर के पारिवारिक बजट से सम्बन्धित समूह निर्देशांक तथा उनके भार निम्न सारणी में दर्शाये गये हैं। भारित निर्देशांक निकालिए :

मद (Groups)	**निर्देशांक** (Index No.)	**भार** (Weight)
खाद्य पदार्थ (Food)	350	48
ईंधन एवं रोशनी (Fuel and Lighting)	220	10
कपड़ा (Clothing)	230	8
किराया (Rent)	160	12
विविध (Misc.)	190	22

हल (Solution)

वर्ग	**निर्देशांक**, I	**भार**, W	IW
खाद्य पदार्थ	350	48	16,800
ईंधन एवं रोशनी	220	10	2,200
कपड़ा	230	8	1,840
किराया	160	12	1,920
विविध	190	22	4,180
योग		ΣW = 100	ΣIW = 26,940

$$\text{जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक} = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W} = \frac{26{,}940}{100} = 269.4$$

विभिन्न समूहों के सूचकांक संगत भार के साथ दिए होने पर जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक ज्ञात करना

(To Find cost of Living Index Numbers when Index Numbers of various groups are known with their weights)

माना I = समूह निर्देशांक,

V या W = समूह के संगत भार

तब समान्तर माध्य का प्रयोग करते हुए, जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक

$$P_{01} = \frac{\Sigma IV}{\Sigma V} \text{ या } \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$$

टिप्पणी–(1) यदि गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाये तो

$$P_{01} = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma W \log l}{\Sigma W}\right]$$

(2) जब कीमतें p_0, p_1 तथा भार W दिये होते हैं तो पहले हम

$$R \text{ या } I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

नोट

की गणना करते हैं तथा फिर $P_{01} = \dfrac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

उदाहरण (Illustration) 10: विभिन्न समूहों की 1995 की तुलना में 1996 की कीमतों में प्रतिशत वृद्धि के आंकड़े तथा संगत भार निम्न तालिका में दर्शाये गये हैं। 1996 के जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक परिकलित कीजिए।

समूह (Groups)	**प्रतिशत वृद्धि** (Percentage increase)	**भार** (Weight)
A	125	52
B	75	8
C	55	10
D	150	14
E	50	16

हल (Solution)

समूह	**सूचकांक,** I 1995 = 100	**भार,** W	IW
A	100 + 125 = 225	52	11,700
B	100 + 75 = 175	8	1,400
C	100 + 55 = 155	10	1,550
D	100 + 150 = 250	14	3,500
E	100 + 50 = 150	16	2,400
योग		$\Sigma W = 100$	$\Sigma IW = 26,940$

अभीष्ट निर्देशांक, $P_{01} = \dfrac{\Sigma IW}{\Sigma W} = \dfrac{20,550}{100} = 205.5$

उदाहरण (Illustration) 11: दिल्ली के एक मध्यवर्गीय परिवार के बजट के सम्बन्ध में निम्न सूचना ज्ञात है :

	खाद्य पदार्थ (Food)	**किराया** (Rent)	**कपड़ा** (Clothing)	**ईंधन** (Fuel)	**विविध** (Misc.)
व्यय (Expenses on)	40%	20%	15%	10%	15%
कीमतें (Prices) 1992	100	40	60	20	50
कीमतें (Prices) 1994	150	60	75	25	80

1992 की तुलना में 1994 के जीवन-निर्वाह-व्यय आंकड़ों में क्या परिवर्तन दिखाई देता है?

हल (Solution)

सामान्य संकेतन में, यहां प्रतिशतों को भार (V) माना जायेगा जिनका योग 100 होगा।

वस्तु	1992 (p_0)	1994 (p_1)	*I*	**भार,** V	IV
खाद्य पदार्थ	100	150	150	40	6,000
किराया	40	60	150	20	3,000
कपड़ा	60	75	125	15	1,875
ईंधन	20	25	125	10	1,250
विविध	50	80	160	15	2,400
योग				SV = 100	SIV = 14,525

नोट

$$1994 \text{ का सूचकांक } = \frac{\Sigma IV}{\Sigma V} = \frac{14{,}525}{100} = 145.25$$

1992 की तुलना में 1994 में 45.25% की वृद्धि हुई है।

उदाहरण (Illustration) 12: इन्दौर में रहने वाला जूता-कारीगर 450 रुपये प्रतिमाह अर्जित करता है। किसी विशेष माह का जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांक 140 है। निम्न आंकड़ों से यह ज्ञात कीजिए कि वह खाद्य पदार्थों तथा कपड़े पर कितना व्यय करता है?

समूह (Groups)	**भोजन** (Food)	**कपड़े** (Clothing)	**मकान किराया** (House Rent)	**ईंधन तथा प्रकाश** (Fuel and Light)	**विविध** (Misc.)
व्यय (रुपये) [Expenditure (Rs.)]	?	?	100	60	90
समूह सूचकांक (Group Index)	150	120	150	115	140

हल (Solution)

माना भोजन तथा कपड़े पर व्यय क्रमशः a तथा b है।

गणना तालिका

समूह	**समूह निर्देशांक** I	**व्यय** (रुपये) W	IW
भोजन	150	a	$150\ a$
कपड़ा	120	b	$120\ b$
मकान किराया	150	100	15,000
ईंधन तथा प्रकाश	115	60	6,900
विविध	140	90	12,600
योग		$\Sigma W = 250 + a + b$	$\Sigma IW = 34{,}000 + 150a + 120b$

प्रश्न में दी हुई सूचना के अनुसार,

$$\Sigma W = \text{कुल व्यय} = 250 + a + b = 450$$

$$\text{निर्देशांक} = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W} = \frac{34{,}500 + 150a + 120b}{450} = 140$$

$\Rightarrow$ $a + b = 450 - 250 = 200$

$150a + 120b = 28{,}500$ या $5a + 4b = 950,$ (30 से भाग देने पर)

अब समीकरण $a + b = 200$ ...(1)

तथा $5a + 4b = 950$ ...(2)

को हल करने के लिए, समीकरण (1) को 5 से गुणा करने पर,

$5a + 5b = 1{,}000$ ...(3)

समीकरण (3) में से (2) को घटाने पर,

$b = 50$

नोट

b के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$a = 200 - b = 200 - 50 = 150$$

खाद्य पदार्थ पर व्यय = 150 रु. रुपये पर व्यय = 50 रु.

उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों में विभ्रम (Errors in Consumer Price Indices)—निर्वाह-व्यय सूचकांकों में निम्न विभ्रम पाये जाते हैं—

(1) जिस वर्ग के लिए यह सूचकांक बनाया जा रहा है उस वर्ग के व्यक्तियों के वर्गीकरण में विभ्रम हो जाते हैं।

(2) वस्तुओं के चुनाव में अशुद्धि होने की सम्भावना रहती है।

(3) वस्तुओं की विविध किस्मों के कारण प्रतिनिधि मूल्य उद्धरण के छाँटने में गलती रह जाती है।

(4) अशुद्ध भारों के प्रयोग से भारांकन सम्बन्धी विभ्रम उत्पन्न हो जाते हैं।

(5) ये विभ्रम उपयोग्य वस्तुओं की माँग, मात्रा व मूल्य में उतार-चढ़ाव के कारण होते हैं।

21.4 सूचकांकों की सीमाएँ (Limitations of Index Numbers)

निर्वाह व्यय सूचकांक किसी वर्ग के जीवन-निर्वाह में होने वाले परिवर्तनों के सामान्य अनुमान मात्र होते हैं। उनमें निम्न विभ्रम पाये जाते हैं—

(1) जिस वर्ग के लिए यह सूचकांक बनाया जा रहा है उस वर्ग के व्यक्तियों के वर्गीकरण में विभ्रम हो जाते हैं।

(2) वस्तुओं के चुनाव में अशुद्ध होने की सम्भावना रहती है।

(3) वस्तुओं की विविध किस्मों के कारण प्रतिनिधि मूल्य उद्धरणों के छाँटने से गलती रह सकती है। इसके अतिरिक्त, फुटकर मूल्यों में भिन्न-भिन्न स्थानों व दुकानों पर अन्तर होते हैं।

(4) भारांकन में भी विभ्रम की सम्भावना रहती है।

(5) वस्तुओं की माँग, उनके उपयोग की मात्रा व उनके मूल्यों में अत्यधिक परिवर्तन होने के कारण सूचकांक त्रुटिपूर्ण हो जाता है।

इन विभ्रमों को दूर करने के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों की रचना सावधानी से करनी चाहिए। समय-समय पर पारिवारिक बजट अनुसन्धान करके इन सूचकांकों की मान्यताओं में होने वाले परिवर्तनों का विश्लेषण करते रहना आवश्यक है।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. निम्नलिखित में सूचकांक ज्ञात कीजिए—

1. 1994 को आधार वर्ष मानकर 1995 के लिए जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांक ज्ञात कीजिए :

वस्तुएं (Commodity)	उपभोग की गई मात्रा किग्रा में (Quantity Consumed in kg.) 1994	इकाई (Unit)	मूल्य प्रति इकाई (Price Per Unit)	
			1994	1995
गेहूं (Wheat)	20	किग्रा (kg.)	1.25	1.75
चावल (Rice)	10	″	3.50	4.50
चना (Gram)	9	″	0.80	1.25
दालें (Pulses)	8	किग्रा (kg.)	2.50	5.00
घी (Ghee)	2	″	12.50	14.00
शक्कर (Sugar)	10	″	1.50	4.00
किराया (Rent)	–	″	40.00	75.00

नोट

2. समस्त व्यय विधि द्वारा नीचे दिये गये आंकड़ों से जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक परिकलित कीजिए :

मद (Items)	आधार वर्ष (Base year)		चालू वर्ष (Current year)
	कीमत (रु.) [Price (Rs.)]	व्यय (रु.) [Expenditure (Rs.)]	कीमत (रु.) [Price (Rs.)]
A	200	100	250
B	300	30	500
C	15	45	17
D	140	140	150
E	50	600	80
F	50	600	100

3. निम्न समंकों से वर्ष 1993 का जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक तैयार कीजिए :

वस्तुएं	1990	1993	
(Commodities)	मात्रा (Quality)	कीमत (Price)	कीमत (Price)
A	16.0	25	35
B	7.0	36	48
C	3.5	12	16
D	2.5	6	10
E	4.0	28	28

4. निम्न आंकड़ों से जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक 1993 ज्ञात कीजिए :

वस्तु (Items)	वर्ष 1991 के 12 माह में उपभोग की गई मात्रा (Quantity consumed in 12 months in the year 1991)	कीमत प्रति इकाई (Price per unit)	
		1991	1993
चावल (Rice)	12 × 2½ कुन्तल (Q)	12	25
दालें (Pulses)	12 × 3 किग्रा (kg.)	0.4	0.6
तेल (Oil)	12 × 3 किग्रा (kg.)	1.5	2.2
कपड़ा (Clothing)	12 × 6 मीटर (m)	0.75	1.0
मकान (House)	–	प्रति माह 20 (20 per month)	प्रति माह 30 (30 per month)
विविध (Misc.)	–	प्रति माह 10 (10 per month)	प्रति माह 15 (15 per month)

5. अग्र जानकारी के समस्त व्यय विधि द्वारा 1990 को आधार वर्ष मानकर वर्ष 1996 के लिए जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक परिकलित कीजिए :

नोट

वस्तु (Articles)	**उपभोग की गई मात्रा** (Quantity Consumed) 1990	**कीमत** (रु.) [Price (Rs.)]		
		इकाई (Unit)	1990	1996
गेहूं (Wheat)	2 क्विण्टल (Quintals)	क्विण्टल (Qtl.)	50	75
चावल (Rice)	25 किग्रा (Kilogram)	किग्रा (kg)	100	120
चीनी (Sugar)	10 ″	″	80	120
घी (Ghee)	5 ″	″	10	10
डालडा (Dalda)	5 ″	″	3	5
तेल (Oil)	25 ″	″	200	200
कपड़ा (Clothing)	25 मीटर (Metre)	मीटर (Metre)	4	5
ईंधन (Fuel)	4 क्विण्टल (Quintals)	क्विण्टल (Qtl.)	8	10
किराया (Rent)	1 मकान (House)	एक (One)	20	25

6. पारिवारिक बजट विधि द्वारा 1994 को आधार मानकर वर्ष मानकर निम्नलिखित सामग्री से 1995 का जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांक ज्ञात कीजिए :

मद (Articles)	**उपभोग की गई मात्रा**	**इकाई**	**कीमत** (Price)	
	(Quantity Consumed) 1994	(Unit)	1994	1995
गेहूं (Wheat)	2 क्विण्टल (Quintals)	क्विण्टल (Qtl.)	75	125
चावल (Rice)	25 किग्रा (Kilogram)	किग्रा (kg)	12	16
शक्कर (Sugar)	10 ″	″	12	16
घी (Ghee)	5 ″	″	12	15
कपड़ा (Clothing)	25 मीटर (Metre)	मीटर (Metre)	4.5	5
ईंधन (Fuel)	50 लीटर (Litres)	लीटर (Litre)	10	12
किराया (Rent)	1 मकान (House)	एक (One)	25	40

7. निम्न आंकड़ों से 1991 के लिए 1990 को आधार मानकर पारिवारिक बजट विधि से जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक की रचना कीजिए :

वस्तुएं (Articles)	**उपभोग की गई मात्रा** (Quantity Consumed) 1990	**इकाई** (Unit)	**कीमत** (रु.) [Price (Rs.)]	
			1990	1991
गेहूं (Wheat)	5 क्विण्टल (Quintals)	क्विण्टल (Qtl.)	100	120
बाजरा (Bajra)	2 ″	″	50	175
ज्वार (Jowar)	1 ″	″	60	90
मूंग (Moong)	1 ″	″	100	140
घी (Ghee)	10 किग्रा (kg.)	किग्रा (kg.)	500	650
गुड़ (Gur)	40 ″	″	80	160
चीनी (Sugar)	50 ″	″	200	340
नमक (Salt)	10 ″	″	5	16
ईंधन (Fuel)	5 क्विण्टल (Quintals)	क्विण्टल (Qtl.)	10	6
किराया (Rent)	1 मकान (House)	एक (One)	50	80

नोट

8. निम्न आंकड़ों से (*i*) समस्त व्यय विधि तथा (*ii*) पारिवारिक बजट विधि द्वारा 1994 को आधार मानकर 1997 के लिए उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना कीजिए :

वस्तु (Commodities)	**उपभोग की गयी मात्रा** (Quantity Consumed) 1994	**कीमत** (Price)	
		1994	1997
A	6	6	7
B	6	5	5
C	1	7	8
D	6	8	9
E	4	2	4
F	1	20	20

9. मुम्बई के एक मध्यवर्गीय परिवारों के बजट-सर्वेक्षण से निम्नलिखित सूचना प्राप्त हुई :

	भोजन (Food)	**किराया** (Rent)	**कपड़े** (Clothing)	**ईंधन** (Fuel)	**विविध** (Misc.)
व्यय (Expesnses)	35%	15%	20%	10%	20%
कीमत 1993	150	50	100	20	60
(Price) 1994	174	60	125	25	90

1993 के सापेक्ष 1994 के जीवन-निर्वाह-व्यय आंकड़ों में क्या परिवर्तन हुआ?

10. किसी शहर के एक मध्यमवर्गीय परिवारों के बजट-सर्वेक्षण से निम्नलिखित सूचना प्राप्त हुई :

व्यय (Expesnses)	**खाद्य पदार्थ** (Food)	**किराया** (Rent)	**कपड़ा** (Clothing)	**ईंधन** (Fuel)	**विविध** (Misc.)
कीमत 1992	300	100	100	40	120
(Price) 1993	500	20	300	80	220

1992 के सापेक्ष 1993 के जीवन-निर्वाह-व्यय आंकड़ों में क्या परिवर्तन हुआ?

11. कुछ निश्चित परिवारों के बजट-सर्वेक्षण से प्राप्त सूचना निम्न प्रकार है। 1992 को आधार वर्ष मानकर 1997 का जीवन-निर्वाह व्यय निर्देशांक परिकलित कीजिए :

	खाद्य पदार्थ (Food)	**किराया** (Rent)	**कपड़ा** (Clothing)	**ईंधन** (Fuel)	**विविध** (Misc.)
व्यय (Expesnses) %	30	13	17	20	20
कीमत 1992	600	300	250	300	400
(Price) 1997	700	300	300	400	500

12. भारत में किसी नगर के मध्यमवर्गीय परिवारों के बजट-सर्वेक्षण से निम्नलिखित सूचना प्राप्त हुई :

	खाद्य पदार्थ (Food)	**किराया** (Rent)	**कपड़ा** (Clothing)	**किराया** (Rent)	**विविध** (Misc.)
व्यय (Expesnses)	35%	10%	20%	15%	20%
कीमत 1993	150	25	75	30	40
(Price) 1994	145	23	65	30	45

1993 के सापेक्ष 1994 का जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक कितना है?

नोट

13. किसी नगर में कर्मचारियों के वर्ग से सम्बन्धित आंकड़ों से अवधि A को आधार मानकर अवधि B का निर्देशांक समूह निर्देशांकों के भारित माध्य का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए :

समूह (Groups)	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
व्यय (Expenses)	40	25	5	20	10
कीमत अवधि (Period) A	1,600	4,000	50	512	200
(Price) **अवधि** (Period) B	2,000	6,000	50	625	15

14. निम्न आंकड़ों से मूल्यानुपातों का भारित माध्य विधि का प्रयोग करते हुए वर्ष 1994 को आधार मानकर वर्ष 1995 तथा 1996 का जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

समूह (Groups)	**भार** (Weight)	**कीमत** (Price)		
		1994	1995	1996
खाद्य पदार्थ (Food)	9	240	300	336
कपड़ा (Clothing)	6	15	48	24
ईंधन एवं प्रकाश (Fuel and Light)	3	30	36	45
किराया (Rent)	3	150	210	180
स्वास्थ्य एवं शिक्षा (Health Education)	6	48	54	60
अन्य (Other)	3	6	7.5	9

15. निम्न आंकड़ों से 1985 को आधार मानकर 1990 के जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांक की रचना कीजिए:

समूह (Groups)	**समूह निर्देशांक** (Group Index)	**भारत** (Weight)
खाद्य पदार्थ (Food)	152	48
ईंधन एवं प्रकाश (Fuel and Lighting)	110	5
कपड़ा (Clothing)	130	15
मकान किराया (House Rent)	100	12
विविध (Miscellaneous)	80	20

21.4 सारांश (Summary)

- जीवन-निर्वाह-व्यय निर्देशांक किसी स्थान विशेष पर वर्ग विशेष के व्यक्तियों के जीवन-निर्वाह-व्यय में होने वाले परिवर्तनों की दिशा व मात्रा को प्रकट करते हैं। यों तो जब वस्तुओं का मूल्य बढ़ता है तो सभी वर्गों के व्यक्तियों का जीवन-निर्वाह-व्यय बढ़ जाता है और जब मूल्य घटता है तब सभी का जीवन-निर्वाह-व्यय घट जाता है, परन्तु यह घट-बढ़ सभी के लिए बराबर नहीं रहती—किसी के लिए अधिक होती है और किसी के लिए कम।
- नर्वाह व्यय सूचकांक को जीवन-निर्वाह सूचकांक अथवा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक अथवा फूटकर मूल्य सूचकांक (Retail Price Index Numbers) अथवा जीवन-निर्वाह लागत सूचकांक (Cost of Living Price Index Numbers) अथवा जीवनयापन सूचकांक (Price of Living Index Numbers) कहा जाता है।

  किसी स्थान विशेष से सम्बन्धित किसी वर्ग विशेष के उपभोक्ताओं पर मूल्य परिवर्तनों के प्रभाव अथवा रहन-सहन के व्यय में होने वाले अन्तर का माप करने के लिए जो सूचकांक बनाये जाते हैं उन्हें निर्वाह-व्यय सूचकांक कहते हैं।

नोट

- ये सूचकांक वर्ग विशेष के व्यक्तियों द्वारा उपभोग की जाने वाली वस्तुओं के 'फुटकर मूल्यों' में होने वाले बदलाव व उनके प्रभाव के अध्ययन के उद्देश्य से बनाये जाते हैं। इसके द्वारा यह ज्ञात करते हैं कि वर्ग विशेष के उपभोक्ताओं को वस्तुओं एवं सेवाओं की एक निश्चित मात्रा खरीदने के लिए आधार अवधि की तुलना में दी हुई अवधि में कितना अधिक या कितना कम भुगतान करना पड़ता है।
- **वर्ग का निर्धारण**–सबसे पहले यह तय कर लेना चाहिए कि उपभोक्ता मूल्य सूचकांक किस वर्ग विशेष के लिए बनाया जायेगा।
- **पारिवारिक बजट अनुसन्धान**–अब उस वर्ग में से दैव प्रतिचयन के अनुसार कुछ परिवार छाँटकर उनके पारिवारिक बजट ज्ञात करते हैं जिससे उनकी आय-व्यय की मदें, वस्तुओं की मात्रा, मूल्य परिवार के आकार आदि का पता चल जाये। इसमें पाँच श्रेणियाँ होती हैं–(1) खाद्य सामग्री, (2) वस्त्र, (3) ईंधन व प्रकाश, (4) मकान का किराया, (5) विविध व्यय।
- **मूल्य उद्धरण प्राप्त करना**–चुनी हुई वस्तुओं के उन स्थानों के विश्वस्त सूत्रों से फुटकर मूल्य ज्ञात किये जाते हैं जहाँ से उस वर्ग के व्यक्ति उन्हें खरीदते हैं।

21.5 शब्दकोश (Keywords)

- **सजातीय**– एक ही वर्ग का।
- **गणक**– गणना करने वाला यंत्र या व्यक्ति।
- **विभ्रम**– भ्रांति, संदेह।

21.6 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. जीवन निर्वाह सूचकांक क्या है? यह किस उद्देश्य की पूर्ति करता है? समझाइए।
2. निर्देशांक कैसे बनाए जाते हैं? जीवन निर्वाह सूचकांक बनाने में आधार वर्ष और भार के चुनावों के महत्व का वर्णन कीजिए।
3. जीवन-निर्वाह-व्यय सूचकांक की रचना में समस्त व्यय विधि और पारिवारिक बजट विधि के प्रयोग को सोदाहरण समझाइए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. 169.5 2. 153.11 3. भारित समस्त व्यय निर्देशांक = 132.64

4. भारित समस्त व्यय निर्देशांक = 174.23 5. 126.75 6. 130.17

7. 138.09 8. (*i*) 114, (*ii*) 114

9. 126.1; वृद्धि 26.1% 10. वृद्धि 97.55% 11. 120.1 12. 98.05

13. 124.4 14. 1995–122.5; 1996–141 15. 125.96

21.7 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
3. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई—22: काल-श्रेणी का विश्लेषण: परिचय एवं काल-श्रेणी के संघटक (Time-Series Analysis: Introduction and Components of Time Series)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- काल श्रेणी के अर्थ, संघटक एवं विश्लेषण को समझने में।
- काल श्रेणी के गणितीय निदर्श को जानने में।
- दीर्घकालीन प्रवृत्ति की माप का विवेचन करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

संख्यात्मक तथ्य जिनका संकलन समयान्तर से किया जाता है, काल श्रेणी या काल माला का रूप ले लेते हैं। समय की इकाई वर्ष, मास, दिन अथवा घंटे आदि एक विधि है जिससे समस्त तथ्यों को एक सामान्य व स्थिर संदर्भ बिन्दु से संबंधित करना संभव हो जाता है।

नोट

काल श्रेणी के विश्लेषण का प्रमुख उद्देश्य भावी घटनाओं की गतिविधियों का सही ढंग से अनुमान लगाना है ताकि आर्थिक तथ्यों में होने वाले उच्चावचनों को समझा जा सके, उनका निर्वचन किया जा सके और उनका मूल्यांकन किया जा सके।

22.1 काल श्रेणी का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Time-Series)

संख्यात्मक तथ्य जिनका संकलन समयान्तर से किया जाता है, **काल-श्रेणी** या **काल-माला** का रूप ले लेते हैं। समय की इकाई वर्ष, मास, दिन अथवा घण्टे, आदि मात्र एक विधि है जिससे समस्त तथ्यों को एक सामान्य व स्थिर सन्दर्भ-बिन्दु से सम्बन्धित करना सम्भव हो जाता है।

जिस समंक श्रेणी के चर-मूल्यों में समय तत्व द्वारा परिवर्तन हो उसी श्रेणी को काल-श्रेणी कहते हैं। **केने** व **कीपिंग** (Kenney and Keeping) के शब्दों में, **"समय पर आधारित समंक समूह काल-श्रेणी कहलाते हैं।"**

वर्नर जेड हिर्श (Werner, Z. Hirsh) के शब्दों में, "समय के क्रमिक बिन्दुओं के तत्संवादी उसी चर के मूल्यों का व्यवस्थित अनुक्रम ही काल-श्रेणी कहलाता है।" **या-लुन-चाऊ** (Ya-Lun-Chou) के अनुसार, "एक काल-श्रेणी के किसी आर्थिक चर अथवा मिश्रित चरों, जिनका सम्बन्ध विभिन्न समयावधियों से होता है, के अवलोकनों के संकलन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।"

22.2 काल-श्रेणी के संघटक (Components of Time-Series)

काल-श्रेणी के ऐतिहासिक समंक किसी समयावधि में हुए सभी परिवर्तनों से प्रभावित होते हैं। समंकों पर पड़ने वाले प्रभावों को उनकी प्रकृति के आधार पर निम्न वर्ग में वर्गीकृत किया जा सकता है। ये वर्गीकृत प्रभाव ही काल-श्रेणी के चार महत्त्वपूर्ण अवयव या संघटक कहलाते हैं।

1. उपनति या दीर्घकालीन प्रवृत्ति (Trend or Secular Trend or Long-term Trend),
2. आर्तव या सामयिक या ऋतुनिष्ठ परिवर्तन (Seasonal Variations),
3. चक्रीय परिवर्तन (Cyclical Variations),
4. दैव या अनियमित परिवर्तन (Random or Irregular Variations)।

आर्तव या चक्रीय परिवर्तनों को मिलाकर अल्पकालीन उच्चावचन (short-time fluctuations) भी कहा जाता है।

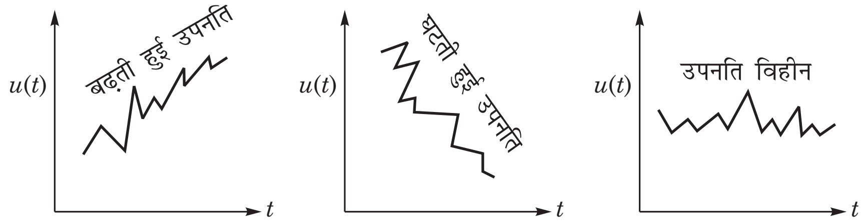
उपनति (Trends)

काल-श्रेणी में दीर्घकाल में हुए नियमित परिवर्तन अर्थात् काल-श्रेणी की समयावधि में बढ़ने या घटने की आधारभूत प्रवृत्ति को उपनति कहा जाता है। **एम. मेलनक** (M. Melnyk) के अनुसार, "उपनति से आशय काल-श्रेणी की सामान्य दिशा से तथा स्वरूप से है।"

उपनति या तो एक सीधी रेखा हो सकती है अथवा भुजाक्ष से अवतल (concave) या उत्तल (convex) होगी। यदि कोई श्रेणी बढ़ती है तो उसे बढ़ती हुई उपनति (upward trend) कहते हैं। यदि श्रेणी घटती है तो उसे घटती हुई उपनति (downward trend) कहते हैं।

यदि कोई श्रेणी न घटती हुई और न बढ़ती हुई प्रतीत होती है तो वह श्रेणी उपनति विहीन (non-trend) है।

नोट



चित्र 1

अतएव यह कहा जा सकता है कि उपनति से हमारा तात्पर्य काल-श्रेणी में दीर्घकाल (15 या 20 वर्ष) में धीरे-धीरे होने वाली वृद्धि अथवा ह्रास से है। उपनति के कारण जनसंख्या वृद्धि, तकनीकी ज्ञान एवं उत्पादकता में सुधार, पूंजी उपकरणों की पूर्ति में वृद्धि, उपभोग की आदतों में परिवर्तन, आदि हो सकते हैं।

उपनति मापने के उद्देश्य (Purposes of Measuring Trend)

उपनति मापने के मुख्य रूप से तीन उद्देश्य होते हैं–

1. अतीत में श्रेणी के विकास अथवा अवनति का अध्ययन करने के उद्देश्य से उपनति मापी जाती है। उपनति आधारभूत वृद्धि-प्रवृत्ति का विवरण देती है और अल्पकालीन उच्चावचनों की उपेक्षा करती है।
2. उपनति मापने का दूसरा उद्देश्य दीर्घकालीन पूर्वानुमान करने के लिए भविष्य में वक्र को बढ़ाना होता है। यदि अतीत में दृढ़ वृद्धि रही है तथा उन दशाओं, जो वृद्धि या विकास निर्धारण करती हैं, के उचित रूप से भविष्य में बने रहने की प्रत्याशा है तो उपनति वक्र को भविष्य के पांच या दस वर्ष के लिए बढ़ाकर प्रारम्भिक पूर्वानुमान किया जा सकता है।
3. उपनति मापने का तीसरा उद्देश्य उसे पृथक् करना है जिससे समंकों के चक्रीय तथा अल्पकालीन उच्चावचनों को स्पष्ट किया जा सके। एक दृढ़ उपनति में छोटे चक्र हो सकते हैं। समंकों के उपनति मूल्यों से भाग देने पर जो अनुपात प्राप्त होते हैं, वे चक्र को समतल रेखा के इर्द-गिर्द रखते हैं जिससे चक्र स्पष्ट हो जाते हैं।

टास्क उपनति किसे कहते हैं?

सामयिक परिवर्तन (Seasonal Variations)

काल-श्रेणी के वे परिवर्तन जो वर्ष के अन्दर ही पूरे हो जाते हैं, सामयिक परिवर्तन कहलाते हैं।

अधिकांश व्यापारिक एवं आर्थिक क्रियाएं वर्ष के मौसमों में नियमित ढांचों के अनुरूप बदलती रहती हैं। इसी कारण इन परिवर्तनों को सामयिक परिवर्तन की संज्ञा दी गयी है। समय अवधि वर्ष, माह, सप्ताह, दिन, घण्टे, आदि हो सकती है।

सामयिक परिवर्तनों के दो प्रमुख कारण हैं–(*i*) प्राकृतिक कारण तथा (*ii*) मनुष्य निर्मित परम्पराओं के कारण। प्राकृतिक कारण जैसे, वर्षा की मात्रा, मौसम परिवर्तन, आदि हैं। मनुष्य निर्मित परम्पराएं त्यौहार, मेले, विवाह, विद्यालयों का अवकाश, रीति-रिवाज, आदि हैं।

फसल एक निश्चित समय पर आती है तब मूल्यों में गिरावट प्रतीत होती है। ऊनी कपड़ों की बिक्री अक्टूबर, दिसम्बर अवधि में बढ़ जाती है। सामयिक परिवर्तन में सामान्यत: एक नियमितता होती है, अत: उनकी पुनरावृत्ति का पूर्वानुमान उचित शुद्धता से किया जा सकता है।

सामयिक परिवर्तनों की मुख्य विशेषताएँ

नोट

सामयिक परिवर्तनों की दो महत्त्वपूर्ण विशेषताएं होती हैं–(1) वे एक निश्चित समयावधि में प्रति वर्ष होते हैं; (2) प्रति वर्ष वृद्धि तथा ह्रास लगभग उसी अवधि में तथा लगभग उसी अनुपात में होते हैं, अतः उनकी पुनरावृत्ति का स्थिर समय तथा पर्याप्त नियमित ढंग व मात्रा होती है, परिणामस्वरूप उनकी माप तथा भविष्य के लिए पूर्वानुमान काफी सूक्ष्मता से किया जा सकता है।

सामयिक परिवर्तनों के मापने के उद्देश्य

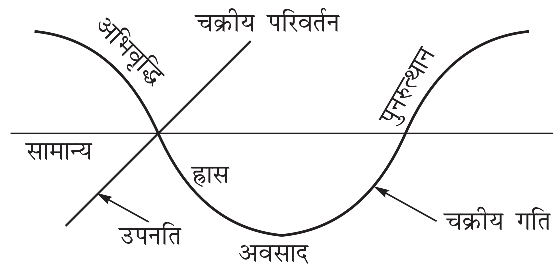
सामयिक परिवर्तनों के मापने के तीन मुख्य उद्देश्य होते हैं–(1) भूतकाल के सामयिक व्यवहार का विश्लेषण करना, (2) अल्पकालीन नियोजन के लिए सामयिक परिवर्तनों का पूर्वानुमान करना, तथा (3) चक्रीय उच्चावचनों को स्पष्ट करने के लिए सामयिकता को पृथक् करना।

> *नोट्स* समय के क्रमागत बिन्दुओं के अनुसार किसी चर के क्रमबद्ध मूल्यों को काल-श्रेणी कहते हैं।

चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations)

व्यापार-चक्रों से उत्पन्न परिवर्तन जिनकी अवधि एक वर्ष से अधिक (प्रायः 7 वर्ष से 11 वर्ष तक) होती है तथा जिनका क्रम बहुत कुछ नियमित रहता है चक्रीय परिवर्तन कहलाता है। व्यापार-चक्रों की क्रमानुसार चार अवस्थाएं होती हैं–

अभिवृद्धि (Prosperity), ह्रास (Decline), अवसाद (Depression) तथा पुनरुत्थान (Recovery)।



चित्र 2

चक्रीय उच्चावचन प्रायः मूल्यों, उत्पादन, श्रमिकों को दिये जाने वाले पारिश्रमिक, आदि सभी को प्रभावित करते हैं। एक काल-श्रेणी में, चक्रीय अथवा चक्रीय-अनियमित संघटकों को पृथक् करने से तीन महत्वपूर्ण उद्देश्यों की पूर्ति होती है–

(1) किसी व्यापार के उच्चावचनों की विशेषता का अध्ययन करने के लिए भूतकालीन चक्रीय व्यवहार की माप अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होती है। ये मापें इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने में समर्थ होती हैं। यह व्यापार सामान्य चक्रीय प्रभावों से किस सीमा तक प्रभावित होता है? फर्म के उत्पादन, बिक्री, स्टॉक या कच्चे पदार्थों की कीमत, आदि के सामान्य चक्रीय संरचना का समय, उतार-चढ़ाव, आदि का प्रतिरूप क्या है?

(2) सफल व्यापारी वर्ग भविष्य के लिए नियोजन करते हैं, नियोजन के लिए पूर्वानुमान की आवश्यकता होती है और पूर्वानुमान के लिए प्रतिरूप तथा तत्कालीन चक्रीय व्यवहार का ज्ञान जरूरी होता है। पूर्वानुमान की 'आर्थिक नियमितता विचारधारा' (Economic rhythm school) में प्रतिरूप चक्रों की मापों का उपयोग किया जाता है, जो अतीत के चक्रों को सावधिक ढंग से भविष्य में पूर्वानुमान करने में करते हैं।

(3) व्यापारिक क्रियाओं के स्तर में स्थायित्व लाने के उद्देश्य से नीति निर्धारण में चक्रीय मापें उपयोगी रहती हैं।

अनियमित परिवर्तन (Irregular Variations)

समय-समय पर काल-श्रेणी में होने वाले अनियमित या अपूर्वानुमानित परिवर्तन जिनके कारण श्रेणी मूल्यों में असामान्य रूप से वृद्धि या ह्रास हो जाता है, अनियमित या दैव परिवर्तन कहलाते हैं। इनका मापन करना या पूर्वानुमान करना सरल नहीं है क्योंकि इन परिवर्तनों का कोई निश्चित समय नहीं होता है। ऐसे उच्चावचन (fluctuation or movements) प्राय: आकस्मिक कारणों जैसे, तकनीकी विकास, युद्ध, बाढ़, सूखा, भूकम्प, औद्योगिक अशान्ति, फैक्टरी में आग लगना, आदि से उत्पन्न होते हैं।

22.3 काल-श्रेणी का विश्लेषण या विघटन (Analysis or Decomposition of Time-Series)

वाणिज्य तथा अर्थशास्त्र के क्षेत्र में आर्थिक परिवर्तन के कारणों को खोजना विश्लेषण की सबसे कठिन समस्या है। इस प्रकार की खोज के लिए काल-श्रेणी समंकों का विश्लेषण किया जाता है। एक काल-श्रेणी से किसी चर की सामान्य प्रवृत्ति का सही अनुमान, आवर्त परिवर्तनों, चक्रीय परिवर्तनों तथा अनियमित परिवर्तनों की माप करना तथा इन चार महत्वपूर्ण घटकों का आपस में सम्बन्ध, आदि अध्ययन करने के लिए काल-श्रेणी में आये सभी प्रकार के उतार-चढ़ावों का विश्लेषण करना पड़ता है, इसी को हम काल-श्रेणी का विश्लेषण कहते हैं।

काल-श्रेणी के चार प्रमुख संघटकों को पृथक्-पृथक् कर उनका अध्ययन करना ही काल-श्रेणी का विश्लेषण कहलाता है। विभिन्न प्रकार के परिवर्तनों का मापन या अध्ययन निरसन (elimination) विधि से किया जाता है।

22.4 काल-श्रेणी के गणितीय निदर्श (Mathematical Models for Time-Series)

काल-श्रेणी का विश्लेषण करते समय, एक काल-श्रेणी पर पड़ने वाले विभिन्न प्रकार के प्रभावों को अलग-अलग किया जाता है। परम्परागत काल-श्रेणी विश्लेषण में सामान्यत: दो मान्यताएं रहती हैं—

(1) काल-श्रेणी के अवलोकन उपनति, सामयिक, चक्रीय तथा अनियमित उच्चावचनों (fluctuations) से प्रभावित होते हैं तथा इन चारों संघटकों में गुणन सम्बन्ध (multiplication relationship) होता है, अर्थात् काल-श्रेणी का कोई भी अवलोकन चार प्रकार के संघटकों का गुणनफल होता है। संकेतानुसार,

$$Y = T \times S \times C \times I$$

इसमें, Y = वास्तविक समंक अथवा मूल समंक (Original Data)

T = उपनति (Trend)

S = चक्रीय परिवर्तन (Cyclical Variation)

I = अनियमित उच्चावचन (Irregular Movement)

काल-श्रेणी के विश्लेषण में प्रयुक्त इस निदर्श [$Y = T \times S \times C \times I$] को गुणात्मक निदर्श (Multiplicative Model) कहते हैं।

(2) काल-श्रेणी के अवलोकन उपनति, सामयिक, चक्रीय तथा अनियमित उच्चावचनों में योग-सम्बन्ध होते हैं, अर्थात् काल-श्रेणी का कोई भी अवलोकन इन चार संघटकों का योग होता है। संकेतानुसार,

$$Y = T + S + C + I$$

इस निदर्श को योगात्मक निदर्श (Additive Model) कहते हैं।

काल-श्रेणी का महत्व तथा काल-श्रेणी के विश्लेषण का महत्व एक प्रकार से पर्यायवाची हैं।

नोट

22.5 काल-श्रेणी का महत्त्व (Importance of Time-Series)

काल-श्रेणी का अध्ययन व्यवसायी, उद्योगपति, अर्थशास्त्री, सरकार, कृषक, उपभोक्ता, आदि सभी वर्गों के लिए महत्वपूर्ण है। काल-श्रेणी जीवन के विभिन्न क्षेत्रों में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन, भविष्य के बारे में अनुमान, पिछले अनुभव से लाभ, व्यापार-चक्र का अनुमान तथा दूसरी काल-श्रेणियों के साथ तुलना करने में बहुत ही उपयोगी है। इन सबके लिए काल-श्रेणी में समंकों का विश्लेषण किया जाता है।

काल-श्रेणी के विश्लेषण का अधिक महत्व निम्न कारणों से है–

(1) **परिवर्तनों का अध्ययन–**काल-श्रेणियों की सहायता से जीवन के विभिन्न क्षेत्रों में विशेषत: आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन किया जाता है।

(2) **भविष्य के बारे में अनुमान–**काल-श्रेणियों के विश्लेषण के अध्ययन से भविष्य में होने वाले परिवर्तनों के विषय में अनुमान लगाया जा सकता है और इससे लाभ उठाया जा सकता है या होने वाली हानि के उपाय किये जा सकते हैं।

(3) **भूतकालीन व्यवहार समझने में सहायक–**भूतकाल में हुए परिवर्तनों की दशा का अध्ययन करके तथा परिस्थितियों का विश्लेषण करके, जिनके प्रभाव से ऐसा हुआ है, महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं और उनके आधार पर व्यवहारों को नियन्त्रित किया जा सकता है।

(4) **व्यापार-चक्र का अनुमान–**चक्रीय उच्चावचनों की सहायता से व्यापार में होने वाले उतार-चढ़ावों का अनुमान लगाया जा सकता है और इस आधार पर अपनी क्रियाओं को नियन्त्रित करके हानि से बचा जा सकता है तथा लाभ उठाया जा सकता है।

(5) **दूसरी श्रेणियों के साथ तुलना–**काल-श्रेणियों की आपस में तुलना की जाती है तथा कारण व प्रभाव का विश्लेषण किया जा सकता है।

(6) **सार्वभौमिक उपयोगिता–**काल-श्रेणियों के विश्लेषण की सार्वभौमिक उपयोगिता है। इनसे सभी वर्ग–व्यवसायी, कृषक, उपभोक्ता, अर्थशास्त्री, सरकार, निर्माणकर्ता, आदि–लाभ उठाते हैं और इन अनुभवों के आधार पर अपनी क्रियाओं को नियन्त्रित व संचालित करते हैं।

काल-श्रेणी के अध्ययन में निम्न दो बातों का ध्यान रखना उचित है–

(1) परिवर्तन की दिशा, काल तथा प्रभाव का अध्ययन, एवं

(2) अन्य श्रेणियों से सम्बन्ध।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. सही विकल्प चुनिए (Choose the correct option)–

1. जिस समंक श्रेणी के चर-मूल्यों में समय तत्व द्वारा परिवर्तन हो उस श्रेणी को कहते हैं–
   (क) काल-श्रेणी (ख) काल-माला
   (ग) (क) और (ख) दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं।
2. काल श्रेणी के संघटक हैं–
   (क) उपनति (ख) आर्तव
   (ग) चक्रीय परिवर्तन (घ) उपर्युक्त सभी।
3. यदि कोई श्रेणी बढ़ती है तो उसे कहते हैं–
   (क) बढ़ती हुई उपनति (ख) घटती हुई उपनति
   (ग) स्थिर उपनति (घ) इनमें से कोई नहीं।

4. दीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति ज्ञात करने के लिए प्रयोग की जाती है–

   (क) अर्ध-मध्यक रीति (ख) चल माध्य रीति

   (ग) न्यूनतम वर्ग रीति (घ) उपर्युक्त सभी।

5. व्यापार चक्र में होने वाले उतार-चढ़ावों का अनुमान लगाया जा सकता है–

   (क) चक्रीय उच्चावचनों से (ख) ऋतुनिष्ठ परिवर्तन से

   (ग) अनियमित परिवर्तन से (घ) इनमें से कोई नहीं।

22.6 सारांश (Summary)

- जिस समंक श्रेणी के चर-मूल्यों में समय तत्व द्वारा परिवर्तन हो उसी श्रेणी को काल-श्रेणी कहते हैं।
- काल-श्रेणी के ऐतिहासिक समंक किसी समयावधि में हुए सभी परिवर्तनों से प्रभावित होते हैं। समंकों पर पड़ने वाले प्रभावों को उनकी प्रकृति के आधार पर निम्न वर्ग में वर्गीकृत किया जा सकता है। ये वर्गीकृत प्रभाव ही काल-श्रेणी के चार महत्त्वपूर्ण अवयव या संघटक कहलाते हैं।
  1. उपनति या दीर्घकालीन प्रवृत्ति (Trend or Secular Trend or Long-term Trend),
  2. आर्तव या सामयिक या ऋतुनिष्ठ परिवर्तन (Seasonal Variations),
  3. चक्रीय परिवर्तन (Cyclical Variations),
  4. दैव या अनियमित परिवर्तन (Random or Irregular Variations)।
- काल-श्रेणी में दीर्घकाल में हुए नियमित परिवर्तन अर्थात् काल-श्रेणी की समयावधि में बढ़ने या घटने की आधारभूत प्रवृत्ति को उपनति कहा जाता है।
- काल-श्रेणी के चार प्रमुख संघटकों को पृथक्-पृथक् कर उनका अध्ययन करना ही काल-श्रेणी का विश्लेषण कहलाता है।
- काल-श्रेणी का अध्ययन व्यवसायी, उद्योगपति, अर्थशास्त्री, सरकार, कृषक, उपभोक्ता, आदि सभी वर्गों के लिए महत्वपूर्ण है। काल-श्रेणी जीवन के विभिन्न क्षेत्रों में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन, भविष्य के बारे में अनुमान, पिछले अनुभव से लाभ, व्यापार-चक्र का अनुमान तथा दूसरी काल-श्रेणियों के साथ तुलना करने में बहुत ही उपयोगी है। इन सबके लिए काल-श्रेणी में समंकों का विश्लेषण किया जाता है।

22.7 शब्दकोश (Keywords)

- **उपनति–** झुकना, झुकाव।
- **अवतल–** नतोदर, बीच में दबा हुआ या गहरा।
- **आर्तव–** सामयिक, ऋतुनिष्ठ।

22.8 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. काल-श्रेणी किसे कहते हैं? इसके कौन-कौन से प्रमुख संघटक हैं?
2. काल-श्रेणी विश्लेषण से क्या आशय है? उच्चावचनों के प्रकारों को संक्षेप में बताइए।
3. काल-श्रेणियों के विश्लेषण का महत्त्व बताइए तथा काल-श्रेणी के गणितीय मॉडल भी लिखिए।
4. काल-श्रेणी तथा काल विश्लेषण को स्पष्ट रूप से समझाइए।
5. दीर्घकालीन उपनति, आर्तव विचरण तथा चक्रीय उच्चावचनों में अंतर स्पष्ट कीजिए।

नोट

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. (ग)　　2. (घ)　　3. (क)　　4. (घ)
5. (ग)

22.9 सन्दर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. साँख्यिकी, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई–23: काल श्रेणी की ग्राकिक एवं अर्थ -मध्यक रीति (Time Series Methods: Graphic, Method of Semi-Averages)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति के मापों की विवेचना करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

समय की गति के साथ-साथ आर्थिक एवं व्यवसायिक क्षेत्र में कई महत्त्वपूर्ण परिवर्तन होते रहते हैं, किसी वर्ष कीमतों में वृद्धि की प्रवृत्ति दृष्टिगोचर होती है और कभी कमी की प्रवृत्ति। जब समय से संबंध मूल्यों को एक श्रेणी के रूप में लिखा जाता है तो यह काल श्रेणी कहलाती है और समय की गति के साथ-साथ इन मूल्यों में होने वाले उच्चावचनों का विधिवत् अध्ययन काल श्रेणी का विश्लेषण कहलाता है।

12 या अधिक वर्षों की समयावधि में काल श्रेणी सामान्यत: वृद्धि या ह्रास की प्रवृत्ति को व्यक्त करती है। वर्ष विशेष में कमी या वृद्धि हो सकती है किन्तु दीर्घकाल में काल श्रेणी एक ही प्रवृत्ति को व्यक्त करती है।

23.1 सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का माप (Measurement of Long-Term Trand)

सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति अथवा उपनति विश्लेषण का मुख्य उद्देश्य किसी काल-श्रेणी में घटित भूतकालीन वृद्धि या ह्रास तथा भावी पूर्वानुमान लगाना है। उपनति (T) को मापने की मुख्य रीतियाँ इस प्रकार हैं–(1) मुक्त-हस्त वक्र रीति, (2) अर्ध-मध्यक रीति, (3) चल-माध्य रीति, तथा (4) न्यूनतम वर्ग-रीति। नीचे हम इनका विस्तृत अध्ययन करेंगे।

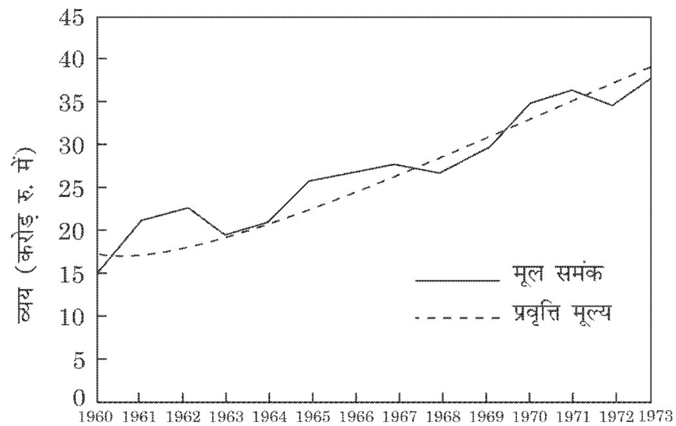
(1) मुक्त-हस्त रीति (Free-hand Curve Method)–सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति को मापने की यह रीति सबसे सरलतम रीति मानी जाती है। इस रीति के अनुसार सर्वप्रथम काल-श्रेणी के मूल समंकों को एक बिन्दु-रेखीय पत्र पर प्रांकित (plot) कर लिया जाता है। तत्पश्चात् समंकों के उतार-चढ़ाव को देखते हुए एक ऐसा सर्वोपयुक्त सरलित वक्र

नोट

(smoothed curve) खींचा जाता है जो इन उच्चावचनों के मध्य (middle) में से होता हुआ गुजरे। वास्तव में, यह वक्र ही मुक्त-हस्त प्रवृत्ति वक्र होता है। इस रीति को **"निरीक्षण द्वारा वक्र-अन्वायोजन"** (curve fitting by inspection) भी कहते हैं।

उदाहरण (Illustration) 1. निम्न समंकों से युक्त हस्त वक्र रीति द्वारा प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए–

वर्ष	व्यय (करोड़ में)	वर्ष	व्यय (करोड़ में)
1960	15	1967	28
1961	21	1968	27
1962	22	1969	30
1963	19	1970	35
1964	21	1971	37
1965	26	1972	35
1966	27	1973	38



चित्र 23.1–मुक्त-हस्त वक्र रीति द्वारा प्रवृत्ति का निर्धारण

गुण व दोष–सरलता, बनाने में शीघ्रता तथा जटिल गणितीय प्रक्रिया की आवश्यकता का न होना, इस रीति के मुख्य गुण हैं। परन्तु इस रीति के कुछ दोष भी हैं–पक्षपातपूर्ण, शुद्धता का अभाव, सुनिश्चितता का अभाव तथा अनुमान पर आधारित होना। यही कारण है कि इस रीति का प्रयोग बहुत कम किया जाता है।

(2) अर्ध-मध्यक रीति (Semi-Average Method)– इस रीति के अनुसार सर्वप्रथम पूरी काल-श्रेणी को दो बराबर भागों में बांट लिया जाता है। तत्पश्चात् प्रत्येक आधे भाग के समंकों का समान्तर माध्य निकालकर उस भाग के मध्यका-समय-बिन्दु (median point of time) के सम्मुख रख दिया जाता है। इसके बाद निर्धारित दोनों माध्यों को रेखाचित्र पर दोनों भागों के मध्यका-बिन्दुओं के ऊपर प्रांकित करके मिला दिया जाता है। इस प्रकार मिलाने पर जो सरल रेखा तैयार होती है उसे अर्ध-मध्यक रीति द्वारा निर्मित प्रवृत्ति-रेखा (trend line) कहते हैं।

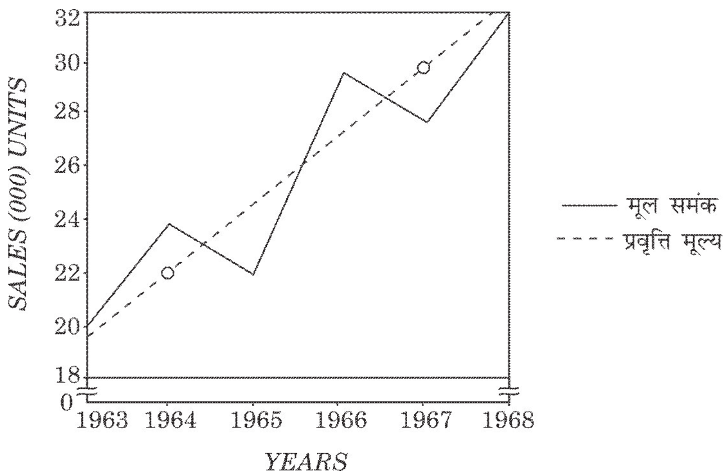
एक समस्या–श्रेणी को दो बराबर भागों में विभाजित करते समय कभी-कभी यह समस्या आती है कि श्रेणी के मूल्यों की संख्या यदि अयुग्म (odd) हो, तो ऐसी हालत में श्रेणी के बिल्कुल बीच के समंक को छोड़ देना चाहिए, शेष क्रिया पूर्ववत् रहेगी। उदाहरण के लिए किसी श्रेणी में 19 मूल्य हैं, तो उपनति ज्ञात करने के लिए दसवें (केन्द्रीय) मूल्य को छोड़कर पहले 9, और दूसरे 9 मूल्यों के माध्यों को निकालकर उपनति रेखी खींची जायेगी। यद्यपि यह रीति सरलता तथा शीघ्रता का गुण रखती है फिर भी इस रीति से उपनति का सही मूल्यांकन नहीं किया जा सकता। हाँ! यह रीति मुक्त-हस्त रीति से कहीं अधिक श्रेष्ठ है।

नोट

Illustration 2. अर्ध-मध्यक विधि द्वारा निम्नलिखित आँकड़ों की प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए।

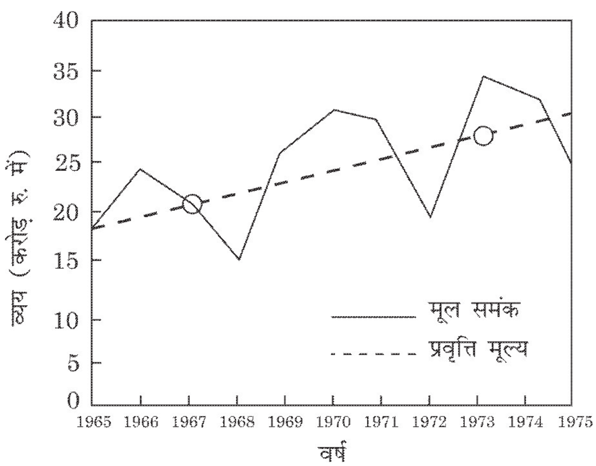
Year	:	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Sales (000 units)	:	20	24	22	30	28	32

हल (Solution): सर्वप्रथम श्रेणी को 3-3 वर्षों के दो बराबर भागों में बाँट कर प्रत्येक भाग का अलग-अलग समान्तर माध्य ज्ञात किया जाएगा। तत्पश्चात् ज्ञात दोनों माध्यों में से प्रथम अर्द्ध-माध्य (22) को मध्यका-बिन्दु [(3 + 1)/2 = 2] अर्थात् 1964 वर्ष के ऊपर तथा इसी प्रकार दूसरे अर्द्ध-माध्य (30) को 1967 वर्ष पर प्रांकित किया जाएगा। इन दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा ही उपनति रेखा कही जाएगी।



चित्र 23.2

Year	Sales	Total	Semi-Avrage	Median Point
1963	20			
1964	24	→ 66 ÷ 3 =	22	1964
1965	22			
1966	30			
1967	28	→ 90 ÷ 3 =	30	1967
1968	32			



चित्र 23.3—अर्द्ध मध्यक रीति द्वारा प्रवृत्ति का निर्धारण

नोट

गुण-दोष—अर्द्ध-मध्यक रीति द्वारा प्रवृत्ति का अनुमान सरलता से लगाया जा सकता है। इस रीति से प्राप्त प्रवृत्ति साँख्यिकी की पक्ष मत की भावना से भी अप्रभावित रहती है। फिर भी इस रीति के प्रयोग की कुछ सीमाएँ है जो निम्न प्रकार हैं—

(*i*) यह रीति रेखीय प्रवृत्ति के समय ही उपयुक्त है।

(*ii*) यदि अति सीमान्त पदों के प्रभाव से अंकगणितीय माध्य अवास्तविक हो जाता है तो प्रवृत्ति भी भ्रमात्मक होगी।

उक्त दो सीमाओं या दोषों के होते हुए भी मुक्त-हस्त वक्र रीति की तुलना में इस रीति का प्रयोग अधिक उपयुक्त रहता है।

(3) चल-माध्य रीति (Method of Moving Averages)—दीर्घकालीन प्रवृत्ति के अनुमान के लिए चल-माध्य रीति का प्रयोग व्यवहार में अधिक किया जाता है। 3, 5, 7 अथवा 9 वर्षीय चल-माध्य ज्ञात कर प्रवृत्ति का अनुमान लगाया जाता है। इस रीति द्वारा प्रवृत्ति का अनुमान लगाने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है—

(*i*) सर्वप्रथम मूल समंकों को बिन्दु रेखा-पत्र पर अंकित कर एक वक्र बना लिया जाता है।

(*ii*) कालिक-चित्र के कालक्रप के अध्ययन द्वारा चल माध्य की अवधि का निर्धारण (3, 5, 7 या 9 वर्ष) कर लिया जाता है। मूल वक्र की चक्रीय तरंगों में कई शिखर होते हैं, इनके अन्तर का माध्य ज्ञात कर चल-माध्य की अवधि का निर्धारण करना उपयुक्त विधि मानी जाती है।

(*iii*) निर्धारित अवधि के आधार पर चल-माध्य ज्ञात कर लिए जाते हैं। चल-माध्य ज्ञात करने के लिए पहले चल योग ज्ञात किया जाता है और उसमें चल-माध्य की अवधि का भाग किया जाता है। उदाहरणार्थ तीन वर्षीय चल-माध्य ज्ञात करने के लिए पहले तीन वर्षीय चल योग (प्रथम, द्वितीय और तृतीय वर्ष का योग, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ वर्ष का योग.....) ज्ञात कर उनमें 3 का भाग कर मध्य के वर्ष (अर्थात् द्वितीय, तृतीय...वर्षों) के सामने रख दिया जाता है। इस प्रक्रिया में प्रथम एवं अन्तिम वर्ष को छोड़कर सभी वर्षों के सामने चल-माध्य रख दिए जाते हैं। इसी प्रकार 5, 7 व 9 वर्षीय चल-माध्य भी ज्ञात किए जा सकते हैं। चल-माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया को 'केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप' वाले अध्याय में स्पष्ट किया जा चुका है।

(*iv*) चल-माध्यों के बिन्दुओं को प्रांकित कर उन्हें मिलाने से प्राप्त रेखा प्रवृत्ति को व्यक्त करती है। चल-माध्यों को प्रवृत्ति-मूल्य भी कहा जाता है।

नोट्स अर्ध-मध्यक शब्द का अर्थ है श्रेणी के प्रत्येक आधे भाग पूवार्ध तथा उत्तरार्ध के मूल्यों का समान्तर माध्य।

उदाहरण (Illustration) 3: निम्न काल-श्रेणी के लिए पंचवर्षीय चल माध्य ज्ञात कीजिए और इन्हें मूल समंकों के साथ उसी बिन्दुरेखा पत्र पर प्रांकित कीजिए।

वर्ष	वार्षिक समंक	वर्ष	वार्षिक समंक
1	55	16	70
2	52	17	68
3	49	18	65
4	53	19	64
5	54	20	68
6	60	21	73
7	57	22	71

नोट

8	55	23	69
9	57	24	68
10	61	25	72
11	65	26	77
12	64	27	75
13	61	28	74
14	59	29	72
15	65	30	78

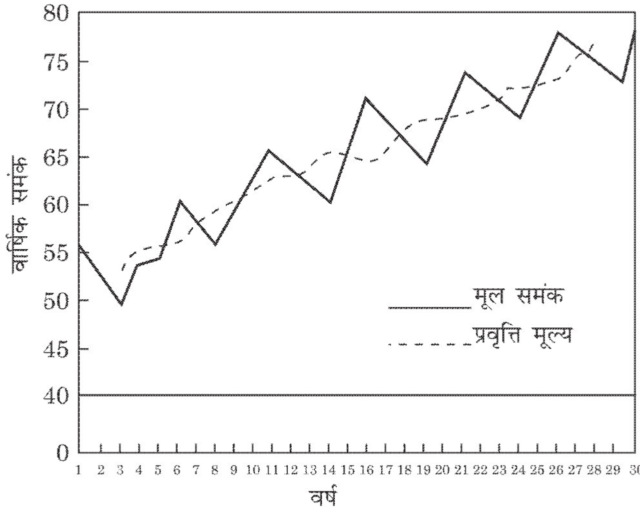
हल (Solution)

पंचवर्षीय चल माध्य की गणना

वर्ष	वार्षिक समंक	पंचवर्षीय चल योग	पंचवर्षीय चल माध्य (प्रवृत्ति मूल्य)
1	55	....	....
2	52	....	....
3	49	263	53
4	53	268	54
5	54	273	55
6	60	279	56
7	57	283	57
8	55	290	58
9	57	295	59
10	61	302	60
11	65	308	62
12	64	310	62
13	61	314	63
14	59	319	64
15	65	323	65
16	70	327	65
17	68	332	66
18	65	335	67
19	64	338	68
20	68	341	68
21	73	345	69
22	71	349	70
23	69	353	71
24	68	357	71
25	72	361	72
26	77	366	73
27	75	370	74
28	74	376	75
29	72	....	....
30	78	....	....

नोट

(चल माध्यों की गणना में दशमलव बिन्दुओं को ध्यान में नहीं रखा गया है)



चित्र 23.4–पंचवर्षीय चल माध्य द्वारा प्रवृत्ति निर्धारण

उदहरण (Illustration) 4: चार-वर्षीय चल माध्य ज्ञात कीजिए और मूल समंकों के साथ प्रांक्ति कीजिए–

वर्ष	**उत्पादन (टन)**	**वर्ष**	**उत्पादन (टन)**
1965	3	1971	13
1966	4	1972	14
1967	8	1973	12
1968	10	1974	15
1969	9	1975	18
1970	11	1976	20

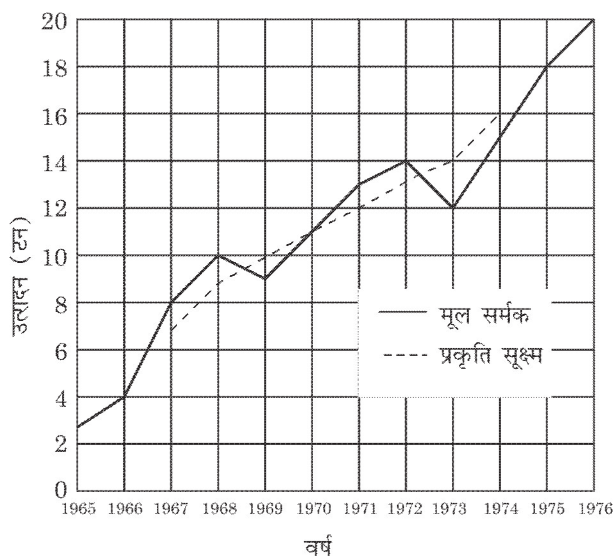
हल (Solution): जब उच्चावचनों के चक्र की अवधि युग्म वर्षों जैसे 4, 6, 8 आदि में है तो चल माध्यों को केन्द्र में लाना होता है। उदाहरणार्थ चार वर्षीय चल माध्य के समय प्रथम चल योग को दूसरे एवं तीसरे वर्ष के मध्य रखा जाता है। इसी प्रकार आगे के चल योग को रखा जाता है, उसके बाद चल माध्यों को केन्द्र में लाने के लिए अगले कॉलम में युग्मों के चल योग अर्थात् प्रथम एवं द्वितीय, द्वितीय एवं तृतीय आदि ज्ञात कर इन्हें क्रमश: तीसरे और चौथे वर्ष के सामने लिख दिया जाता है। अन्तिम कॉलम में चल माध्य ज्ञात करने के लिए युग्मों के चल योग में 8 का भाग दिया जाता है क्योंकि युग्मों के चल योग आठवर्षीय योग को व्यक्त करते हैं। उक्त उदाहरण में चारवर्षीय चल माध्य निम्न प्रकार ज्ञात किए जाएँगे–

नोट

चार-वर्षीय चल माध्यों की गणना

वर्ष	उत्पादन (टन)	चारवर्षीय चल योग	युग्मों के चल योग	चार वर्षीय चल माध्य $\left(\frac{\text{युग्मों के चल योग}}{8}\right)$
1965	3			
1966	4	25		
1967	8	31	56	7
1968	10	38	69	9
1969	9	43	81	10
1970	11	47	90	11
1971	13	50	97	12
1972	14	54	104	13
1973	12	59	113	14
1974	15	65	124	16
1975	18			
1976	20			

(चल माध्यों की गणना में दशमलव बिन्दुओं को ध्यान में नहीं रखा गया है)



चित्र 23.5—चारवर्षीय चल माध्य द्वारा प्रवृत्ति निर्धारण

चल-माध्यों की विशेषताएँ—दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए चल-माध्य रीति का प्रयोग अधिक किया जाता है क्योंकि ये सभी अल्पकालीन उच्चावचनों को दूर कर एक सामान्य प्रवृत्ति को स्पष्ट करते हैं। चल-माध्यों की निम्न विशेषताओं को प्रवृत्ति के विश्लेषण के सम्बन्ध में ध्यान रखना चाहिए—

(*i*) मूल समंकों को प्रांकित करने से यदि सरल रेखा प्राप्त होती है तो चल-माध्यों को प्रांकित करने से भी सरल रेखीय प्रवृत्ति प्राप्त होगी।

(*ii*) मूल समंकों को प्रांकित करने से यदि अवतल (Concave) वक्र प्राप्त हो तो चल-माध्यों से प्राप्त वक्र उनसे नीचे होगा।

नोट

(*iii*) मूल समंकों को प्रांकित करने से यदि उत्तल (Convex) वक्र प्राप्त हो तो चल-माध्यों से प्राप्त वक्र उससे ऊपर होगा।

(*iv*) यदि चल-माध्य और नियमित उच्चावचनों की अवधि समान है तो ये माध्य नियमित उच्चावचनों को पूर्ण रूप से दूर कर देते हैं।

(*v*) चल-माध्यों से अनियमित उच्चावचनों को कम किया जा सकता है, दूर नहीं।

गुण-दोष—इस रीति के अध्ययन से यह स्पष्ट हो जाता है कि इस रीति द्वारा प्राप्त परिणाम अधिक सही होते हैं, क्योंकि इन पर व्यक्तिगत पक्षपात की भावना का प्रभाव नहीं पड़ता है। इस रीति द्वारा प्रवृत्ति ज्ञात करने की प्रक्रिया को समझना भी सरल है। इन गुणों के होते हुए भी इस रीति में निम्न दोष पाए जाते हैं—

(*i*) चल-माध्यों की अवधि का निर्धारण करना कठिन कार्य है, यदि उपयुक्त रीति से चल-माध्यों की अवधि का निर्धारण नहीं किया गया तो परिणाम अवास्तविक होते हैं।

(*ii*) इस रीति का प्रयोग नियमित उच्चावचनों वाली श्रेणी के लिए ही उपयुक्त है क्योंकि चल माध्यों से अनियमित उच्चावचनों को दूर नहीं किया जा सकता है।

(*iii*) प्रवृत्ति के माप में आरम्भ के एवं अन्त के कुछ प्रवृत्ति मूल्य छुट जाते हैं।

(4) न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least Squares)—न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अनुमान गणितीय समीकरणों के आधार पर लगाया जाता है। इस रीति में न्यूनतम वर्ग की मान्यता के आधार पर सर्वोपयुक्त रेखा (Line of Best Fit) खींची जाती है। सर्वोपयुक्त रेखा दो प्रकार की हो सकती है।

(*i*) सरल रेखा (Straight Line)

(*ii*) परवलयिक वक्र (Parabolic Curve)

न्यूनतम वर्ग रीति दो उद्देश्यों को पूरा करती है—

(*i*) अवलोकित मूल्यों के सर्वोपयुक्त रेखा से उदग्र विचलनों का योग शून्य होता है।

$$\Sigma(Y - Y_c) = 0$$

(*ii*) सर्वोपयुक्त रेखा से ज्ञात विचलनों के वर्ग का योग अन्य किसी सरल रेखा से ज्ञात विचलनों के वर्ग की तुलना में न्यूनतम होता है।

$$\Sigma(Y - Y_c)^2 = 0 \text{ न्यूनतम (Minimum)}$$

दूसरी विशेषता के कारण ही इस रीति को न्यूनतम वर्ग रीति कहा जाता है।

Y संकेताक्षर का तात्पर्य आश्रित चर के मूल समंकों से है।

Y_c संकेताक्षर का तात्पर्य आश्रित चर के न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा ज्ञात संगठित मूल्यों से है।

सरल रेखीय प्रवृत्ति (Straight Line Trend)—न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय प्रवृत्ति सरल रेखा के निम्न समीकरण द्वारा ज्ञात की जाती है—

$$Y = a + bX$$

समीकरण में—

Y = प्रवृत्ति मूल्य (Trend Value)

X = समय इकाई (Unit of Time)

a तथा b = अचर मूल्य (Constants)

अचर मूल्य a तथा b में से 'a' अन्तःखण्ड (Intercept) है तथा 'b' प्रवृत्ति रेखा के ढलान (Slope) को व्यक्त करता है। प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात करने के लिए ˙ तथा इ अचर मूल्यों का परिकलन करना होता है। a तथा b अचर मूल्यों का परिकलन निम्न प्रसामान्य समीकरणों की सहायता से किया जाता है—

नोट

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

उदाहरण (Illustration) 5. न्यूनतम वर्ग विधि के प्रयोग द्वारा निम्न समंकों से दीर्घकालीन प्रवृत्ति मूल्यों की गणना कीजिए–

वर्ष :	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
उत्पादन (टन में) :	40	45	46	41	48	49	46

उदाहरण (Solution): दिए हुए समंकों से $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma X^2$ तथा ΣXY ज्ञात कर प्रसामान्य समीकरणों के प्रयोग द्वारा 'a' तथा 'b' अचर मूल्यों का मूल्य ज्ञात कर प्रवृत्ति की गणना की जाएगी।

प्रवृत्ति मूल्य का परिकलन (न्यूनतम वर्ग रीति)

वर्ष	उत्पादन (टनों में) Y	X	X^2	XY	प्रवृत्ति मूल्य $a + bX = Y_c$
1970	40	1	1	40	41 + 1 = 42
1971	45	2	4	90	41 + 2 = 43
1972	46	3	9	138	41 + 3 = 44
1973	41	4	16	164	41 + 4 = 45
1974	48	5	25	240	41 + 5 = 46
1975	49	6	36	294	41 + 6 = 47
1976	46	7	49	322	41 + 7 = 48
	315 ΣY	28 ΣX	140 ΣX^2	1288 ΣXY	$\Sigma Y_c = 315$

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X \quad \ldots(i)$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 \quad \ldots(ii)$$

समीकरण में मूल्य रखने पर–

$$315 = 7a + 28b \quad \ldots(i)$$
$$1288 = 28a + 140b \quad \ldots(ii)$$

समीकरण (i) को चार से गुणा करके समीकरण (ii) में से घटाने पर–

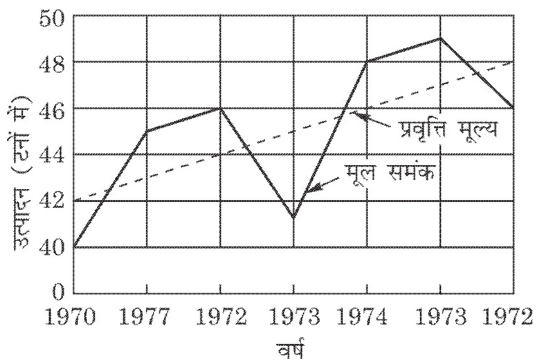
$$1288 = 28a + 140b$$
$$1260 = 28a + 112b$$
$$- \quad - \quad -$$
$$28 = 28b$$
$$\therefore \quad b = 1$$

समीकरण (i) में b का मान रखने पर–

$$315 = 7a + 28b \quad \text{or} \quad 315 = 7a + 28$$
$$315 - 28 = 7a \quad \text{or} \quad 287 = 7a$$
$$a = 41 \quad \therefore \quad a = 41 \text{ तथा } b = 1$$

सरल रेखा के समीकरण $Y = a + bX$ के आधार पर ज्ञात प्रवृत्ति मूल्य क्रमश: 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 होंगे। मूल समंकों एवं प्रवृत्ति मूल्यों को बिन्दु रेखा पत्र पर निम्न प्रकार प्रांकित किया जाएगा–

नोट



चित्र 23.6—न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रवृत्ति-निर्धारण

लघु रीति—न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रवृत्ति मूल्य लघु रीति द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात किए जा सकते हैं—

(*i*) मध्य वर्ग को शून्य मानकर वर्षों के विचलन ज्ञात किए जाते हैं। ऐसे समय ΣX का मूल्य शून्य हो जाता है।

(*ii*) विचलनों का वर्ग तथा ΣXY ज्ञात कर लिए जाते हैं।

(*iii*) पदों का अंकगणितीय माध्य ज्ञात कर मध्य वर्ग के प्रवृत्ति मूल्य के स्थान पर लिखा जाता है।

(*iv*) अचर मूल्य a तथा b का मूल्य निम्न प्रकार ज्ञात किया जाता है—

$$a = \frac{\Sigma Y}{N}; \qquad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

(*v*) अन्त में सरल रेखा के समीकरण $Y = a + bX$ की सहायता से प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कर लिए जाते हैं।

प्रवृत्ति मूल्य की गणना (लघु रीति)

वर्ष	**उत्पादन (टनों में) Y**	**समय विचलन 1973 = 0 X**	**X^2**	**XY**	**प्रवृत्ति मूल्य ($Y = a + bX$)**
1970	40	– 3	9	– 120	$45 + (1 \times -3) = 42$
1971	45	– 2	4	– 90	$45 + (1 \times -2) = 43$
1972	46	– 1	1	– 46	$45 + (1 \times -1) = 44$
1973	41	0	0	0	$45 + (1 \times 0) = 45$
1974	48	1	1	48	$45 + (1 \times 1) = 46$
1975	49	2	4	98	$45 + (1 \times 2) = 47$
1976	46	3	9	138	$45 + (1 \times 3) = 48$
	$\Sigma Y = 315$	$\Sigma X = 0$	28 ΣX^2	28 ΣXY	$\Sigma Y_c = 315$

$$a = \frac{\Sigma Y}{N}; \qquad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

$$a = \frac{315}{7} = 45; \qquad b = \frac{28}{28} = 1$$

$$\text{अंकगणितीय माध्य} = \frac{315}{7} = 45$$

जब पदों की संख्या सम (even) (8, 10, 12,... आदि) हो तो लघु रीति का प्रयोग कठिन हो जाता है। ऐसे समय माध्य दो वर्षों के बीच में आता है। मध्य बिन्दु को शून्य मानकर विचलन क्रमश:–.5, – 1.5, – 2.5, तथा + .5, + 1.5, +

नोट

2.5 होंगे। ये आधे वर्ष के विचलन होते हैं; अतः गणन क्रिया को सरल बनाने के लिए इन्हें 2 से गुणा कर पूरे वर्ष के विचलन में बदल लिया जाता है।

परवलय-चक्रीय या अ-रेखीय प्रवृत्ति (Parabolic or Non-linear trend)—सरल रेखीय प्रवृत्ति को एक घातीय प्रवृत्ति भी कहा जाता है। जिन परिस्थितियों में दीर्घ-कालीन प्रवृत्ति का विश्लेषण सरल रेखा से नहीं किया जा सकता, उन परिस्थितियों में द्वितीय, तृतीया चतुर्थ घात के एकेन्द्र वक्रों का प्रयोग किया जाता है।

> अरेखीय प्रवृत्ति की गणना के लिए एकेन्द्र वक्रों का प्रयोग किया जाता है।

द्वितीय घात के परवलयिक-वक्र द्विघातीय प्रवृत्ति (Parabolic Curve of the second degree or Quadratic trend)—द्विघातीय प्रवृत्ति की गणना निम्न समीकरण द्वारा की जाती है—

$$Y = a + bX + cX^2$$

a, b तथा c अचर मूल्यों की गणना निम्न समीकरणों की सहायता से की जाती है—

	प्रत्यक्ष रीति	लघु रीति (मध्य वर्ष = 0)
(*i*)	$\Sigma Y = Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2$	$\Sigma Y = Na + c\Sigma X^2$
(*ii*)	$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3$	$\Sigma XY = b\Sigma X^2$
(*iii*)	$\Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4$	$\Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + c\Sigma X^4$ (चूँकि $\Sigma X = \Sigma X^3 = 0$)

व्यवहार में लघु रीति का प्रयोग अधिक किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 10: निम्न के लिए द्विघातीय परवलयिक वक्र का अन्वायोजन कीजिए—

X :	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
Y :	4	8	9	12	11	14	16	17	26

हल (Solution): द्विघातीय परवलयिक वक्र का समीकरण : $Y = a + bX + cX^2$

a, b और c का मान निम्न प्रकार ज्ञात किया जाएगा—

द्विघातीय परवलयिक वक्र का अन्वायोजन

वर्ष	Y	मध्य वर्ष से समय विचलन X	XY	X^2	X^3	X^3 $a + bX = Y_c$	X^2Y
1970	4	– 4	– 16	16	– 64	256	64
1971	8	– 3	– 24	9	– 27	81	72
1972	9	– 2	– 18	4	– 8	16	36
1973	12	– 1	– 12	1	– 1	1	12
1974	11	0	0	0	0	0	0
1975	14	1	14	1	+ 1	1	14
1976	16	2	32	4	+ 8	16	64
1977	17	3	51	9	+ 27	81	153
1978	26	4	104	16	+ 64	256	416
N = 9	117 ΣY	0 ΣX	131 ΣXY	60 ΣX^2	0 ΣX^3	708 ΣX^4	831 ΣX^2Y

नोट

प्रसामान्य समीकरण :

$$\Sigma Y = Na + c\Sigma X^2 \quad ...(i)$$
$$\Sigma XY = b\Sigma X^2 \quad ...(ii)$$
$$\Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + c\Sigma X^4 \quad ...(iii)$$
$$117 = 9a + 60c \quad ...(i)$$
$$131 = 60b \quad ...(ii)$$
$$831 = 60c + 708c \quad ...(iii)$$

समीकरण (*ii*) से–

$$131 = 60b$$
$$b = \frac{131}{60} = 2.183$$

समीकरण (*i*) को 20 तथा समीकरण (*iii*) को 3 से गुणा करने पर–

$$2340 = 180a + 1200c$$
$$2493 = 180a + 2124c$$
$$-924c = -153$$
$$c = 0.166$$

समीकरण (*i*) में c मान रखने पर–

$$117 = 9a + 60 \times .166 \quad \text{or} \quad 117 = 9a + 9.96$$
$$-9a = 9.69 - 117 \quad \text{or} \quad -9a = -107.04 \quad \text{or} \quad a = 11.89$$

अत: प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात करने का समीकरण

$Y = 11.89 + 2.183X + .166X^2$ होगा।

द्विघातीय प्रवृत्ति मूल्य

X	X^2	प्रवृत्ति मूल्य $a + bX + cX^2 = Yc$	
– 4	16	11.89 – 8.732 + 2.656 = 5.814	
– 3	9	11.89 – 6.549 + 1.494 = 6.835	
– 2	4	11.89 – 4.366 + 0.664 = 8.188	
– 1	1	11.89 – 2.183 + 0.166 = 9.873	
0	0	11.89 + 0 + 0 = 11.890	
1	1	11.89 + 2.183 + 0.166 = 14.229	
2	4	11.89 + 4.366 + 0.664 = 16.920	
3	9	11.89 + 6.549 + 1.494 = 19.833	
4	16	11.89 + 8.732 + 2.6 56 = 223.278	

मूल समंकों एवं प्रवृत्ति मूल्य को बिन्दु रेखा पत्र पर भी प्रांकित किया गया जा सकता है।

तृतीय घात के परवलयिक-वक्र (Parabolic curve of the third degree)–तृतीय घात के परवलयिक-वक्र का अन्वायोजन निम्न समीकरण द्वारा किया जाता है–

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3$$

a, b, c तथा d अचर मूल्यों की गणना निम्न प्रसामान्य समीकरणों द्वारा ज्ञात की जाती है–

नोट

प्रत्यक्ष रीति

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2 + d\Sigma X^3 \\ \Sigma XY &= a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 + d\Sigma X^4 \\ \Sigma X^2Y &= a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 + d\Sigma X^5 \\ \Sigma X^3Y &= a\Sigma X^3 + b\Sigma X^4 + c\Sigma X^5 + d\Sigma X^6 \end{aligned}$$

लघु रीति (मध्य वर्ष द्वारा कालिक विचलन)—

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= Na + c\Sigma X^2 \\ \Sigma XY &= b\Sigma X^2 + d\Sigma X^4 \\ \Sigma X^2Y &= b\Sigma X^2 + d\Sigma X^4 \\ \Sigma X^3Y &= b\Sigma X^4 + d\Sigma X^6 \end{aligned}$$

टास्क परवलय—चक्रीय प्रवृत्ति किसे कहते हैं?

लघुगणकीय सरल रेखा (Logarithmic Straight Line)—काल-श्रेणी के विश्लेषण में यदि आनुपातिक परिवर्तनों को स्पष्ट करना हो तो गणितीय सरल रेखा के स्थान पर लघुगणकीय सरल रेखा का अन्वायोजन किया जाता है। इसे अर्द्ध-लघुगणकीय या घातांकीय वक्र (Semi-Logarithmic or Exponential Curve) भी कहा जाता है। अर्द्ध-लघुगणकीय प्रवृत्ति या लघुगणकीय सरल रेखा का अन्वायोजन निम्न समीकरण द्वारा किया जाता है—

$\text{Log. } Y = \text{Log. } a + X \text{ Log. } b$

प्रसामान्य समीकरण

प्रत्यक्ष रीति	**लघु रीति**
$\Sigma \text{ Log. } Y = N \text{ Log. } a + \text{Log. } b\Sigma X$	$\Sigma\text{Log. } Y = N \text{ Log. } a$
$\Sigma X\text{Log. } Y = N \text{ Log. } a\Sigma X + \text{Log. } b\Sigma X^2$	$\Sigma X \text{ Log. } Y = \text{Log. } b\Sigma X^2$

प्रक्रिया—प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है—

(*i*) X श्रेणी के मध्य-वर्ष से विचलन ज्ञात कर विचलन का वर्ग कर उनका योग (ΣX^2) कर लिया जाता है।

(*ii*) Y श्रेणी के मूल समंकों के लघुगणक ज्ञात कर X के विचलनों से गुणा कर लिया जाता है (X Log. Y)।

(*iii*) प्रसामान्य समीकरणों से Log. *a* तथा Log. *b* का मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है।

(*iv*) Log. *a* तथा Log. *b* के मान को समीकरण Log. Y = Log. *a* + X Log. *b* में रख कर प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कर लिए जाते हैं।

(*v*) वास्तविक प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात करने के लिए लघुगणकों के प्रतिलघुगणक ज्ञात कर लिए जाते हैं।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का माप ज्ञात कीजिए—

1. निम्न समंकों से प्रवृत्ति मापन के लिए अर्द्ध-मध्यक रीति का प्रयोग कीजिए—

वर्ष :	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
उत्पादन (मि. टन) :	100	120	95	105	108	102	112

2. निम्नांकित से न्यूनतम की वर्ग रीति दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए—

वर्ष :	1961	1962	1963	1964	1965
कीमत (रु.) :	83	92	71	90	169

नोट

3. निम्नांकित आँकड़ों से द्विघातीय परवलयिक उपनति का अन्तायोजन कीजिए–

X	:	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
Y	:	4	8	9	12	11	14	16	17	26

23.2 सारांश (Summary)

- समय की गति के साथ-साथ आर्थिक एवं व्यवसायिक क्षेत्र में कई महत्त्वपूर्ण परिवर्तन होते रहते हैं, किसी वर्ष कीमतों में वृद्धि की प्रवृत्ति दृष्टिगोचर होती है और कभी कमी की प्रवृत्ति। जब समय से संबंध मूल्यों को एक श्रेणी के रूप में लिखा जाता है तो यह काल श्रेणी कहलाती है और समय की गति के साथ-साथ इन मूल्यों में होने वाले उच्चावचनों का विधिवत् अध्ययन काल श्रेणी का विश्लेषण कहलाता है।
- सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति अथवा उपनति विश्लेषण का मुख्य उद्देश्य किसी काल-श्रेणी में घटित भूतकालीन वृद्धि या ह्रास तथा भावी पूर्वानुमान लगाना है। उपनति (T) को मापने की मुख्य रीतियाँ इस प्रकार हैं–(1) मुक्त-हस्त वक्र रीति, (2) अर्ध-मध्यक रीति, (3) चल-माध्य रीति, तथा (4) न्यूनतम वर्ग-रीति।
- दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए चल-माध्य रीति का प्रयोग अधिक किया जाता है क्योंकि ये सभी अल्पकालीन उच्चावचनों को दूर कर एक सामान्य प्रवृत्ति को स्पष्ट करते हैं।
- न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अनुमान गणितीय समीकरणों के आधार पर लगाया जाता है। इस रीति में न्यूनतम वर्ग की मान्यता के आधार पर सर्वोपयुक्त रेखा (Line of Best Fit) खींची जाती है।

23.3 शब्दकोश (Keywords)

- **सर्वोपयुक्त–** जो हर जगह उपयुक्त हो।
- **उदग्र–** उर्ध्व, ऊँचा, उन्नत बढ़ा हुआ।

23.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. काल-श्रेणी में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति की विवेचना कीजिए।
2. चल-मध्यक रीति को विस्तार पूर्वक समझाइए।
3. न्यूनतम वर्ग रीति की गणना पर प्रकाश डालिए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answers: Self Assessment)

1. अर्द्ध-मध्यम : 105 (1971); 107.3 (1995)
2. $y = 101 + 17x$; 67, 84, 101, 118, 135
3. $y = 11.89 + 2.183x + .166x^2$

23.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
2. साँख्यिकी, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई–24: काल-श्रेणी की विधि : न्यूनतम वर्ग रीति के सिद्धांत एवं उसके अनुप्रयोग (Time-Series Methods : Principle of Least Square and its Application)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- न्यूनतम वर्ग रीति के सिद्धांत की व्याख्या करने में।
- अचर मूल्यों की परिगणना कैसे करेंगे को जानने में।
- न्यूनतम वर्ग रीति के अनुप्रयोग को जानने में।
- अल्पकालीन उच्चावचनों के माप की व्याख्या करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

काल श्रेणी विधि का महत्व केवल अर्थशास्त्री के लिए ही नहीं वरन् यह व्यापारी, समाजशास्त्री, वैज्ञानिक, राजनीतिक शासक आदि के लिए भी महत्वपूर्ण है।

नोट

यद्यपि काल-श्रेणी विश्लेषण की तकनीक के विकास के लिए अर्थशास्त्री विशेष रूप से उत्तरदायी है किन्तु काल श्रेणी का अध्ययन अन्य कई क्षेत्रों के कर्मचारियों, उदाहरणार्थ व्यवसायी, समाजशास्त्री, जीव विज्ञानवेत्ता भू-गर्भशास्त्री, सार्वजनिक स्वास्थ्य कर्मचारी एवं अन्य के लिए भी रूचिकर है। काल-श्रेणी विधि की प्रवृत्ति को मापने की विभिन्न विधियाँ हैं। इन्हीं विधियों में से दीर्घकालीन प्रवृत्ति को नापने के लिए न्यूनतम वर्ग रीति का प्रयोग किया जाता है।

24.1 न्यूनतम वर्ग रीति के सिद्धांत (Principle of Least Square)

न्यूनतम वर्ग रीति उपनति के माप की सर्वश्रेष्ठ रीति है। इस रीति के अन्तर्गत गणितीय समीकरणों के प्रयोग द्वारा, न्यूनतम वर्ग मान्यता के आधार पर काल-श्रेणी के लिए सर्वाधिक उपयुक्त रेखा (line of the best fit) खींची जाती है। स्मरण रहे यह रेखा सरल (straight) भी हो सकती है और परवलयिक वक्र (parabolic curve) के रूप में भी खींची जा सकती है। प्रसामान्य समीकरणों (normal equations) की सहायता से खींची जाने वाली न्यूनतम वर्ग रेखा, एक ऐसी रेखा है जिससे मूल समंकों के बिन्दुओं के विचलनों के वर्गों का जोड़ अन्य किसी भी रेखा की अपेक्षाकृत न्यूनतम होता है। यही कारण है कि इस रीति को **'न्यूनतम वर्ग रीति'** की संज्ञा दी जाती है। सूत्रानुसार–

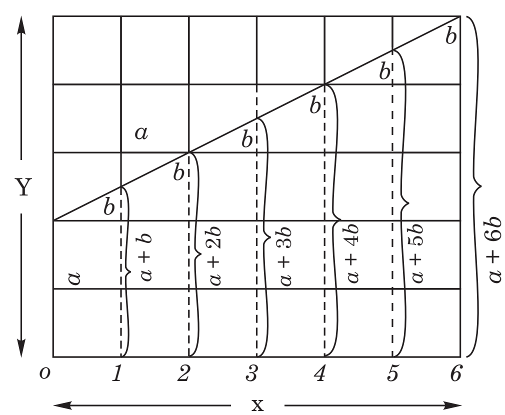
$$\Sigma(Y - Y_c)^2 = \text{minimum}, \qquad Y = \text{Original Values}$$

$$Y_c = \text{Trend Values of Y series}$$

सरल रेखीय प्रवृत्ति-अन्वायोजन (Fitting a Straight Line Trend)–इस रीति के अनुसार प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए निम्न आधारभूत समीकरण (Key Equation) का प्रयोग किया जाता है–

$$Y = a + bX \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} X = \text{Unit of Time (काल एकक)} \\ a \text{ and } b = \text{Two constants (अचर मूल्य)} \end{array}$$

अचर मूल्य '*a*' जोकि Y-अन्त:खण्ड (Y-intercept) भी कहलाता है मूल बिन्दु (0) और Y-अक्ष पर स्थित उस **बिन्दु का अन्तर है,** जहाँ से उपनति रेखा आरम्भ होती है। इसी प्रकार '*b*' प्रवृत्ति रेखा (trend line) के ढलान की ओर संकेत करता है। दूसरे शब्दों में, यह इस बात को स्पष्ट करता है कि **समय की एक इकाई बढ़ने से उपनति रेखा कितनी ऊपर अथवा कितनी नीचे की ओर अग्रसर होती है।** नीचे इस तथ्य को चित्र द्वारा भी स्पष्ट किया गया है–



चित्र 24.1. सरल रेखा का प्रतिरूप चित्र

नोट

24.2 अचर-मूल्यों की परिगणना (Calculation of Constant Values)

न्यूनतम वर्ग रीति में मुख्य समस्या अचर-मूल्यों की परिगणना की होती है। इस सम्बन्ध में प्राय: दो रीतियाँ (अ) दीर्घ रीति तथा (ब) लघु रीति प्रचलित हैं, जिनका विधिवत् अध्ययन हम नीचे करेंगे—

(अ) दीर्घ रीति (Least Square Long Method)—इस रीति के अनुसार परिगणन-क्रिया इस प्रकार है—

(*i*) सबसे पहले स्वतन्त्र चल-मूल्यों अर्थात् समय बिन्दुओं को X श्रेणी मानते हुए, उनके लिए प्रारम्भ से क्रम संख्याएँ 1, 2, 3, 4...प्रयुक्त की जाती हैं। वास्तव में, ऐसा करने का अर्थ यह है प्रथम काल एकक से पिछले एकक को मूल बिन्दु (origin-0) मान लिया गया है।

(*ii*) इन क्रम-संख्याओं को X द्वारा व्यक्त किया गया है और इनका योग ΣX कर लिया जाता है।

(*iii*) फिर क्रम-संख्याओं के वर्गों का योग ΣX^2 निकाला जाता है।

(*iv*) X और मूल समंकों अर्थात् Y श्रेणी के तत्संवादी मूल्यों की गुणा करके उनका जोड़ ΣXY निकाल लिया जाता है।

(*v*) Y श्रेणी के मूल्यों का योग करके ΣY प्राप्त किया जाता है।

(*vi*) जब ΣX, ΣX^2, ΣXY तथा ΣY मूल्य प्राप्त हो जाएँ तो इसके बाद प्रसामान्य समीकरणों में इन मूल्यों को आदिष्ट (substitute) करके '*a*' तथा '*b*' के मूल्य प्राप्त कर लिए जाते हैं। निम्न प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग किया जाता है—

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X \qquad ...(i)$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 \qquad ...(ii)$$

(*vii*) अन्त में '*a*' तथा '*b*' के मूल्य ज्ञात हो जाने के बाद सरल रेखा के आधारभूत समीकरण ($Y = a + bX$) का प्रयोग करके प्रवृत्ति मूल्य निकाल लिये जाते हैं।

टास्क अचर मूल्यों की परिगणना से आप क्या समझते हैं?

उदाहरण (Illustration) 1: निम्न समंकों से न्यूनतम-वर्ग रीति द्वारा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए—

वर्ष	:	1974	1975	1976	1977	1978	1979
उत्पादन (लाख टन)	:	5	7	9	10	12	17

हल (Solution).

उपनति मूल्यों का परिकलन (न्यूनतम वर्ग दीर्घ रीति)

वर्ष	*उत्पादन Y*	*X*	*वर्ग X^2*	*गुणनफल XY*	*उपनति मूल्य $a + bX = Y_e$*	
1974	5	1	1	5	2.3 + (2.2 × 1)	4.5
1975	7	2	4	14	2.3 + (2.2 × 2)	6.7
1976	9	3	9	27	2.3 + (2.2 × 3)	8.9
1977	10	4	16	40	2.3 + (2.2 × 4)	11.1
1978	12	5	25	60	2.3 + (2.2 × 5)	13.3
1979	17	6	36	102	2.3 + (2.2 × 6)	15.5
योग	60	21	91	248		60.0

$\Sigma Y = Na + b\Sigma X \quad ...(i) \qquad\qquad \Sigma XY = a\Sigma X + \Sigma X^2 \quad ...(ii)$

नोट

$60 = 6a + 21b$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $248 = 21a + 91b$

समीकरण (*i*) को 7 से और समीकरण (*ii*) को 2 से गुणा करके उन दोनों को घटाने पर–

$$420 = 42a + 147b$$
$$\underline{496 = \pm 42a \pm 182b} \qquad 76 = 35b \;\therefore\; b = \mathbf{2.2}$$
$$-$$

अब '*a*' का मान ज्ञात करने के लिये '*b*' का मूल्य समी. (*i*) में रखने पर–

$60 = 6a + (21 \times 2.2)$ $\qquad$ or $\qquad$ $6a = 13.8 \;\therefore\; a = \mathbf{2.3}$

$\therefore\;\; Y = 2.3 + 2.2X$ $\qquad$ मूल बिन्दु 1974 : X इकाई = 1 वर्ष,

Y इकाई : उत्पादन (लाख टन)

नोट्स यह पता लगाने के लिए कि गणन-क्रिया ठीक है या नहीं अर्थात् उत्तर शुद्ध है या अशुद्ध है, इसकी कसौटी यह है कि उपनति मूल्यों का योग (ΣY_c) मूल समंकों अर्थात् Y श्रेणी के योग (ΣY) के बराबर होना चाहिये। यदि ये दोनों योग बराबर नहीं हैं अर्थात् $\Sigma Y \neq \Sigma Y_c$ तो समझ लीजिये कि कहीं कोई गलती हो गयी है।

(ब) लघु रीति (Least Squares Short-cut Method)–दीर्घ रीति की अपेक्षा लघु रीति सरल होने के साथ-ही-साथ शीघ्रगामी भी है। **अतः विद्यार्थियों को सदैव इस रीति का ही प्रयोग करना चाहिये।** क्रिया-विधि इस प्रकार है–

(*i*) सर्वप्रथम बीच वाले वर्ष अर्थात् मध्यका-वर्ष (middle or median year) को शून्य मानते हुए सभी वर्षों या समय-बिन्दुओं के कालिक विचलन (time deviations) निकाल लिये जाते हैं। स्मरण रहे, शून्य से ऊपर वाले विचलन ऋणात्मक तथा नीचे के विचलन धनात्मक होंगे। परन्तु उनका बीजगणितीय योग (Σ/X) सदैव शून्य होगा।

(*ii*) $\Sigma Y, \Sigma XY$ तथा ΣX^2 की गणना की जायेगी।

(*iii*) '*a*' तथा '*b*' का मूल्य निकालने के लिए उपर्युक्त समीकरणों के प्रयोग की आवश्कता नहीं होती; बल्कि इनकी गणना निम्न प्रकार से की जायेगी–

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} \qquad\qquad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

(*iv*) अन्त में आधारभूत समीकरण ($Y = a + bX$) में क्रमशः X के मूल्यों को आदिष्ट करके प्रवृत्ति-मूल्य ज्ञात कर लिये जाते हैं तथा उनको बिन्दु रेखा पर प्रांकित कर देते हैं।

उदाहरण (Illustration) 2: निम्न समंकों को न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखा उपनति प्रदान कीजिए तथा उपनति मूल्यों और मूल समंकों को ग्राफ पेपर पर प्रदर्शित कीजिए–

वर्ष	:	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
उत्पादन (कुंटल)	:	80	90	92	83	94	99	92

हल (Solution):

नोट

उपनति मूल्यों (Trend Values) **का आकलन (लघु रीति)**

वर्ष	उत्पादन (000 Qnt.)	समय-विचलन मूल-1964	विचलनों का वर्ग	X व Y की गुणा	उपनति मूल्य	
	Y	X	X^2	XY	$a + bX =$	Yc
1961	80	– 3	9	– 240	90 + (2 × – 3) =	84
1962	90	– 2	4	– 180	90 + (2 × – 2) =	86
1963	92	– 1	1	– 92	90 + (2 × – 1) =	88
1964	83	0	0	0	90 + (2 × 0) =	90
1965	94	+ 1	1	+ 94	90 + (2 × 1) =	92
1966	99	+ 2	4	+ 198	90 + (2 × 2) =	94
1967	92	+ 3	9	+ 276	90 + (2 × 3) =	96
Total	630	0	28	588 – 512 = 56		630

$N = 7, \Sigma Y = 630, \Sigma X = 0, \Sigma X^2 = 28, \Sigma XY = 56$

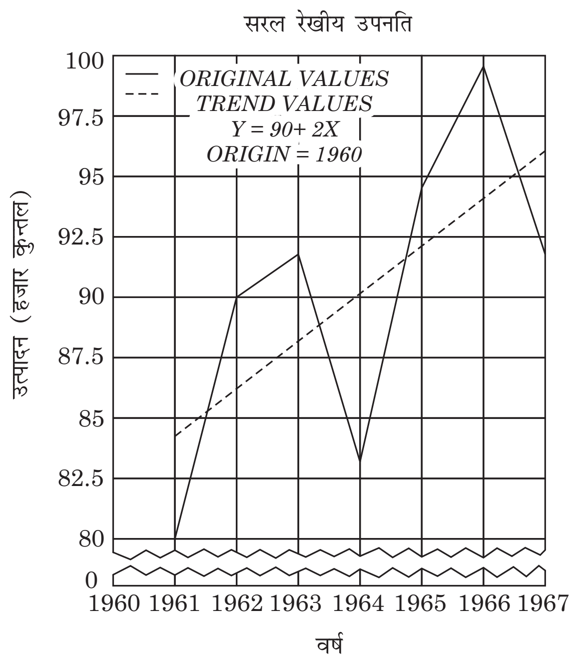
सर्वप्रथम 'a' तथा 'b' के मूल्य ज्ञात किये जायेंगे।

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} \text{ or } \frac{630}{7} = 90 \qquad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{56}{28} = 2$$

$$\because \Sigma Y = Na \qquad \because \Sigma XY = b\Sigma X^2$$

उपनति समीकरण—Y = 90 + 2X

मूल = 1964; X इकाई = 1 वर्ष, Y इकाई = हजार कुन्तल



चित्र 24.2. रेखीय प्रवृत्ति

नोट

इस प्रकार विभिन्न वर्षों के लिए संगणित किये गये उपनति मूल्यों (84, 86, 88, 90, 92, 94 तथा 96) को बिन्दु-रेखीय पत्र पर प्रांकित करने पर जो वक्र तैयार होगा उसे प्रवृत्ति-रेखा कहेंगे।

उदाहरण (Illustration) 3: निम्नांकित समंकों से न्यूनतम-वर्ग रीति द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कीजिए तथा 1972-73 वर्ष के लिये सम्भावित उत्पादन मूल्य का अनुमान लगाइए–

वर्ष :	1966-67	1967-68	1968-69	1969-70	1970-71
उत्पादन (लाख टन) :	83	92	71	90	169

हल (Solution)

उपनति-मूल्यों का आकलन (लघु रीति)

वर्ष	उत्पादन (लाख टन)	समय-विचलन मूल 1968-69	वर्ग	X × Y	प्रवृत्ति-मूल्य
	Y	X	X^2	XY	$a + bX = Yc$
1966-67	83	– 2	4	– 166	101 + (17 × – 2) = 67
1967-68	92	– 1	1	– 92	101 + (17 × – 1) = 84
1968-69	71	0	0	0	101 + (17 × 0) = 101
1969-70	90	+ 1	1	+ 90	101 + (17 × 1) = 118
1970-71	169	+ 2	4	+ 338	101 + (17 × 2) = 135
N = 5	ΣY = 505	ΣX = 0	10	+ 170	ΣY = ΣYc = 505

प्रसामान्य समीकरण (Normal Equation)–

$$\Sigma Y = Na \qquad \therefore \quad a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{505}{5} = \mathbf{101}$$

$$\Sigma XY = b\Sigma X^2 \qquad \therefore \quad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{170}{10} = \mathbf{17}$$

उपनति समीकरण (Trend Equation)

Y = 101 + 17X मूल–1968,69, X-इकाई: 1 वर्ष, Y-इकाई : लाख टन

1972-73 वर्ष के लिये पूर्वानुमानित उत्पादन

वर्ष 1972-73 के लिये X = 4 (1970-71 → + 2; 1971-72 → + 3)

Y = 101 + (17 × 4) = **169** लाख टन

उदाहरण (Illustration) 4: निम्न समंकों को सरल रेखा उपनति प्रदान कीजिए और उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए। वर्ष 1976 के लिए कर्मचारियों की संख्या अनुमानित कीजिए–

वर्ष :	1971	1972	1973	1974	1975
कर्मचारियों की संख्या :	100	120	130	140	160

हल (Solution): उपनति मूल्यों (Trend Values) का आकलन (लघु-रीति)

Year	Employees	Dev. 1973	Squares	Product	Trend (T)	
X	Y	X	X^2	XY	Y = a + bX	Y_c
1971	100	– 2	4	– 200	130 + (14 × – 2) =	102
1972	120	– 1	1	– 120	130 + (14 × – 1) =	116
1973	130	0	0	0	130 + (14 × 0) =	130
1974	140	+ 1	1	+ 140	130 + (14 × 1) =	144
1975	160	+ 2	4	+ 320	130 + (14 × 2) =	158
N = 5	ΣY = 650	ΣX = 0	ΣX^2 = 10		ΣXY = 140	SYc = 650

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{650}{5} = \mathbf{130} \qquad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{140}{10} = \mathbf{14}$$

उपनति समीकरण (Trend Equation) — Y = 130 + 14X

मूल वर्ष = 1973, X इकाई = 1 वर्ष, Y इकाई = कर्मचारी-संख्या

1 जुलाई 1976 को कर्मचारियों की संख्या का अनुमान–

वर्ष 1976 के लिए X = + 3 or Y = 130 + (14 × 3) = **172**

24.3 समय-इकाइयों की संख्या युग्म होना (Even Number of Time Units)

जब अवलोकनों या समय-इकाइयों की संख्या युग्म हो (जैसे 6, 8, 10 या 12 आदि) तो ऐसी स्थिति में लघु रीति के अन्तर्गत विचलन के लिए X की इकाई आधे-वर्ष (समय-चक्र वार्षिक होने पर) के बराबर ही मान ली जाती है। इससे विचलन दशमलव (जैसे– 0.5, – 1.5 तथा + 0.5, + 1.5 आदि) में आएंगे परन्तु गणन-क्रिया को सरल बनाने के लिए उन्हें दुगना कर लिया जाता है। शेष-क्रिया पूर्ववत् रहती है। उदाहरण नीचे देखिए।

उदाहरण (Illustration) 5% निम्न आँकड़ों को न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय उपनति प्रदान कीजिए और उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए। परिवर्तन की समान-दर मानते हुए वर्ष 2000 के लिए सम्भाव्य आय अनुमानित कीजिए–

Year	:	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Income (Lakh Rs.)	:	38	40	65	72	69	60	87	95

हल (Solution): चूँकि यहाँ समय-इकाइयों की संख्या युग्म (even) है। अत: मूल-बिन्दु (origin) बीच के दो वर्षों (1994 तथा 1995) का मध्य-वर्ष 1994.5 होगा। उससे विचलन लेने के बाद विचलनों को सुविधा की दृष्टि से दुगना कर लिया गया है। सूत्रानुसार–

$$X = \frac{t - (\text{X का मध्य बिन्दु})}{1/2\ (\text{अन्तराल})} \quad \text{या} \quad = \frac{t - (\text{mid point of X})}{1/2\ (\text{interval})}$$

यहाँ अन्तराल से आशय वर्षों अर्थात् X के मूल्यों में समय-समय (times-difference) से है जो यहाँ 1 वर्ष है। अत: प्रथम X (1991) का मान निम्न होगा–

$$\text{for } t = 1991, \qquad X = \frac{t - 1994.5}{1/2\,(1)} = \frac{1991 - 1994.5}{0.5} = \frac{-3.5}{0.5} = -7$$

नोट

न्यूनतम वर्ग लघु-रीति द्वारा उपनति मूल्यों का परिकलन

वर्ष	आय (लाख रु.)	$\frac{t - 1994.5}{0.5}$	वर्ग	गुणनफल X × Y	उपनति मूल्य (Trend Values)
X	Y	X	X^2	XY	$a + bX = Y_c$
1991	38	– 7	49	– 266	65.75 + 3.67 × – 7 = 40.06
1992	40	– 5	25	– 200	65.75 + 3.67 × – 5 = 47.40
1993	65	– 3	9	– 195	65.75 + 3.67 × – 3 = 54.74
1994	72	– 1	1	– 72	65.75 + 3.67 × – 1 = 62.08
1995	69	+ 1	1	+ 69	65.75 + 3.67 × 1 = 69.42
1996	60	+ 3	9	+ 180	65.75 + 3.67 × 3 = 76.76
1997	87	+ 5	25	+ 435	65.75 + 3.67 × 5 = 84.10
1998	95	+ 7	49	+ 665	65.75 + 3.67 × 7 = 01.44
N = 8	526	ΣX = 0	168	+ 616	$\Sigma Y_c = \Sigma Y = 526.00$

सरल उपनति रेखीय समीकरण– $Y = a + bX$

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{526}{8} = \mathbf{65.75} \qquad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{616}{168} = \mathbf{3.67}$$

अतः अभीष्ट समीकरण– $Y = 65.75 + 3.67X$

मूल-बिन्दु = 1994.5, X इकाई = आधा वर्ष, Y इकाई = आय लाख रु.

वर्ष 2000 के लिए पूर्वानुमानित आय $X = \frac{2000 - 1994.5}{0.5} = \frac{5.5}{0.5} + 11$

or $Y = 65.75 + (3.67 \times 11) = \mathbf{106.12}$

अतः 2000 वर्ष की पूर्वानुमानित आय 106.12 लाख रु. है।

24.4 समयावधि का अनियमित होना (Irregular Time-Period)

जब X-श्रेणी अर्थात् समयावधि अनियमित होती है तब लघु-रीति द्वारा विचलन लेने पर विचलनों का योग अधिकतर शून्य नहीं होता ($\Sigma X \neq 0$)। ऐसी स्थिति में a तथा b का मान प्रत्यक्षतः प्रसामान्य समीकरणों द्वारा ज्ञात करना पड़ता है।

> यदि X-श्रेणी या समयावधि अनियमित है परंतु विचलनों का योग फिर भी शून्य हो जाए ($\Sigma X = 0$), तब 'a' तथा 'b' का मान लघु रीति द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरणा (Illustration) 6: एक चीनी मिल के उत्पादन के समंक नीचे दिए गए हैं। (*i*) न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय उपनति का आसंजन कीजिए तथा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए। (*ii*) उपनति को निरस्त कीजिए तथा बताइए कि काल-श्रेणी के अन्य कौन-से संघटक शेष रह गए हैं। (*iii*) चीनी-उत्पादन में वृद्धि की मासिक दर क्या है?

वर्ष	:	1973	1975	1976	1977	1978	1979	1982
उत्पादन	:	77	88	94	85	91	98	90

नोट

Solution. चूँकि विचलनों का योग शून्य नहीं है अर्थात $\Sigma X \neq 0$ अत: 'a' तथा 'b' का मान प्रत्यक्ष रूप से प्रसामान्य समीकरणों द्वारा प्राप्त किया जाएगा–

सरल रेखीय उपनति का निर्धारण (न्यूनतम-वर्ग रीति)

वर्ष	उत्पादन	समय-विचलन मूल-1977	विचलनों का वर्ग	X व Y की गुणा	उपनति मूल्य (उपसादित)	Y – Y_c (उपसादित)
Year	**Y**	**X**	**X^2**	**XY**	**$a + bX = Y_c$**	
(*i*)	(*ii*)	(*iii*)	(*iv*)	(*v*)	(*vi*)	(*vii*)
1973	77	– 4	16	– 308	83.3	– 6.3
1975	88	– 2	4	– 176	86.0	+ 2.0
1976	94	– 1	1	– 94	87.4	+ 6.6
1977	85	0	0	0	88.8	– 3.8
1978	91	+ 1	1	+ 91	90.2	+ 0.8
1979	98	+ 2	4	+ 196	91.6	+ 6.4
1982	90	+ 5	25	+ 450	95.7	– 5.7
N = 7	$\Sigma Y = 623$	+ 1	51	+ 159	$\Sigma Y_c = 623$	$\Sigma(Y - Y_c) = 0$

$\Sigma Y = Na + b\Sigma X \qquad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$

$N = 7, \quad \Sigma Y = 623, \quad \Sigma X = 1, \quad \Sigma X^2 = 51, \quad \Sigma XY = 159$

दोनों प्रसामान्य समीकरणों में मूल्य आदिष्ट करने पर–

$$623 = 7a + b \qquad ...(i)$$
$$159 = a + 51b \qquad ...(ii)$$

समीकरण (*ii*) को 7 से गुणा करने पर और उसे समीकरण (*i*) में से घटाने पर–

$$623 = 7a + b \qquad ...(i)$$
$$1113 = 7a + 357b \qquad ...(iii)$$
$$- \quad - \quad -$$
$$-490 = -356b \qquad \therefore \quad b = 490/356 = \mathbf{1.38}$$

'b' का मान समीकरण (*i*) में आदिष्ट करने पर–

$$623 = 7a + 1.38 \quad \text{या} \quad 7a = 623 - 1.38 \quad \therefore \quad a = 621.62/7 = \mathbf{88.803}$$

अत: सरल रेखीय उपनति समीकरण ($Y = a + bX$) है–

$$Y = 88.803 + 1.38X$$

मूल-बिन्दु = 1977, X इकाई = 1 वर्ष, Y इकाई = हजार कुन्तल

उपनति मूल्य (Trend Values of Y_c) परिकलित करके कॉलम (*vi*) में रखे गए हैं।

(*ii*) उपनति को निरस्त या पृथक करने के बाद हमारे पास चक्रीय, आर्तव विचरण तथा अनियमित उच्चावचन शेष रह जाते हैं अर्थात् O – T = S + C + I

(*iii*) चीनी उत्पादन की वृद्धि की मासिक-दर का आगणन–

वार्षिक वृद्धि या $b = 1.38$ है। अत: मासिक वृद्धि-दर = $b/12$ माह

1.38/12 = **0.115** हजार कुन्तल या **115** कुन्तल

नोट

Illustration 7. निम्न आँकड़ों को न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय उपनति प्रदान कीजिए तथा वर्ष 1990 के लिए बिक्री की मात्रा का अनुमान लगाइए–

वर्ष	:	1960	1965	1970	1975	1980	1985
विक्री	:	12	15	17	22	24	30

हल (Solution): इस प्रश्न में दो विशिष्टताएँ हैं। प्रथम, समय-इकाइयों की संख्या युग्म (even) है। अत: मूल-बिन्दु (origin) बीच के दो वर्षों (1970 तथा 1975) का मध्य-वर्ष अर्थात् 1972.5 होगा। दूसरा, समय-इकाइयों में 5 वर्ष का समय अन्तराल (time-interval) है। अत: वर्ष 1960 का विचलन (X) निम्नवत् होगा अर्थात्–

$$X = \frac{t - 1972.5}{1/2 \times (\text{interval})} = \frac{1960 - 1972.5}{0.5 \times 5} = \frac{-12.5}{2.5} = -5$$

इसी प्रकार अगले विचलन (X) क्रमश: – 3, – 1, + 1, + 3, + 5 आएँगे।

न्यूनतम वर्ग लघु-रीति द्वारा सरल-रेखीय उपनति निर्धारण

Year	**Sale Lakh Rs.**	$\frac{t-1972.5}{2.5}$	**Squares**	**X × Y Product**	**Trend Values**
X	Y	X	X^2	XY	$a + bX = Y_c$
1960	12	– 5	25	– 60	20 + (1.74 × – 5) = 11.30
1965	15	– 3	9	– 45	20 + (1.74 × – 3) = 14.78
1970	17	– 1	1	– 17	20 + (1.74 × – 1) = 18.26
1975	22	+ 1	1	+ 22	20 + (1.74 × 1) = 21.74
1980	24	+ 3	9	– 72	20 + (1.74 × 3) = 25.22
1985	30	+ 5	25	+ 150	20 + (1.74 × 5) = 28.70
N = 6	ΣY = 120	0	70	+ 122	120.00

चूँकि ΣX = 0, अत: 'a' तथा 'b' का मान लघु-रीति द्वारा ज्ञात किया जाएगा–

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{120}{6} = \mathbf{20} \qquad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{122}{70} = \mathbf{1.74}$$

अत: उपनति रेखा (trend line) : Y = 20 + 1.74X

वर्ष 1990 के लिए पूर्वानुमानित बिक्री–1990 के लिए X = + 7

∴ Y = 20 + (1.74 × 7) = **32.18** लाख रु.

24.5 अल्पकालीन उच्चावचनों की माप (Measurement of Short-Time Oscillations)

काल-मालाओं पर दीर्घकालीन प्रवृत्ति और अल्पकालीन उच्चावचनों दोनों का ही सामूहिक प्रभाव पड़ता है। दीर्घकालीन उच्चावचनों का माप उपनति (Trend) की सहायता से किया जाता है। चल माध्य या न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा गणना किये गये प्रवृत्ति मूल्यों को मूल समंकों में से निरसित कर दिया जाता है तो अल्पकालीन उच्चावचन शेष रह जाते हैं। इन शेषों में अल्पकालीन उच्चावचनों आर्तव, चक्रीय व दैव परिवर्तनों को शामिल करते हैं।

उदाहरण (Illustration) 8: निम्न आँकड़ों से अल्पकालीन ज्ञात कीजिए तथा उनको ग्राफ पेपर पर प्रदर्शित कीजिए:

नोट

वर्ष	:	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
मूल्य (रु.)	:	10	8	9	16	11	12	10	17	9	10

हल (Solution): O = T + S + C + I

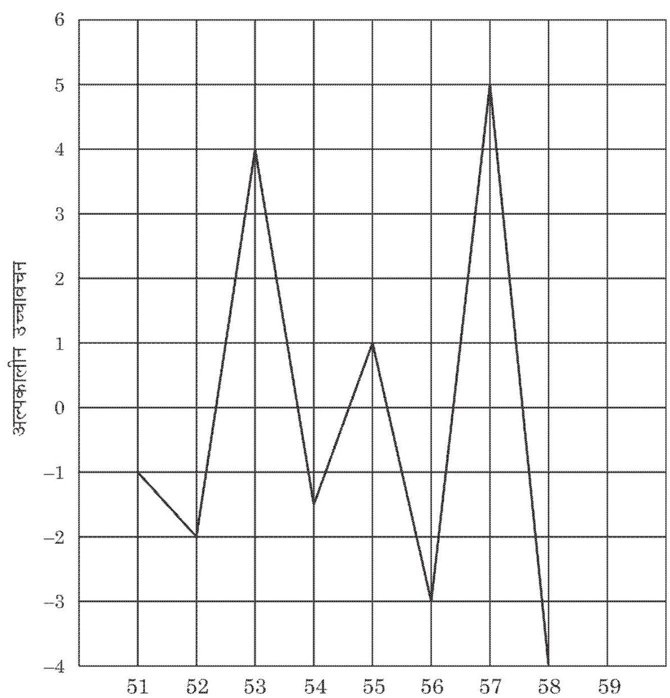
⇒ O – T = S + C + I

वर्ष I	मूल्य II	3-वर्षीय चल योग III	3-वर्षीय चल माध्य IV	अल्पकालीन उच्चावचन (II)–(IV)
1950	10	—	—	—
1951	8	27	9	– 1
1952	9	33	11	– 2
1953	16	36	12	+ 4
1954	11	39	13	– 2
1955	12	33	11	+ 1
1956	10	39	13	– 3
1957	17	36	12	+ 5
1958	9	36	12	– 3
1959	10	—	—	—

ग्राफ :

पैमाना : 1 सेमी = 1 वर्ष

1 सेमी = 1 इकाई



चित्र 24:3

नोट

टिप्पणी : उपर्युक्त आंकड़ों में एक वर्ष के लिए केवल एक ही अवलोकित मूल्य दिया गया है अत: यहां आर्तव विचरण ज्ञात नहीं किये जा सकते हैं।

यदि सूत्र : $O = T + S + C + I$

$\Rightarrow \quad O - T = S + C + I$ (अल्पकालीन उच्चावचन)

$\Rightarrow \quad O - T = C + I$

यदि यह मान लिया जाय कि काल संख्या में आर्तव विचरण नहीं हैं। दायें पक्ष को चक्रीय उच्चावचन की माप माना जा सकता है।

उदाहरधा (Illustration) 9: निम्न आँकड़ों के न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा अल्पकालीन उच्चावचन या चक्रीय परिवर्तन ज्ञात करें :

वर्ष	:	19901991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	
मूल्य	:	24	19	25	24	23	20	25	30

हल (Solution): माना $x = \dfrac{\text{वर्ष} - 1993.5}{.5}$

वर्ष (*i*)	y (*ii*)	x (*iii*)	x^2 (*iv*)	xy (*v*)	$T = a + bx$ (*vi*)	$y - T$ (*vii*) = (*ii*) – (*vi*)
1990	24	– 7	49	– 168	21.42	2.68
1991	19	– 5	25	– 95	22.08	– 3.08
1992	25	– 3	9	– 75	22.75	2.25
1993	24	– 1	1	– 24	23.42	0.58
1994	23	1	1	23	24.08	– 1.08
1995	20	3	9	60	24.75	– 4.75
1996	25	5	25	125	25.42	– 0.42
1997	30	7	49	210	26.08	3.92
योग	190	0	168	56	190.00	

$$y = a + bx$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma y = na + b\Sigma x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{190}{8} = 23.75$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{56}{108} = 0.33$$

इस प्रकार

$$y = 23.75 + 0.33x$$

x के मान – 7, – 5, – 3, – 1, 1, 3, 5, 7 रखने पर,

प्रवृत्ति मूल्य T उपर्युक्त सारणी के स्तम्भ (*vi*) में दिये गये हैं। स्तम्भ (*ii*) के मानों में स्तम्भ (*iv*) के मानों को घटाकर स्तम्भ (*vii*) प्राप्त किया गया है। स्तम्भ (*vii*) के मान ही अभीष्ट अल्पकालीन उच्चावचन के माप हैं। यह मानते हुए कि श्रेणी में आर्तव विचरण नहीं हैं। यही माप चक्रीय उच्चावचन के माप माने जा सकते हैं।

यदि गुणात्मक प्रतिदर्श लिया जाय तो

$$O = T \times S \times C \times I$$

$\Rightarrow \quad \frac{O}{T} = S \times C \times I$ अल्पकालीन उच्चावचन

या $\quad \frac{O}{T} = C \times I$ चक्रीय परिवर्तन (S न हो तो)

अथवा प्रतिशत में

चक्रीय परितर्वन $= \frac{O}{T} \times 100$

वर्ष	मूल समंक O	उपनति T	$\frac{O}{T} \times 100$
1990	24	21.42	112.04
1991	19	22.08	86.05
1992	25	22.75	109.89
1993	24	23.42	102.48
1994	23	24.08	95.51
1995	20	24.75	80.80
1996	25	25.42	98.35
1997	30	26.08	115.03
	—	—	

24.6 न्यूनतम वर्ग रीति के अनुप्रयोग (Application of Least Square Method)

रीति के अनुप्रयोग—एक गणितीय विधि होने के कारण यह उपनति-मापन की सर्वश्रेष्ठ रीति मानी जाती है। (1) इस रीति के द्वारा प्राप्त उपनति-मूल्य अधिक उपयुक्त और वास्तविकता के निकट होते हैं क्योंकि उनका परिगणन सुनिश्चित गणितीय सिद्धान्तों के आधार पर किया जाता है। (2) इस रीति द्वारा प्राप्त की गई रेखा, सर्वोपयुक्त रेखा (line of best fit) होती है क्योंकि यह वह रेखा है जिससे धनात्मक एवं ऋणात्मक विचलनों का योग शून्य होता है अर्थात् $\Sigma(Y - Y_c) = 0$ और विचलन-वर्गों का योग $\Sigma(Y - Y_c)^2$ न्यूनतम (least) होता है। (3) यह रीति व्यक्तिगत अभिनति (bias) से सर्वथा मुक्त है। (4) फिर, इस रीति की सहायता से अगले वर्षों के लिए सर्वोपयुक्त पूर्वानुमान लगाए जा सकते हैं। (5) इस रीति के द्वारा सभी वर्षों के लिए उपनति-मूल्य प्राप्त किए जा सकते हैं जबकि अन्य रीतियों, जैसे चल माध्य रीति में ऐसा होना सम्भव नहीं है।

रीति की परिसीमाएँ (Limitations)—(1) इस रीति की गणन-क्रिया बहुत जटिल है और इसमें समय भी अधिक लगता है। (2) इस रीति का प्रयोग वृद्धि-वक्रों के अन्वायोजन में नहीं किया जा सकता जबकि उनका आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्र में विशेष महत्व है। (3) एक उपयुक्त समीकरण का चुनाव न होने पर निकाले गए निष्कर्ष भ्रमात्मक सिद्ध होते हैं। (4) एक गणितीय-रीति होने के कारण इसमें लचीलेपन का अभाव है। यदि श्रेणी में एक मूल्य जोड़ या घटा दिया जाए तो नया उपनति-समीकरण दुबारा प्राप्त करना पड़ता है जबकि चल-माध्य रीति में ऐसा नहीं होता। (5) इस रीति द्वारा पूर्वानुमान केवल दीर्घकालीन विचरणों या उपनति पर आधारित होते हैं और मौसमी, चक्रीय तथा अनियमित विचरणों पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता। ध्यान रहे, उपनति-आधारित पूर्वानुमान (forecasts or predictions) तभी सर्वोपयुक्त हो सकते हैं जब श्रेणी के चरों और समय के बीच फलनात्मक (functional) सम्बन्ध हो अन्यथा इनके निष्कर्ष खतरनाक हो सकते हैं। **सर्वश्री रिग्गिलमैन एवं फ्राइबी** (Riggleman and Frisbee) का भी कहना है कि "उपनति-अन्वायोजन की यह रीति अपने में कोई दोष रहित नीति

नोट

नहीं है—वास्तव में यह अनेक गम्भीर विभ्रमों को उत्पन्न करने की दोषी है। इसका प्रयोग तब तक नहीं करना चाहिए जब तक कि आर्थिक विश्लेषण द्वारा इसे दृढ़तापूर्वक नियन्त्रित न कर लिया जाए। उपनति अन्वायोजन सांख्यिक के निर्णय पर निर्भर करता है, इसलिए एक मुक्त-हस्त-रेखा द्वारा किया गया स्कैच गणितीय सूत्र द्वारा तैयार किए गए रिफाइन्ड स्कैच से कहीं अधिक व्यावहारिक हो सकता है।"

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए-

1. सरल रेखा प्रवृत्ति का आसंजन कीजिए तथा प्रवृत्ति मूल्यों को ज्ञात कीजिए–

वर्ष	:	1995	1996	1997	1998	1999
लाभ (हजार रुपये में)	:	4	7	3	6	8

2. अग्रलिखित संमकों से न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा उपनति मूल्यों को ज्ञात कीजिए–

वर्ष	:	1991	1992	1993	1994	1995
उत्पादन	:	4	5	7	9	10

3. निम्न आंकड़ों से न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सरल रेखा उपनति का आसंजन कीजिए–

वर्ष	:	1984	1985	1986	1987	1988	1989
उत्पादन (करोड़ रुपये में)	:	7	10	12	14	17	24

4. निम्नलिखित समंकों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कीजिए तथा 1992 वर्ष के लिए सम्भावित उत्पादन मूल्य का अनुमान लगाइए–

वर्ष	:	1986	1987	1988	1989	1990
उत्पादन	:	83	92	71	90	169

5. निम्न समंकों से न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए–

वर्ष	:	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
बिक्रि	:	40	45	46	41	48	49	46

6. निम्न आंकड़ों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए और वास्तविक मूल्यों तथा उपनति मूल्यों को एक ग्राफ पेपर पर अंकित कीजिए–

वर्ष	:	1990	1991	1992	1993	1994
उत्पादन (हजार टन में)	:	35	46	36	46	53

7. निम्न समंकों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा (1986 को उद्‌गम वर्ष या 1987 को उद्‌गम वर्ष या 1989 को उद्‌गम वर्ष मानकर) सरल रेखा का आसंजन करो तथा प्रवृत्ति मूल्यों को बिन्दुरेख पर अंकित करो। 1993 वर्ष के लिए उपनति मूल्य का अनुमान भी लगाइए–

वर्ष	:	1987	1988	1989	1990	1991
विक्रय (लाख रुपये में)	:	45	56	78	46	75

8. न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा निम्नलिखित समंकों से उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए तथा 1995 के लिए उपनति मूल्य का अनुमान लगाइए–

वर्ष	:	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
उत्पादन (टन)	:	80	90	92	83	94	98	92	95

24.7 सारांश (Summary)

- न्यूनतम वर्ग रीति उपनति के माप की सर्वश्रेष्ठ रीति है। इस रीति के अन्तर्गत गणितीय समीकरणों के प्रयोग द्वारा, न्यूनतम वर्ग मान्यता के आधार पर काल-श्रेणी के लिए सर्वाधिक उपयुक्त रेखा (line of the best fit) खींची जाती है।
- प्रसामान्य समीकरणों (normal equations) की सहायता से खींची जाने वाली न्यूनतम वर्ग रेखा, एक ऐसी रेखा है जिससे मूल समंकों के बिन्दुओं के विचलनों के वर्गों का जोड़ अन्य किसी भी रेखा की अपेक्षाकृत न्यूनतम होता है।
- न्यूनतम वर्ग रीति में मुख्य समस्या अचर-मूल्यों की परिगणना की होती है। इस सम्बन्ध में प्राय: दो रीतियाँ (अ) दीर्घ रीति तथा (ब) लघु रीति प्रचलित हैं।
- दीर्घ रीति की अपेक्षा लघु रीति सरल होने के साथ-ही-साथ शीघ्रगामी भी है। अत: विद्यार्थियों को सदैव इस रीति का ही प्रयोग करना चाहिये।
- काल-मालाओं पर दीर्घकालीन प्रवृत्ति और अल्पकालीन उच्चावचनों दोनों का ही सामूहिक प्रभाव पड़ता है। दीर्घकालीन उच्चावचनों का माप उपनति (Trend) की सहायता से किया जाता है।
- उपनति-मूल्य अधिक उपयुक्त और वास्तविकता के निकट होते हैं क्योंकि उनका परिगणन सुनिश्चित गणितीय सिद्धान्तों के आधार पर किया जाता है।
- वर्षों के लिए उपनति-मूल्य प्राप्त किए जा सकते हैं जबकि अन्य रीतियों, जैसे चल माध्य रीति में ऐसा होना सम्भव नहीं है।
- एक गणितीय-रीति होने के कारण इसमें लचीलेपन का अभाव है। यदि श्रेणी में एक मूल्य जोड़ या घटा दिया जाए तो नया उपनति-समीकरण दुबारा प्राप्त करना पड़ता है जबकि चल-माध्य रीति में ऐसा नहीं होता।
- उपनति अन्वायोजन सांख्यिक के निर्णय पर निर्भर करता है, इसलिए एक मुक्त-हस्त-रेखा द्वारा किया गया स्कैच गणितीय सूत्र द्वारा तैयार किए गए रिफाइन्ड स्कैच से कहीं अधिक व्यावहारिक हो सकता है।"

24.8 शब्दकोश (Keywords)

- **रिफाइन्ड–** परिष्कार।
- **अन्वायोजन–** उपयुक्त, उपयुक्तता।
- **प्रसामान्य–** प्रसम।

24.9 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. न्यूनतम वर्ग रीति के सिद्धांत पर प्रकाश डालिए।
2. अचर मूल्यों की परिगणना किस प्रकार की जाती है।
3. न्यूनतम वर्ग रीति में लघु रीति के प्रयोग की विवेचना कीजिए।
4. अल्पकालीन उच्चावचनों को उदाहरण देकर समझाइए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 4.2, 4.9, 5.6, 6.3, 7
2. 3.8, 5.4, 7, 8.6, 10.2
3. 6.30, 9.38, 12.46, 15.54, 18.62, 21.70

नोट

4. 67, 84, 101, 118, 135
5. $y = 45 + x$, जहां x = वर्ष – 1989, प्रवृत्ति मूल्य : 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48
6. $y = 42 + 4.2x$, x = वर्ष – 1992
7. 50, 55, 60, 65, 70, 1993 का अनुमान = 80
8. 86.20, 87.92, 89.64, 91.36, 93.08, 94.80, 96.52 के लिए अनुमान = 98.24

24.10 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली – 110055
2. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई—25: चल-माध्य की रीति (Methods of Moving Average)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- गतिमान माध्य विधि को तथा उनकी विशेषताओं को समझने में।
- चल माध्य रीति के उपयोग को जानने में।
- मूल समंक एवं चल माध्यों को बिन्दुरेखीय पत्र पर कैसे अंकित करेंगे? इसे समझने में।

प्रस्तावना (Introduction)

चल-माध्य काल-श्रेणी के समंकों के 'विशिष्ट' समान्तर माध्य होते हैं। चल माध्य और समान्तर माध्य में मुख्य अन्तर यह है कि समान्तर माध्य पूरे समय के लिए एक-ही होता है जबकि चल-माध्य अनेक होते हैं। इस रीति में सर्वप्रथम यह निश्चित करना पड़ता है कि **चल माध्य कितने वर्षीय हो?** क्योंकि अवधि के अयुग्म (odd) होने पर चल माध्य 3, 5, 7, 9, 11 वर्षीय हो सकता है और अवधि के युग्म (even) होने पर चल-माध्य 4, 6, 8, 12 वर्षीय हो सकता है। यद्यपि इसके लिए कोई निश्चित नियम नहीं है। फिर भी चल-माध्य की अवधि का चुनाव करते समय मूल्यों में उतार चढ़ाव व पदों की संख्या को ध्यान में रखा जाना चाहिए।

25.1 गतिमान (या चल) माध्य की विधि (Method of Moving Averages)

माना कि किसी श्रेणी के पद-मूल्य $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9,$ हैं।

नोट

माना कि हम तीन-तीन पद-मूल्यों में समान्तर माध्य निम्न प्रकार निकालते हैं :

पहला माध्य $= \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$, पहले तीन पद-मूल्यों का माध्य

दूसरा माध्य $= \frac{v_2 + v_3 + v_4}{3}$, पहले पद-मूल्य को छोड़कर एक नया पद-मूल्य शामिल करके माध्य

तीसरा माध्य $= \frac{v_3 + v_4 + v_5}{3}$, दूसरे पद-मूल्य को छोड़कर एक नया पद-मूल्य शामिल करके माध्य

अन्तिम माध्य $= \frac{v_7 + v_8 + v_9}{3}$, इसी क्रम की पुनरावृत्ति होती रहती है जब तक अन्तिम पद-मूल्य तक नहीं पहुंच जाते।

माध्य पर आधारित है, अत: माध्य के सभी दोष इसमें भी पाये जाते हैं, दूसरे चक्रीय प्रभावों को दूर करने में यह रीति सफल नहीं हो पाती है। इस प्रकार उपनति ज्ञात करने की यह रीति सन्तोषजनक नहीं है।

उदाहरण (Illustration) 1: निम्न आंकड़ों के आधार पर अर्ध-मध्यक रीति को अपनाकर प्रवृत्ति (Trend) की जानकारी करें :

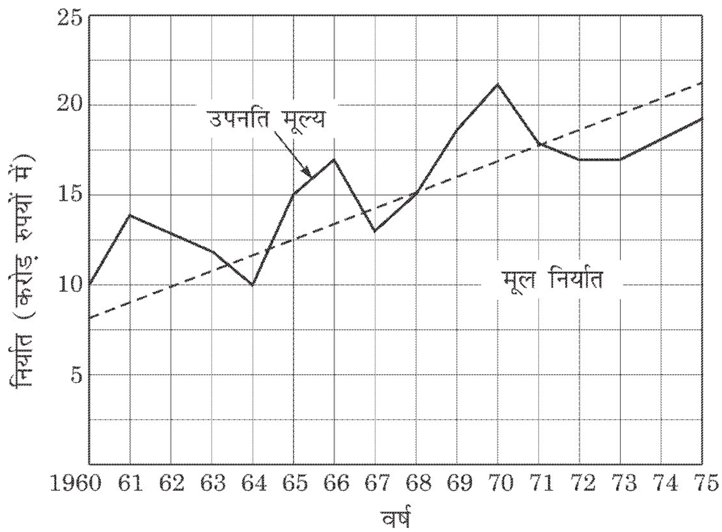
Determine the trend of the following data by semi-average method :

वर्ष (Year)	:	1960	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
निर्यात (करोड़ रु. में)	:	10	14	13	12	10	15	17	13	15	19	21	18	17	17	18	19

हल (Solution) :

वर्ष (Year)	**निर्यात** (Export)	
1960	10	
1961	14	
1962	13	
1963	12	माध्य, $\bar{x} = \frac{104}{8} = 13$
1964	10	मध्यका वर्ष, = 1963 – 1964
1965	15	
1966	17	
1967	13	
1968	15	
1969	19	
1970	21	
1971	18	माध्य, $\bar{x} = \frac{144}{8} = 18$
1972	17	मध्यका वर्ष, = 1971 – 1972
1973	17	
1974	18	
1975	19	

नोट



चित्र 25.1

हल (Solution) :

उपर्युक्त विधि को **गतिमान माध्य या चल माध्य** रीति कहा जाता है तथा माध्य निकालने में प्रयुक्त पदों की संख्या को **चल माध्य की अवधि** (Period of moving average) कहा जाता है। इस प्रकार प्राप्त चल माध्य बीच के समय बिन्दुओं के उपनति के माप लिए जाते हैं। यदि चल माध्य अवधि 4 ली लाए तो चल माध्य निम्न प्रकार होंगे–

$$\frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4}, \frac{v_2 + v_3 + v_4 + v_5}{4}, \ldots\ldots\ldots, \frac{v_6 + v_7 + v_8 + v_9}{4}$$

जब चल माध्य की अवधि एक सम-संख्या (2, 4, 6, 8, ...) हो तो किसी समय बिन्दु के सामने की उपनति का माप प्राप्त करने के लिए चल माध्यों को केन्द्रित किया जाता है। इसके लिए पूर्व में निकाले गए चल माध्यों के अवधि दो के चल माध्य निकाले जाते थे।

25.2 चल-माध्य रीति का उपयोग (Use of Moving Average Method)

चल माध्य रीति का प्रयोग उपनति का मापन करने के लिए किया जाता है। प्रत्येक गतिमान माध्य को बीच की समय अवधि के सामने लिखा जाता है। यदि समय अवधि एक सम-संख्या हो तो समय बिन्दु के सामने लिखने के लिए गतिमान माध्यों को केन्द्रित किया जाता है। ये चल माध्य ही उपनति मूल्य हैं। उपनति ज्ञात करने के बाद योगात्मक निदर्श $Y = T + S + C + I$ का प्रयोग करते हुए उपनति को निरसित कर दिया जाए तो $Y - T = S + C + I$ शेष रह जाता है। $(S + C + I)$ को प्राय: अल्पकालीन उच्चावचन की संज्ञा दी जाती है।

यदि काल-श्रेणी में किसी आवर्तिता (periodicity) का पता चलता है तो चल माध्य की अवधि आवर्तिता के बराबर लेने पर समस्त नियमित तथा अनियमित उच्चावचन दूर हो जाते हैं। आवर्तिता से तात्पर्य एक चक्र की अवधि से है। यदि काल-श्रेणी में चक्रों की अवधि समान नहीं है तो चल माध्य की अवधि चक्रों की औसतन अवधि से निधारित की जा सकती है। औसतन अवधि ज्ञात करने के लिए चक्रीय तरंगों के क्रमिक शिखरों (Successive crests) या क्रमिक निम्न बिन्दुओं (Successive troughs) के पारस्परिक अन्तर निकालकर उन अन्तरों का माध्य ज्ञात कर लिया जाता है।

नोट

टास्क आवर्तिता किसे कहते हैं?

सीमाएं–चल माध्य तकनीक की प्रमुख सीमाएं इस प्रकार हैं–

1. उपनति मूल्यों की गणना श्रेणी के सभी समय बिन्दुओं के लिए नहीं की जा सकती है। चल माध्य अन्त के वर्ष तक नहीं निकाले जा सकते और न उसको प्रथम वर्ष तक पीछे ले जाया जा सकता है। चल माध्य निकालने की अवधि जितनी अधिक होगी, उतने ही वर्ष छूट जाते हैं, जिनके लिए उपनति मूल्य नहीं निकाले जा सकते। उदाहरणस्वरूप, 3-वर्षीय चल माध्य निकालने में दो वर्ष छूट जाते हैं, एक श्रेणी में प्रारम्भ का वर्ष तथा एक श्रेणी में अन्त का वर्ष। 5-वर्षीय चल माध्य निकालने पर 4 वर्ष छूट जाते हैं, 2 वर्ष श्रेणी के प्रारम्भ के तथा 2 वर्ष श्रेणी के अन्त के। 7-वर्षीय चल माध्य निकालने पर 6 वर्ष छूट जाते हैं, 3 वर्ष श्रेणी के प्रारम्भ के तथा 3 वर्ष श्रेणी के अन्त के।
2. यदि चल माध्य की अवधि एक सम-संख्या (2, 4, 6, 8, ...) है तो किसी समय बिन्दु के सामने लिखने के लिए चल माध्यों को केन्द्रित (centred) करना आवश्यक है।
3. चल माध्यों की गणना करने की अवधि क्या हो, यह एक अन्य समस्या है। इसके लिए कोई गणितीय सूत्र नहीं है। यह पूर्णत: विश्लेषक के निर्णय पर निर्भर करता है।
4. क्योंकि चल माध्य का गणितीय फलन (Mathematical function) से प्रतिनिधित्व नहीं होता है, अत: यह रीति पूर्वानुमान के लिए सीमित रूप से ही उपयोगी है। पूर्वानुमान उपनति विश्लेषण का एक आधारभूत उद्देश्य होता है।
5. इस रीति के प्रयोग के लिए जो दशाएं आवश्यक होती हैं वे कभी भी व्यवहार में नहीं पाई जाती हैं। श्रेणी में कोई आकस्मिक परिवर्तन होने का प्रभाव चल माध्य पर पड़ता है।

नोट्स जब चल माध्य की अवधि तथा चक्रों की अवधि समान नहीं होती तो कोई भी चल माध्य चक्रीय उच्चावचनों को पूर्णत: दूर करने में असमर्थ रहता है।

25.3 मूल समंक एवं चल माध्यों को बिन्दुरेखीय-पत्र पर प्रांकित करना (Locate the Plot Original and Moving Average on the Dotted Paper)

मूल समंकों को y-अक्ष पर तथा समय को x-अक्ष पर लेकर उचित पैमाने पर (t, Y) बिन्दुओं को प्रांकित कर लिया जाता है फिर इन्हें क्रमश: सीधी रेखाओं से मिला दिया जाता है। इस प्रकार बने बिन्दु रेख को कालिक चित्र (Historigram) कहा जाता है।

उपनति मूल्यों को y-अक्ष पर तथा समय को x-अक्ष पर लेकर उसी पैमाने द्वारा (t, T) बिन्दुओं को प्रांकित कर लिया जाता है फिर उन्हें क्रमश: सीधी रेखाओं (जो पहली रेखाओं से अलग दिखाई दें) से मिला दिया जाता है।

चल माध्य को बिन्दुरेखीय-पत्र पर प्रांकित करने के सम्बन्ध में निम्नलिखित सिद्धान्तों को ध्यान में रखना चाहिए :

(*i*) यदि मौलिक समंकों को बिन्दुरेखीय-पत्र पर प्रांकित करने पर एक सरल रेखा बनती है तो चल माध्य के प्रांकण से भी वही सरल रेखा बनेगी।

(*ii*) यदि मौलिक समंकों द्वारा अवतल (concave) वक्र बनती है तो चल माध्य वक्र उसके नीचे होगा।

(*iii*) मौलिक समंकों की वक्र उत्तल (convex) होने पर चल माध्य वक्र उसके ऊपर होगा।

नोट

(*iv*) नियमित उच्चावचनों वाली श्रेणी में, चल माध्य उन उच्चावचनों को दूर कर देते हैं बशर्ते चल माध्य की अवधि तथा उच्चावचनों की अवधि समान हो।

(*v*) अनियमित उच्चावचनों को पूरी तरह से दूर नहीं किया जा सकता है। हां, उनको कम अवश्य किया जा सकता है। माध्य में पदों की संख्या जितनी अधिक होगी, अनियमित उच्चावचन उतने ही कम हो जाएंगे।

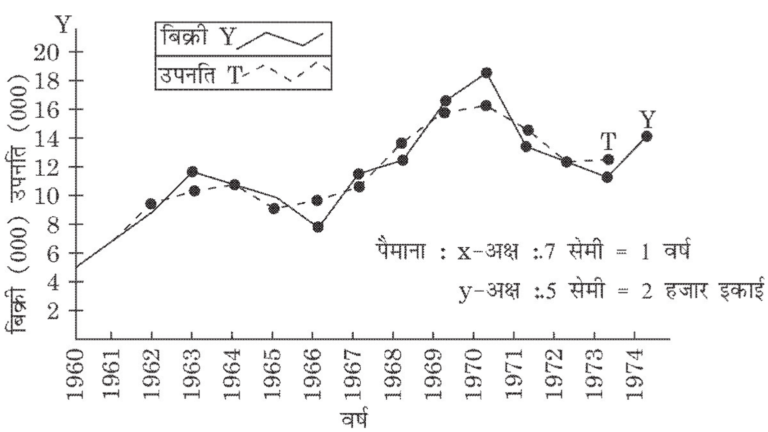
उदाहरण (Illustration) 2: निम्न आंकड़ों के लिए 3-वर्षीय चल माध्य रीति से उपनति ज्ञात कीजिए :

वर्ष	:	1960	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
बिक्री	:	5	7	9	12	11	10	8	12	13	17	19	14	13	12	15

मूल बिन्दुओं तथा उपनति मूल्यों को ग्राफ पर भी अंकित कीजिए।

हल (Solution) : प्रक्रिया—प्रत्येक तीन संख्याओं के माध्य को बीच की संख्या के सामने लिखें, इस प्रकार लिखने से 1960 के लिए तथा 1974 के लिए कोई उपनति मूल्य नहीं होगा। सुविधा के लिए पहले 3-वर्षीय चल-योग ज्ञात कर लें फिर प्रत्येक को 3 से भाग देकर 3-वर्षीय चल माध्य प्राप्त करें।

वर्ष	बिक्री ('000)	3-वर्षीय योग	3-वर्षीय चल माध्य
1960	5	–	–
1961	7	21	7.00
1962	9	28	9.33
1963	12	32	10.67
1964	11	33	11.00
1965	10	29	9.67
1966	8	30	10.00
1967	12	33	11.00
1968	13	42	14.00
1969	17	49	16.33
1970	19	50	16.67
1971	14	46	15.33
1972	13	39	13.00
1973	12	40	13.33
1974	15	–	–



चित्र 25.2

नोट

उदाहरण (Illustration) 3: निम्न काल-श्रेणी के लिए पंचवर्षीय चल माध्य ज्ञात कीजिए :

वर्ष (Year) :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
मूल्य (Price) :	55	52	49	53	54	60	57	55	57	61	65	64	61	59	65

हल (Solution) :

वर्ष	मूल्य	पंचवर्षीय चल योग	पंचवर्षीय चल माध्य
1	55	–	–
2	52	–	–
3	49	263	53
4	53	268	54
5	54	273	55
6	60	279	56
7	57	283	57
8	55	290	58
9	57	295	59
10	61	302	60
11	65	308	62
12	64	310	62
13	61	314	63
14	59	–	–
15	65	–	–

उदाहरण (Illustration) 4: निम्नलिखित आंकड़ों से सात-वर्षीय चल माध्य निकालिए तथा मूल समंकों एवं प्रवृत्ति मूल्यों को ग्राफ पेपर पर दर्शाइए :

वर्ष :	1	2	3	4	5	6	7	8
मूल्य :	23	26	28	32	20	12	12	10
वर्ष :	9	10	11	12	13	14	15	16
मूल्य :	9	13	11	14	12	9	3	1

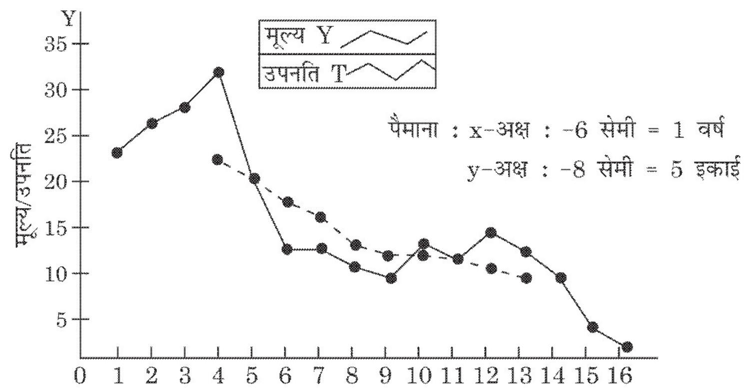
हल (Solution) :

वर्ष t	मूल्य Y	सात-वर्षीय चल-योग	सात-वर्षीय चल माध्य T (प्रवृत्ति मूल्य)
1	23	–	–
2	26	–	–
3	28	–	–
4	32	153	21.8
5	20	140	20.0
6	12	123	17.6
7	12	108	15.4
8	10	87	12.4
9	9	81	11.6
10	13	81	11.6
11	11	78	11.1

नोट

12	14	71	10.1
13	12	63	9.0
14	9	–	–
15	3	–	–
16	1	–	–

ग्राफ पेपर पर दर्शाना—वर्ष (*t*), *x*-अक्ष पर, मूल्य (Y), *y*-अक्ष पर (मोटी रेखा से) तथा सात-वर्षीय चल माध्य (T) *y*-अक्ष पर लें; मूल समंकों के लिए मोटी रेखाओं का प्रयोग करें तथा प्रवृत्ति मूल्यों के लिए डोटिड रेखा का प्रयोग करें।



चित्र 25.3

उदाहरण (Illustration) 4: चार-वर्षीय चल माध्य रीति से उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए :

वर्ष	: 1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
बिक्री	: 290	280	285	310	320	305	310	330	340	321	320

हल (Solution) : चार-वर्षीय चल-योग ज्ञात करें और उन्हें दूसरे तथा तीसरे के बीच में रखें। फिर चार-वर्षीय चल-योगों के लिए दो-वर्षीय चल-योग ज्ञात करें तथा तीसरे वर्ष के सामने लिखें (इस प्रक्रिया को चल-योग को केन्द्रित करना कहते हैं)। इन दो-वर्षीय चल-योगों को 8 से भाग देकर अभीष्ट चल माध्य प्राप्त करें :

वर्ष (1)	बिक्री Y ('000 रु.) (2)	चार-वर्षीय चल-योग (3)	दो-वर्षीय चल-योग (4)	उपनति ('000 रु.) $T = \frac{(4)}{8}$
1981	290	—	—	—
1982	280	1165	—	—
1983	285	1195	2360	295.0
1984	310	1220	2415	301.9
1985	320	1245	2465	308.1
1986	305	1265	2510	313.8
1987	310	1285	2550	318.7
1988	330	1301	2586	323.2
1989	340	1311	2612	326.5
1990	321	—	—	—
1991	320		—	—

नोट

उदाहरण (Illustration) 5: अग्रलिखित आंकड़ों का उपयोग करते हुए चल माध्य की अवधि 4 लेकर उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए :

वर्ष (Years)	गर्मी (Summer)	बरसात (Monsoon)	बसन्त (Autumn)	सर्दी (Winter)
1	30	81	62	119
2	33	104	86	171
3	42	153	99	221
4	56	172	129	235
5	67	201	136	302

हल (Solution) :

वर्ष एवं त्रैमासिक		मूल्य	4 त्रैमासिक योग	योग केन्द्रित	4 त्रैमासिक चल माध्य $T = \frac{(4)}{8}$
(1)		(2)	(3)	(4)	(5)
1	S.I	30	—	—	—
	M. II	81	—	—	—
	A. III	62	292	587	73
	W. IV	119	295	613	77
2	S.I	33	318	660	83
	M. II	104	342	734	92
	A. III	86	394	797	100
	W. IV	171	403	855	107
3	S.I	42	452	917	115
	M. II	153	465	980	123
	A. III	99	515	1,044	131
	W. IV	221	529	1,077	135
4	S.I	56	548	1,126	141
	M. II	172	578	1,170	146
	A. III	129	592	1,195	149
	W. IV	235	603	1,235	154
5	S.I	67	632	1,271	159
	M. II	201	639	1,345	168
	A. III	136	706	—	—
	W. IV	302	—		

उदाहरण (Illustration) 6: निम्न समंकों के लिए, चल माध्यों की विधि द्वारा चार-वर्षीय आधार मानते हुए, उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए–

1. **वैकल्पिक विधि**–पहले चार-वर्षीय चल माध्य ज्ञात करें फिर उन्हें केन्द्रित करने के लिए उनसे दो-वर्षीय चल-माध्य ज्ञात करें।

वर्ष	:	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
मूल्य	:	506	620	1036	673	588	696	116	738	663

(B.Com., Pass, Delhi 1988)

हल (Solution): **चार वर्षीय चल-माध्यों का परिगणन**

वर्ष	मूल्य	चार-वर्षीय चल योग	युग्मों के चल योग	चार-वर्षीय चल माध्य (Col. *iv* ÷ 8)
(*i*)	(*ii*)	(*iii*)	(*iv*)	(*v*)
1975	506			
1976	620			
	→	2835		
1977	1036	→	5752	719.0
	→	2917		
1978	673	→	5910	738.8
	→	2993		
1979	588	→	6066	758.3
	→	3073		
1980	696	→	6211	776.4
	→	3138		
1981	1116	→	6351	793.9
	→	3213		
1982	738			
1983	663			

25.4 चल-माध्यों की विशेषताएँ (Characteristics of Moving Average)

प्रवृत्ति विश्लेषण के संदर्भ में चल माध्यों की निम्न विशेषतायें उल्लेखनीय हैं–

(1) चल माध्य काल-श्रेणी की सरलित प्रवृत्ति को व्यक्त करते हैं। फलतः इनसे नियमित व अनियमित दोनों प्रकार के अल्पकालिक उच्चावचनों का विलोपन या निरसन (elimination) हो जाता है।

(2) यदि मूल-समंक उच्चावचन रहित हैं तो उनके चल-माध्य भी बिल्कुल वही होंगे अर्थात् मूल समंकों तथा चल-माध्यों की एक ही सरल रेखा अंकित होगी।

(3) चल माध्य वक्ररेखीय प्रवृत्ति (curvi-linear trend) की वक्रता को कम कर देते हैं। यदि मूल-समंकों का वक्र अवतल (concave) है तो चल माध्य का वक्र इससे नीचे होगा और मूल वक्र उत्तल (convex) होने पर वह उससे ऊपर होगा। हाँ! चल माध्य अवधि लम्बी होगी उसका वक्र मूल वक्र से उतना ही दूर होगा।

क्या आप जानते हैं चल माध्य अनियमित या दैव उच्चावचनों को पृथक (isolate) नहीं कर पाते, उन्हें केवल कम कर सकते हैं।

चल माध्य रीति के गुण

(1) उपनति ज्ञात करने की यह रीति समझने तथा प्रयोग की दृष्टि से अत्याधिक सरल है।

(2) इससे प्राप्त परिणाम परिशुद्ध होते हैं।

नोट

(3) यह रीति व्यक्तिनिष्ठ (subjective) न होने के कारण, पक्षपात से मुक्त है।

(4) इसमें लचनशीलता का भी गुण है।

(5) स्पष्ट आवधिक उच्चावचनों वाली काल श्रेणी के लिये यह रीति सर्वोपयुक्त है।

चल माध्य रीति के दोष

(1) चल-माध्यों की उचित अवधि (periodicity) निश्चित करना सरल कार्य नहीं है।

(2) यह रीति केवल नियमित परिवर्तनों वाली काल श्रेणी के लिए ही उपयुक्त है, अन्य श्रेणियों के लिए नहीं।

(3) चल-माध्य, समंकों में अनायास ही चक्रीय उच्चावचनों को जन्म देने की प्रवृत्ति रखते हैं।

(4) इस रीति का सबसे बड़ा दोष यह है कि प्रवृत्ति का मापन करते समय आरम्भ तथा अन्त के कुछ उपनति मूल्य स्वत: ही छूट जाते हैं।

(5) समान्तर माध्य की भाँति चल-माध्य भी बड़े पद-मानों (big sizes) से प्रभावित होकर सही प्रवृत्ति को विकृत कर देते हैं।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. दिए गए प्रश्नों को हल करें–

1. 2.3-वर्षीय चल माध्य के आधार पर उपनति की जानकारी प्राप्त करें।

वर्ष:	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
मूल्य:	10	15	12	18	15	22	19	24	20	26	22	30	25

2. निम्न काल-श्रेणी में तीन-वर्षीय चल माध्य की सहायता से प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए :

वर्ष:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
मूल्य:	11	12	9	8	14	15	18	16	17	19	21	24	28	30

3. निम्नलिखित काल-श्रेणी का 5-वर्षीय चल माध्य ज्ञात कीजिए:

वर्ष :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मूल्य :	110	104	78	105	109	120	115	110	114	122

4. निम्नलिखित समंकों का पांच-वर्षीय चल माध्य ज्ञात कीजिए:

वर्ष :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
मूल्य :	105	115	100	90	80	95	85	75	60	67

5. भारत में चाय के उत्पादन के आंकड़ों के लिए 4 वर्ष का चल माध्य प्रणाली से उपनति ज्ञात कीजिए :

वर्ष :	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
मूल्य :	464	515	518	467	502	540	557	571	586	612

6. चार-वर्षीय चल माध्य के आधार पर उपनति की जानकारी कीजिए–

वर्ष:	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
मूल्य :	15	16	17	17	16	18	19	20	19	20	21	21

25.5 सारांश (Summary)

- चल-माध्य काल-श्रेणी के समंकों के 'विशिष्ट' समान्तर माध्य होते हैं। चल माध्य और समान्तर माध्य में मुख्य अन्तर यह है कि समान्तर माध्य पूरे समय के लिए एक-ही होता है जबकि चल-माध्य अनेक होते हैं।

- माध्य निकालने में प्रयुक्त पदों की संख्या को **चल माध्य की अवधि** (Period of moving average) कहा जाता है।
- चल माध्य रीति का प्रयोग उपनति का मापन करने के लिए किया जाता है।
- आवर्तिता से तात्पर्य एक चक्र की अवधि से है।
- औसतन अवधि ज्ञात करने के लिए चक्रीय तरंगों के क्रमिक शिखरों (Successive crests) या क्रमिक निम्न बिन्दुओं (Successive troughs) के पारस्परिक अन्तर निकालकर उन अन्तरों का माध्य ज्ञात कर लिया जाता है।
- चल माध्य निकालने की अवधि जितनी अधिक होगी, उतने ही वर्ष छूट जाते हैं, जिनके लिए उपनति मूल्य नहीं निकाले जा सकते।
- अनियमित उच्चावचनों को पूरी तरह से दूर नहीं किया जा सकता है। हां, उनको कम अवश्य किया जा सकता है। माध्य में पदों की संख्या जितनी अधिक होगी, अनियमित उच्चावचन उतने ही कम हो जाएंगे।

25.6 शब्दकोश (Keywords)

- **निदर्श—** मॉडल, नमूना।
- **आवर्तिता—** बार-बार होना।
- **निरसन—** दूर करना, हटना।

25.7 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. गतिमान (या चल) माध्य की विधि पर प्रकाश डालिए तथा इसे उदाहरण देकर समझाइए।
2. चल माध्य रीति का उपयोग लिखिए तथा इसके गुण एवं दोष बताइए।
3. चल-माध्य विधि की सीमाओं पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
4. मूल समंक एवं चल माध्यों को बिन्दुरेखीय-पत्र पर किस प्रकार प्रांकित करेगें? उदाहरण देकर समझाइए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 12.3, 15, 15, 18.3, 18.7, 21.7, 21, 23.5, 22.7, 26, 25.7, –
2. 10.7, 9.7, 10.3, 12.3, 15.7, 16.3,17, 17.3, 19, 21.3, 24.3, 27.3, –
3. 101.2, 103.2, 105.4, 111.8, 113.6, 116.2, –, –
4. –, –, 96, 94, 88, 83, 77, 74.4, –, –
5. –, –, 495.8, 503.6, 511.6, 529.5, 553.0, 572.5, –, –
6. –, –, 16.38, 16.75, 17.25, 17.88, 18.62, 19.25, 19.25, 20.12, –, –

25.8 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. साँख्यिकी, प्रो. पी. आर. गग्गड़; रिसर्च पब्लिकेशन्स, 89, त्रीपोलिया बाजार, जयपुर

नोट

इकाई–26: प्रायिकता का सिद्धांतः परिचय एवं उपयोग (Theory of Probability: Introduction and Uses)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- प्रायिकता सिद्धांत के प्रादुर्भाव एवं विकास की व्याख्या करने में।
- प्रायिकता का अर्थ एवं परिभाषा को समझने में।
- प्रायिकता सिद्धांत के उपयोग की विवेचना करने में।

प्रस्तावना (Introduction)

अनिश्चितता हमारे जीवन का एक अभिन्न अंग है। यद्यपि भविष्य के बारे में सही जानकारी होना मानवीय शक्ति से परे की बात है, लेकिन इन भावी घटनाओं के प्रति हम अपना अनुमान प्रायः प्रायिकता के रूप में व्यक्त करते हैं। भले ही ये अनुमान शत-प्रतिशत ठीक हों अथवा शत-प्रतिशत गलत। उदाहरण के तौर पर, पैदा होने वाला शिशु 5 लाख का ड्राफ्ट होगा या 10 लाख की हुण्डी, भावी पत्नी चन्द्रकान्ता होगी या सुपर्णखा का अवतार, लाटरी की टिकट आपको लखपति बनाएगी या नहीं, वास्तव में, भविष्य के बारे में इन कल्पनाओं (प्रत्याशा) के सहारे ही मनुष्य जीता है। इसी प्रकार सिक्का उछालने पर उसके चित (head) गिरने की सम्भावना $\frac{1}{2}$ है, अगले चुनाव में भी भाजपा सरकार के जीतने की प्रबल सम्भावना है, भारत के विश्व क्रिकेट कप जीतने की 90% प्रायिकता है, 21वीं शताब्दी के प्रथम दशक में मानव के मंगल-ग्रह (Mars) पर कदम रखने की 70% सम्भावना है इत्यादि।

नोट

26.1 प्रायिकता सिद्धान्त का प्रादुर्भाव एवं विकास (Origin and Development of Theory of Probability)

सामान्य जीवन में सम्भावना या प्रायिकता (Probability) शब्द का प्रयोग प्रायः मिलता है। परन्तु वास्तव में सम्भावना सिद्धान्त के अध्ययन की प्रेरणा सबसे पहले सत्रहवीं शताब्दी में यूरोप में जुआरियों (gamblers) से प्राप्त हुई जो भाग्य देवी (Goddess fortune) या अन्धविश्वास से निराश होकर जुए में जीतने के अवसरों से सम्बन्धित समस्याओं के समाधान के लिए तत्कालीन गणितज्ञों की सहायता लेते थे। उस समय के प्रसिद्ध गणितज्ञों जैसे गैलिलीयो (Galileo), पास्कल (Pascal), फर्मेट (Fermat), कारदेनो (Cardeno), आदि ने अवसरों की समस्या (Problem of chances) को सुलझाने में गणितीय अध्ययन किये, जिसके कारण सम्भावना सिद्धान्त (Theory of Probability) का प्रादुर्भाव हुआ।

अठारहवीं शताब्दी के अन्तिम भाग एवं उन्नीसवीं शताब्दी में सम्भावना सिद्धान्त स्वयं शास्त्रीय रुचि (academic interest) का विषय बन गया। लाप्लास (Laplace), गॉस (Gauss), डी मायवरे (De Moivre), निकोलस (Nicholas), बर्नोली (Bernoulli), यूलर (Euler), आदि गणितज्ञों ने इस सिद्धान्त को विकसित कर वित्तीय, जल-स्वास्थ्य, आर्थिक, व्यावसायिक, राजनीतिक एवं सैनिक क्षेत्रों की समस्याओं के स्पष्टीकरण एवं समाधान हेतु इसका प्रयोग किया। बीसवीं शताब्दी में आर. ए. फिशर (R.A. Fisher), कार्ल पियर्सन (Kark Pearson) तथा जे. नेमैन (Neyman) ने सम्भावना सिद्धान्त पर आधारित न्यादर्श सिद्धान्त (Sampling theory) का विकास किया और आज सम्भावना सिद्धान्त व्यापक रूप में विद्यमान है जिसका अनिश्चितता के क्षेत्र में सर्वाधिक प्रयोग होता है।

इमाइल बोरेल (Emile Borel) ने ठीक ही कहा है कि **"सम्भावना सिद्धान्त का महत्व केवल ताश अथवा पासा खेलने वालों जो कि इसके जनक कहे जाते हैं, के लिए ही नहीं है वरन् उन सभी कार्यशील व्यक्तियों, उद्योगों के अध्यक्षों, सेनानायकों, आदि के लिए भी उनका महत्व है जिनकी सफलता निर्णयों पर निर्भर करती है जो स्वयं दो प्रकार के कारकों पर निर्भर करती है–प्रथम ज्ञात अथवा गणना योग्य तथा दूसरे अनिश्चित तथा सम्भावित।"**

प्रायिकता या सम्भावना सिद्धान्त का महत्व उन क्षेत्रों में अधिक है जहां अनिश्चितता के वातावरण में भावी अनुमान लगाये जाते हैं। निःसन्देह भौतिकशास्त्र एवं खगोलशास्त्र की तुलना में सम्भावना सिद्धान्त का प्रयोग आर्थिक एवं व्यापारिक क्षेत्र में नया ही है, परन्तु सांख्यिकी विज्ञान के विस्तार तथा समंकों के अधिकाधिक प्रयोग के कारण इस सिद्धान्त के विकास की आशा और बढ़ी है। वर्तमान में आर्थिक एवं व्यापारिक जटिलतम समस्याओं के संख्यात्मक विश्लेषण में सम्भावनात्मक विधियां अनिवार्य होती जा रही हैं। विविध वैकल्पिक निर्णयों में श्रेष्ठतम निर्ण का चयन करना होता है, जिसके लिए अनिश्चितता को संख्यात्मक रूप से व्यक्त करना आवश्यक होता है। आज जीवन की अनिश्चिततापूर्ण क्रियाओं में सम्भावना सिद्धान्त का प्रयोग ही उपयोगी है।

नोट्स प्रायिकता सिद्धांत आधुनिक गणित की अत्यन्त रोचक शाखाओं में से एक है और ज्ञान के विविध क्षेत्रों में अपने विस्तृत अनुप्रयोगों के कारण महत्त्वपूर्ण सिद्ध हो चुका है।

26.2 प्रायिकता का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Probability)

प्रायिकता का अर्थ है कि–"घटना के घटने, लेकिन पूर्ण निश्चित रूप से नहीं की सम्भावना इस संबंध में प्रायिकता की परिभाषाओं के अध्ययन को निम्न तीन विचारधाराओं में विभाजित किया जा सकता है–

1. प्रायिकता की परम्परावादी अथवा गणितीय विचारधारा (Classical or Mathematical Approach of Probability)

नोट

2. प्रायिकता की अनुभविक अथवा सांख्यिकीय विचारधारा (Empirical statistical Approach of Probability)
3. प्रायिकता की आत्मचेतना अथवा विषयगत विचारधारा (Personalistic of Subjective Approach of Probability)
4. प्रायिकता की सूक्ति संबंधी अथवा आधुनिक विचारधारा (Axiomatic or Morden Approach to Probability)

1. प्रायिकता की परंपरावादी अथवा गणितीय विचारधारा

(Classical or Mathematical Approach of Probability)

प्रायिकता के अर्थ एवं मापन के संबंध में यह सबसे सरल और प्राचीन विचारधारा है और इस आधार पर निकाली गई प्रायिकता को तर्कपूर्ण या स्वयंसिद्ध प्रायिकता भी कहते हैं। Laplace ने लिखा है कि–"अनुकूल घटनाओं का समान सम्भावना वाली सम्पूर्ण घटनाओं के साथ अनुपात ही प्रायिकता है।"

$$\text{घटना घटने की प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिस्थितियों की सं.}}{\text{समस्त सम्भावित परिस्थितियों की सं.}}$$

Example: एक थैले में 4 लाल तथा 5 सफेद गेंद है तो थैले में से एक गेंद निकालने की दशा में उसके लाल होने की प्रायिकता 4/9 होगी। क्योंकि अनुकूल परिस्थितियों की संख्या 4 है तथा कुल सम्भावित परिस्थितियाँ (थैले में सभी गेदों की संख्या) 9 है।

परम्परावादी विचारधारा के आधार पर गणितीय रूप में प्रायिकता की गणितीय परिभाषा भी दी जाती है। उसके अनुसार यदि कोई घटना m बार हो सकती है और n बार नही हो सकती तथा सभी घटना समान रूप से घटित होने वाली है तो घटना के घटने की प्रायिकता $p = \frac{m}{m+n}$ तथा घटना न होने की प्रायिकता $q = \frac{n}{m+n}$। यह ध्यान रहे कि $p + q = 1$ अर्थात $p = 1 - q$ अथवा $q = 1 - p$ होता है।

Example: एक पासा फेकने पर उसके ऊपरी भाग पर 3 या 4 का अंक आने की प्रायिकता ज्ञात करनी है तो 3 या 4 दो घटनाये है, जिन्हें m कहा जायेगा। इसके अतिरिक्त 1, 2, 5 और 6 अर्थात घटनायें है जिन्हें n कहेंगे। इस आधार पर 3 या 4 अंक आने की प्रायिकता $= \frac{2}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$।

2. प्रायिकता की अनुभाविक अथवा सांख्यिकीय विचारधारा

(Empirical or Statistical Approach of Probability)

प्रायिकता की इस विचारधारा के आधार पर गणना की गई कि प्रायिकता को "सापेक्ष आवृत्ति प्रायिकता" (Relaive Exequency Probability) अथवा उत्तरवर्ती प्रायिकता (Posterior Probability) भी कहते हैं।

इस विचारधारा के आधार पर उपलब्ध समंकों या आवृत्तियों अथवा अनुभवो के आधार पर प्रायिकता की गणना की जाती है।

Example: पिछले वर्ष के आँकड़ों में पाया गया कि लगभग 10% उत्पाद घटिया किस्म का बनता है। चालू वर्ष में 500 वस्तुओं का उत्पादन होना है तो पिछले समंकों के आधार पर यह कहा जा सकता है कि 500 × 10/100 = 50% वस्तुयें घटिया किस्म की होगी।

इस विचारधारा के अनुसार सरल सूत्र में प्रायिकता की गणना को निम्न प्रकार से रखा जा सकता है–

$$p = \frac{r}{n}$$

r = Relative frequency

n = Number of items

Example: एक मशीन द्वारा बनाये गये 1000 उत्पादों में 40 घटिया किस्म के है तो घटिया किस्म के समान की

नोट

प्रायिकता $= \dfrac{40}{1000} = \dfrac{1}{25} = 0.4$ होगी।

3. प्रायिकता की आत्मचेतन अथवा विषयगत विचारधारा

(Personalistic or Subjective Approach of Probability)

प्रायिकता भी इस विचारधारा में यह माना गया कि प्रायिकता की गणना में व्यक्ति के पास उपलब्ध अपनी जानकारी, विश्वास एवं अनुभाव का भी प्रभाव पड़ता है। इसी आधार पर समय विशेष पर एक ही घटना के बारे में दो विभिन्न व्यक्ति विभिन्न प्रायिकता की गणना करते हैं।

Example: चुनाव के समय कुछ व्यक्ति एक प्रत्याशी की जीत तो कुछ अन्य व्यक्ति किसी दूसरे प्रत्याशी की जीत निश्चित मानते हैं। एक ही समय पर कुछ व्यक्ति तेजी की आशा करके शेयर का क्रय करते है, तो कुछ व्यक्ति मंदी का अनुमान लगाकर अंशो का विक्रय करते है। स्पष्ट है कि इस माप के अन्तर्गत प्रायिकता की गणना के लिए उपलब्ध समंको के साथ ही व्यक्तिगत अनुमान, विश्वास, आशाओं और अनुभवों को भी ध्यान में रखा जाता है।

4. प्रायिकता की सूक्ति संबंधी अथवा आधुनिक विचारधा

(Axiomatic or Modern Approach to probability)

रूसी गणितशास्त्री A.N. Kolmogorou (मोगेसोत) ने 1935 में प्रकाशित अपनी पुस्तक Foundations of Probability में एक नयी विचारधारा का विकास किया जो प्रायिकता की गणितीय एवं सांख्यिकीय विचारधाराओं के मिश्रण पर आधारित है और इसमें प्रायिकता को समुच्चय फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसमें प्रमुख सूक्तियाँ तथा आधार भूत नियम निम्न प्रकार से है–

- किसी घटना की प्रायिकता 0 से 1 की सीमाओं के अन्तर्गत होता है। यदि घटना का होना असम्भव हो तो इसकी प्रायिकता 0 होगी और यदि किसी घटना का होना पूर्ण निश्चित है तो इसकी प्रायिकता 1 होगी।
- मान लो सभी प्रतिदर्श समूहों की प्रायिकता 1 होती है अर्थात $P(s) = P_1 + P_2 + P_3 - P_n = 1$

Example: एक थैले में 4 लाल, 3 काली और 5 सफेद गेंद है तो एक गेंद निकालने पर उसके लाल, काली सफेद होने की प्रायिकता क्रमश: 4/12, 3/12 तथा 5/12 होगी जिनका योग = 1 होगा।

प्रायिकता की अभिव्यक्ति–प्रायिकता एक गणितीय माप है जिसे समान गणितीय मान वाले विभिन्न रूपों में रखा जा सकता है ये रूप भिन्न दशमलव प्रतिशत या संयोगानुपात हो सकते हैं।

Example: एक सिक्का उछालने पर चित आने की प्रायिकता भिन्न के रूप में 1/2, दशमलव के रूप में 0.5 प्रतिशत के रूप में 50% और संयोगानुपात के रूप में 1 : 1 होगी यह ध्यान रहे कि प्रायिकता की सीमा 0 से 1 तक होती है। यदि प्रायिकता 0 है तो इसका अर्थ है कि घटना असम्भव घटना है। इसके विपरीत यदि प्रायिकता 1 आती है तो घटना का होना पूर्ण निश्चित है।

टास्क प्रायिकता की सूक्ति संबंधी विचारधारा क्या है?

प्रायिकता की गणना

सामान्य रूप से प्रायिकता की गणना करने की निम्न क्रिया है–

(1) घटना से सम्बन्धित सभी अनुकूल एवं प्रतिकूल सम्भावित अनुपूरक घटनाओं की संख्या ज्ञात की जाती है।

(2) घटना के घटित होने के अनुकूल परिस्थितियों की संख्या निकाल ली जाती है।

(3) घटना की अनुकूल परिस्थितियों की संख्या को सभी सम्भाव्य परिस्थितियों की कुल संख्या से भाग देकर प्रायिकता का माप ज्ञात कर लिया जाता है।

नोट

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिस्थितियों की संख्या}}{\text{कुल सम्भाव्य परिस्थितियों की संख्या}}$$

उदाहरण (Illustration) 1: (1) एक पासे को फेंकने पर 3 से अधिक बिन्दु वाले परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता बताइए।

(2) 52 ताशों की एक गड्डी में से यादृच्छिक रूप से एक पत्ता निकाला जाता है। इस बात की क्या सम्भावना है कि वह (*i*) एक बेगम होगी, (*ii*) काले रंग का होगा, (*iii*) एक ईंट का बादशाह होगा?

हल Solution : (1) एक पासे में कुल 6 अंक होते हैं जो 1, 2, 3, 4, 5, 6 हैं।

3 से अधिक मात्रा के बिन्दुओं (4, 5, 6) की संख्या 3 है अतः 3 से अधिक बिन्दुओं वाले परिणामों के प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ होगी।

(2) (*i*) 52 पत्तों की ताश की गड्डी

कुल पत्तों की संख्या = 52

कुल बेगमों की संख्या = 4

अतः बेगम निकलने की प्रायिकता = $\frac{4}{52}$

(*ii*) काले रंग के पत्तों की संख्या = 26

काले रंग के पत्ते के निकलने की प्रायिकता= $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

(*iii*) ईंट का बादशाह निकलने की सम्भावना = $\frac{1}{52}$

क्योंकि ईंट के बादशाह की संख्या = 1

उदाहरण Illustration 2 : अंग्रेजी वर्णमाला में 5 Vowel में से कोई एक निकालने की सम्भावना बताइए।

हल Solution : अंग्रेजी वर्णमाला में कुल अक्षरों की संख्या = 26

कुल Vowel = 5 (*a, e, i, o, u*)

अतः Vowel चुनने की प्रायिकता होगी = $\frac{5}{26}$

उदाहरण Illustration 3 : टिकटों पर 1 से लेकर 50 अंक डाले गए हैं तथा उन टिकटों में से यादृच्छिक रूप से निकाला गया टिकट एक विषय अंक होगा, (*ii*) 3 या 5 का गुणक होगा, (*iii*) या एक ऐसा अंक होगा जो 7 से विभाज्य हो।

हल Solution : टिकटों पर 1 से लेकर 50 अंक डाले गए तो कुल अंकों की संख्या = 50 होगी।

(1) कुल विषम अंक क्रमशः (1, 3, 5, 7, 9, ...49) 25 होंगे।

तो विषम अंक चुनने की सम्भावना = $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ होगी।

(2) टिकटों पर 1 से लेकर 50 अंक डाले गये हैं।

3 से विभाज्य संख्या क्रमशः 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48 है।

3 से विभाज्य कुल संख्या = 16

नोट

$$3 \text{ से विभाज्य संख्या की प्रायिकता} = \frac{16}{50}$$

इसी प्रकार 5 से विभाज्य संख्या होगी।

5 से विभाज्य संख्या (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50)

$$5 \text{ से विभाज्य संख्या} = \frac{10}{50}$$

$$5 \text{ से विभाज्य संख्या की प्रायिकता} = \frac{10}{50}$$

परन्तु 30 और 45 दो संख्याएँ ऐसी हैं जो 3 व 5 दोनों से विभाज्य हैं अत: कुल प्रायिकता

$$= \frac{16}{50} + \frac{10}{50} - \frac{2}{50}$$

$$= \frac{26-2}{50} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

26.3 प्रायिकता सिद्धांत का प्रयोग (Uses of Probability Theory)

इनमें तो कोई संदेह नहीं कि प्रायिकता सिद्धांत आज भी जुआरियों, ताशबाजों पासा फेंकने वालों और सटोरियों का एक विश्वासपात्र साथी है लेकिन इसका पासा उपयोग उन क्षेत्रों में भी अत्यधिक है जहाँ घटनाएँ अनिश्चित होती हैं और भावी अनुमान लगाना आवश्यक समझा जाता है। एकाइल बोरेल के शब्दों में "प्रायिकता सिद्धांत केवल अपने जन्मदाताओं (ताशबाजों व पासा फेंकने वालों) के लिए ही रुचि का विषय नहीं रहा बल्कि आर्थिक क्रियाओं को संपन्न करने वाले उन सभी व्यक्तियों उद्योगपतियों तथा सेनापतियों के लिए भी उतना ही उपयोगी है जिनकी सफलता सही निर्णय पर आधारित होती है।"

प्रायिकता सिद्धांत गणित की अत्यन्त रोचक शाखाओं में से एक है और अनेक विज्ञानों की आधारशिला है। क्राक्सटेन एवं काउडेन (Croxton and Cowden) के अनुसार, "संभावना तर्क का प्रयोग आधुनिक युग में जुआ, बीमा, सैद्धान्तिक भौतिक, प्राणीशास्त्र, अर्थशास्त्र तथा ऐसे ही अनेक अन्य क्षेत्रों में भी किया जाता है।" संक्षेप में (*i*) प्राकृतिक एवं सामाजिक विषयों के लक्षणों की जानकारी करने (*ii*) व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाने (*iii*) प्रतिचयन प्रणाली को परिपक्वता प्रदान करने तथा (*iv*) बीमा संबंधी कार्यों को विशिष्टता प्रदान करने में प्रायिकता सिद्धांत का उपयोग होता है।

प्रायिकता सिद्धांत का प्रयोग बर्नोली प्रमेय तथा बेज प्रमेय में भी किया गया है–

बर्नोली प्रमेय या द्विपद प्रमेय (Bernoulli's or Binomial Theorem)

प्रायिकता के सन्दर्भ में किसी यादृच्छिक प्रयोग को एक बार करना उसका परीक्षण (Trail) कहा जाता हैं जिस प्रयोग के सम्भव परिणाम (Possible Outcome) केवल दो होते हैं (या उन्हें दो बना लिया जाता है)) उस प्रयोग को एक बार करने को बर्नोली परीक्षण (Bernoulli's Trail) कहा जाता है। यहां एक परिणाम को सफलता (Success) तथा दूसरे परिणाम को असफलता (Failure) कहा जाता है। एक प्रयास में सफलता की प्रायिकता को p तथा असफलता की प्रायिकता को q से निरूपित किया जाता है जहां $q + p = 1$.

यदि p का मान समान रहे और बर्नोली प्रयोग को n बार दोहराया जाय [अर्थात् n परीक्षण स्वतन्त्र (independent trails) हों] तो इस मिर परीक्षण को **स्वतन्त्र पुनरावृत्त बर्नोली परीक्षण** (Independent Repeated Bernoulli Trails) कहा जाता है। इस परीक्षण की विशेषताएं अग्रलिखित हैं–

नोट

(*i*) प्रत्येक परीक्षण के पारस्परिक अपवर्जी (mutually exclusive) परिणाम दो होते हैं जिन्हें 'सफलता' तथा 'असफलता' के नाम से जाना जाता है। ध्यान रहे कि 'सफलता' तथा 'असफलता' को दो सम्भव परिणामों के रूप में माना जाना चाहिए न कि उनको शाब्दिक अर्थ के रूप में।

(*ii*) एकक परीक्षण (individual trial) की सफलता की प्रायिकता का संकेताक्षर 'p' होता है तथा असफलता की प्रायिकता का संकेताक्षर 'q' होता है; $q + p$ का मान 1 होता है। अर्थात् $q + p = 1$, या $q = 1 - p$, आदि।

(*iii*) किसी एक परीक्षण के परिणाम का प्रभाव आगे किये जाने वाले परिक्षणों के परिणाम पर नहीं पड़ना चाहिए अर्थात् परीक्षण स्वतन्त्र होने चाहिये जिससे सफलता की प्रायिकता 'p' का मान (अतः असफलता की प्रायिकता 'q' का मान भी) विभिन्न परीक्षणों में समान रहता है।

बर्नोली प्रमेय का द्विपद प्रमेय

$$(q + p)^n = q^n + {}^nC_1\, q^{n-1} p + {}^nC_2\, q^{n-2} p^2 + \ldots + {}^nC_r\, q^{n-r} + \ldots + p^n$$

का प्रयोग स्वतन्त्र पुनरावृत्त बर्नोली परीक्षणों की स्थिति में व्यवहार में लाया जा सकता है।

यदि n स्वतन्त्र बर्नोली परीक्षणों की स्थिति में,

p = एक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता

q = एक परीक्षण में असफलता की प्रायिकता

r = सफलताओं की संख्या

$n - r$ = असफलताओं की संख्या

$p(r) = {}^nC_r\, p^r q^{n-r}$ या ${}^nC_r\, q^{n-r} p^r$ होगी,

$r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n.$

यह प्रायिकता द्विपद प्रमेय या बर्नोली प्रमेय $(q + p)^n$ के प्रसार में $(r + 1)$ वां पद है।

इस प्रकार,

0 सफलता की प्रायिकता, $p(0) = q^n$

1 सफलता की प्रायिकता, $p(1) = {}^nC_1\, q^{n-1} p$

2 सफलता की प्रायिकता, $p(2) = {}^nC_2\, q^{n-2} p^2$

....

n सफलताओं की प्रायिकता, $p(n) = p^n$.

उदाहरण (Illustration) 4: एक सिक्के को दो बार उछालने पर 0, 1, 2 बार शीर्ष आने की प्रायिकता बताइए।

हल (Solution): माना शीर्ष आना = सफलता

पुच्छ आना = असफलता

एक बार उछालने पर सफलता की प्रायिकता, $p = \frac{1}{2}$

एक बार उछालने पर असफलता की प्रायिकता, $q = \frac{1}{2}$.

दो सिक्के एक साथ उछालने पर या (एक सिक्के को दो बार उछालने पर) सम्भव परिणाम निम्न प्रकार होंगे:

परिणाम	सफलताओं की संख्या	प्रायिकता
TT	0	$q^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
TH	1	$qp = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

नोट

HT	1	$pq = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
HH	2	$pp = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

इस प्रकार,

0 सफलता की प्रायिकता $= q^2 = \frac{1}{4}$

1 सफलता की प्रायिकता $= {}^2C_1\, pq = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

2 सफलताओं की प्रायिकता $= p^2 = \frac{1}{4}$

उदाहरण (Illustration) 5: एक सिक्के को 4 बार उछालने पर (*i*) सभी चित्त आने की, (*ii*) 2 चित्त और 2 पट आने की तथा (*iii*) 2 या 3 बार चित्त आने की प्रायिकता बताइए।

हल (Solution) : बर्नोली प्रमेय के संकेतन में

यहां $n = 4, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

$p(r) = n$ प्रयासों में सफलता आने की प्रायिकता $= {}^nC_r q^{n-r} p^r \,.\, r = 0, 1, 2, ..., n$

(*i*) 4 चित्त (सफलता) आने की प्रायिकता $p(4) = p^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

(*ii*) 2 चित्त (सफलता) आने की प्रायिकता, $p(2) = {}^4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

[अर्थात् 2 चित्त तथा 2 पट आने की प्रायिकता]

$$= 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(*iii*) 3 चित्त (सफलता) आने की प्रायिकता, $p(3) = {}^4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

2 या 3 बार चित्त आने की प्रायिकता $= p(2) + p(3)$

$$= \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

उदाहरण (Illustration) **6:** 5 ऐसे सिक्के उछाले गये जिनके पृष्ठों पर 2 और 3 लिखा है। योग 12 प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

हल (Solution): बर्नोली प्रमेय $(q + p)^n = q^n + {}^nC_1\, q^{n-1}\, p + ... + {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r + ... + p^r$

के अनुसार यहां

नोट

$n = 5,$ $p = 3$ आने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{2}$

r सफलताओं की प्रायिकता, $p(r) = {}^{n}C_r\, q^{n-r}\, p^r$

योग 12 केवल एक तरह से हो सकता है $(2 + 2 + 2 + 3 + 3)$

अत:योग 12 होने की प्रायिकता = 2 सफलताओं की प्रायिकता

$$= {}^{n}C_2\, q^{n-2}\, p^2$$

$$= {}^{5}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

उदाहरण (Illustration) 7: चार ताश के पत्ते बिना पुनर्स्थापित किये खींचे जाते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि चारों इक्के होंगे?

हल (Solution): अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{4}{52} \times \dfrac{4}{52} \times \dfrac{4}{52} \times \dfrac{4}{52} = \left(\dfrac{1}{13}\right)^4$

उदाहरण (Illustration) **8:** 3 पासों को एक साथ फेंकने पर तीनों पासों में सम संख्या आने की प्रायिकता है?

हल (Solution): बर्नोली प्रमेय के संकेतो में, यहाँ

$n = 3,$ एक पासे पर सम संख्या आना = सफलता

सफलता की प्रायिकता, $p = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

असफलता की प्रायिकता, $q = \dfrac{1}{2}$

तीनों पासों पर सम संख्या आने की प्रायिकता, $p(3) = p^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}.$

उदाहरण (Illustration) 9: यदि हवाई जहाजों के देरी से उड़ने का अनुपात 0.4 हो तो 10 हवाई जहातों में से 4 हवाई जहाजों के देरी से उड़ने की प्रायिकता क्या है।

हल (Solution): बर्नोली प्रमेय के संकेतों में

एक हवाई जहाज का ही समय पर उड़ना = सफलता

एक हवाई जहाज का देरी से उड़ना = असफलता

सफलता की प्रायिकता, $p = 1 - 0.4 = 0.6$

असफलता की प्रायिकता, $q = 0.4$

$n = 10$

अभीष्ट प्रायिकता $p(4) = {}^{10}C_4\, (0.4)^4\, (0.6)^6$

$$= \frac{10!}{4!\,6!} \left(\frac{4}{10}\right)^4 \left(\frac{6}{10}\right)^6$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \left(\frac{4}{10}\right)^4 \left(\frac{6}{10}\right)^6$$

$$= 210 \times \left(\frac{4}{10}\right)^4 \left(\frac{6}{10}\right)^6$$

$$= 210 \times (.0256)\ (.046656)$$
$$= 0.2508$$

उदाहरण (Illustration) 10: एक कटोरे में 4 लाल गेंदें तथा 6 हरी गेंदें हैं। प्रतिस्थापन के साथ 5 गेंदें निकाली जाती हैं। 3 या 4 हरी गेंदें निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल (Solution): बर्नोली प्रमेय के संकेतन में

एक हरी गेंद निकालना, सफलता

एक लाल गेंद निकालना, असफलता

$n = 5,$ सफलता की प्रायिकता, $p = \dfrac{6}{10} = .6$

सफलता की प्रायिकता $= \dfrac{4}{10} = .4$

सूत्र– $p(r) = {}^nC_r\, q^{n-r} p^r$, से

$$p(3) = {}^5C_3\ (.4)^2\ (.6)^3 = 10 \times (.16) \times (.216) = .34560$$
$$p(4) = {}^5C_4\ (.4)\ (.6)^4 = 5 \times 4 \times (.1296) = .25290$$

अभीष्ट प्रायिकता $= p(3) + p(4) = .34560 + 2.5920 = .6048$

बेज प्रमेय (Bej Theorem)

प्रायिकता सिद्धान्त के अनेक परिणामों (अनुप्रयोगों) में से सबसे रोचक एवं महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है–नई सूचना (प्रतिदर्श) के आधार पर अज्ञात प्रायिकताओं की अनुमान लगाना और विवेकपूर्ण निर्णयन करना। जोखिम जीवन का अभिन्न अंग है और व्यवसाय का तो यह पर्यायवाची है। वास्तव में, इस जोखिम को कम करने के लिए बेज प्रमेय, नई सूचना के आधार पर पूर्ववर्ती प्रायिकता को संशोधित करके अनिश्चितताओं के बीच विवेकपूर्ण निर्णयन में सहायक होता है। इस अनूठी अभिकल्पना का प्रतिपादन ब्रिटिश गणिताचार्य रेवरेण्ड टॉमस बेज (Reversend Thomas Bayes—1702-1761) द्वारा किया गया था। उनकी मृत्यु के दो वर्ष बाद 1763 में उनका प्रकाशित लघु शोध-प्रबन्ध इस विज्ञान के इतिहास में एक सर्वाधिक लोकप्रिय स्मृति बन गयी परन्तु साथ-ही सबसे विवादास्पद घटना भी।

क्या आप जानते हैं बेज प्रमेय, वास्तव में, घटनाओं से सम्बन्धित सप्रतिबन्ध प्रायिकता का ही परिवर्द्धित रूप है।

हम जानते हैं कि सप्रतिबन्ध प्रायिकता, एक घटना के घटित होने के बाद दूसरी घटना की प्रायिकता की भविष्यवाणी हैं मान लीजिए, अवलोकित घटना अनेक स्वतन्त्र या असंयुक्त घटनाओं (कारणों) में से किसी एक कारण से घटित हुई है तो इस बात की सप्रतिबन्ध प्रायिकता की उक्त घटना किसी एक विशिष्ट घटना का कारण या परिणाम है, उस की प्रतिलोम प्रायिकता (Inverse Probability) कहलाती है। सरल शब्दों में, प्रतिलोम प्रायिकता, किसी अवलोकित घटना के कारण-विशेष की प्रायिकता का माप या अनुमान है जिसका परिकलन बेज प्रमेय की सहायता से किया जाता है।

नोट

यदि यह ज्ञात हो कि किसी एक घटना विशेष पर n परस्पर अपवर्जी कारणो में से किसी एक का प्रभाव है जिसकी प्रायिकतायें $P_1, P_2, P_3...P_n$ है और $P_1, P_2, P_3...P_n$ क्रमशः उन विभिन्न कारणों में से प्रत्येक की पृथक-पृथक प्रायिकतायें हैं जिनमें वो घटना घटित होती है तो उस घटना पर विशिष्ट कारण का प्रभाव होने की प्रायिकता या सम्भावना

$$P = \frac{P_m P_n P_1}{P_1 P_1 + P_2 P_2 + \ldots P_m P_n}$$

Example: 3 घड़े हैं प्रथम में तीन सफेद 7 काली गेंद है। इसमें 5 सफेद 3 काली है तथा तीसरे में 8 सफेद और 4 काली गेंदे है। किसी एक घड़े से गेंदे निकाली गई और वह सफेद निकली इस बात की क्या प्रायिकता है कि गेंद पहली घड़े से निकली होगी।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. दिए गये प्रश्नों में प्रायिकता ज्ञात कीजिए–

1. एक थैले में 10 काली और 20 सफेद गेदें हैं (*i*) एक काली गेंद (*ii*) एक सफेद गेंद निकालने की क्या प्रायिकता है?
2. अंग्रेजी की एक पुस्तक से चुना गया स्वर या (वोविल) 0 होगा इसकी क्या प्रायिकता है?
3. एक पासा फेंका जाता है 6 अंक आने की क्या प्रायिकता है?
4. एक साधारण पासे को फेंकने पर 2 से अधिक संख्या आने की क्या प्रायिकता है।
5. एक थैले में 4 काली तथा 1 सफेद गेंद हैं। दूसरे थैले में 5 काली व 4 सफेद गेंद है। किसी एक थैले में से एक काली गेंद निकाली जाती है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि गेंद पहले थैले से ही निकली है?
6. एक सिक्के को दो बार उछालने पर 0, 1, 2 बार शीर्ष आने की प्रायिकता बताइए।

26.4 सारांश (Summary)

- अनिश्चितता हमारे जीवन का एक अभिन्न अंग है। यद्यपि भविष्य के बारे में सही जानकारी होना मानवीय शक्ति से परे की बात है लेकिन इन भावी घटनाओं के प्रति हम अपना अनुमान प्रायः प्रायिकता के रूप में व्यक्त करते हैं। भले ही ये अनुमान शत-प्रतिशत ठीक हों अथवा शत-प्रतिशत गलत।
- अठारहवीं शताब्दी के अन्तिम भाग एवं उन्नीसवीं शताब्दी में सम्भावना सिद्धान्त स्वयं शास्त्रीय रुचि (academic interest) का विषय बन गया।
- "सम्भावना सिद्धान्त का महत्व केवल ताश अथवा पासा खेलने वालों जो कि इसके जनक कहे जाते हैं, के लिए ही नहीं है वरन् उन सभी कार्यशील व्यक्तियों, उद्योगों के अध्यक्षों, सेनानायकों, आदि के लिए भी उनका महत्व है जिनकी सफलता निर्णयों पर निर्भर करती है जो स्वयं दो प्रकार के कारकों पर निर्भर करती है–प्रथम ज्ञात अथवा गणना योग्य तथा दूसरे अनिश्चित तथा सम्भावित।"
- "प्रायिकता सिद्धांत केवल अपने जन्मदाताओं (ताशबाजों व पासा फेंकने वालों) के लिए ही रुचि का विषय नहीं रहा बल्कि आर्थिक क्रियाओं को संपन्न करने वाले उन सभी व्यक्तियों उद्योगपतियों तथा सेनापतियों के लिए भी उतना ही उपयोगी है जिनकी सफलता सही निर्णय पर आधारित होती है।"

नोट

- प्रायिकता के सन्दर्भ में किसी यादृच्छिक प्रयोग को एक बार करना उसका परीक्षण (Trail) कहा जाता हैं जिस प्रयोग के सम्भव परिणाम (Possible Outcome) केवल दो होते हैं (या उन्हें दो बना लिया जाता है) उस प्रयोग को एक बार करने को बर्नोली परीक्षण (Bernoulli's Trail) कहा जाता है।
- जोखिम को कम करने के लिए बेज प्रमेय, नई सूचना के आधार पर पूर्ववर्ती प्रायिकता को संशोधित करके अनिश्चितताओं के बीच विवेकपूर्ण निर्णयन में सहायक होता है। इस अनूठी अभिकल्पना का प्रतिपादन ब्रिटिश गणिताचार्य रेवरेण्ड टॉमस बेज (Reversend Thomas Bayes—1702-1761) द्वारा किया गया था।

26.5 शब्दकोश (Keywords)

- **सटोरी—** सट्टेबाज, सट्टा खेलने वाला।
- **प्रतिदर्श—** नई सूचना।
- **सप्रतिबन्ध—** प्रतिबन्ध सहित, प्रतिबन्धित।

26.6 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. प्रायिकता सिद्धांत के प्रादुर्भाव एवं विकास पर प्रकाश डालिए।
2. प्रायिकता के अर्थ तथा परिभाषाओं की विवेचना कीजिए।
3. प्रायिकता की परिभाषा दीजिए तथा इसके उपयोग बताइए।
4. प्रायिकता पर बेज प्रमेय को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।
5. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
   (*i*) संभावना सिद्धांत की उपयोगगिता
   (*ii*) बर्नोली प्रमेय।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 2. $\left(\frac{1}{5}\right)$ 3. $\left(\frac{1}{3}\right)$ 4. $\left(\frac{2}{3}\right)$

5. $\left(\frac{36}{61}\right)$ 6. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

26.7 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा
2. परिणात्मक विधियाँ; डा. एस. सचदेवा; लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा

नोट

इकाई–27: प्रायिकता का योगात्मक एवं गुणात्मक नियम (Additive and Multiplicative Law of Probability)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- प्रायिकता के योगात्मक तथा गुणात्मक नियम को समझने में।
- सप्रतिबन्ध प्रायिकता तथा कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता को समझने में।

प्रस्तावना (Introduction)

प्रायिकता या संभावना शब्द का प्रयोग सामान्य जीवन में बहुतायत से होता है। सांख्यिकी विज्ञान में इस शब्द का प्रयोग विशिष्ट अर्थ में किया जाता है। एक दैव घटना के घटित होने की प्रत्याशा की माप को संभावना कहते हैं। इस संभावना को मापने के लिए योगात्मक, गुणात्मक बर्नोली तथा वेज प्रमेय का प्रयोग किया जाता है।

27.1 प्रायिकता का योगात्मक नियम (Additive Law of Probability)

योग नियम का शाब्दिक अर्थ प्रायिकता की गणना के लिए दो या अधिक घटनाओं की अलग-अलग प्रायिकता के योग से है।

यदि दो घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों और एक घटना के घटित होने की प्रायिकता P(A) तथा दूसरी घटना के घटित होने की प्रायिकता P(B) हो तो दोनों में से किसी एक घटना A या B के घटने की प्रायिकता P(A) + P(B) होगी। इस प्रकार दो या दो से अधिक परस्पर अपवर्जी घटनाओं में से किसी एक घटना (A या B) के घटने की प्रायिकता उन घटनाओं की अलग-अलग व्यक्तिगत प्रायिकताओं का जोड़ है। यह नियम योग प्रमेय कहलाता है।

जैसे— P(A या B) = P(A) + P(B)

यदि दो से अधिक घटनाएँ हों तो

P(A या B और C...) = P(A) + P(B) + P(C) + ...

उदाहरण (Illustration 1) : यदि ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह या तो पान का बादशाह होगा या ईंट की बेगम होगी।

हल (Solution) : पान का बादशाह या ईंट की वेगम का आना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

पान के बादशाह के निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{52}$

ईंट की बेगम के निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{52}$

अत: ईंट की वेगम या पान का बादशाह निकाले जाने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

योग प्रमेय का प्रमाण (Proof)—माना एक घटना A m_1 तरीकों से घटित हो सकती है और घटना B m_2 तरीकों से तथा मूल सम्भाव्य तरीकों की संख्या n है।

$$P(A) = \frac{m_1}{n}, \qquad P(B) = \frac{m_2}{n}$$

उन तरीकों की संख्या जिनमें A या B की घटना घट सकी हैं $= m_1 + m_2$

अत: A या B के घटने की प्रायिकता—

$$P(A \text{ या } B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

$$P(A \text{ या } B) = P(A) + P(B)$$

योग प्रमेय की परिसीमाएँ—योग प्रमेय तभी लागू होगी जब निम्न दो शर्तें पूरी हों—

(*a*) घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों।

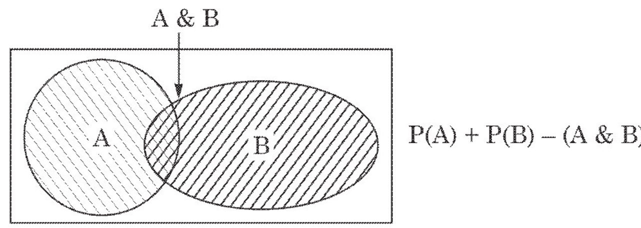
(*b*) वे एक ही समुच्चय या समूह से सम्बन्धित हों।

योग प्रमेय का संशोधित रूप-जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी न हों—जब दो घटनाओं A एवं B में से या तो A या B या दोनों घट सकती हों तो ऐसी घटनाएँ पूर्ण रूप से अपवर्जी नहीं कहलातीं। ऐसे स्थिति में योग प्रमेय संशोधित रूप में प्रयोग किया जाएगा। दोनों घटनाओं के सर्वनिष्ठ अंश को प्रायिकताओं के योग में से घटा दिया जाएगा।

घटनाओं के अपवर्जी न होने पर—

$$P(A \text{ या } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B)$$

नोट



चित्र : 27.1

समुच्चय रूप में–

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

तीन घटनाओं के लिए योग-प्रमेय का संशोधित रूप–

P(A या B या C)

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

संयोगानुपात (Odds)–जब कभी प्रायिकता को किसी घटना के पक्ष अथवा विपक्ष के रूप में व्यक्त किया जाता है तो इसे प्रायिकता संयोगानुपात कहते हैं। पक्ष के संयोगानुपात का पहला अंक P और दूसरा q के अनुरूप होता है तथा विपक्ष के संयोगानुपात में पहला अंक q और दूसरा P के अनुरूप होता है। इन अनुपातों को प्रायिकता के माप में निम्न नियमों के अनुसार बदला जाता है–

(*a*) पक्ष का संयोगानुपात (P : q) – घटने की प्रायिकता $= \frac{P}{P+q}$

(*b*) विपक्ष का संयोगानुपात (q : P) – न घटने की प्रायिकता $= \frac{q}{P+q}$

उदाहरण (Illustration 2) : दो पासों के एक बार फेंकने पर 2 या 8 या 12 का योग प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल Solution : दो पासे फेंकने पर कुल परिणामों की संख्या = 6 × 6 = 36

2 का योग (1, 1) प्राप्त होने की सम्भावना $= \frac{1}{36}$

8 का योग (6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6) की सम्भावना $= \frac{5}{36}$

12 का योग (6, 6) प्राप्त होने की सम्भावना $= \frac{1}{36}$

अत: 2 या 8 या 12 का योग प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} + = \frac{7}{36}$

उदाहरण (Illustration 3) :

एक व्यक्ति 6 में से 5 निशाने सही लगाता है जबकि दूसरा 5 में से 4 निशाने सही लगाता है। यदि दोनों ही व्यक्ति प्रयास करें तो सही निशाना लगाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) : पहले व्यक्ति (A) के सही निशाना लगाने की प्रायिकता $\frac{5}{6}$ है और दूसरे व्यक्ति (B) के लक्ष्य भेदन की प्रायिकता = 4/5.

ये दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी नहीं है क्योंकि A व B दोनों लक्ष्य भेद कर सकते हैं। अत: सूत्रानसार,

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$

$$= \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{5}{6} \times \frac{4}{5}\right) = \frac{25+24}{30} - \frac{20}{30} = \frac{29}{30}$$

27.2 प्रायिकता का गुणात्मक नियम (Multiplicative Law of Probability)

जब दी गई सभी स्वतन्त्र घटनाओं के एक साथ घटने की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तब प्रायिकता की गुणात्मक नियम का प्रयोग किया जाता है। गुणन प्रमेय दो या दो से अधिक स्वतन्त्र घटनाओं के एक साथ घटने की प्रायिकता उनके अलग-अलग घटित होने की व्यक्तिगत प्रायिकताओं का गुणनफल है। यदि दो घटनाएँ A व B स्वतन्त्र हैं तो उनके एक साथ घटने की प्रायिकता निम्न होगी–

$$P(A \text{ तथा } B) = P(A) \times P(B)$$

समुच्चय रूप में $\quad P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

प्रमाण (Proof)—माना एक घटना A कुल n_1 तरीकों से घट सकती है जिनमें से a_1 तरीके अनुकूल है और घटना B कुल n_2 तरीकों से घट सकती है जिनमें से a_2 तरीके अनुकूल हैं, तब–

$$P(A) = \frac{a_1}{n_1} \text{ and } P(B) = \frac{a_2}{n_2}$$

यदि दोनों घटनाएँ एक साथ घटें तो प्रयोगानुसार अनुकूल परिस्थितियाँ $a_1 \times a_2$ होंगी और सम्भाव्य परिस्थितियाँ $n_1 \times n_2$ होंगी। अतः A व B के साथ घटने की प्रायिकता–

$$P(A \text{ and } B) = \frac{a_1 \times a_2}{n_1 \times n_2} = \frac{a_1}{n_1} \times \frac{a_2}{n_2} = P(A) \times P(B)$$

तीन स्वतन्त्र घटनाओं का सूत्र–$P(A \text{ and } B \text{ and } C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

तीन से अधिक स्वतन्त्र घटनाओं का सूत्र–

$$P(1, 2, 3, 4, ...n) = P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 \times ...... P_n$$

> *नोट्स* दो या दो से अधिक स्वतंत्र घटनाओं के एक साथ की प्रायिकता उनके अलग-अलग ढंग से घटित होने की प्रायिकताओं का गुणनफल है।

उदाहरण (Illustration 4) :

एक सिक्के को तीन बार उछालने पर सभी (3) पट आने की प्रायिकता क्या है?

हल Solution : सिक्के को तीनों बार उछाला जाना, स्वतन्त्र घटनाएँ हैं अतः

$$\text{पहली बार पट आने की सम्भावना} = \frac{1}{2}$$

$$\text{दूसरी बार पट आने की सम्भावना} = \frac{1}{2}$$

$$\text{तीसरी बार पट आने की सम्भावना} = \frac{1}{2}$$

$$\text{तीनों बार पट आने की प्रायिकता} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

उदहरण (Illustration 5) : एक पासा दो बार फेंका जाता है। प्रथम फेंक में 6 तथा दूसरी फेंक में एक विषम

संख्या आने की क्या प्रायिकता है?

हल (Solution) : पासे के पहली बार फेंकने व दूसरी बार फेंकने से प्राप्त परिणाम स्वतन्त्र घटनाएँ हैं–

पहली बार फेंकने से 6 आने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

दूसरी बार फेंकने से विषम संख्या (1, 3 व 5) आने की प्रायिकता $= \frac{3}{6}$

अतः दोनों घटनाओं की संयुक्त प्रायिकता $= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

उदाहरण (Illustration 6) :

एक थैले में 8 गेंदें है जिनमें से 5 लाल तथा 3 सफेद हैं। यदि एक व्यक्ति यादृच्छिक रूप से थैले में से 2 गेंदें निकालता है, तो प्रत्येक रंग की एक गेंद निकालने की क्या सम्भाविता है?

हल (Solution) : थैले में 8 गेंदें हैं जिनमें से 2 गेंदें निकालने के तरीकों की कुल संख्या $= {}^8C_2$

प्रत्येक रंग की एक गेंद निकालने के तरीकों की संख्या $= {}^5C_1 \times {}^3C_1$

अतः प्रत्येक रंग की एक गेंद निकाले जाने की प्रायिकता $= \frac{{}^5C_1 \times {}^3C_1}{{}^8C_2}$

$$= \frac{5 \times 3}{28} = \frac{15}{28}$$

उदाहरण (Illustration 7) : ताश के एक खेल में पत्ते अच्छी तरह से मिलाए और चार खिलाड़ियों में बराबर बाँटे जाते हैं। किसी विशिष्ट खिलाड़ी के चारों बादशाह प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

हल (Solution) :

52 पत्तों में से 13 पत्ते प्रत्येक खिलाड़ी को बाँटे जाएँगे।

52 पत्तों में से 13 पत्तों को छाँटने के तरीके $= {}^{52}C_{13}$

4 बादशाहों में से 4 बादशाह छाँटने के तरीके $= {}^4C_4$

शेष 48 पत्तों में से शेष 9 पत्ते छाँटने के तरीके $= {}^{48}C_9$

अतः 13 पत्तों में से 4 बादशाह निकालने की प्रायिकता $= \frac{{}^4C_4 \times {}^{48}C_9}{{}^{52}C_{13}}$

$$= \frac{13.12.11.10}{52.51.50.49} = \frac{11}{4165}$$

टास्क आगरा और दिल्ली को जोड़ने वाली 5 विभिन्न सड़कें हैं। एक व्यक्ति अपनी यात्रा कितने तरीके से पूरी कर सकता है यदि वह आगरा से दिल्ली किसी एक सड़क से जाए और अन्य सड़क से लौटे?

27.3 सप्रतिबन्ध प्रायिकता (Conditional Probability)

अनेक परिस्थितियों में एक घटना के एक परीक्षण में घटने या न घटने का उसके भावी परीक्षणों में घटित होने की प्रायिकता पर प्रभाव पड़ता है। ऐसी घटनाएँ आश्रित घटनाएँ कहलाती हैं। अतः इस बात की सम्भावना

कि एक बार एक घटना घटित होने पर ही दूसरी घटना घटेगी, सप्रतिबन्ध प्रायिकता कहलाती है। उदाहरण के लिए, ताश की गड्डी में एक पत्ता निकालने के बाद यदि उसे पुनः वापस न रखा जाए तो दूसरी बार लाल या काले रंग के पत्ते निकल आने की प्रायिकता पहली बार के परिणाम पर निर्भर होगी। यदि पहली बार लाल या काला पत्ता निकलता है और उसे वापस गड्डी में नहीं रखा जाता तो दूसरी बार लाल रंग या काले रंग के पत्ते के निकलने की प्रायिकता $\frac{26}{51}$ होगी। यदि A व B दो आश्रित घटनाएँ हों तो उनके एक साथ घटने की प्रायिकता पहली घटना के होने की प्रायिकता और दूसरी घटना के उस स्थिति में होने की प्रायिकता जबकि पहली हो चुकी है इन दोनों का गुणनफल है।

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$P(AB) = P(B) \times P(A/B)$$

जहाँ P(B/A) B की सप्रतिबन्ध प्रायिकता है (अर्थात् A घटित हो चुकी है) एवं P(A/B) A की सप्रतिबन्ध प्रायिकता है। (अर्थात् B पहले घटित हो चुकी है।)

प्रमाण (Proof)—मान लीजिए A के घटने के अवसरों की कुल संख्या (चाहे B घटे या न घटे) $m_1 + m_2$ है जिनमें से m_1 ऐसी परिस्थितियाँ हैं जिनमें A व B साथ-साथ घटती हैं—

$$P(B/A) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 / n}{(m_1 + m_2) / n} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB) = P(A) \times P(B/A)$$

इसी प्रकार

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(AB) = P(B) \times P(A/B)$$

तीन घटनाओं A, B व C के लिए—

$$P(ABC) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/AB)$$

जहाँ P(C/AB) = C के घटने की प्रायिकता जबकि A व B घटनाएँ घटित हो गई हैं।

उदाहरण (Illustration 8) : यदि एक ताश की गड्डी से तीन पत्ते एक के बाद एक बिना पिछले पत्ते को वापस रखे निकाले जाएं तो उनके बादशाह, बेगम व इक्का के इसी क्रम में आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) : एक बादशाह के निकाले जाने की प्रायिकता $= \frac{4}{52}$

एक बेगम के निकलने की प्रायिकता बादशाह निकलने के बाद $= \frac{4}{51}$

गुलाम के निकलने की प्रायिकता जबकि एक बादशाह व एक बेगम निकल चुकी हो

$$= \frac{4}{50}$$

ये आश्रित घटनाएँ हैं अतः मिश्र प्रायिकता

$$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{64}{132600} = \frac{8}{16575}$$

उदहरण (Illustration 9) : एक थैले में 14 गेंदें हैं जिनमें 6 लाल, 3 पीली व 5 काली हैं। तीन गेंदें बिना वापस रखे एक के बाद एक निकाली जाती हैं। क्या प्रायिकता है कि वे लाल, पीली तथा काली इसी क्रम में होंगी?

हल (Solution) : कुल 14 गेंदों में से तीन गेंदें एक निश्चित क्रम में निकालनी हैं—पहली, लाल, दूसरी पीली

नोट

व तीसरी काली। साथ ही हर बार एक गेंद कम होती जाएगी–

$$\text{पहली गेंद लाल निकलने की प्रायिकता} = \frac{6}{14}$$

$$\text{दूसरी गेंद पीली निकलने की } P = \frac{3}{13}$$

$$\text{तीसरी गेंद काली निकलने की } P = \frac{5}{12}$$

अत: $$\text{उपर्युक्त क्रम में गेंदें निकलने की प्रायिकता} = \frac{6}{14} \times \frac{3}{13} \times \frac{5}{12} = \frac{90}{2184} = \frac{15}{364}$$

योग प्रमेय व गुणन प्रमेय का संयुक्त प्रयोग

कुछ परिस्थितियों में गुणन प्रमेय और योग प्रमेय दोनों का एक साथ प्रयोग किया जाता है। ऐसी स्थिति में पहले गुणन प्रमेय का प्रयोग किया जाता है और उसके बाद योग प्रमेय का प्रयोग होता है।

उदाहरण (Illustration 10) : एक थैले में 5 सफेद व 4 काली गेंदें हैं। उनमें से एक गेंद निकाली जाती है और फिर उसे वापस थैले में डाल दिया जाता है। इसके बाद दोबारा एक गेंद निकाली जाती है। इस बात की क्या सम्भावना है कि निकाली गई दोनों गेंदें अलग-अलग रंग की थीं?

अलग-अलग रंग की दो तरीके से निकल सकती हैं–

हल (Solution) : (1) पहली सफेद और दूसरी काली होने की प्रायिकता $= \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$

(2) पहली काली और दूसरी सफेद होने की प्रायिकता $= \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$

अत: अलग-अलग रंग की गेंदें निकलने की प्रायिकता $= \frac{20}{81} + \frac{20}{81} = \frac{40}{81}$

उदाहरण (Illustration 11) : ताश की एक गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छया निकालकर अलग रख दिया जाता है। उसके बाद गड्डी से दूसरा पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वे दोनों पत्ते बेगम व गुलाम हैं।

हल (Soution) : दो पत्ते खींचने पर उनके बेगम तथा गुलाम होने की दो स्थितियाँ हो सकती हैं–

(A) पहले बेगम एवं बाद में गुलाम निकलने की प्रायिकता $P(Q, J) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{51}$

(B) पहले गुलाम व बाद में बेगम निकलने की प्रायिकता $P(J, Q) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{51}$

अत: किसी भी क्रम से एक बेगम और एक गुलाम निकलने की अभीष्ट प्रायिकता

$$= \left[\frac{4}{52} \times \frac{4}{51}\right] + \left[\frac{4}{52} \times \frac{4}{51}\right] = \frac{16}{2652} + \frac{16}{2652} = \frac{32}{2652} = \frac{8}{663}$$

क्या आप जानते हैं योगात्मक नियम तथा गुणात्मक नियम का प्रयोग एक साथ होता है।

27.4 कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता (Probability of Happening at Least one Event)

जब अनेक स्वतन्त्र घटनाओं में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तब

सभी घटनाओं के न घटने की संयुक्त प्रायिकता निकाल कर उसे 1 में से घटा दिया जाता है जिससे अभीष्ट प्रायिकता ज्ञात हो जाती है।

अत: सूत्रानुसार–यदि पहली, दूसरी तीसरी""""घटना के घटने की प्रायिकताएँ क्रमश: $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ हों तो उनके न घटने की व्यक्तिगत प्रायिकताएँ क्रमश: $(1 - P_1), (1 - P_2), (1 - P_3) \ldots (1 - P_n)$ होंगी–

सभी घटनाओं में से किसी के न घटने की मिश्रित प्रायिकता–

$$(1 - P_1)\,(1 - P_2)\,(1 - P_3) \ldots (1 - P_n)$$

अत: कम से कम एक घटना के होने की प्रायिकता इसकी अनुपूरक होगी–

$$1 - [(1 - P_1)\,(1 - P_2)\,(1 - P_3) \ldots (1 - P_n)]$$

उदाहरण (Illustration 12) : दो पासे एक बार फेंके जाते हैं। कम से कम एक '6' प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

'6' बिन्दु वाले पक्ष के आने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{6}$

पहले पासे पर 6 न आने की प्रायिकता $= 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

दूसरे पासे पर 6 न आने की प्रायिकता $= 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

पहले व दूसरे दोनों पासों पर 6 के न आने की प्रायिकता $= \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{36}$

कम से कम एक पासे पर 6 आने की प्रायिकता $= 1 - \dfrac{25}{36}$

उदाहरण (Illustration 13) : ताश की दो गड्डियों में से प्रत्येक से एक-एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है कम से कम एक के पान की बेगम होने की क्या प्रायिकता है?

हल (Solution) : पहली गड्डी में पान की बेगम न निकालने की प्रायिकता $= \dfrac{51}{52}$

दूसरी गड्डी में पान की बेगम न निकालने की प्रायिकता $= \dfrac{51}{52}$

दोनों गड्डीयों में पान की बेगम न निकालने की प्रायिकता $= \dfrac{51}{52} \times \dfrac{51}{52} = \dfrac{2601}{2704}$

अत: कम से कम एक गड्डी में पान की बेगम निकालने की प्रायिकता $= 1 - \dfrac{2601}{2704}$

$$= \frac{103}{2704}$$

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. सही विकल्प चुनिए (Choose the correct option)–

1. ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया इसके बेगम या पान का होने की क्या प्रायिकता है–

(क) $\dfrac{4}{13}$ (ख) $\dfrac{6}{13}$

(ग) $\dfrac{8}{13}$ (घ) $\dfrac{10}{13}$

नोट

2. एक थैले में जिसमें 1–30 Number तक के 30 टिकट हैं। एक टिकट यदृक्षिक रूप से कलकाला गया इसे 5 या 7 के गुणित अंक आने की क्या प्रायिकता है–

(क) $\frac{1}{3}$ (ख) $\frac{2}{3}$

(ग) $\frac{4}{3}$ (घ) $\frac{6}{3}$

3. ताश की गड्डी में से प्रतिस्थापित करते हुए दो पत्ते निकाले गए। दोनों पत्ते के इक्का होने की प्रायिकता निकालिए–

(क) $\frac{4}{52}$ (ख) $\frac{6}{52}$

(ग) $\frac{1}{169}$ (घ) $\frac{3}{169}$

4. एक पासे को दो बार फेंका गया है। पहली बार 6 और दूसरी बार विषम संख्या आने की क्या प्रायिकता है?

(क) $\frac{1}{12}$ (ख) $\frac{3}{12}$

(ग) $\frac{6}{12}$ (घ) $\frac{8}{12}$

27.5 सारांश (Summary)

- योग नियम का शाब्दिक अर्थ प्रायिकता की गणना के लिए दो या अधिक घटनाओं की अलग-अलग प्रायिकता के योग से है।
- योग प्रमेय तभी लागू होगी जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों। वे एक ही समुच्चय या समूह से सम्बन्धित हों।
- जब कभी प्रायिकता को किसी घटना के पक्ष अथवा विपक्ष के रूप में व्यक्त किया जाता है तो इसे प्रायिकता संयोगानुपात कहते हैं।
- जब दी गई सभी स्वतन्त्र घटनाओं के एक साथ घटने की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तब प्रायिकता के गुणात्मक नियम का प्रयोग किया जाता है।
- अनेक परिस्थितियों में एक घटना के एक परीक्षण में घटने या न घटने का उसके भावी परीक्षणों में घटित होने की प्रायिकता पर प्रभाव पड़ता है। ऐसी घटनाएँ आश्रित घटनाएँ कहलाती हैं।
- कुछ परिस्थितियों में गुणन प्रमेय और योग प्रमेय दोनों का एक साथ प्रयोग किया जाता है। ऐसी स्थिति में पहले गुणन प्रमेय का प्रयोग किया जाता है और उसके बाद योग प्रमेय का प्रयोग होता है।

27.6 शब्दकोश (Keyword)

- अपवर्जी–त्याग देना, छोड़ देना, चुकाना।

नोट

27.7 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. प्रायिकता की परिभाषा दीजिए तथा उपयुक्त उदाहरण देकर प्रायिकता के योगात्मक एवं गुणात्मक नियम को समझाइए।
2. दो घटनाओं के (*i*) स्वतंत्र व (*ii*) आश्रित होने की स्थितियों में प्रायिकता के गुणात्मक नियम को उदाहरण देकर समझाइए।
3. दो घटनाओं के (*i*) परस्पर अपवर्जी होने और (*ii*) परस्पर अपवर्जी न होने की स्थितियों में प्रायिकता के योगात्मक नियम को बताइए।
4. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए–

   (*i*) सप्रतिबन्ध प्रायिकता (*ii*) योग तथा गुणन का संयुक्त प्रयोग।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. (क) 2. (क) 3. (ग) 4. (क)

27.8 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई–28: प्राक्कलन का सिद्धांत : बिन्दु प्राक्कलन, अनभिनत, संगति, दक्षता और सर्वाधिक दक्ष आगणक (Theory of Estimation : Point Estimation, Unbiasedness, Consistency, Efficiency and Safficiency)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे–

- प्राक्कलन के सिद्धांत तथा आगणकों के अभिलक्षण को जानने में।

प्रस्तावना (Introduction)

न्यायदर्शन के अन्तर्गत न्यादर्श समुक्तियों के आधार पर समुदाय के अभिलक्षणों का अध्ययन करना सम्मिलित है, जिनके लिए न्यादर्श का सांख्यिकीय अनुमान लगाना आवश्यक है, इस प्रक्रिया को सांख्यिकीय अनुमिति कहते हैं। सांख्यिकीय अनुमिति में पहली समस्या प्राक्कलन की आती है और दूसरी प्राक्कल्पना द्वारा दी गयी जानकारी की सार्थकता को जांच करने में आती है।

28.1 प्राक्कलन का सिद्धांत (Theory of Estimation)

न्यादर्श मानों $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ के आधार पर प्राचल θ का आकलन दो तरीकों से होता है।

(*i*) बिंदु प्राक्कलन

(*ii*) अंतराल प्राक्कलन

नोट

बिंदु प्राक्कलन के अन्तर्गत अनुमानित मान उस एकल परिमाण द्वारा दर्शाया जाता है वे न्यादर्श अचल समुक्तियों का फलन (आगणक) होता है।

अंतराल प्राक्कलन से तात्पर्य उस अंतराल से है जिसके भीतर प्राचल अवस्थित हैं इसे जिन दो परिमाणों, जो न्यादर्श पर आधारित होते हैं, द्वारा दर्शाया जाता है उसे गोपन अंतराल कहते हैं व अंतराल को निर्दिष्ट करने वाले परिमाण 'गोपन सीमांत' कहलाते हैं।

प्राचलन वरिमा—यदि एक यादृच्छिक चर x का प्रायिकता घनत्व फलन $f(x, \theta)$ है तो इस $f(x, \theta), \in \Theta$ के रूप में लिखा जायेगा जबकि Θ के रूप में लिखा जायेगा जबकि Θ एक समुच्चय है, जिसके अन्तर्गत θ के सभी संभाव्य मान आते हैं। समुच्चय Θ प्राचल वरिमा कहलाता है।

यदि समष्टि, जिसका प्रायिकता फलन $f(x_{f}, \theta_1, \theta_2 \dots \theta_k)$ में n आकार के न्यादर्श $x_1, x_2, \dots x_n$ लें जबकि $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_k$ अज्ञात प्राप्त हो सकते हैं। यह प्राक्कलन जो अगणित किए जाने वाले प्राचल के वास्तविक मान के लिए निकट होगा, सर्वोत्तम प्राक्कलन कहलाया जाएगा।

आगणकों के अभिलक्षण

संगति—यदि $T_n = T(x_1, x_2, \dots x_n)$, n आकार के यादृच्छिक न्यादर्श पर आधारित है, तो T_n को $\gamma(\theta)$ का एक ससंगत आगणक कहा जाएगा बशर्ते प्रत्येक $\in < 0, \eta > 0$ के लिए एक धनात्मक समाकल $n \geq m\ (\in, \eta)$ इस प्रकार अस्तित्व रखता हो कि

$$P[|\, T_n - \gamma(\theta)\, |] < \in |\to| \quad \text{जब } n \to \infty$$

$$\Rightarrow \qquad P[|\, T_n - \gamma(\theta)\, | < \in\ ] > 1 - \eta; \to \gamma\, n \geq m$$

जबकि m, n का कोई बहुत बड़ा मान है।

अनभिनति—यदि न्यादर्श आकार 'n' अनिश्चित रूप से बड़े मान रखता है तो सीमाबद्ध 'n' के लिए आगणन का व्यवहार शून्य होता है। सुसंगत आगणक के लिए प्राचल भी सुसंगत होता है। यदि $E(T_n) > \gamma(\theta)$, तो T_n धनात्मक रूप से अभिनत होता है और जब $E(T_n) < \gamma(\theta)$, तो T_n ऋणात्मक रूप अभिनत होंगे जबकि $b(\theta) = E(T_n) - \gamma(\theta), \theta \in \Theta$

दक्षता—किसी प्राचल के सुसंगत आकणक एक से अधिक हों तो प्रतिद्वंद्वी आगणकों में से चुनने के लिए हमें अतिरिक्त की आवश्यकता होती है। सर्वोत्तम आकणक $T, \gamma(\theta)$ का सर्वोत्तम आगणक होता यदि यह सुसंगत एवं प्रसामान्यत बंटित हो और यदि $a\, var\, (T) \leq (T')\, |$ एक सुसंगत, अलाक्षणिक रूप से प्रसामान्य अचल T को 'दक्ष' कहा जाता है।

सर्वाधिक दक्ष आगणक—यदि T प्रसरण V_1 वाले सर्वाधिक दक्ष आगणक और T_2 प्रसरण V_2 वाला कोई अन्य आगणक तो T_2 की दक्षता $E = V_1/V_2$ होती है।

यदि T का प्रसरण न्यूनतम हो तो T_i के $E_i (i = 1, 2, \dots n)$ की दक्षता कहलाती है।

$$E_1 = \frac{\text{var (T)}}{\text{var } (T_i)} \quad \text{जबकि } E_i \leq |$$

न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आगणक (MVUE) – T, $\gamma(\theta)$ का न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आगणक होगा, यदि सभी $\theta \in \Theta$ के लिए

$$E_\theta(T) = \gamma(\theta) \quad \text{और} \quad Var_\theta(T) = \leq var_\theta\, (T')$$

जबकि $T', \gamma(\theta)$ का कोई भी अन्य अनभिनत आगणक हों।

नोट

नोट्स संगति, अनभिनति, दक्षता और पर्याप्तता एक अच्छे आगणक के प्रमुख अभिलक्षण हैं।

यथेष्टता–यह स्पष्ट है कि वह आगणक किसी प्राचल हेतु यथेष्ट कहलाएगा यदि उसमें प्राचल से संबंधित न्यादर्श की समस्त महत्त्वपूर्ण जानकारी हो। किसी बंटन के लिए यथेष्ट अचल की आवश्यक शर्त गुणनखण्ड प्रमेय द्वारा दी जाती है, जिसके अनुसार $T = f(x)$ प्राचल θ हेतु यथेष्ट होगा यदि और केवल यदि न्यादर्श मानों का संयुक्त घनत्व फलन L इस प्रकार होता है कि

$$L = g_\theta [f(x)].\ h(x)$$

जबकि $g_\theta [f(x)]$ का मान θ और x पर निर्भर होता है जबकि $h(x)$ का मान θ पर आधारित नहीं होता।

यथेष्टता के गुणधर्म

(*i*) यदि T प्राचल θ हेतु एक यथेष्ट आगणक है तो $\Psi(f)$, T का एक से एक फलन $\Psi(f)$, $\Psi(\theta)$ हेतु यथेष्ट होता है। यह पर्याप्त आगणक का अप्रसरण गुणधर्म कहलाता है।

(*ii*) मूल न्यादर्श $X = (X_1, X_2, \dots X_n)$ सदा एक यथेष्ट अचल होता है।

(*iii*) अचल $t_1 = (x_1, x_2, \dots x_n)$ प्राचल θ का यथेष्ठ आगणक होता है यदि और केवल यदि संभाविता फलन निम्न प्रकार से है–

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_1, \theta)\, f(x_i, \theta)$$

$$= g_1(t_1\ \theta).\ k(x_1, x_2 \dots\dots x_n)$$

जबकि $g_1(t_1, \theta)$ अचल t_1 का प्रायिकता घनत्व फलन है और $k(x_1, x_2, \dots\dots x_n)$ केवल न्यादर्श समुक्तियों का फलन है, जो θ पर निर्भर नहीं है।

टास्क प्राचलन वरिमा किसे कहते है?

क्रेमर-राव विषमता

क्रेमर-राव विषमता प्राचल $\gamma(\theta)$ संबंधी आगणक के प्रसरण हेतु एक निम्नतर परिबंध प्रदान करती है।

यदि t प्राचल θ के फलन $\gamma(\theta)$ का एक अनभिमत आगणक हो

$$\text{Var}(t) \geq \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta} L(x, \theta)\right]^2}{E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \log L\right]} = \frac{[\gamma'(\theta)]^2}{I(\theta)}$$

और

$$I(\theta) = E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(x, \theta)\right\}^2\right]$$

यहाँ पर $\dfrac{[\gamma'(\theta)]^2}{I(\theta)}$ निम्नतर परिबंध है।

नोट

न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आगणक (MVUE) **और ब्लैक वैलीकरण**—$\gamma(\theta)$ का एक अनभिनत आगणक t जिसके लिए क्रेमर-राव का निम्न परिबंध प्राप्त किया जाता है, एक न्यूनतम प्रसरण परिबंध (MVB) आगणक कहलाता है। MVB सदैव MVUE जैसा नहीं होता क्योंकि क्रेमर-राव निम्न परिबंध हमेशा नहीं होता।

> *क्या आप जानते हैं* अचल के प्रयोग से किसी अनभिनत आगणक से प्राप्त करने की विधि ब्लैकवैलीकरण कहलाती है।

राव-ब्लैकवैल प्रमेय—राव ब्लैकवैल प्रमेय के अनुसार, यदि X और Y यादृच्छिक चर हैं तो

$$E(y) = \mu \quad \text{और} \quad var(y) = \sigma_y^2 > 0.|$$

इसी प्रकार यदि $\quad E(y \mid X = x) = \varphi(x)$

तो $\quad E[\varphi(x)] = \mu$

और $\quad \text{var}(\varphi(x)) = \text{var}(y)$

इस प्रकार हम फलन $\varphi(T)$ को परिभाषित कर उन्नत बना सकते हैं, जिसे ब्लैकवैलीकरण कहते हैं।

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)-

1. न्यायदर्श मानों के आधार पर प्राचल .... का आकलन दो तरीके से होता है।
2. एक अच्छे आगणक के प्रमुख अभिलक्षण हैं- संगति, अनाभिनति .... और पर्यापता।
3. क्रेमर-राव विषमता प्राचल $\varphi(\theta)$ सबंधी .... के प्रसारण हेतू एक निम्नतर प्रतिबंध प्रदान करती है।
4. वह आगणक किसी प्राचल हेतू महत्त्वपूर्ण जानकारी हो यथेष्ट कहलाएगा यदि उस में .... से संबंधित न्यायदर्श की समस्त
5. अंतराल प्राक्कलन से तात्पर्य उस अंतराल से है जिसके भीतर .... आवस्थिति हों।

28.2 सारांश (Summary)

- न्यायदर्शन के अन्तर्गत न्यादर्श समुक्तियों के आधार पर समुदाय के अभिलक्षणों का अध्ययन करना सम्मिलित है, जिनके लिए न्यादर्श का सांख्यिकीय अनुमान लगाना आवश्यक है, इस प्रक्रिया को सांख्यिकीय अनुमिति कहते हैं। सांख्यिकीय अनुमिति में पहली समस्या प्राक्कलन की आती है और दूसरी प्राक्कल्पना द्वारा दी गयी जानकारी की सार्थकता को जांच करने में आती है।
- बिंदु प्राक्कलन के अन्तर्गत अनुमानित मान उस एकल परिमाण द्वारा दर्शाया जाता है वे न्यादर्श अचल समुक्तियों का फलन (आगणक) होता है।
- अंतराल प्राक्कलन से तात्पर्य उस अंतराल से है जिसके भीतर प्राचल अवस्थित हैं इसे जिन दो परिमाणों, जो न्यादर्श पर आधारित होते हैं
- क्रेमर-राव विषमता प्राचल $\gamma(\theta)$ संबंधी आगणक के प्रसरण हेतु एक निम्नतर परिबंध प्रदान करती है।
- एक न्यूनतम प्रसरण परिबंध (MVB) आगणक कहलाता है। MVB सदैव MVUE जैसा नहीं होता क्योंकि क्रेमर-राव निम्न परिबंध हमेशा नहीं होता।

नोट

28.3 शब्दकोश (Keywords)

1. परिबंध - घेरा

28.4 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. प्रक्कलन सिद्धा।त की व्याख्या कीजिए।

2. निम्नलिखित पर टिप्पणी लिखिए-

(*i*) आगणको के अभिलक्षण (*ii*) क्रेमर-राव विषमता

(*iii*) न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आगणक और ब्लैक वैलीकरण

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. θ 2. दक्षता 3. आगणक 4. न्यादर्श

5. प्राचल

28.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. **सांख्यिकी के मूल तत्व;** एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, दिल्ली

इकाई—29: बिन्दु प्राक्कलन एवं अंतराल प्राक्कलन विधि Method of Point Estimation and Interval Estimation

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- सांख्यिकीय निष्कर्ष को समझने में।

प्रस्तावना (Introduction)

एक समीष्ट प्राचल का बिन्दु प्राक्कलन सांख्यिकीय का एकल मान होता है जबकि अतंराल प्राक्कलन को उन दो संख्याओं द्वारा दर्शाया जाता है, जिसके मध्य में समीष्ट प्राचल अवस्थित होता है।

29.1 बिन्दु प्राक्कलन एवं अंतराल प्राक्कलन विधि (Method of Point Estimation and Interval Estimation)

सांख्यिकीय निष्कर्ष (Statistical Inference) के दो मुख्य अंग आकलन (Estimation) तथा परिकल्पना परीक्षण (Hypothesis testing) है। न्यायदर्श के प्रतिदर्शजों की सहायता से समग्र के प्राचलों का आकलन किया जाता है जिसमें प्राचल के आकलक (Estimate) ज्ञात किये जाते हैं। आकलन या अनुमान दो प्रकार से किए जाते हैं:

1. बिन्दु प्राक्कलन (Point Estimation)
2. अन्तराल प्राक्कलन (Interval Estimation)

नोट

बिन्दु आकलन (Point Estimation)

जब न्यादर्श के प्रतिदर्शज से समग्र के प्राचल का एक अनुमान/आकलक ज्ञात किया जात है तो इस आकलक को बिन्दु आकलक कहा जाता है तथा इस प्रक्रिया को बिन्दु आकलन कहा जाता है। उदाहरणार्थ,

(*i*) माना माध्य μ तथा प्रसरण σ^2 (या प्रमाप विचलन, σ) के समग्र में $x_1, x_2, \ldots x_n$ एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। यहद प्रतिदर्श/न्यादर्श के माध्य $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ को समग्र माध्य के स्थान पर प्रयोग किया जाता है तो $\bar{x}$ को समग्र के अज्ञात (Unknown) माध्य μ का आकलक कहते हैं।

नोट्स **समग्र के माध्य का बिन्दु आकलक** (Point Estimate of Population mean) = प्रतिदर्श का माध्य (Sample Mean) होता है।

(*ii*) माना किसी गुण के आधार पर समष्टि में उस गुण को रखने वाले अवयवों का अनुपात *P* है। इसमें से *n* अवयवों का एक न्यादर्श लिया जाता है जिसमें उस गुण को रखने वाले अवयवों का अनुपात *P* यदि *P* अज्ञात हो तो इसको *P* से अनुमानित किया जाता है। अर्थात् **समग्र के अनुपात का बिन्दु आकलक** (Point Estimate of Population Proportion) = प्रतिदर्श का अनुपात (Sample Proportion)।

(*iii*) उपर्युक्त उदाहरण (*i*) में यदि समग्र के प्रसरण σ^2 को प्रतिदर्श के प्रसरण $s^2 = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2$ से अनुमानित किया तो S^2, समग्र के प्रसरण का बिन्दु आकलक (Point Estimate) है।

किसी भी उचित प्रतिदर्शज (Statistics) को समग्र के प्राचल का बिन्दु आकलक लिया जा सकता है। एक अच्छे बिन्दु आकलक में चार विशेषताएं होनी चाहिए:

(*a*) अनभिनतता (Unbiasedness)

(*b*) दक्षता (Efficiency)

(*c*) संगति (Consistency)

(*d*) पर्याप्तता (Sufficiency)

अन्तराल प्राक्कलन (Interval Estimation)

समग्र के प्राचलों का ऐसा अनुमान जो दो सीमाओं के मध्य हो अन्तराल अनुमान कहलाता है। जब बिन्दु आकलक के आधार पर समग्र प्राचल के लिए एक अन्तराल ($c \le \mu \le d$) निर्धारित किया जाता है तथा यह माना जाता है कि एक निश्चित प्रायिकता/विश्वसनीयता के साथ प्राचल μ का मान पड़े। सीमाओं *c* और *d* को अन्तराल सीमाएं, अन्तराल ($c \le \mu \le d$) को **विश्वास्यता अन्तराल** (confidence interval) कहा जाता है। सीमाओं *c* और *d* को **विश्वास्यता सीमाएं** (confidence limits) कहते हैं। विश्वास्यता स्तर को 1 में से घटाने के बाद प्राप्त राशि को विश्वास्यता गुणांक (confidence coefficient) कहा जाता है। सूत्र रूप में,

नोट

क्या आप जानते हैं विश्वास्यता अन्तराल के साथ सम्बद्ध प्रायिकता को **विश्वास्यता स्तर** (confidence level) कहते हैं।

(*i*) समग्र माध्य के लिए 5% सार्थकता स्तर पर विश्वास्यता अन्तराल

$$\text{Prob.}\left[\bar{x} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - 0.05 = 0.95$$

यहाँ

$\bar{x}$ = प्रतिदर्श माध्य

μ = समग्र माध्य

σ = समग्र प्रमाप विचलन

n = प्रतिदर्श आकार

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = प्रतिदर्श माध्य की प्रमाप विभ्रम

α = .05 सार्थकता स्तर या विश्वास्यता स्तर

$1 - \alpha$ = 0.95 विश्वास्यता गुणांक

(*ii*) समग्र अनुपात *P* का विश्वास्यता अन्तराल

$$\text{Prob.}\left[p - 1.96\sqrt{\frac{PQ}{n}} \le P \le p + 1.96\sqrt{\frac{PQ}{n}}\right] = 1 - .05 = 0.95$$

यहाँ

$Q = 1 - P$

टास्क विश्वास्यता अन्तराल किसे कहते हैं?

(*iii*) समग्र प्रसरण σ^2 का विश्वास्यता अन्तराल

$$\text{Prob.}\left[S^2 - 1.96\sqrt{\frac{S^2}{2n}} \le \sigma^2 \le S^2 + 1.96\sqrt{\frac{S^2}{2n}}\right] = 1 - .05 = 0.95$$

नोट

स्व-मूल्यांकन (Self Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें (Fill in the blanks)-

1. .... के दो मुख्य अंग आकलन तथा परिकल्पना परीक्षण हैं।
2. किसी भी उचित .... को समग्त के प्राचल का बिन्दु आकलक लिया जा सकता है।
3. विश्वास्यता स्तर को 1 में से घटाने के बाद प्राप्त राशि को .... कहा जाता है।
4. समग्र के .... का ऐसा अनुमान जो दो सीमाओं के मध्य हो अंतराल अनुमान उदाहरण है।

29.2 सारांश (Summary)

- एक समीष्ट प्राचल का बिन्दु प्राक्कलन सांख्यिकीय का एकल मान होता है जबकि अतंराल प्रावकलन को उन दो संख्याओं द्वारा दर्शाया जाता है, जिसके मध्य में समीष्ट प्राचल अवस्थित होता है।
- सांख्यिकीय निष्कर्ष (Statistical Inference) के दो मुख्य अंग आकलन (Estimation) तथा परिकल्पना परीक्षण (Hypothesis testing) है।
- आकलन या अनुमान दो प्रकार से किए जाते हैं:
  (*i*) बिन्दु आकलन (Point Estimation)
  (*ii*) अन्तराल आकलन (Interval Estimation)

29.3 शब्दकोश (Keywords)

- प्रतिदर्शज : सांख्यिकीविद
- अनभिनतता : निवपक्ष, अपक्षपाती
- संगति : अवरोध, सुसंगति

29.4 अभ्यास प्रश्न (Review Questions)

1. बिन्दु आकलन एवं अंतराल आकलन विधि किसे कहते हैं? विवेचन कीजिए।

उत्तर : स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. 1. सांख्यिकीय निष्कर्ष   2. प्रतिदर्शज
3. विश्वास्यता गुणांक   4. प्राचलों

29.5 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

नोट

इकाई—30: पूर्व परिकल्पना के प्रकार : शून्य परिकल्पना एवं अतंराल परिकल्पना, परिकल्पना परिक्षण में त्रुटि के प्रकार एवं सार्थकता का स्तर (Types of Hypothesis: Null and Alternative, Types of Errors in Testing Hypothesis, Level of Significance)

अनुक्रमणिका (Contents)

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् विद्यार्थी योग्य होंगे—

- पूर्व परिकल्पना का अर्थ तथा उसके महत्व को समझने में।
- सार्थकता परिक्षण तथा उसकी क्रियाविधि को जानने में।

प्रस्तावना (Introduction)

अनुसंधान द्वारा समस्या से सम्बन्धित किसी नए ज्ञान की खोज के प्रयास किए जाते हैं। इस दिशा में कार्य आरम्भ करने से पूर्व सबसे पहले अपने ज्ञान, सूचना तथा अनुभव के आधार पर एक सम्भावित कार्यकरण सम्बन्ध या पूर्वकल्पना का निर्माण कर लिया जाता है। पूर्वकल्पना या पूर्वकल्पनाओं के आधार पर ही ज्ञान की खोज की जाती है और इनके द्वारा हमें अनुसंधान कार्य में आगे बढ़ने में सहायता प्राप्त होती है। इस प्रकार सांख्यिकीय अनुसंधान में पूर्वकल्पनाओं का निर्माण आवश्यक हो जाता है।

नोट

30.1 पूर्वपरिकल्पना का अर्थ (Meaning of the Hypothesis)

प्रसिद्ध समाजशास्त्री 'लुण्डबर्ग' (Lunderg) के मतानुसार पूर्वकल्पना एक कामचलाऊ निष्कर्ष है जिसकी उपयुक्तता की परीक्षा अभी बाकी है। बिल्कुल प्रारम्भिक स्तर पर पूर्वकल्पना केवल एक अनुमान, विचार अथवा कल्पना हो सकती है जिसके आधार पर हम आगे क्रियात्मक कार्य अथवा खोज कर सकते हैं।

करलिन्जर (Kerlinger) के अनुसार, "एक पूर्वकल्पना दो या अधिक चर मूल्यों के मध्य सम्बन्ध का अनुमानित वक्तव्य है।"[1]

इस प्रकार अनुसंधान कार्य में अनुसंधानकर्त्ता अपने ज्ञान, सूचना तथा अनुभव के आधार पर जो कार्य-कारण सम्बन्ध का अनुमान लगाता है वही पूर्वकल्पना कहलाती है, इन्हीं पूर्वकल्पनाओं के आधार पर ज्ञान की खोज की जाती है। पूर्वकल्पना की सत्यता की जाँच भी की जा सकती है, यह सत्यता के जितनी समीप होगी अनुसंधान के परिणाम उतने ही विश्वसनीय प्राप्त होंगे।

एक अच्छी पूर्वकल्पना के दो मापदण्ड हैं–(*i*) पूर्वकल्पना चर मूल्यों के मध्य सम्बन्ध का वक्तव्य है, और (*ii*) पूर्वकल्पनाओं में इस सम्बन्ध की जाँच की पूरी सम्भावना होनी चाहिए अर्थात् एक पूर्वकल्पना दो या दो से अधिक चर मूल्यों से सम्बन्धित होती है और इनकी जाँच की जा सकती है। पूर्वकल्पनाओं से यह स्पष्ट हो जाता है कि चर मूल्य किस प्रकार से सम्बन्धित हैं। जिस अनुमानित वक्तव्य में उपरोक्त दो विशेषताएँ न हों वह वैज्ञानिक अर्थ में पूर्वकल्पना नहीं कही जा सकती है।

30.2 पूर्वकल्पना का महत्त्व (Importance of Hypothesis)

'वैज्ञानिक अनुसंधान में पूर्वकल्पनाएँ महत्त्वपूर्ण युक्तियाँ हैं।' इस कथन में थोड़ा भी सन्देह नहीं है। वैज्ञानिक अनुसंधान में पूर्वकल्पनाओं के अभाव में किसी निश्चित परिणाम की प्राप्ति असम्भव है। पूर्वकल्पनाओं के महत्त्व को अग्रांकित प्रकार से स्पष्ट किया जा सकता है।

1. **अध्ययन को निश्चयात्मकता प्रदान करती है**–अनुसंधानकर्त्ता पूर्वकल्पनाओं के अभाव में इधर-उधर अनावश्यक श्रम, समय एवं धन का अपव्यय करेगा, किन्तु जब समस्या से सम्बन्धित पूर्वकल्पनाओं का निर्माण कर लिया जाता है तो अध्ययन को निश्चयात्मकता प्राप्त हो जाती है।
2. **पूर्वकल्पनाओं की जाँच सम्भव है**–वैज्ञानिक अनुसंधान में पूर्वकल्पनाओं के महत्त्व का दूसरा कारण यह है कि पूर्वकल्पनाओं की जाँच द्वारा यह स्पष्ट किया जा सकता है कि यह सही है अथवा झूठ। बिखरे हुए तथ्यों की जाँच सम्भव नहीं होती है केवल सम्बन्धों (पूर्वकल्पनाओं) की जाँच की जा सकती है। यही कारण है कि वैज्ञानिक अनुसंधान की क्रियाओं में पूर्वकल्पनाओं का निर्माण प्रथम मुख्य क्रिया है।
3. **सम्बन्धित तथ्यों के चुनाव में सहायक होती है**–पूर्वकल्पनाओं के निर्माण के बाद समंकों के संकलन एवं विश्लेषण द्वारा उनकी जाँच की जाती है। पूर्वकल्पना को ध्यान में रखते हुए आवश्यक तथ्यों से सम्बन्धित जानकारी का ही संग्रह किया जाता है, अनावश्यक सूचना के संग्रह पर होने वाले समय, श्रम एवं धन के अपव्यय को रोका जा सकता है। उदाहरणार्थ एक पूर्वकल्पना 'शिक्षा के प्रसार से जन्म दर में कमी होती है' की जाँच के लिए हम अपने को शिक्षा के स्तर एवं सन्तानों की संख्या की जानकारी तक ही सीमित रखेंगे और आवश्यक सूचना प्राप्त कर यह सिद्ध करने का प्रयास करेंगे कि शिक्षित व्यक्तियों के सन्तानों की संख्या कम है। पी. वी. यंग के अनुसार, "पूर्वकल्पना के प्रयोग से आँख मूँदकर खोजने तथा अन्धाधुन्ध ऐसे आंकड़ों को एकत्र करने पर नियन्त्रण होता है, जो कि बाद में अध्ययन के विषय के लिए अप्रासंगिक सिद्ध हो।"[2]

पूर्वकल्पनाओं का महत्त्व इस गुण से भी है कि वे अनुसंधानकर्त्ता को यह बताती है कि उसे क्या करना है। इनसे चर मूल्यों के सम्बन्ध का भी स्पष्टीकरण हो जाता है अतः अनुसंधानकर्त्ता का कार्य सरल एवं सुविधाजनक हो जाता है। पूर्वकल्पनाएँ अनुसंधान में तभी अधिक महत्त्वपूर्ण हो सकती हैं जबकि इनमें सरलता स्पष्टता एवं विशिष्टता का

गुण विद्यमान हो तथा ये उपलब्ध अनुसंधान प्रणालियों से तथा मुख्य सिद्धान्त से सम्बन्धित हों एवं सर्वेक्षण द्वारा इनकी सत्यता की जाँच सम्भव हो।

नोट्स पूर्वकल्पनाओं से न केवल ज्ञान की खोज आगे बढ़ती है वरन् इनकी सहायता से अनुसंधान की समस्या से सम्बन्धित निष्कर्ष निकालने में सहायता प्राप्त होती है। बिना पूर्वकल्पना के अनुसंधान एक अनिर्दिष्ट विचारहीन भटकने के समान है।

पूर्वकल्पनाओं की जांच में सांख्यिकीय विश्लेषण का महत्त्व

पूर्वकल्पनाओं के निर्माण के पश्चात् उनकी सत्यता की जाँच करना होता है। पूर्वकल्पनाओं की जाँच में सांख्यिकीय विधियों का महत्वपूर्ण योगदान होता है। पूर्वकल्पनाओं की जाँच में सांख्यिकीय विश्लेषण के महत्त्व को निम्न प्रकार से स्पष्ट किया जा सकता है—

(*i*) सर्वप्रथम पूर्वकल्पनाओं के आधार पर यह निश्चित कर लिया जाता है कि किस प्रकार की सूचनाएँ एकत्र की जाएँगी अर्थात् सांख्यिकीय अनुसंधान का आयोजन किया जाता है।

(*ii*) सांख्यिकीय अनुसंधान के आयोजन के बाद यह निश्चित किया जाता है कि समंकों का संकलन किस प्रकार से किया जाए। प्राथमिक समंक अथवा द्वितीयक समंकों का प्रयोग किया जाता है। संगणन अथवा निदर्शन अनुसंधान के आधार पर समंक एकत्र किए जाएँगे। अनुसंधान के उद्देश्य एवं प्रकृति के अनुसार उपयुक्त विधि का चयन कर समंक संकलित कर लिए जाते हैं।

(*iii*) संकलित समंकों को सम्पादन द्वारा विश्लेषण योग्य बनाया जाता है।

(*iv*) प्राप्त सूचनाओं के विश्लेषण के लिए समंकों का वर्गीकरण कर इन्हें सारणियों में प्रस्तुत किया जाता है।

(*v*) सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए सांख्यिकीय विधियों जैसे माध्य, अपकिरण, विषमता सह-सम्बन्ध, गुण-सम्बन्ध आदि का सहारा लिया जाता है।

इस प्रकार जब समंकों के संकलन, प्रस्तुतीकरण एवं विश्लेषण द्वारा निष्कर्ष प्राप्त कर लिए जाते हैं, उन्हीं निष्कर्षों के आधार पर पूर्वकल्पनाओं की सत्यता की जाँच की जाती है। दूसरे शब्दों में पूर्वकल्पनाओं की जाँच का कार्य सांख्यिकीय विश्लेषण द्वारा ही सम्भव है।

सार्थकता की जांच (Test of Significance)—सार्थकता की जांच करना प्रमाप विभ्रम का दूसरा महत्वपूर्ण कार्य है। इसी के द्वारा किसी निर्धारित शून्य परिकल्पना की जांच की जा सकती है। सार्थकता जांच हेतु अवलोकित एवं प्रत्याशित मान के अन्तर को प्रमाप विभ्रम के निर्धारित क्रान्तिक मान (critical value) के सन्दर्भ में देखा जाता है। विभिन्न सार्थकता स्तरों के लिए अलग-अलग प्रमाप विभ्रम के क्रान्तिक मान होते हैं। प्रमाप विभ्रम एवं क्रान्तिक मान का गुणा करने पर निदर्शन विभ्रम ज्ञात हो जाता है; अर्थात्

$$\text{Sampling Error} = \text{Standard Error} \times \text{Critical Value}$$

क्या आप जानते हैं प्रारम्भ में पूर्वकल्पना एक अनुमानित वक्तव्य के रूप में होती है, किन्तु जब इसकी सत्यता प्रमाणित हो जाती है तो उसे सिद्धान्त का नाम दिया जाता है।

उदाहरण के लिए, प्रत्याशित मान (प्राचल) और अवलोकित मान (प्रतिदर्शज) का अन्तर प्रमाप विभ्रम के 1.96 गुने से अधिक है, तो यह अन्तर 5% सार्थकता स्तर पर सार्थक माना जायेगा। दूसरे शब्दों में, 95% विश्वास के साथ यह कहा जा सकता है कि अन्तर निदर्शन उच्चावचन के कारण न होकर किसी अन्य कारण से है। यदि अन्तर प्रमाप

नोट

विभ्रम के 1.96 गुने से कम है तो अन्तर सार्थक नहीं माना जायेगा। दूसरे शब्दों में, यह माना जायेगा कि यह अन्तर निदर्शन के उच्चावचन के कारण है।

विभिन्न स्तरों पर सार्थकता की जांच निम्न तालिका द्वारा प्रदर्शित है–

Test of Significance at Different Level

सार्थकता स्तर (Significance % Level)	*विश्वसनीय गुणांक (Confidence % Coeffi-cient*	*क्रांतिक त्रुटि (Critical Value)*	*प्रतिफल त्रुटि (Sampling Error)*	*विश्वसनीय सीमाएं (Confidence*	*अन्तर (Difference)*	
					सार्थक (Significant)	*सार्थक नहीं (Not Significant)*
5	95	1.96	1.96σ	± 1.96σ	> 1.9σ	≤ 1.960
1 99	2.58	2.58	± 2.58σ	> 2.58σ	≤ 2.58σ	
.27	99.73	3	3σ	± 3σ	> 3σ	≤ 30
4.25	95.45	2	σ	± 2σ	> 2σ	≤ 20

30.3 सार्थकता-परीक्षण की क्रियाविधि (Procedure of Test of Significance)

सार्थकता-परीक्षण हेतु एक क्रियाविधि प्रयोग में लायी जाती है जिसके अन्तर्गत निम्नलिखित कार्य करने होते हैं–

(1) **समस्या का निर्धारण** (Determination of the Problem)–सार्थकता परीक्षण हेतु सबसे प्रथम एवं महत्वपूर्ण कार्य समस्या का निर्धारण करना है। दूसरे शब्दों में, सांख्यिकीय निर्णय किस सम्बन्ध में लिये जाने हैं, उनका स्पष्ट हो जाना आवश्यक है। ये निर्णय प्रतिदर्शज और प्राचल के अन्तर की जांच करने अथवा परिकल्पना को स्वीकार करने अथवा अस्वीकार करने के सम्बन्ध में हो सकते हैं।

(2) **शून्य परिकल्पना का निर्धारण** (Setting up of a Null Hypothesis)–समग्र को प्रत्याशित और न्यादर्श के वास्तविक प्राप्त निष्कर्षों (मापों) के अन्तर की अर्थपूर्णता जानने के पूर्व एक शून्य परिकल्पना का निध रिण करना होता है। **शून्य-परिकल्पना से तात्पर्य यह है कि हम कल्पना करते हैं कि प्राचल एवं प्रतिदर्शज में अन्तर शून्य है और जो भी है वह निदर्शन के अतिरिक्त अन्य विभ्रमों से प्रभावित नहीं है और यह केवल दैवी या आकस्मिक है।** यह मानकर चलना है कि सफलता के लिए विद्यार्थियों का नियमित अध्ययन लाभदायक नहीं है, शून्य कल्पना का ही उदाहरण है। इसी प्रकार किसी रोग निर्धारण हेतु निर्मित दवाई के बारे में पहले से ही यह कल्पना कर लेना वह लाभदायक नहीं होगी, यह शून्य कल्पना ही है। शून्य कल्पना का आधार इसी में है कि उसका विलोम विपरीत स्वीकारात्मक स्थिति को प्रमाणित करता है। शून्य कल्पना के लिए संकेताक्षर H_0 प्रयोग होता है।

(3) **सार्थकता स्तर का चयन** (Selection of Level of Significance)–पूर्वनिर्धारित परिकल्पना की जांच किसी सार्थकता स्तर पर की जा सकती है। सार्थकता स्तर के चयन के बारे में कोई कठोर नियम नहीं है परन्तु अधिकतर .01 और .05 अर्थात् 1% और 5% सार्थकता स्तर पर परिकल्पना की जांच की जाती है।

सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण में दो प्रकार के विभ्रम (Error) हो सकते हैं। **प्रथम प्रकार का विभ्रम** वह होता है जबकि परिकल्पना सही होते हुए भी उसे गलती से अस्वीकार कर दिया जाता है। **द्वितीय प्रकार का विभ्रम** तब होता है जब परिकल्पना असत्य होती है फिर भी उसे गलती से स्वीकार कर लेते हैं। इन विभ्रमों को निम्न तालिका से प्रदर्शित किया जा सकता है–

सही स्थिति	निर्णय	
	H_0 स्वीकृत	H_0 अस्वीकृत
H_0 सत्य	सही निर्णय	प्रथम प्रकार का विभ्रम
H_0 असत्य	द्वितीय प्रकार का विभ्रम	सही निर्णय

जब हम किसी विशेष सार्थकता स्तर को चुनते हैं, जैसे उदाहरण के लिए 5%, तो यहां हमारा अभिप्राय यह होता है कि हम 95% परिकल्पना को स्वीकार कर रहे हैं और 5% प्रथम प्रकार का विभ्रम हो सकता है जिससे परिकल्पना (hypothesis) को असत्य माना जाय। इससे यह बात स्पष्ट होती है कि जैसे-जैसे सार्थकता का स्तर घटाते जाते हैं वैसे ही वैसे प्रथम प्रकार का विभ्रम कम होता जाता है। परन्तु यह ध्यान रहे ऐसा करने पर दूसरे प्रकार के विभ्रम के बढ़ने की सम्भावना रहेगी। इस प्रकार दोनों प्रकार के विभ्रमों को एक साथ कम नहीं किया जा सकता वरन् उनमें तो यथोचित सन्तुलन रखा जाता है।

कभी-कभी शून्य परिकल्पना के साथ **वैकल्पिक परिकल्पना** (Alternative Hypothesis) भी की जाती है। यह शून्य परिकल्पना के विपरीत होती है। उदाहरण के लिए, **शून्य परिकल्पना में मापों में अन्तर नहीं मानते जबकि वैकल्पिक परिकल्पना में अन्तर मानते हैं।** अत: शून्य परिकल्पना असत्य होने पर वैकल्पिक परिकल्पना और वैकल्पिक कल्पना असत्य होने पर शून्य परिकल्पना स्वत: स्वीकार हो जाती है।

(4) **प्रमाप विभ्रम की गणना** (Computation of Standard Error)—सार्थकता स्तर का निर्धारण हो जाने के बाद प्रतिदर्शज के प्रमाप विभ्रम का परिकलन कर लिया जाता है। विविध प्रतिदर्शजों के प्रमाप विभ्रमों के लिए अलग-अलग सूत्र हैं; जैसे माध्य के प्रमाप के लिए $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; प्रमाप विचलन का प्रमान विभ्रम $\sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ तथा सहसम्बन्ध गुणांक का प्रमाप विभ्रम $= \sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ आदि।

(5) **सार्थकता अनुपात का परिकलन** [(Calculation of the Ratio Significance)(T)]—सार्थकता अनुपात अर्थात् (T) ज्ञात करने के लिए प्रतिदर्शज एवं प्राचल के अन्तर को प्रमाप विभ्रम से विभाजित कर दिया जाता है। उदाहरण के लिए, समान्तर माध्य के सम्बन्ध में सार्थकता अनुपात $\frac{(T) = \overline{X} - \mu}{\sigma_x}$ होता है।

(6) **निर्वचन** (Interpretation)—निर्वचन सार्थकता परीक्षण की क्रियाविधि का अन्तिम कार्य है। इसके अन्तर्गत पूर्व-निर्धारित क्रान्तिक मान एवं सार्थकता अनुपात की आपस में तुलना की जाती है। यदि सार्थकता अनुपात क्रान्तिक मान से अधिक है तो अन्तर सार्थक होगा अन्यथा इसके कम होने पर अन्तर अर्थहीन समझा जायेगा। उदाहरण के लिए, **परिकलित सार्थकता अनुपात (T) 1.96 जो 5% सार्थकता स्तर पर क्रांतिक मान है, से अधिक है, तो अन्तर सार्थक माना जायेगा अर्थात् अन्तर निदर्शन उच्चावचन के कारण नहीं वरन् अन्य कारण से है।**

टास्क शून्य परिकल्पना किसे कहते हैं?

30.4 सार्थकता बड़े न्यादर्श (Test of Significance : Large Samples)

आधुनिक वैज्ञानिक सांख्यिकी में सार्थकता-परीक्षण विविध प्रकार से किया जा सकता है। परन्तु निदर्शन क्षेत्र के अन्तर्गत इसकी अपनी विशेष प्रक्रिया है।

सांख्यिकीय अनुसन्धान रीतियों (statistical research methods) के अध्ययन से यह स्पष्ट हो जाता है कि न्यादर्श के आकार का उसकी विश्वसनीयता पर प्रभाव पड़ता है। सामान्यत: यह मान्यता है कि न्यादर्श (sample) का जितना

नोट

बड़ा आकार होगा वह उतना ही अधिक विश्वसनीय होगा। अतः सार्थकता-परीक्षण हेतु न्यादर्श को आकार की दृष्टि से विभाजित करना आवश्यक है। आकार के अनुसार न्यादर्श दो प्रकार के होते हैं, जैसे–

(1) बड़े न्यादर्श (Large Samples), एवं

(2) छोटे न्यादर्श (Small Samples)।

बड़े एवं छोटे न्यादर्शों की मौलिक मान्यताएं पृथक् होने के कारण दोनों की सार्थकता-परीक्षणों की रीतियों में भी अन्तर होना स्वाभाविक है। अतः दोनों न्यादर्शों के सार्थकता-परीक्षण हेतु पृथक्-पृथक् रीतियां अपनाई जाती हैं।

बड़े एवं छोटे न्यादर्शों के लिए कोई निश्चित इकाइयों का सीमांकन नहीं है, परन्तु सामान्यतः 30 या इससे अधिक ($n \geq 30$) **इकाइयों वाले न्यादर्श को बड़ा न्यादर्श माना जाता है।** तथा इसमें कम ($n < 30$) इकाइ वाले न्यादर्शका छोटा न्यादर्श माना जाता है। इस अध्याय में बड़े न्यादर्शों ($n > 30$) की सार्थकता के विषय में परीक्षण किया जा रहा है।

बड़े न्यादर्शों को भी उनकी प्रकृति के अनुसार दो वर्गों में विभाजित किया जाता है–

(अ) गुण-समंकों का निदर्शन (Sampling of Attributes), तथा

(ब) चर-समंकों का निदर्शन (Sampling of Variables)।

गुण-समंकों में सार्थकता-परीक्षण (Test of Significance in Attributes)

गुण-समंकों से आशय ऐसे तथ्यों से है जिनका संख्यात्मक माप सम्भव नहीं है। इनका तो गुण-विशेष की उपस्थिति व अनुपस्थिति के आधार पर ही अध्ययन किया जाता है। गुण-समंकों के सार्थकता-परीक्षण में उन सरल न्यादर्शों का सार्थकता-परीक्षण किया जाता है जिनका चयन एक ऐसे समग्र (Universe or population) में से किया गया है जो विशिष्ट गुण की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति रखता हो। उदाहरण के लिए, यदि हम किसी समग्र में रोजगार की समस्या का अध्ययन कर रहे हैं तो इस गुण की उपस्थिति बड़े अक्षर 'A' तथा अनुपस्थिति छोटे अक्षर '*a*' द्वारा प्रदर्शित की जाएगी। इस समग्र में रोजगार का प्रतिशत ज्ञात करने के लिए समग्र में से दैव आधार पर न्यादर्श लेकर उसमें रोजगार का प्रतिशत ज्ञात करके प्रमाप विभ्रम की सहायता से उस समग्र की रोजगार अनुपात सीमाएं निर्धारित कर ली जाती हैं। फिर न्यादर्श अनुपात (Sample Ratio) एवं समग्र अनुपात (Universe Ratio) में तुलना की जाती है और यह देखा जाता है कि इन अनुपातों का अन्तर सार्थक है अथवा नहीं।

सार्थकता-स्तर (Level of Significance)**–**सार्थकता-स्तर का अर्थ है कि प्रतिचयन उच्चावचनों के कारण अधिक-से-अधिक कितनी संख्याएं गलत हो सकती हैं। यद्यपि सार्थकता-स्तर कुछ भी हो सकता है, परन्तु व्यवहार में 1% तथा 5% सार्थकता-स्तर का प्रयोग ही अधिक प्रचलित है–इन दोनों स्तरों में से भी 5% का ही सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है। उदाहरणार्थ, 5% सार्थकता-स्तर का अर्थ है कि प्रतिचयन उच्चावचनों के कारण अधिक-से-अधिक 5% संख्याएं गलत हो सकती हैं जबकि 1% सार्थकता-स्तर का अर्थ है कि प्रतिचयन उच्चावचनों के कारण अधिक-से-अधिक 1% संख्याएं गलत हो सकती हैं।

स्व-मूल्यांकन (Salf Assessment)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ती करें (Fill in the blanks):

1. .... के मतानुसार पूर्वकल्पना एक कामचलाऊ निष्कर्ष है।
2. अनुसंधान कार्य में अनुसंधानकर्ता अपने ज्ञान, सूचना तथा अनुभव के आधार पर जो कार्य-कारण संबंध का अनुमान लगाता है वही .... कहलाती है।
3. पूर्वकल्पनाओं की जाँच में .... विधियों का महत्त्वपूर्ण योगदान है।
4. विभिन्न सर्थकता स्तरों के लिए अलग-अलग प्रमाप विभ्रम के .... मान होते है।
5. आकार के आधार पर .... दो प्रकार के होते हैं।
6. .... का आशय ऐसे तथ्यों से है जिनका संख्यात्मक माप संभव नहीं है।
7. व्यवहार में 1% तथा .... सार्थकता स्तर का प्रयोग ही अधिक प्रचलित है।

30.5 सारांश (Summary)

- अनुसंधान द्वारा समस्या से सम्बन्धित किसी नए ज्ञान की खोज के प्रयास किए जाते हैं। इस दिशा में कार्य आरम्भ करने से पूर्व सबसे पहले अपने ज्ञान, सूचना तथा अनुभव के आधार पर एक सम्भावित कार्यकरण सम्बन्ध या पूर्वकल्पना का निर्माण कर लिया जाता है। पूर्वकल्पना या पूर्वकल्पनाओं के आधार पर ही ज्ञान की खोज की जाती है और इनके द्वारा हमें अनुसंधान कार्य में आगे बढ़ने में सहायता प्राप्त होती है। अनुसंधान में पूर्वकल्पनाओं का निर्माण आवश्यक हो जाता है।
- एक अच्छी पूर्वकल्पना के दो मापदण्ड हैं—(*i*) पूर्वकल्पना चर मूल्यों के मध्य सम्बन्ध का वक्तव्य है, और (*ii*) पूर्वकल्पनाओं में इस सम्बन्ध की जाँच की पूरी सम्भावना होनी चाहिए
- पूर्वकल्पना के प्रयोग से आँख मूँदकर खोजने तथा अन्धाधुन्ध ऐसे आंकड़ों को एकत्र करने पर नियन्त्रण होता है, जो कि बाद में अध्ययन के विषय के लिए अप्रासंगिक सिद्ध हो।
- जब समंकों के संकलन, प्रस्तुतीकरण एवं विश्लेषण द्वारा निष्कर्ष प्राप्त कर लिए जाते हैं, उन्हीं निष्कर्षों के आधार पर पूर्वकल्पनाओं की सत्यता की जाँच की जाती है।
- शून्य-परिकल्पना से तात्पर्य यह है कि हम कल्पना करते हैं कि प्राचल एवं प्रतिदर्शज में अन्तर शून्य है और जो भी है वह निदर्शन के अतिरिक्त अन्य विभ्रमों से प्रभावित नहीं है और यह केवल दैवी या आकस्मिक है।
- पूर्वनिर्धारित परिकल्पना की जांच किसी सार्थकता स्तर पर की जा सकती है। सार्थकता स्तर के चयन के बारे में कोई कठोर नियम नहीं है परन्तु अधिकतर .01 और .05 अर्थात् 1% और 5% सार्थकता स्तर पर परिकल्पना की जांच की जाती है।
- सांख्यिकीय अनुसन्धान रीतियों (statistical research methods) के अध्ययन से यह स्पष्ट हो जाता है कि न्यादर्श के आकार का उसकी विश्वसनीयता पर प्रभाव पड़ता है। सामान्यत: यह मान्यता है कि न्यादर्श (sample) का जितना बड़ा आकार होगा वह उतना ही अधिक विश्वसनीय होगा। अत: सार्थकता-परीक्षण हेतु न्यादर्श को आकार की दृष्टि से विभाजित करना आवश्यक है।

30.6 शब्दकोश (Keywors)

- **सार्थकता** : प्रचल-अत्यंत चंचल, बहुत चलने वाला
- **अनुमानिकत** : अनुमान से समझा हुआ

30.7 अभ्यास-प्रश्न (Review Questions)

1. पूर्वकल्पना से आप क्या समझते है? इसका महत्त्व बताइए।
2. पूर्वकल्पनाओं की जाँच में सांख्यिकी विश्लेषण का महत्व समझाइए
3. सर्थकता की जाँच किस प्रकार होती है?
4. सर्थकता परिक्षण किसे कहते है? इसकी क्रियाविधि समझाइए।

उत्तर: स्व-मूल्यांकन (Answer: Self Assessment)

1. लुण्ड वर्ग 2. पूर्वकल्पना 3. सांख्यिकीय 4. क्रान्ति मान 5. न्यायवर्ग
6. गुण-समंको 7. 5%

नोट

30.8 संदर्भ पुस्तकें (Further Readings)

पुस्तकें

1. सांख्यिकी के मूल तत्व; एस. पी. सिंह; एस. चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड राम नगर, नई दिल्ली - 110055
2. परिमाणात्मक पद्धतियाँ; डा. एस. एम. शुक्ल एवं डॉ. शिवपूजन सहाय; परिमाणात्मक पद्धतियाँ साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

LOVELY PROFESSIONAL UNIVERSITY
Jalandhar-Delhi G.T. Road (NH-1)
Phagwara, Punjab (India)-144411
For Enquiry: +91-1824-300360
Fax.: +91-1824-506111
Email: odl@lpu.co.in